

Tartalomjegyzék

1	Bevezetés	4
2	A relativisztikus elektromágnesség	5
2.1	Elektromágnesség a XIX. századi fizikában	5
2.2	A XIX. századi elektrodinamika és az inerciarendszerek problémája . . .	6
2.3	A Coulomb-kölcsönhatás relativisztikus leírásának alternatív módszere .	7
2.4	Mozgó töltések Gauss-tétele	7
2.5	Mozgó töltés elektromos tere - az elektromos tér Lorentz-transzformációja	8
2.6	Mozgó töltések Coulomb-kölcsönhatása	11
2.7	Két áramjárta vezető között fellépő erőhatás	13
2.8	Mozgó ponttöltés elektromos tere	16
2.9	A mozgó töltések Gauss-tételének egzakt bizonyítása	17
3	Mozgó testek gravitációja - a gravitomágnesség jelensége	19
3.1	A gravitáció newtoni leírása	19
3.2	A speciális relativitáselmélet és a gravitáció	20
3.3	A gravitáció relativisztikus leírásának módszere	21
3.4	A gravitációs tér Gauss-tétele mozgó tömegpontok esetén	22
3.5	Mozgó tömeg gravitációs tere	22
3.6	Gravitációs térben mozgó tömegre ható erő	24
3.7	Az általános relativitáselmélet és a gravitomágnesség	26
4	A gravitomágnesség fizikája	28
4.1	A gravitomágnesség Maxwell-egyenletei	28
4.2	Gravitációs potenciálok és a gravitációs Poisson-egyenlet	29
4.3	Tömegáramok gravitomágneses tere	29
4.4	Erőhatás és forgatónyomaték gravitomágneses térben	33
4.5	Gravitomágneses indukció jelensége	35
4.6	Gravitációs hullámok	38
5	A Földdel kapcsolatos gravitomágneses jelenségek	41
5.1	A Föld, mint gravitomágneses dipólus	41
5.2	Forgó, homogén gömb gravitomágneses tere	42
5.3	A forgó Föld gravitomágneses dipóltere	49
5.4	Gravitomágnesség a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben . . .	50
6	Pörgettyűk relativisztikus mozgása és a Gravity Probe B kísérlet	56
6.1	Szabad pörgettyűk tulajdonságai	56
6.2	A gravitomágneses tér egy Föld körül keringő műhold fedélzetén	58

	3
6.3 Pörgettyűk gravitomágneses precessziója Föld körül keringő műhold fedélzetén	61
6.4 A Gravity Probe B kísérlet	62
7 Pörgettyűprecesszió az elektromágneses jelenségekben	64
7.1 Az elektron Thomas-precessziója	64
7.2 A geodetikus precesszió és a frame dragging elektromágneses megfelelője	65
8 Függelék	67
8.1 A gravitomágnesség levezetése az általános relativitáselméletből	67
8.2 A Thomas-precesszió, mint a Lorentz-transzformáció következménye . .	69
Köszönetnyilvánítás	74
Felhasznált irodalom	74

1. Bevezetés

Az elmúlt két évtizedben, rendszeresen tartottam az "Elektrodinamika és relativitáselmélet" előadást fizika tanár szakos hallgatók részére, az ELTE Tanárképző Főiskolai Karán. A szemeszter végén mindössze 4 előadás maradt a speciális relativitáselmélet elveinek és alapvető összefüggéseinek ismertetésére. Mivel az alapfogalmak egyszerű átadása nem okoz igazi élményt a hallgatóság részére, azon gondolkodtam, hogy nyújthatnék ízelítőt a relativitáselmélet szépségéből ilyen rövid idő alatt. Abban bízva, hogy szellemi útravalót adhatok a hallgatóságnak, elhatároztam, hogy egyszerű eszközökkel, a relativisztikus elektrodinamika négyes tenzorainak alkalmazása nélkül, megmutatom, hogyan ötvözi a speciális relativitáselmélet az elektromosság és mágnesség klasszikus fizikából ismert jelenségét egyetlen jelenséggé, a relativisztikus Coulomb-kölcsönhatássá. A próbálkozás hatásos volt. A hallgatóság nagy része már az előadáson megértette, hogy a speciális relativitáselmélet rávilágít az elektromosság és mágnesség mélyebb kapcsolatára és a természet fontos összefüggésének megértését teszi lehetővé.

Ez a sikerélmény indított el azon az úton, hogy tovább próbálkozzam relativisztikus jelenségek, és a relativitáselmélet egyes elemeinek hallgatók részére történő egyszerű átadásán, hatékonyabb tanításán. A doktori értekezésben összefoglalom és bemutatom több éves módszertani kutatás és eredményeit. Megvilágítom a mozgó elektromos töltések Coulomb-kölcsönhatásának és az azt relativisztikusan kiegészítő mágneses kölcsönhatás speciális relativitáselméletben gyökerező egységét, a XIX. századi fizikában megismert mágneses kölcsönhatás relativisztikus eredetét. Az elektromágnességen túllépve áttekintem a vele sok hasonlóságot mutató, a gravitáció lineáris közelítésében helyet foglaló gravitomágnesség jelenségét. Összefoglalom, hogyan látja a speciális, illetve általános relativitáselmélet a gravitomágnesség jelenségét és ismertetem a mozgó tömegek kölcsönhatásakor fellépő gravitomágneses hatás mennyiségi leírását. Bemutatom, hogyan használható a gravitomágnesség a relativisztikus jelenségek megismerésére, levezetésére és értelmezésre fizika alapképzésben. Élek azzal a kettős előnnyel járó módszertani lehetőséggel, hogy az új ismeretek dedukciós folyamatában építsek a hallgatók korábban megszerzett elektrodinamikai ismereteire, másrészt elkerülöm - a hallgatók számára kevésbé megszokott - a relativitáselmélet négyes formalizmusának használatát. Az értekezés végére eljutok az általános relativitáselmélet 2007-ben véget ért, nagy tudományos jelentőségű kísérletének, a Gravity Probe B kísérletnek a tárgyát képező geodetikus precesszió és a Lense-Thirring effektus gravitomágnesség segítségével történő levezetéséhez. Ezzel a módszerrel érthetővé teszem a hallgatók számára napjaink fontos tudományos eredményt szolgáltatató kísérletét. Köszönettel tartozom az Elméleti Fizikai Tanszéknek, amiért a 2010/11 tanévben lehetővé tette, hogy az értekezésben ismertetett témakörben és az abban leírt módszertan szerint speciális kollégiumot tartsak végzős fizika BSC és fizika MSC hallgatók részére és ezáltal a gyakorlatba is átültethetem az értekezésben bemutatott,

de korábban, a gyakorlatban még nem alkalmazott módszereket.

2. A relativisztikus elektromágnesség

2.1. Elektromágnesség a XIX. századi fizikában

Töltött testek elektromos kölcsönhatása a relativitáselméletet megelőző fizikában jól ismert jelenség. Két pontszerű, töltött test által egymásra kifejtett elektromos erőt mennyiségileg a Coulomb-törvény írja le. Szokásos jelöléssel, a q_1 töltésű, pontszerű test által a q_2 ponttöltésre kifejtett Coulomb-erő

$$\mathbf{F}_{C12} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2.1)$$

ahol \mathbf{r} a q_1 pontból a q_2 -be mutató helyvektor, k a Coulomb-együttható. Ebben a szemléletben, úgy a töltések közötti erőhatás, mint az általuk, a tér egy \mathbf{r} helyvektorral jelzett pontjában, létrehozott elektromos térerősség,

$$\mathbf{E}_1 = k \frac{q_1}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2.2)$$

független a töltések sebességétől. Mindkettő csak a töltések nagyságától és azok egymástól mért távolságától függ.

A XIX. századi fizika Oersted kísérlete (1820) nyomán ismerte fel, hogy a mágnesség jelenségét mozgó elektromos töltések okozzák. A mozgó töltések (vagy elektromos áramok) maguk körül mágneses teret hoznak létre, a mágneses térben mozgó töltésekre pedig mágneses erő, az ún. Lorentz-erő hat. A relativitáselmélet megjelenését megelőző fizika a mágneses kölcsönhatást az elektromos kölcsönhatástól független, önálló jelenségként kezeli. Vizsgáljuk meg két mozgó ponttöltés mágneses kölcsönhatását ebben a leírásban. A \mathbf{v}_1 sebességgel mozgó q_1 töltésű tömegpont a tőle \mathbf{r} vektorral jelzett pontban \mathbf{B}_1 mágneses indukciós teret gerjeszt. A Biot-Savart törvény szerint:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.3)$$

Felhasználva a (2.2) egyenletet, és hogy $\mu_0/(4\pi) = k/c^2$ a (2.3) egyenletből a mágneses térerősség kifejezhető a mozgó q_1 töltés elektromos térerősségével és sebességével:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{E}_1}{c^2}. \quad (2.4)$$

Mozogjon az \mathbf{r} pontban lévő q_2 ponttöltés ebben a pillanatban \mathbf{v}_2 sebességgel. A mozgó q_2 ponttöltésre ekkor

$$\mathbf{F}_{L12} = q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1 \quad (2.5)$$

Lorentz-erő hat. A mozgó q_1 töltés (2.4) egyenletben meghatározott \mathbf{B}_1 mágneses terét a (2.5) egyenletbe helyettesítve, a q_2 töltésre ható Lorentz-erőt

$$\mathbf{F}_{L12} = \frac{q_2}{c^2} \mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{E}_1) = \frac{\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{F}_{C12})}{c^2} \quad (2.6)$$

alakban kapjuk. A XIX. századi elektrodinamika azonban nem hangsúlyozza azt, ami a (2.6) egyenletből világosan látszik, hogy két mozgó ponttöltés kölcsönhatásakor a fellépő Lorentz-erő, kifejezhető Coulomb erővel és a töltések sebességével.

Ha a kölcsönható ponttöltések sebessége jóval kisebb a fénysebességnél, akkor a Lorentz-erő a Coulomb-erő mellett elhanyagolhatóan kicsi. Két, relativisztikus sebességgel mozgó elektron elektromágneses kölcsönhatása esetében a Lorentz-erő jelentős mértékű lehet. A Lorentz-erő (2.6) egyenlet szerinti felírása erősen sugallja, hogy az elektromos és mágneses kölcsönhatás nem független egymástól, de a XIX. századi fizika nem ad oksági összefüggést a két jelenségre.

2.2. A XIX. századi elektrodinamika és az inerciarendszerek problémája

Az előző szakasz összefüggéseiben bemutatott Coulomb- és Lorentz-erővel volt egy problémája a fizikának. Ugyanis az, hogy két töltés között hat-e Lorentz-erő, vagy sem, az a fent bemutatott leírásban a vonatkoztatási rendszer választásától függ. Így például két egymáshoz képest egyenletes sebességgel mozgó inerciarendszer egyikében csak Coulomb-erő, a másikban ugyanakkora Coulomb-erő és Lorentz-erő is tapasztalható. Ebben az esetben a két rendszer megfigyelői másképp érzékelik a töltések kölcsönhatását. Ezzel pedig sérül, és a mechanikára korlátozódik az inerciarendszerekre vonatkozó newtoni elv érvényessége, miszerint két test kölcsönhatása, különböző inerciarendszerekből vizsgálva azonos erővel írható le.

Az 1905-ben megjelent speciális relativitáselmélet kitűzött célja éppen az említett problémának a megoldása, az inerciarendszerek egyenértékűségének elektromágneses jelenségekre történő kiterjesztése volt. A speciális relativitáselmélet módosította a mozgó töltések elektromos és mágneses terének alakját. Ezzel megoldotta az inerciarendszerek problémáját, de cserébe jelentősen megváltoztatta a fizika térről és időről alkotott fogalmát. A töltések elektromos és mágneses kölcsönhatását a Lorentz-transzformáció egymástól elválaszthatatlan, elektromágneses kölcsönhatássá kapcsolta össze.

A nyugvó és mozgó elektromos töltések elektromos és mágneses tere közötti relativisztikus összefüggést az elektromágneses tér Lorentz-transzformációjának nevezzük. Tekintsünk két, egymáshoz képest egyenletes sebességgel mozgó inerciarendszert, amelyekhez egy-egy K és K' derékszögű koordináta rendszert rögzítünk. A K és K' koordinátarendszerek tengelyei párhuzamosak, az x és x' tengelyek pedig egybe esnek. A két rendszer az x tengely mentén mozog egymáshoz képest v sebességgel. Ekkor a K és K' rendszerekben mérhető elektromos és mágneses térerősségek között az

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - cB_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E'_z = \frac{E_z + cB_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + E_z/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad B'_z = \frac{B_z - E_y/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.7)$$

jól ismert transzformációs egyenlet érvényes. A relativitáselmélet tankönyvek, például Nagy Károly [1] az elektromágneses tér Lorentz-transzformációját a négyes formalizmusra építve, az antiszimmetrikus, négyes térerősségtenzor transzformációjából vezeti le. Módszertani jelentősége miatt, az alábbiakban tekintsünk egy alternatívát az elektromos tér Lorentz-transzformációjának levezetésére.

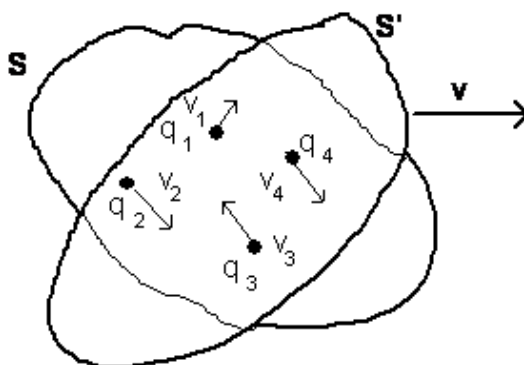
2.3. A Coulomb-kölcsönhatás relativisztikus leírásának alternatív módszere

Kétségtelen, hogy a Lorentz-transzformáció a négyes távolság invarianciáján alapszik és a speciális relativitáselmélet a Lorentz-invariáns négyes vektorok és tenzorok apparátusával egységesen tárgyalható. A speciális relativitáselmélet és az elektromágnesség kapcsolatát más megvilágításban mutatta be Page [2], aki 1912-ben, hét évvel a speciális relativitáselmélet megjelenése után, megállapította, hogy az elektrodinamika alapvető egyenletei levezethetők az elektrosztatika törvényei és a speciális relativitáselmélet alapján.

Mozgó töltések mágneses kölcsönhatásának az elektrosztatika és a speciális relativitáselmélet érvényességéből történő levezetését magam is elvégeztem és publikáltam [3]. A Coulomb-kölcsönhatás relativisztikus leírását az abban bemutatott, alternatív módszertani megközelítésben, a négyes mennyiségek mellőzésével kívánom az alábbiakba ismertetni. Az elektrosztatika és a speciális relativitáselmélet hármas mennyiségekre vonatkozó összefüggései, mint Lorentz-kontrakció, a hármas erő Lorentz-transzformációja segítségével jutunk el az elektromos tér Lorentz-transzformációjához. A 2.6 fejezetben ezzel a módszerrel ismerjük fel, hogy a töltések között fellépő Coulomb-erő Lorentz-invarianciáját a mágneses kölcsönhatás biztosítja.

Az alternatív tárgyalás az alábbi posztulátumokra épül:

1. Elfogadjuk a speciális relativitáselmélet érvényét, amely kimondja, az inercia rendszerek egyenértékűségét; az egymáshoz képest egyenletes sebességgel mozgó (inercia) vonatkoztatási rendszerekben a fizikai jelenségek azonos törvények szerint játszódnak le.
2. Érvényes a két pontszerű töltés kölcsönhatását leíró Coulomb-törvény és az elektrosztatikából ismert superpozíció elve.
3. A mágnesség jelenségét nem ismerjük (ennek szükségességét kívánjuk igazolni), mozgó töltésekhez nem rendelünk mágneses teret.
4. Az elektromos töltés Lorentz-invariáns.
5. Érvényesek a relativisztikus dinamika törvényei, és a fizikai mennyiségek Lorentz-transzformációja.



1. **ábra** Zárt felületen belül mozgó töltések Gauss-tétele. A két relatíve mozgó, zárt felületre felírt Gauss-integrál ugyanazt az eredményt adja.

2.4. Mozgó töltések Gauss-tétele

Purcell [4] szerint a Gauss-tétel zárt felületen belül egyenletesen mozgó elektromos töltésekre is igaz. Ennek oka a töltés Lorentz-invarianciája, vagyis a mozgó elektromos töltés mérőszáma megegyezik annak nyugalmi mérőszámával.

Egy S zárt felületre felírt Gauss-tétel,

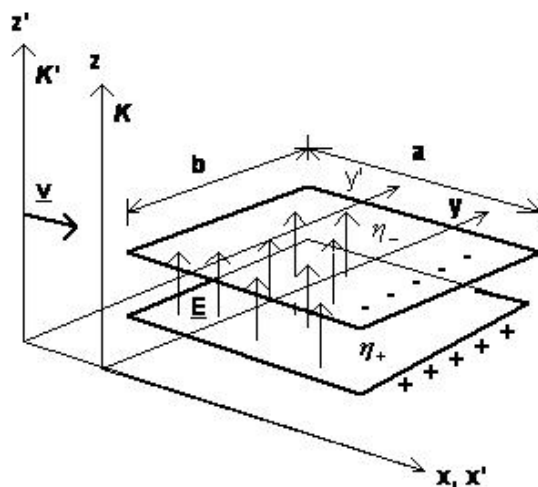
$$\oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = 4\pi k \sum_i q_i \quad (2.8)$$

a zárt felületen belül egyenletes, \mathbf{v}_i sebességgel mozgó, q_i töltésekre is igaz, mivel a töltésekből kiinduló erővonalak száma nem függ a töltések sebességétől, az egyenlet jobb oldalán nem jelenik meg a töltések sebessége. A Gauss-tétel mozgó töltésekre vonatkozó érvényessége azt jelenti, hogy egy vonatkoztatási rendszerben akár nyugvó, akár egyenletesen mozgó, ugyanazokat a töltéseket magában foglaló, zárt felületre felírt, felületi integrál ugyanazt az eredményt adja.

Legyenek S , illetve S' a K , illetve K' inerciarendszerben nyugvó zárt felületek, K' pedig állandó v sebességgel mozog K -hez képest (lásd 1. ábra), akkor a rájuk felírt Gauss-tétel azonos eredményt ad.

A K és K' vonatkoztatási rendszerben felvett S és S' felületek alakja és felszíne függ attól, hogy a K vagy K' rendszerből nézzük őket. A két felületen belül lévő q_i töltések is eltérő sebességgel mozognak a K és K' rendszerben. Az általuk létrehozott \mathbf{E} és \mathbf{E}' elektromos térerősségek is eltérőek, de ez a két integrál értékét nem befolyásolja;

$$\oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = \oint_{S'} \mathbf{E}' \, d\mathbf{A}' = 4\pi k \sum_i q_i \quad (2.9)$$



2. ábra Töltött síkkondenzátor elektromos tere a K és K' vonatkoztatási rendszerekben.

A bemutatott Lorentz-invariancia miatt a Gauss-tételt tetszőleges inerciarendszerben használhatjuk az elektromos tér meghatározására.

2.5. Mozgó töltés elektromos tere - az elektromos tér Lorentz-transzformációja

Vizsgáljuk meg egy töltött síkkondenzátor homogén elektromos terét két különböző inerciarendszerből nézve. A kondenzátor a K vonatkoztatási rendszerben nyugalomban van. A feltöltött kondenzátor téglalap alakú, a és b élhosszúságú fegyverzetein ellentétes előjelű, azonos, η felületi töltéssűrűséggel helyezkedik el töltés. A kondenzátor töltése $q = ab\eta$. A kondenzátor fegyverzetek oldalai az x , illetve az y -tengellyel legyenek párhuzamosak, így a z -tengely merőleges a fegyverzetek síkjára (lásd 2. ábra)! Vegyünk fel továbbá egy K' vonatkoztatási rendszert, amelynek tengelyei párhuzamosak a K rendszer tengelyeivel és a K', K -hoz képest v sebességgel mozog az x -tengely mentén, pozitív irányban.

Az elektrosztatikából tudjuk, hogy a kondenzátorlemezek között kialakuló \mathbf{E} elektromos tér a fegyverzetekre merőleges és homogén, a kondenzátoron kívül pedig az elektromos térerősség zérus. Az elektromos térerősséget a Gauss-tételből határozzuk meg. Zárt felületnek vegyünk fel egy, a K vonatkoztatási rendszerben, a kondenzátorral együtt nyugalomban lévő, S egyenes hasábot, melynek alaplapjai párhuzamosak a kondenzátor fegyverzeteivel és a hasáb tartalmazza a pozitív töltésű fegyverzetet. A Gauss-integrál ebben az esetben csak a fegyverzet felületén ad járulékot, $Eab = 4\pi kq$. Innen kifejezzük a térerősséget, jelölve, hogy annak iránya merőleges a K' rendszer sebességének irányára:

$$E_{\perp} = 4\pi k\eta. \quad (2.10)$$

Az elektromos térre merőleges irányban mozgó, K' rendszer megfigyelője számára a kondenzátor a rajta lévő töltésekkel együtt mozog. A (2.9) egyenlet alapján mozgó töltésekre is alkalmazhatjuk a Gauss-tételt. Mivel K' rendszerben a kondenzátor az x' -tengely mentén $-v$ sebességgel mozog, az a, b oldalú téglalap x' -tengellyel párhuzamos, a oldala kontrakciót szenved, és K' rendszerben mért hossza

$$a' = a\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (2.11)$$

értéket vesz fel. Vezessük be és a továbbiakban alkalmazzuk a $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ jelölést. Mivel a kondenzátorlemezekon lévő töltés mennyisége invariáns, a K' rendszerben az a' oldal rövidülése miatt lecsökkent felületen megnő a töltéssűrűség; $\eta' = \gamma\eta$. Írjuk fel a K' rendszerben mozgó kondenzátorra a Gauss-tételt, ezzel megkapjuk a K' rendszerben a mozgás irányára merőleges E'_\perp térerősség komponens

$$E'_\perp = 4\pi k\eta' \quad (2.12)$$

értékét. A (2.10) és (2.12) egyenletekből következik, hogy az egymáshoz képest mozgó K és K' vonatkoztatási rendszerekben a mozgás irányára merőleges elektromos térerősségek az

$$E'_\perp = \gamma E_\perp \quad (2.13)$$

összefüggésben állnak egymással. Mivel $\gamma > 1$, a K' rendszerben erősebb elektromos teret tapasztalunk, mint a K -ban, a teret létrehozó töltések nyugalmi rendszerében.

Ha a K' rendszer a z -tengely mentén mozog K rendszerhez képest, akkor az elektromos tér és a sebességvektor párhuzamosak. Ebben az esetben a kondenzátor fegyverzetek a és b oldalai merőlegesek a sebesség irányára. A sebességre merőleges oldalak nem szenvednek Lorentz-kontrakciót. Ennek következtében a K , és K' rendszerekben mind a töltéssűrűség, mind az elektromos térerősség megegyezik, Vagyis;

$$E'_\parallel = E_\parallel. \quad (2.14)$$

A (2.13) és (2.14) egyenletekben levezetett összefüggés nem más, mint az elektromos tér Lorentz-transzformációja. (A K' rendszerben a mozgó töltés keltette mágneses teret most figyelmen kívül hagytuk, hiszen annak létét szeretnénk a későbbiekben bizonyítani.)

Általában elmondható, ha K egy q elektromos töltés, vagy töltésrendszer sajátrendszere, és a q töltés terét a töltés nyugalmi rendszerében, K -ban E_0 -al jelöljük, akkor egy, a K -hoz képest v sebességgel mozgó K' rendszerből nézve a q töltés E' elektromos terének a v sebességre merőleges, illetve azzal párhuzamos komponense az alábbi módon fejezhető ki E_0 -al:

$$E'_\perp = \gamma E_{0\perp}, \quad E'_\parallel = E_{0\parallel}. \quad (2.15)$$

Az elektromos tér Lorentz-transzformációját homogén térre vezettük le. A (2.15) egyenletben bemutatott transzformációs képlet tetszőleges térszerkezet esetén érvényes.

A transzformáció során azonban ügyelni kell arra, hogy az E' térerősséget a vesszős koordináták függvényeként adjuk meg. A síkkondenzátor homogén elektromos tere nem függ a helykoordinátáktól, ezért nem volt szükség a koordináták transzformációjára. Egy mozgó ponttöltés terének transzformációja során el kell végezni a koordináta-transzformációt is.

A speciális relativitáselméletben nem csak az elektromos térerősség, hanem az erő sem Lorentz-invariáns mennyiség. Mivel a későbbiekben szükség lesz rá, felírjuk, hogyan transzformálódik a relativisztikus dinamikában az erő. Ha a K rendszer egy test saját rendszere, és K -ban F_0 erő hat a testre, akkor egy K -hoz képest v sebességgel mozgó K' rendszerben a testre ható F' erőnek a v sebességre merőleges, illetve azzal párhuzamos komponense az alábbi módon fejezhető ki F_0 -lal:

$$F'_{\perp} = F_{0\perp}/\gamma, \quad F'_{\parallel} = F_{0\parallel}. \quad (2.16)$$

2.6. Mozgó töltések Coulomb-kölcsönhatása

Az alábbiakban mozgó töltések Coulomb-kölcsönhatásán ismertetem, hogy a Gauss-tétel és a speciális relativitáselmélet érvényessége alapján levezethető a mágneses kölcsönhatás léte. A 2.4 fejezetben megvizsgáltuk a síkkondenzátor elektromos terét nyugalmi, illetve mozgó vonatkoztatási rendszerben. Helyezzünk az előbbi, η felületi töltéssűrűséggel töltött síkkondenzátor belsejébe egy q ponttöltést. Írjuk le a töltött síkkondenzátor és a belsejében elhelyezkedő q ponttöltés Coulomb-kölcsönhatását különböző inerciarendszerekből. Legyen K a ponttöltés sajátrendszere, a kondenzátor pedig v_1 sebességgel mozog K -ban az x tengely pozitív irányába. A K' vonatkoztatási rendszer v sebességgel mozog K -hoz képest, ugyancsak az x tengely pozitív irányába. (Lásd 3. ábra.) A kondenzátor, illetve a q ponttöltés sebességét K' -ben v'_1 és v'_2 jelöli. Határozzuk meg a K és a K' rendszerben a kondenzátor terében lévő q töltésre ható Coulomb-erőt!

Tekintsük először a K rendszerben, q töltés nyugalmi rendszerében ható, a mozgás irányára merőleges F_{\perp} erőt. A nyugvó q töltésre a mozgó kondenzátor elektromos tere

$$F_{\perp} = qE_{\perp} \quad (2.17)$$

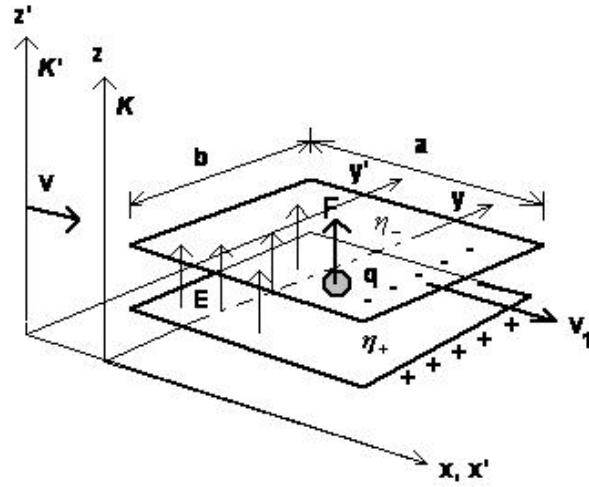
Coulomb-erővel hat. Az E_{\perp} teret a v_1 sebességgel mozgó kondenzátor töltései hozzák létre, így azt ki tudjuk fejezni, a (2.15) egyenletből $E_{\perp} = \gamma_1 E_{0\perp}$ alakban, ahol $E_{0\perp}$ a kondenzátor térerőssége nyugalmi rendszerben.

A K' rendszerben a q töltés mozog, és azt nem tudjuk, hogy az elektromos térben mozgó ponttöltésre mekkora erő hat. Azt gondoljuk, hogy az F'_{\perp} erőnek azért köze van a q töltés és a K' rendszerben tapasztalt E' térerősség szorzatához, ezért azt

$$F'_{\perp} = qE'_{\perp} + F'_{RC} \quad (2.18)$$

alakban keressük.

Az F'_{RC} erő egy esetleges, mozgó töltések között ható, "relativisztikus" Coulomb-erőt szimbolizál. Az F'_{\perp} erőt nem ismerjük, de azt tudjuk, hogy a speciális



3. ábra Kondenzátor és ponttöltés kölcsönhatása a K és a mozgó K' vonatkoztatási rendszerben.

relativitáselmélet szerint, F'_{\perp} -t a K rendszerbe transzformálva, annak meg kell egyeznie az ott tapasztalt F_{\perp} erővel. Mivel az F'_{\perp} erő merőleges a sebességre, a (2.16) egyenlet alkalmazásával transzformáljuk az F'_{\perp} erőt a q nyugalmi rendszerébe, K -ba;

$$F'_{\perp} = F_{\perp}/\gamma. \quad (2.19)$$

Helyettesítsük az F_{\perp} (2.17), illetve F'_{\perp} (2.18) egyenletben felírt alakját a (2.19) egyenletbe, és az F_{\perp} erőt fejezzük ki a töltés és az E_{\perp} térerősség szorzataként,

$$\gamma(qE'_{\perp} + F'_{RC}) = qE_{\perp}. \quad (2.20)$$

A (2.20) egyenletből az F'_{RC} meghatározható. Ha a (2.20) egyenlet megoldásából az F'_{RC} erő értékére zérust kapunk, akkor a Coulomb-kölcsönhatás Lorentz-invariáns, és a Coulomb-erő minden rendszerben a rendszerben tapasztalt elektromos térerősség és a töltés szorzata, függetlenül a töltések sebességétől. Ellenkező esetben, a Coulomb kölcsönhatás csak az F'_{RC} "relativisztikus" erővel kiegészítve lehet invariáns jelenség.

A (2.20) egyenlet megoldásához használjuk ki, hogy az E_{\perp} és E'_{\perp} térerősségek kifejezhetők a kondenzátor nyugalmi töltéssűrűségével;

$$E_{\perp} = 4\pi k\gamma_1\eta, \quad E'_{\perp} = 4\pi k\gamma'_1\eta, \quad (2.21)$$

ahol minden γ a benne szereplő sebesség indexét viseli. Fejezzük ki a (2.20) egyenletből az F'_{RC} erőt és használjuk fel, hogy (2.21) alapján az $E_{\perp} = E'_{\perp}\gamma_1/\gamma'_1$, amiből

$$F'_{RC} = qE'_{\perp} \left(\frac{\gamma'_1}{\gamma_1\gamma} - 1 \right). \quad (2.22)$$

Mivel általában, $\gamma_1 \neq \gamma'_1$, ezért $F'_{RC} \neq 0$. A kapott eredmény azt jelzi, hogy a Coulomb-kölcsönhatás nem Lorentz-invariáns. Az F'_{RC} erő jobb megértése érdekében a

(2.22) egyenletben térjünk át a gammákról a sebességek szerinti felírásra. Ha az indexes gammákat felírjuk a bennük szereplő sebességekkel kifejezve, majd a sebesség Lorentz-transzformációjának $v_1 = (v'_1 + v)/(1 + v'_1 v/c^2)$ segítségével kifejezzük v_1 -et v'_1 -vel és v -vel, akkor egy kis algebrai gyakorlat után a

$$\left(\frac{\gamma'_1}{\gamma_1 \gamma} - 1 \right) = \frac{v'_1 v}{c^2} \quad (2.23)$$

eredményt kapjuk. A 3. ábra szerinti elrendezésben $v = -v'_2$. Helyettesítsük a v helyére $-v'_2$ -t! Így a "relativisztikus" Coulomb-erőt

$$F'_{RC} = -qE'_\perp \frac{v'_1 v'_2}{c^2} \quad (2.24)$$

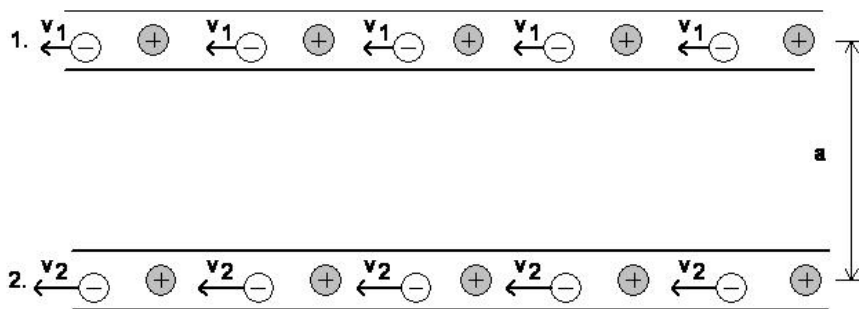
alakban kapjuk, a K' rendszerben mért elektromos térerősség és a töltések K' rendszerben mért sebességével kifejezve. Látható, hogy az F'_{RC} erő bármelyik töltés sajátrendszerében eltűnik, más rendszerekben pedig v^2/c^2 nagyságrendű, relativisztikusan kis mennyiség. Ha az F'_{RC} -re kapott (2.24) eredményt a (2.18) egyenletbe helyettesítjük, megkapjuk a K' rendszerben fellépő F'_\perp Coulomb-erőnek a rendszerhez tartozó elektromos térerősséggel és sebességekkel kifejezett alakját;

$$F'_\perp = qE'_\perp \left(1 - \frac{v'_1 v'_2}{c^2} \right). \quad (2.25)$$

Vegyük észre, hogy a (2.24) egyenletben kapott eredmény nem más, mint a (2.6) egyenletben, a v_1 és v_2 sebességgel mozgó q_1 és q_2 töltések között ható Lorentz-erő, abban a speciális esetben, amikor $v_1 \parallel v_2$ és $E_1 \perp v_1$. A mozgó töltések Coulomb-kölcsönhatásának relativisztikus vizsgálata alapján kimondható, hogy a Coulomb-kölcsönhatás önmagában nem Lorentz-invariáns. Mivel a speciális relativitáselméletből következik, hogy két töltés kölcsönhatása bármely két inerciarendszerben azonosan megy végbe, a speciális relativitáselmélet szerint kötelező egy, a Coulomb-erőt mozgó töltések kölcsönhatása esetén kiegészítő "relativisztikus" Coulomb-erő megjelenése. Ez az erő valóban létezik, a fizika mozgó töltések között fellépő Lorentz-erőnek nevezi.

Az F'_{RC} erő tehát a jól ismert valóság, a mozgó töltések között fellépő, mágneses kölcsönhatás, vagy Lorentz-erő. A speciális relativitáselmélet szintézist teremt az elektromos és mágneses kölcsönhatás között. Eszerint a mágneses kölcsönhatás a Coulomb-kölcsönhatás elválaszthatatlan része, a mozgó töltések között fellépő, relativisztikus erő, amely biztosítja az elektromos töltések együttes (Coulomb-Lorentz) kölcsönhatásának vonatkoztatási rendszertől való függetlenségét!

Másképp fogalmazva, a Coulomb-törvényből és a speciális relativitáselméletből következik a mozgó töltések mágneses kölcsönhatásának léte. Az itt bemutatott töltéskonfigurációra elvégzett levezetéssel azonos eredményre vezet Landau-Lifsic [5], két mozgó ponttöltés mágneses tagokat nem tartalmazó, relativisztikus Coulomb-kölcsönhatására vonatkozó Lagrange-függvénye alapján elvégzett számítás.



4. ábra Két párhuzamos, egyenes, áramjárta vezető relativisztikus Coulomb-kölcsönhatása.

2.7. Két áramjárta vezető között fellépő erőhatás

Az előző fejezetben visszavezettük két mozgó töltés Lorentz-kölcsönhatását a relativisztikus Coulomb-kölcsönhatásra. Most egy gyakorlati példán érzékeltetem, hogy a relativisztikus Coulomb-kölcsönhatás tartalmazza a mágneses kölcsönhatást. Tekintsük ehhez két párhuzamos, áramjárta vezető között fellépő, az elektrodinamikából jól ismert Lorentz-erőt. Első hallásra meglepő lehet, hogy ezt a jelenséget a mágnesség nélkül is meg lehet magyarázni, mivel ezt a jelenséget a két vezető mágneses kölcsönhatásaként ismerjük.

Folyjék a két párhuzamos, egymástól a távolságra lévő vezetőkben I_1 , illetve I_2 erősségű áram a 4. ábra szerinti elrendezésben. Legyen a két vezető - az egyszerűség kedvéért - azonos anyagú és azonos keresztmetszetű és legyenek a vezetők a laboratóriumi rendszerben nyugalomban. A vezetők térfogategységében mind az egyszeres pozitív töltésű rácspontokból, mind a szabadelektronokból n darab található. A klasszikus, szabadelektron vezetési modellben a pozitív töltésű rácspontok között mozgó, negatív töltésű szabadelektronok vezetik az áramot.

Vezessük be a $\lambda_0 = nAe_+$ lineáris töltéssűrűséget a vezető mentén, ahol A a vezető keresztmetszete e_+ a pozitív elemi töltés. A λ_0 képviseli a rácspontokban lévő pozitív töltések lineáris sűrűségét, $-\lambda_0$ pedig az elektronok lineáris töltéssűrűsége. A két vezető áramok nélkül elektromosan semleges, a bennük lévő pozitív és negatív töltések összege zérus. Ha a vezetőkben áram folyik, az áramerősség felírható az elektronok lineáris töltéssűrűségének és a v_d driftsebességének szorzataként; $I = -\lambda_0 v_d$.

Írjuk fel a két áramjárta vezetőkben lévő töltések Coulomb-kölcsönhatását a laboratóriumi rendszerben, a speciális relativitáselmélet szabályai szerint. Vegyük sorra milyen Coulomb-erő hat a 2. vezető töltéseire. Nézzük először a rácspontokban lévő pozitív töltésekre ható erőt. Ezekre az 1. vezető pozitív és negatív töltései

egyaránt erőt fejtenek ki. Az 1. vezetőben a pozitív töltések nyugalomban vannak, de az elektronok v_{d1} sebességgel mozognak. Az elektronok mozgása miatt az általuk létrehozott, a sebességre merőleges elektromos térerősség γ_1 -szeresére növekszik. Ezt úgy is értelmezhetjük, hogy az elektronok között lévő átlagos távolság vezető hosszára eső vetülete a Lorentz-kontrakció miatt lerövidül és ezáltal az elektronok sűrűsége a rácspontok sűrűségének γ_1 -szeresére növekszik.

A 2. vezető rácspontjában ülő pozitív töltések azt érzékelik, hogy az 1. vezetőnek λ_R lineáris sűrűségű, negatív töltése van, ami az 1. vezető rácsponti és elektron töltéseinek előjeles összege;

$$\lambda_R = -(\gamma_1 - 1)\lambda_0. \quad (2.26)$$

Az elektronok mozgása miatt töltötté vált 1. vezető elektromos tere a vezetőtől a távolságra lévő 2. vezető rácspontjainál $E_R = 2k\lambda_R/a$. Az előbbi töltéssűrűséget behelyettesítve, az 1. vezető rácspontjaiban érzékelt elektromos tér erőssége

$$E_R = -2k(\gamma_1 - 1)\lambda_0/a. \quad (2.27)$$

Ebben az 1. vezető elektronjai által keltett elektromos térben a 2. vezető l hosszúságú darabjának a rácspontokban lévő, pozitív töltéseire

$$F_R = \lambda_0 E_R l = -2k(\gamma_1 - 1)\lambda_0^2 l/a \quad (2.28)$$

vonzóerő hat.

A 2. vezető elektronjai azt érzékelik, hogy az 1. vezető elektronjai $v_{d1} - v_{d2}$, míg a rácspontokban lévő pozitív töltések pedig, $-v_{d2}$ sebességgel mozognak. Ezért számukra mind az 1. vezető elektronjai, mind a rácspontjai közötti távolság lerövidül. Az elektronok töltéssűrűsége γ_{12} , a rácspontok töltéssűrűsége γ_2 -szeresére nő. Az 1. vezetőn így létrejött pozitív és negatív többlettöltések lineáris sűrűsége $\lambda_e = (\gamma_2 - \gamma_{12})\lambda_0$, amely töltés a 2. vezető l hosszúságú szakaszán lévő mozgó elektronjaira

$$F_e = -2k(\gamma_2 - \gamma_{12})\lambda_0^2 l/a \quad (2.29)$$

vonzóerőt fejt ki. Mivel a két áramjárta vezető között ható Coulomb-erők merőlegesek a sebességre, az 2. vezető elektronjaira ható F_e erőt laboratóriumi rendszerbe kell transzformálni. A laboratóriumi rendszerbe transzformált erő

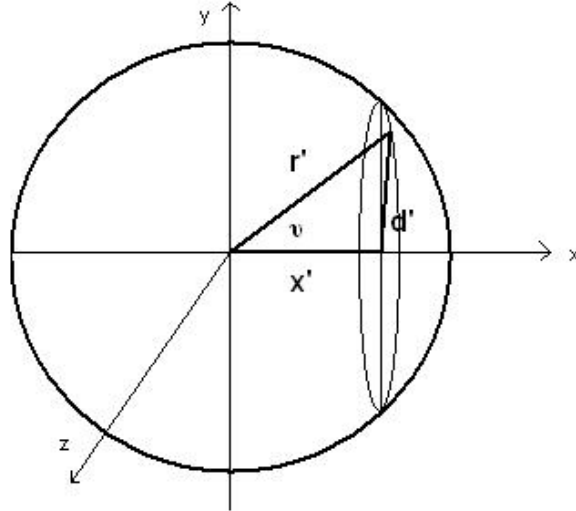
$$F_{eL} = F_e/\gamma_2 = -2k(1 - \gamma_{12}/\gamma_2)\lambda_0^2 l/a. \quad (2.30)$$

A 2. vezetőre ható teljes, relativisztikus, a laboratóriumi rendszerbe transzformált Coulomb-erő a rácspontokra és az elektronokra ható F_R és F_{eL} erők összege

$$F_{RC} = -2k(\gamma_1 - \gamma_{12}/\gamma_2)\lambda_0^2 l/a. \quad (2.31)$$

A (2.31) egyenletben a zárójelben lévő tagok felírhatóak a v_{d1} és v_{d2} driftsebességek segítségével,

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{d1}^2/c^2}}, \quad \gamma_{12}/\gamma_2 = \frac{1 - v_1 v_2/c^2}{\sqrt{(1 - v_{d1} v_{d2}/c^2 - (v_{d1} - v_{d2})^2/c^2)}}. \quad (2.32)$$



5. ábra Mozgó ponttöltés elektromos terének Lorentz-transzformációja.

Mivel v_{d1} és $v_{d2} \ll c^2$, ezért megtehetjük, hogy (2.32) kifejezést hatványsorba fejtjük $1/c^2$ szerint, lineáris rendig. Ekkor $\gamma_1 - \gamma_{12}/\gamma_2 = v_{d1}v_{d2}/c^2$ és ezzel a közelítéssel a relativisztikus Coulomb-erő

$$F_{RC} = \frac{-2kv_{d1}v_{d2}\lambda_0^2 l}{c^2 a}. \quad (2.33)$$

Felhasználva, hogy $I_1 = -\lambda_0 v_{d1}$, $I_2 = -\lambda_0 v_{d2}$, valamint a $k/c^2 = \mu_0/4\pi$ azonosságot, az 1. vezető által a 2. vezető l hosszú szakaszára kifejtett relativisztikus Coulomb-erő

$$F_{RC} = \frac{-\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}. \quad (2.34)$$

Ez a mozgó töltések közötti relativisztikus Coulomb-erő erő pontosan megegyezik a klasszikus fizikában jól ismert, az áramjárta vezetők között fellépő Lorentz-erőnek nevezett erővel. Ez a kölcsönhatás a mágnesség bevezetése nélkül, a Coulomb-törvényből és a speciális relativitáselméletből következik.

2.8. Mozgó ponttöltés elektromos tere

Közelítsük meg a relativisztikus elektrodinamika jól ismert témáját a mozgó ponttöltés terét a (2.15) egyenletben ismertetett transzformációs módszerrel. A transzformáció lényege, hogy a mozgó töltések sebesség irányára merőleges térerősség komponense γ szorosára növekszik, a sebességgel párhuzamos komponense megegyezik a nyugalmi rendszer ugyanolyan irányú komponensével. Legyen a K vonatkoztatási rendszer a q ponttöltés sajátrendszeré. A K' rendszer pedig az x tengely mentén mozog v sebességgel pozitív irányba. A K és K' rendszerekben felvett derékszögű koordinátarendszerek (lásd 5. ábra) tengelyei párhuzamosak, a x és x' tengelyek egybe esnek.

Transzformáljuk a ponttöltés elektromos terét a töltés K nyugalmi rendszeréből a mozgó K' vonatkoztatási rendszerbe. A K rendszerben a q ponttöltés elektromos terét a $\mathbf{E} = kq\mathbf{r}/r^3$ vektortér írja le, ennek derékszögű rendszerben felírt komponensei;

$$E_x = kqx/r^3, \quad E_y = kqy/r^3, \quad E_z = kqz/r^3. \quad (2.35)$$

Az E_x párhuzamos, az E_y, E_z komponensek pedig merőlegesek a sebesség irányára. A transzformáció a (2.15) egyenlet szerint:

$$E'_x = kqx/r^3, \quad E'_y = \gamma kqy/r^3, \quad E'_z = \gamma kqz/r^3. \quad (2.36)$$

A térerősség transzformációja ezzel rendben van, de a K' rendszerben az E' elektromos teret a vesszős koordináták függvényeként kell kifejezni. A koordináták transzformációja:

$$x' = x/\gamma; \quad y' = y; \quad z' = z. \quad (2.37)$$

Ebből következik, hogy az $r = \sqrt{\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Helyettesítsük a vesszős mennyiségeket (2.36) egyenletbe, akkor az E' térerősség komponenseire az alábbi, vesszős koordinátákkal kifejezett, szimmetrikus egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} E'_x &= kq\gamma x' / (\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2} \\ E'_y &= kq\gamma y' / (\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2} \\ E'_z &= kq\gamma z' / (\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

A E' komponensei arányosak saját koordinátájukkal, és az arányossági tényező minden komponensre azonos, az azt jelenti hogy E' is radiális szerkezetű erőter. Írjuk fel E' abszolút értékét, mint komponensei négyzetösszegének négyzetgyökét,

$$E' = \frac{kq\gamma r'}{(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}. \quad (2.39)$$

Tekintsük az \mathbf{r}' vektor és a sebesség iránya által bezárt ϑ szöget az 5. ábrán, és fejezzük ki ϑ -t a vesszős koordinátákkal; $\sin \vartheta = \sqrt{y'^2 + z'^2}/r'$, $\cos \vartheta = x'/r'$. Fejezzük ki x'^2, y'^2, z'^2 -et ϑ szinuszával és koszinuszával;

$$E'(r', \vartheta) = \frac{kq\gamma}{r'^2(\gamma^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)^{3/2}}. \quad (2.40)$$

Az E' térerősség (2.40) egyenletben levezetett alakja megegyezik az elektromágneses tér (2.7) egyenletben felírt Lorentz-transzformációs formula alapján számolt, az [1] elektrodinamika tankönyvben is közölt eredménnyel. Az E' erőssége a ponttöltéstől rögzített r' távolságban függ a sebesség és az r' relatív irányától, a ϑ szögtől. Ha $\vartheta = 0$, vagyis a sebességgel párhuzamos irányban, az $E'(r', 0) = kq/(\gamma^2 r'^2)$. A sebességre merőleges irányban viszont, az $E'(r', \pi/2) = kq\gamma/r'^2$. A mozgó ponttöltés sebességre merőleges irányban a térerősség γ^3 -ször nagyobb, mint a sebesség irányában.

2.9. A mozgó töltések Gauss-tételének egzakt bizonyítása

A 2.4 fejezetben Purcell [4] indoklása nyomán elfogadtuk, hogy a Gauss-tétel mozgó töltésekre is igaz. A (2.40) egyenletben megkaptuk a mozgó ponttöltés elektromos terét, ami kiváló lehetőséget nyújt a Gauss-tétel mozgó töltésre vonatkozó érvényességének egzakt vizsgálatára. Nem kell mást tenni, mint kiszámolni a mozgó ponttöltés elektromos terének zárt felületre vett integrálját.

Vegyünk egy vonatkoztatási rendszert, ahol a q ponttöltés v sebességgel mozog. Vegyünk fel a vonatkoztatási rendszerben egy gömbi koordinátarendszert, amelynek a tengelye a ponttöltés sebességének iránya. Legyen a vizsgált pillanatban (a retardálástól eltekintünk) a ponttöltés a koordinátarendszer kezdőpontjában. A 2.8 fejezetben láttuk, hogy a mozgó ponttöltés tere radiális irányú, így az r sugarú gömbnek választott zárt felület minden $d\mathbf{A}$ felületelem vektora párhuzamos a lokális \mathbf{E} térerősség vektorral. Ezért skalárszorzatuk megegyezik abszolútértékeik szorzatával. Kihasználva a térerősség φ szögtől való függetlenségét a gömbfelszín felületeleme $dA = 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta$, és a zárt felületre vett integrál pedig,

$$\oint_G E dA = 2\pi k q \gamma \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{(\gamma^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)^{3/2}} \quad (2.41)$$

alakba írható. A (2.41) egyenlet jobb oldala integrálható,

$$\oint_G E dA = 2\pi k q \gamma \left[\frac{-\sqrt{2} \cos \vartheta}{\sqrt{(\gamma^2 - 1) \cos 2\vartheta + \gamma^2 + 1}} \right]_0^\pi. \quad (2.42)$$

Az integrálási határokon történő helyettesítések után a határozott integrál $2/\gamma$ értéket ad. Ezzel a mozgó ponttöltés elektromos terének zárt felületre vett integrálja

$$\oint_G E dA = 4\pi k q, \quad (2.43)$$

ami megegyezik a nyugvó ponttöltés zárt felületre vett integráljának eredményével. Ezzel beláttuk, hogy a Gauss-tétel egy mozgó ponttöltés esetén, gömbfelületre igaz. Ha egy mozgó töltésre igaz, akkor a szuperpozíció elve szerint tetszőleges számú mozgó ponttöltésre is az. Másrészt, a felületelemek vetítése révén igazolt, hogy a zárt felületre vett integrál nem függ a felület alakjától, csak a benne lévő források mennyiségétől. Ebből következik, a Gauss-tétel általánosan érvényes mozgó töltések esetén. Ez a következtetés egybevág a Maxwell-egyenletek Lorentz-invarianciájával.

3. Mozgó testek gravitációja - a gravitomágnesség jelensége

A tömegvonzás jelenségének newtoni fizikában történt felismerése épp úgy, mint a jelenséget leíró gravitációs törvény, megfigyelések alapján született. Newton 1666-ban a Hold mozgásából és a testek Föld felszínén megfigyelt szabadesése alapján felállított törvényét Cavendish híres kísérlete csak 1798 körül igazolta. Kizárólag mozgó tömegek között fellépő kölcsönhatásra utaló kísérleti megfigyelést, vagy elméleti előrejelzést a XX. század előtti fizika nem mutatott fel. Meg kell jegyezni, hogy 1870 környékén Holzmüller [6] és Tisserand [7] felvetették, hogy a Merkúr perihélium elfordulásának, a klasszikus égi mechanika által nem magyarázható részét mozgó tömegek között fellépő erő okozza. Ez az elképzelés, elméleti és kísérleti alátámasztás híján, kidolgozatlan hipotézis maradt.

Módszertani kutatás kapcsán egy korábbi cikkben [8] írtam a mozgó testek gravitációjáról. Ebben a fejezetben részletesebben kifejtem a testek mozgásának tömegvonzásban megjelenő hatását. A gravitáció klasszikus leírásának bemutatása után, először a speciális relativitáselmélet alapján mutatom ki a mozgó testek között fellépő, sebességfüggő gravitomágneses kölcsönhatás létének szükségességét. Ezt követően mennyiségi leírást adok a speciális, illetve az általános relativitáselmélet által jóslott gravitomágneses kölcsönhatás mértékéről.

3.1. A gravitáció newtoni leírása

A XX. századot megelőzően a fizika a tömegvonzás törvényét két tömegpont gravitációs kölcsönhatásának mennyiségi leírásával adja meg;

$$\mathbf{F}_G = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}. \quad (3.1)$$

Az \mathbf{F}_G jelenti az m_1 által az m_2 tömegpontra kifejtett gravitációs vonzóerő vektorát, \mathbf{r} pedig az m_1 tömegpontból az m_2 -be mutató vektort. Az m_1 tömegpont gravitációs térerősségét

$$\mathbf{g} = -\frac{Gm_1}{r^3}\mathbf{r}. \quad (3.2)$$

egyenlettel bevezetve, \mathbf{g} jelenti az m_1 tömegpont által, az \mathbf{r} helyen létrehozott gravitációs teret. A \mathbf{g} gravitációs térerősség vektorral kifejezve az m_2 tömegpontra ható gravitációs vonzóerő felírható $\mathbf{F}_G = m_2\mathbf{g}$ alakban is. A gravitációs törvény szerint a két tömegpont által egymásra kifejtett gravitációs erő csak azok tömegétől és távolságától függ és nem függ a kölcsönható testek sebességétől. A (2.1) és (3.1) egyenleteket összehasonlítva a gravitációs és elektromos kölcsönhatás erős formai hasonlóságot mutat.

A hasonlóság mellett létezik egy lényeges eltérés két tömegpont gravitációs, illetve két ponttöltés elektromos kölcsönhatása között. Ellentétben a mozgó töltésekkel, a gravitáció nem relativisztikus tárgyalása nem ismer mozgó tömegek gravitációs

kölcsönhatásakor fellépő, sebességfüggő gravitomágneses erőt. Az elektromos és gravitációs kölcsönhatás formai hasonlósága sugallhatja - két mozgó tömegpont között - elektromágneses mintára, egy

$$\mathbf{F}_{\text{GL}} = \frac{\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{F}_G)}{c^2} \quad (3.3)$$

alakban felírható gravitomágneses "Lorentz-erő" létét, de egy ilyen erő felvetése csak spekuláció, mivel a klasszikus fizika ilyen erőt nem jósol, és annak létét (ellentétben az elektromágneses Lorentz-erővel) kísérleti tapasztalat sem igazolja. Megjegyezzük, hogy a (3.3) egyenletben felírt kölcsönhatás, annak gyenge hatása miatt, a XIX. században kísérletileg nem volt kimutatható.

3.2. A speciális relativitáselmélet és a gravitáció

A speciális relativitáselmélet kimondja az inerciarendszerek egyenértékűségét, miszerint a fizikai jelenségek bármely két inerciarendszerből nézve azonosan mennek végbe. A speciális relativitáselmélet gravitációra történő alkalmazásakor szükséges az óvatosság. A klasszikus mechanikában kialakult inerciarendszer fogalom a minden testtől távoli, egyenletes sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerekre vonatkozott. Ha egy inerciarendszerből a tömegvonzás jelenségét akarjuk leírni, abba a problémába ütközünk, hogy a tömegvonzás elrontja a vonatkoztatási rendszer előbbi értelemben vett inercia jellegét. Ugyanis, ha a vonatkoztatási rendszer egyenletes mozgást végez a gravitáló objektumhoz képest, akkor az abban a magukra hagyott testek gyorsulni fognak a gravitáló objektum felé. Ez ellent mond Newton első törvényének. Ha a vonatkoztatási rendszer szabadon esik a gravitáló objektum felé, akkor teljesül rá Newton első törvénye, de más inerciarendszerekhez képest gyorsulni fog. A klasszikus inerciarendszer fogalommal mindenképp ellentmondásba keveredünk.

Mai tudásunk szerint a gravitációs jelenségek helyes elmélete, az általános relativitáselmélet. Az általános relativitáselmélet alapján, bizonyos határesetben, gyenge terek és kis sebességek esetén a gravitáció csakugyan leírható az elektrodinamika mintájára, azonban a kapott elmélet - a Maxwell-egyenletekől való apró eltérések miatt - nem lesz Lorentz-invariáns. A gravitáció fenti közelítésnél általánosabb leírása nem fogalmazható meg az elektrodinamika mintájára. Ennek oka lényegében az, hogy a gravitációs tér forrása az energia, ami a töltéstől eltérően nem skalármennyiség, hanem egy négyesvektor komponense.

A gravitáció jelenségének a speciális relativitáselmélet eszközével történő kezelésének problémái ellenére, az elmúlt évtizedekben több szerző foglalkozott annak a leírásával. Bedford és Krumm [9] mozgó egyenes rúd és tömegpont gravitációs kölcsönhatásában mutat rá egy, a testek sebességétől függő gravitomágneses erő létének szükségére. Kolbenstvedt [10] két mozgó tömegpont speciális relativitáselmélet szerint felírt Lagrange-függvényének vizsgálatával ismeri fel a gravitomágneses kölcsönhatást. Karlsson [11] oktatási módszertani értékű munkában, elektromágneses analógia alapján

mutatja be mozgó rudak és mozgó tömegpont gravitomágneses kölcsönhatását.

Az alábbiakban megvizsgálom, hogy a speciális relativitáselmélet elveinek a (2.6) fejezetben, a Coulomb-kölcsönhatás leírására ismertetett módszerének a gravitációs kölcsönhatásra történő alkalmazása milyen eredményre vezetne. Módszertani jelentőségére tekintettel, a levezetés értékét az sem csökkenti, ha a kapott eredmény - a fent leírt problémák miatt - kvantitatívan nem lesz helytálló.

3.3. A gravitáció relativisztikus leírásának módszere

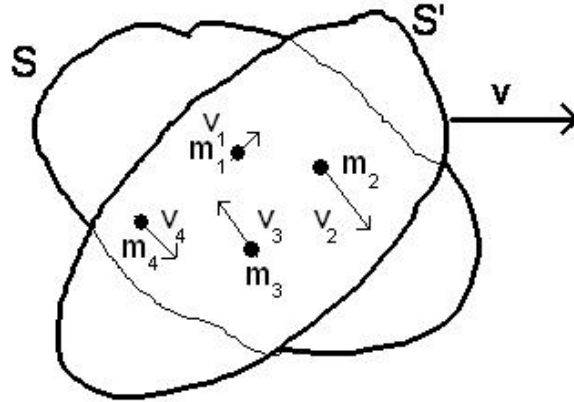
A (2.6) fejezetben megmutattuk, hogy a mozgó elektromos töltések között fellépő mágneses kölcsönhatás jelenségének szükségességét a Coulomb-törvény és a speciális relativitáselmélet előírja. A gravitációs kölcsönhatás relativisztikus közelítéséhez a mozgó töltések elektromos kölcsönhatásának relativisztikus leírására kidolgozott módszert alkalmazom. A Newton-féle gravitációs törvény és a speciális relativitáselmélet érvényességéből kiindulva kimutatom egy mozgó tömegek között fellépő kölcsönhatás szükségességét.

A gravitáció relativisztikus leírása az alábbi posztulátumokra épül:

1. Közelítésként elfogadjuk a speciális relativitáselmélet érvényességét a gravitáció leírására; az egymáshoz képest egyenes sebességgel mozgó (inercia) vonatkoztatási rendszerekben a fizikai jelenségek - még a gravitáció is - azonos törvények szerint játszódnak le.
2. Érvényes az ekvivalencia elv, a súlyos és tehetetlen tömegek mérőszáma azonos.
3. Érvényes a két tömegpont kölcsönhatását leíró Newton-féle gravitációs törvény és a szuperpozíció elve.
4. A gravitomágneses kölcsönhatás leírása során is érvényesek a relativisztikus dinamika törvényei és a fizikai mennyiségek Lorentz-transzformációja.
5. A számítást kis sebességekre és gyenge gravitációs térre korlátozva végezzük, a v^2/c^2 és Φ/c^2 egynél magasabb kitevőjű hatványait elhanyagoljuk.

3.4. A gravitációs tér Gauss-tétele mozgó tömegpontok esetén

A 2.4 fejezetben beláttuk, hogy mozgó töltések esetén az elektromos térerősség zárt felületre vett integrálja nem függ a töltések sebességétől. Általánosítsuk a nyugvó tömegek gravitációs terének Gauss-tételét mozgó tömegek esetére is. A gravitációs tér forrása a súlyos tömeg. A gravitációs térerősség bármely zárt felületre vett integrálja egyenlő a zárt felületen belül lévő tömegek összegével. Abban az esetben, ha a tömegek egyenes mozgást végeznek a zárt felületen belül, akkor a tehetetlen tömeghez hozzá adódik a mozgási energiájuk tömege is. Használva az ekvivalencia elvet, a tömegnövekedés a súlyos tömeget is megnöveli. Ennek következtében, mozgó tömegek esetén a gravitációs térerősség zárt felületre vett integrálja a kinetikus energia járulékaival



6. ábra Zárt felületen belül mozgó tömegek Gauss-tétele. A két relatíve mozgó, zárt felületen belül lévő tömegek gravitációs terére felírt Gauss-integrál eltérő eredményt ad.

növelt tömegek összegével egyenlő. A kinetikus energia járulékaival megnövelt tömeg pedig a test tömegének γ -szorososa.

A Gauss-tétel mozgó tömegekre vonatkozó fenti szabálya azt jelenti, hogy a zárt felületre felírt integrál értéke függ a benne mozgó tömegpontok sebességétől. A gravitációs térerősség két, egymáshoz képest egyenletes sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerhez rögzített, ugyanazon tömegeket tartalmazó zárt felületre felírt felületi integrálja eltérő eredményt ad. Ebből következik, hogy a gravitációs tér zárt felületre vett integrálja nem Lorentz-invariás.

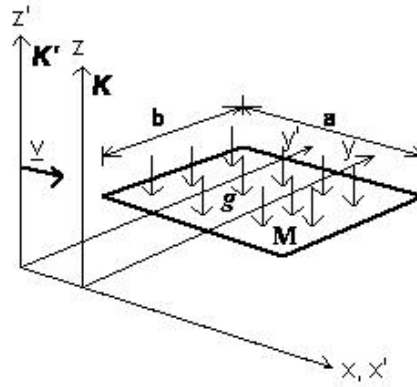
A 6. ábrán az S , illetve az S' zárt felületek sajátrendszerei a K , illetve K' inerciarendszerek. K' állandó v sebességgel mozog K -hoz képest. A zárt felületeken belül lévő tömegpontok v_i , illetve v'_i sebességgel mozognak K -ban, illetve K' -ben. Írjuk fel a gravitációs tér Gauss-tételét az S , illetve S' zárt felületekre:

$$\oint_S \mathbf{g} d\mathbf{A} = -4\pi G \sum \gamma_i m_i, \quad \oint_{S'} \mathbf{g}' d\mathbf{A}' = -4\pi G \sum \gamma'_i m_i \quad (3.4)$$

A két integrál eredménye azért eltérő, mert a γ_i , illetve γ'_i tényezők a bennük szereplő és v_i , illetve v'_i sebességek miatt eltérőek.

3.5. Mozgó tömeg gravitációs tere

Határozzuk meg egy M tömegű, a, b oldalú téglalap gravitációs erőterét K saját rendszerében és egy olyan K' vonatkoztatási rendszerben, amelyben az v sebességgel mozog. A téglalap két oldalán, a lap síkja felett $d \ll a, b$ távolságban kialakuló gravitációs erőteret homogén. Rögzítsünk a K és K' rendszerekhez egy-egy Descartes-féle



7. ábra Homogén tömegeloszlású téglalap gravitációs tere.

koordinátarendszert, párhuzamos tengelyekkel. Tekintsük ehhez a 7. ábrát! Mozogjon a K' rendszer K -hoz képest v sebességgel az x -tengely pozitív irányába. Helyezzük az a, b oldalú, M tömegű téglalapot az x, y síkkal párhuzamosan, az a és b oldal legyen az x illetve y -tengellyel párhuzamos. Legyen az M tömegű téglalap homogén tömegeloszlású, így felületi tömegsűrűsége $\sigma = M/ab$.

Határozzuk meg a téglalap gravitációs terének homogén tartományát a K és a K' rendszerben. Alkalmazzuk a gravitációs tér meghatározáshoz a Gauss-tételt. A kondenzátor elektromos terének meghatározásához hasonlóan, zárt felületnek vegyünk fel egy A alapterületű, S egyenes hasábot, amely szorosan körbeveszi a téglalap gravitációs terének homogén tartományát, és amelynek alaplapjai párhuzamosak a téglalappal. Az S hasáb felületvektorai a felületre merőlegesen kifelé mutatnak, a gravitációs tér pedig befelé, ezért skalár szorzatuk negatív. A (3.4) egyenletben felírt Gauss-tételt alkalmazva a téglalap gravitációs terére, a szimmetriák figyelembevételével, $2gA = -4\pi GM$. A téglalap nyugalmi rendszerében, a gravitációs tér erősségének abszolút értéke

$$g = 2\pi G\sigma. \quad (3.5)$$

Ezután határozzuk meg a téglalap gravitációs terét a K' rendszerben. A téglalap a K' rendszerben v sebességgel mozog az x -tengely negatív irányába. A mozgás miatt a gravitációs tér keltésében részt vesz a téglalap mozgási energiájának tömege is, vagyis a gravitációs teret téglalap tömegének γ -szorososa kelti. Másrészt, a sebességgel párhuzamos a oldal Lorentz- kontrakciója miatt a felületi tömegsűrűség γ -szorosára növekszik. Így a K' rendszerrel együtt mozgó S' hasábra felírt Gauss-tételből a téglalap

K' -ben észlelt homogén gravitációs tartományának erőssége

$$g' = 2\pi G\gamma^2\sigma. \quad (3.6)$$

A (3.5) és (3.6) egyenletekből következik, hogy $g'_\perp = \gamma^2 g_\perp$, a gravitációs tér sebességre merőleges komponense a nyugalmi térerősség γ^2 -szerese. Ha a K' rendszer a z -tengely mentén mozog K -hoz képest v sebességgel, akkor a téglalap oldalai nem szenvednek Lorentz-kontrakciót K' -ben. Ekkor csak a mozgó tömeg hatása érvényesül a g' gravitációs tér erősségében. Ha a gravitációs térerősség párhuzamos a sebességvektorral, akkor a g'_\parallel gravitációs tér a saját rendszerben mért g_\parallel térerősség γ -szorososa. A gravitációs térerősség sebességre merőleges, illetve párhuzamos komponenseinek Lorentz-transzformációja:

$$g'_\perp = \gamma^2 g_\perp, \quad g'_\parallel = \gamma g_\parallel. \quad (3.7)$$

3.6. Gravitációs térben mozgó tömegre ható erő

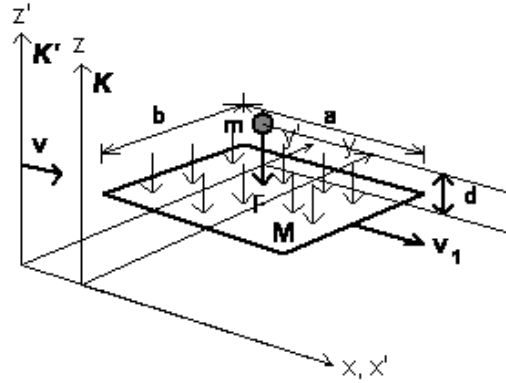
Határozzuk meg két különböző inercia rendszerből a 3.5 fejezetben ismertetett M tömegű téglalap és egy m tömegpont gravitációs kölcsönhatását a speciális relativitáselmélet keretei között. Tekintsük először a 8. ábrán látható, egymáshoz képest v sebességgel mozgó K és K' vonatkoztatási rendszereket. Az ábrán látható elrendezésben K az m tömegpont saját rendszere. Az M tömegű téglalap v_1 sebességgel mozog K -ban az x -tengely pozitív irányába. A téglalap K' rendszerben mért sebessége a sebesség Lorentz-transzformációjából adódik; $v'_1 = (v_1 - v)/(1 - v_1 v/c^2)$. Az m tömegpont K -ban nyugalomban van, K' -ben $v'_2 = -v$ sebességgel mozog az x -tengely mentén. Gravitációs térben nyugvó tömegre ható erő felírható a tömeg és a gravitációs térerősség szorzataként. Ennek értelmében, K -ban az m tömegpontra az M által kifejttet gravitációs erő az m tömeg és a mozgó M tömegű téglalap sebességre merőleges gravitációs terének szorzata. Az M tömegű téglalap gravitációs terét a (3.6) egyenletben meghatároztuk. Annak alapján,

$$F_{G\perp} = m\gamma_1^2 g_\perp. \quad (3.8)$$

A K' rendszerben mind M , mind m tömegek mozognak. Annyit tudunk, hogy K' -ben a mozgó M tömegű téglalap g'_\perp gravitációs teret kelt, de azt nem tudjuk, hogy a K' -ben mozgó m tömegpontra mekkora $\mathbf{F}'_{G\perp}$ gravitációs erő hat. Másrészt, a speciális relativitáselmélet előírja, hogy az ismeretlen $\mathbf{F}'_{G\perp}$ erőt a K vonatkoztatási rendszerbe transzformálva $F_{G\perp}$ erőt kapjuk, mivel az inercia rendszerek egyenértékűek. A transzformációs egyenletből meg tudjuk határozni a keresett $F'_{G\perp}$ erőt. Keressük a K' rendszerben az m tömegre ható gravitációs erőt

$$F'_{G\perp} = m'g'_\perp + F'_{RG}. \quad (3.9)$$

alakban. Mivel az m tömegpont a K' -ben $v'_2 = -v$ sebességgel mozog, az ottani mérőszáma $m' = \gamma m$. Az M tömeg v'_1 sebességgel mozog a térerősségre merőleges



8. ábra A v_1 sebességű, M tömegű síklap homogén terében v_2 sebességgel mozgó m tömegpontra a ható gravitációs erő.

irányban, ezért $g'_\perp = \gamma_1^2 g_\perp$. Vegyük figyelembe, hogy a gravitációs erő mind a K , mind a K' rendszerben merőleges a sebességre és ennek megfelelően transzformáljuk a $F'_{G\perp}$ erőt a K rendszerbe. Alkalmazzuk az erő Lorentz-transzformációját az (2.15) egyenletben megadott módon:

$$m'g'_\perp + F'_{RG} = mg/\gamma. \quad (3.10)$$

Felhasználva, hogy $m = m'/\gamma$ és $g = g'\gamma_1^2/\gamma_1^2$, ezeket (3.10) egyenletbe helyettesítve:

$$F'_{RG} = m'g'_\perp \left(\frac{\gamma_1^2}{\gamma_1^2 \gamma^2} - 1 \right). \quad (3.11)$$

A (2.23) egyenlet alapján $\gamma_1/(\gamma_1\gamma) = 1 + v'_1 v/c^2$. A 8. ábra elrendezésében $v = -v'_2$, ezzel a (3.11) egyenlet

$$F'_{RG} = m'g'_\perp \left[\left(1 - \frac{v'_1 v'_2}{c^2} \right)^2 - 1 \right]. \quad (3.12)$$

A (3.12) egyenletben kifejeztük a F'_{RG} erőt a K' rendszer vesszős mennyiségeivel. Az így kapott relativisztikus gravitációs, vagy gravitomágneses Lorentz-erő jelenik meg K' rendszerben az $m'g'$ gravitációs erő mellett. Ha v'_1 és $v'_2 \ll c$, akkor a (3.12) egyenletben az $1/c^4$ rendű tagot elhagyva, $1/c^2$ szerinti első rendű közelítésben az

$$F'_{RG} = -2m'g'_\perp \frac{v'_1 v'_2}{c^2} \quad (3.13)$$

gravitomágneses Lorentz-erőt kapjuk. Ismerjük fel, hogy a (3.13) egyenletben kapott közelítő megoldás a hármass vektorszorzat $v'_1 \parallel v'_2 \perp g'_\perp$ speciális este. Az pedig nem más,

mint a (3.3) egyenletben, elektromágneses analógia alapján jószolt gravitációs Lorentz-erő kétszerese, azaz

$$F'_{RG} = 2 \frac{v'_2 \times (v'_1 \times F'_{G\perp})}{c^2}. \quad (3.14)$$

A speciális relativitáselmélet azt mondja, hogy a gravitációs kölcsönhatást akkor írható le egyformán két különböző inerciarendszerből, ha létezik egy mozgó tömegek között fellépő, a (3.14) egyenletben adott gravitomágneses erő. Ez a kijelentés lényegesen eltér a klasszikus fizika gravitációelméletétől, mivel a klasszikus fizika ilyen erő létét nem prognosztizálja.

3.7. Az általános relativitáselmélet és a gravitomágnesség

A gravitáció jelenségének merőben új felfogását hozta az 1915-ben megjelent általános relativitáselmélet. A négydimenziós, sík téridőt a benne lévő tömegek „meggörbítik” és a gravitáció jelenségét az általános relativitáselmélet a görbült téridőben mozgó testek hatásaként értelmezi. A görbült téridő szemlélet szerint a testek nem fejtenek ki egymásra gravitációs erőt, hanem a görbült téridőben erőhatásmentesen ún. geodetikus görbék mentén mozognak. Két test gravitációs kölcsönhatásakor az egyik test a másik által meggörbített téridő egy geodetikusa mentén mozog. Ebbe a szemléletbe nem illik bele a gravitomágneses kölcsönhatás.

Az általános relativitáselméletben a görbült téridő szemlélet mellett, gyenge gravitációs tér és kis sebességek ($\Phi, v^2 \ll c^2$) esetén, Φ/c^2 , illetve v^2/c^2 tagok magasabb kitevőjű hatványainak elhanyagolásával tartható az erőszemlélet is. Ebben az esetben a négyes ívhossz integráljának segítségével felírt, közelítő Lagrange-függvény segítségével juthatunk a mechanikában megszokott mozgásegyenlethez.

Ez utóbbi módon, a gravitáció lineáris közelítését választva, tekintsünk két, más testek hatásától elzárt, m_1 és m_2 tömegű tömegpontot. Az m_1 és m_2 tömegű, egymás gravitációs hatása alatt \mathbf{v}_1 és \mathbf{v}_2 sebességgel mozgó tömegpontok Lagrange-függvénye Φ/c^2 , illetve v^2/c^2 szerinti első rendű közelítésben, a Landau-Lifsic II. kötet [12] alapján:

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{Gm_1 m_2}{r} + \frac{m_1 v_1^4 + m_2 v_2^4}{8c^2} - \frac{G^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2c^2 r^2} + \frac{Gm_1 m_2}{2c^2 r} \left[3(v_1^2 + v_2^2) - 7(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) - (\mathbf{v}_1 \mathbf{n})(\mathbf{v}_2 \mathbf{n}) \right], \quad (3.15)$$

ahol r a két tömegpont távolságát, \mathbf{n} az m_1 tömegpontból az m_2 tömegpontba mutató egységvektort jelöli. A Lagrange-függvényből a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_2} \right) = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_2} \right). \quad (3.16)$$

módon kapjuk az m_2 tömegű tömegpont Euler-Lagrange – vagy hagyományos elnevezéssel – mozgásegyenletét. Azért választottuk a 2-es indexű tömegpontot, mert a (3.1) egyenletben is az m_1 tömegpontnak az m_2 tömegű tömegpontra kifejtett hatását írtuk fel, így egyszerűbb az összehasonlítás. A Lagrange-függvény egyes indexű mennyiségek szerinti deriváltjai az egyes tömegpont mozgásegyenletét adják. A két mozgásegyenlet szimmetrikus, mivel a Lagrange-függvény szimmetrikus a két tömegpontra nézve. Tömegközépponti rendszerben az egyenletrendszer egy ismeretlenes egyenletté alakítható.

A deriválásokat elvégezve, az m_2 tömegpont mozgásegyenlete

$$\begin{aligned} m_2 \left(1 + \frac{v_2^2}{2c^2} + \frac{3Gm_1}{c^2 r} \right) \dot{\mathbf{v}}_2 + m_2 \frac{v_2 \dot{v}_2}{c^2} \mathbf{v}_2 - \frac{Gm_1 m_2}{2c^2 r} [7\dot{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{n}(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}_1)] = \\ = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \left[1 - \frac{G(m_1 + m_2)}{c^2 r} \right] \mathbf{n} - \frac{Gm_1 m_2}{c^2 r^2} \left\{ \left[\frac{3}{2} v_2^2 - \frac{3}{2} (\mathbf{n}\mathbf{v}_1)^2 + 2v_1^2 \right] \mathbf{n} + \right. \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$+3(\mathbf{n}\mathbf{v}_1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + \left(\frac{1}{2}\mathbf{n}\mathbf{v}_2 - \frac{7}{2}\mathbf{n}\mathbf{v}_1\right)\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{n}) \Big\}$$

alakban adódik. A (3.15) Lagrange-függvényből előállított mozgásegyenletben, a baloldalon a gyorsulásokat tartalmazó tagok, az egyenlet jobb oldalán pedig az egyéb tagok szerepelnek. A jobboldalon álló második tag sebességfüggő erőket tartalmaz. Vezessük be a $\mathbf{F}_G = -Gm_1m_2\mathbf{n}/r^2$ jelölést a klasszikus gravitációs erőre, amely az m_2 tömegpontra ható erők vezető rendű tagja. A többi, a vezető tag mellett megjelenő erő $1/c^2$ nagyságrendű. Más sebességfüggő tagok mellett, az utolsó sebességfüggő tag az

$$\mathbf{F}_{GL} = 4 \frac{\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{F}_G)}{c^2} \quad (3.18)$$

erő, amely a gravitomágneses Lorentz-erő általános relativitáselméletből származó alakja.

Az általános relativitáselmélet gyenge gravitációs tereknek és kis sebességeknek megfelelő közelítés alkalmazása esetén azt jósolja, hogy a mozgó tömegek gravitációs kölcsönhatásnak részét képezi egy, a mozgó tömegek között fellépő gravitomágneses Lorentz-erő, amely kétszer akkora, mint a speciális relativitáselmélet által, a (3.14) egyenletben jósolt gravitomágneses kölcsönhatás.

4. A gravitomágnesség fizikája

Az előző fejezetben megállapítottuk, hogy a relativitáselmélet előtti fizika nem ismerte a gravitomágnességet. A speciális relativitáselmélet szerint, mozgó tömegek kölcsönhatása esetén, az inercia rendszerek ekvivalenciája megköveteli a gravitációt kiegészítő gravitomágneses kölcsönhatást, azonban az általa megállapított gravitomágneses erő pontatlan. Az általános relativitáselmélet a gravitomágnességet a gravitáció jelenségének kis sebességekre és gyenge gravitációs terekre érvényes közelítéseként kezeli. Ez a közelítés azonban a környezetünket kvantitatíve helyesen írja le, a Naprendszer objektumaira, az ott elhelyezett laboratóriumokra jól használható. Foglalkozunk ezért részletesebben az általános relativitáselméletből származó gravitomágnességgel.

4.1. A gravitomágnesség Maxwell-egyenletei

A gravitomágnesség fogalma megtalálható az általános relativitáselmélet tankönyvekben. Wald [13] a gravitáció lineáris közelítése kapcsán vezeti be a jelenséget. Mashhoon, [14] a Minkowski téridő lineáris perturbációjaként, a gravitációs téregyenletből vezeti le a gravitomágnesség Maxwell-egyenleteit, amit tekinthetünk a gravitáció lineáris közelítésben felírt alapegyenleteinek. A gravitáció alább ismertetett Maxwell-egyenleteinek [14] alapján történő levezetése a Függelék (8.1) fejezetében található.

$$\operatorname{rot} \mathbf{g} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad \left(\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (4.1)$$

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{b}}{2} = -\frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{j}_m + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \quad \left(\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi k}{c^2} \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = -4\pi G \rho_m \quad (\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi k \rho) \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{b}}{2} = 0 \quad (\operatorname{div} \mathbf{B} = \mathbf{0}). \quad (4.4)$$

Az egyenletekben \mathbf{g} a gravitációs, \mathbf{b} a gravitomágneses térerősség, \mathbf{j}_m a tömegáram-sűrűséget, ρ_m pedig a tömegsűrűséget jelöli az adott vonatkoztatási rendszerben. A gravitomágnesség alapegyenletei mellett, zárójelben az elektromágnesség Maxwell-egyenletei láthatók.

A 4.1 - 4.4 egyenletekből kitűnik, hogy a gravitomágnesség hasonlóságot mutat az elektromágnességgel. SI rendszerben az elektromágneses térjellemezők, \mathbf{E} , \mathbf{B} mértékegységei V/m , illetve Vs/m^2 egy m/s szorzóval különböznek egymástól. Ez igaz a \mathbf{g} és \mathbf{b} gravitomágneses térjellemezőkre is, \mathbf{g} mértékegysége m/s^2 , a \mathbf{b} mértékegysége $1/s$. Gyakorlatilag, minden elektromágneses jelenségnek, mint gerjesztés, Lorentz-erő, indukció, elektromágneses hullámok létezik a gravitációs, gravitomágneses párja. A gravitomágneses teret mozgó tömegek, az elektromágneses teret mozgó töltések keltik. Különbség a gravitomágnesség és az elektromágnesség között, hogy a \mathbf{b} gravitomágneses

teret a mozgó tömeg kétszerese kelti és a benne mozgó tömegek kétszeresére fejt ki hatását. Ezért szerepel a (4.1)-(4.4) egyenletekben a $\mathbf{b}/2$ kifejezés. A gravitomágneses Maxwell-egyenletek tartalmazzák a gravitomágneses indukció jelenségét; az időben változó gravitációs tér gravitomágneses teret indukál és fordítva, az időben változó gravitomágneses tér gravitációs örvényteret kelt. A két jelenség magában hordozza a fénysebességgel terjedő gravitomágneses vagy közismertebb néven gravitációs hullámok létének lehetőségét.

4.2. Gravitációs potenciálok és a gravitációs Poisson-egyenlet

Az elektrodinamikában a Maxwell-egyenletek tulajdonságai lehetővé tették, hogy a mágneses indukcióvektort egy $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ vektortér, úgynevezett vektorpotenciál, rotációjaként írjuk fel. A gravitomágneses tér is felírható egy gravitomágneses $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ vektorpotenciál rotációjaként; $\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}$. Ezt a kifejezést a (4.1) egyenletbe helyettesítve a

$$\text{rot } \mathbf{g} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{a}) = 0 \quad (4.5)$$

egyenletet kapjuk. Ebből következik, hogy $\mathbf{g} + \partial(\mathbf{a}/2)/\partial t$ felírható egy skalár tér gradienseként:

$$\mathbf{g} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \mathbf{a}}{2\partial t}. \quad (4.6)$$

A (4.2) egyenletbe, a \mathbf{b} helyére $\text{rot } \mathbf{a}$ -t írva, a (4.6) egyenletben pedig a \mathbf{g} -re kapott összefüggést a (4.3) egyenletbe helyettesítve, a Nagy Károly [15] elektrodinamikai levezetés mintájára, a

$$\Delta \mathbf{a} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = \frac{8\pi G \mathbf{j}_m}{c^2} \quad \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 4\pi G \rho_m \quad (4.7)$$

gravitomágneses Poisson-egyenletekhez jutunk. Vizsgáljuk a stacionárius esetet, Φ és \mathbf{a} legyen független az időtől. Ekkor a (4.7) egyenletben eltűnnek az időfüggő tagok. Az időfüggetlen Poisson-egyenletek megoldását

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\frac{2G}{c^2} \int_{V'} \frac{\mathbf{j}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad \Phi(\mathbf{r}) = -G \int_{V'} \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (4.8)$$

alakban kapjuk.

4.3. Tömegáramok gravitomágneses tere

A gravitomágnesség alapegyenletei mennyiségi összefüggést adnak a mozgó tömegek és az általuk gerjesztett gravitomágneses tér között. A (4.2) egyenlet integrális alakja

$$\oint \frac{\mathbf{b}}{2} ds = -\frac{4\pi G}{c^2} \int_A \mathbf{j}_m d\mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \int_A \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} d\mathbf{A}. \quad (4.9)$$

Ha nincsenek időben változó gravitációs terek, akkor (4.9) egyenletből megkapjuk a gravitomágneses gerjesztési törvényt:

$$\oint \frac{\mathbf{b}}{2} ds = -\frac{4\pi G}{c^2} \sum I_m, \quad (4.10)$$

amely alkalmas tömegáramok által keltett gravitomágneses tér meghatározására.

A (4.8) Poisson-egyenletből levezethető egy másik, tömegáramok keltette gravitomágneses terek meghatározására alkalmas összefüggés, a gravitomágneses tér Biot-Savart törvénye. Tekintsük egyetlen dV' térfogatelem gravitomágneses vektorpotenciálját. A közegben folyó tömegáram sűrűsége \mathbf{j}_m . Legyen dV' egy A keresztmetszetű elemi hasáb, amelynek alaplapjai merőlegesek az áramsűrűség vektorra. A hasáb magassága legyen ds és a belőle képzett elemi ds vektort irányítsuk az áramsűrűséggel azonos irányba. Legyen a vonatkoztatási rendszer kezdőpontja az elemi dV' térfogat középpontja, így $\mathbf{r}' = 0$. Ekkor az elemi térfogatban folyó tömegáram gravitomágneses vektorpotenciálja

$$d\mathbf{a} = -\frac{2G}{c^2} \frac{j_m A ds}{r}. \quad (4.11)$$

A gravitomágneses tér télerősségét a vektorpotenciál rotációjaként kapjuk. A $j_m A$ helyére az I_m tömeg-áramerősséget írva, képezzük a (4.11) egyenlet rotációját, és akkor

$$d\mathbf{b} = -\frac{2G}{c^2} \frac{I_m ds \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.12)$$

formában kapjuk az elemi tömegáram által a tér \mathbf{r} pontjában létrehozott elemi gravitomágneses teret. A (4.12) egyenlet más néven a gravitomágneses tér Biot-Savart törvénye. Ha a gerjesztési törvénnyel, vagy a Biot-Savart törvénnyel tömegáramok, vagy mozgó tömegek gravitomágneses terét kívánjuk meghatározni, akkor nem szükséges a teret gerjesztő tömegek mozgási energiájának tömegjárulékának, sem az r távolság kontrakciójának figyelembevétele, mivel a gravitomágnesség már v^2/c^2 első hatványa szerinti sorfejtésből származik és az említett effektusok már v^2/c^2 második hatványát tartalmazó járulékot adnak.

a.) Mozgó tömegpont gravitomágneses tere

A gravitomágnesség Biot-Savart törvénye mozgó tömegpontok gravitomágneses télerősségének meghatározására is alkalmas. Egy v_1 sebességgel mozgó m_1 tömegű tömegpont gravitomágneses terének meghatározásakor alkalmazzuk a (4.12) egyenletben az $I_m ds = m_1 \mathbf{v}_1$ helyettesítést. Ekkor, a tömegpont árama által gerjesztett gravitomágneses tér:

$$\mathbf{b} = -2 \frac{Gm_1}{c^2 r^3} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}. \quad (4.13)$$

Vegyük észre, hogy $-Gm_1 \mathbf{r}/r^3$ épp a nyugvó m_1 tömegpont \mathbf{g} gravitációs tere, tehát

$$\mathbf{b} = \frac{2}{c^2} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{g}_1. \quad (4.14)$$

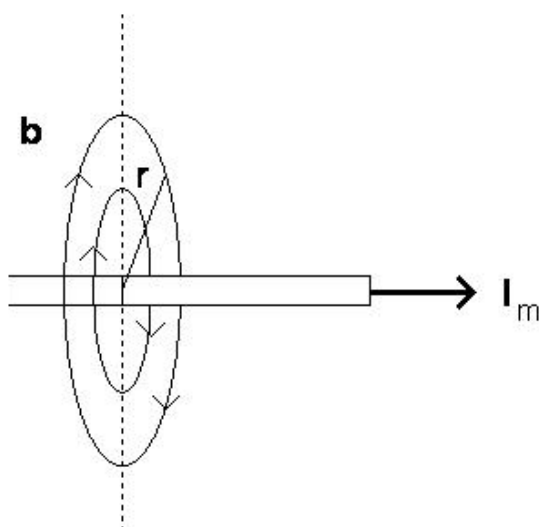
Ha egy \mathbf{v}_1 sebességgel mozgó tömegkonfiguráció a tér egy pontjában \mathbf{g}_1 gravitációs teret hoz létre, akkor ugyanabban a pontban a \mathbf{b} gravitomágneses térerősség – a szuperpozíció elvéből következően – (4.14) egyenlettel adott.

Két mozgó tömegpont között ható gravitációs kölcsönhatás mozgásegyenletét a (3.17) egyenletben felírtuk. Annak ismeretében nem szabad megfeledkezni arról, hogy két mozgó tömegpont teljes gravitációs kölcsönhatása még v^2/c^2 első hatványa szerinti közelítésben sem írható le a nyugalmi gravitációs erő, és a gravitomágneses Lorentz-erő összegeként, mivel a mozgásegyenletben a vezető tagot képező nyugalmi gravitációs erő és a gravitomágneses Lorentz-erőn kívül, abban más v^2/c^2 rendű, relativisztikus, sebességfüggő erőtagok is megjelennek.

b.) Csőben áramló tömeg gravitomágneses tere

Az elektromos árammal átjárt vezető maga körül mágneses örvényteret kelt. Ugyanígy, a tömegáramok maguk körül gravitomágneses örvényteret keltenek.

Határozzuk meg a csőben áramló tömeg gravitomágneses terét a (4.14) egyenlet alapján. Induljunk ki abból, hogy a hosszú egyenes, ρA lineáris tömegsűrűségű áramlási cső gravitációs tere hengersizmetrikus és a tér erővonalai az áramlási cső szimmetria tengelyére merőlegesen befelé mutatnak a tér bármely pontjában. Az áramlási sebéséget és az áramlási csőben lévő tömeg gravitációs terét a (4.14) egyenletbe helyettesítve adódik, hogy a gravitomágneses tér örvényes erővonalai - hasonlóan az áramjárta egyenes vezető körül kialakuló mágneses tér erővonalaihoz - koncentrikus gyűrűként veszik körül az áramlási csövet (lásd 9. ábra). A gravitomágneses tér irányát a balkéz szabály adja. Bal kezünk hüvelykujja az áramlás irányába mutat, akkor a többi ujj a tömegáram körül kialakult gravitomágneses tér irányát mutatja. A



9. ábra Csőben áramló folyadék gravitomágneses tere.

gravitomágneses teret a leírt módon meghatározva

$$\mathbf{b} = -\frac{4G\rho A}{c^2 r^2} \mathbf{v} \times \mathbf{r} = -\frac{4G\rho Av}{c^2 r} \mathbf{e}_\varphi. \quad (4.15)$$

A ρAv szorzat helyére az I_m tömegáramot írva közvetlenül a tömeg-áramerősséggel fejezhetjük ki a gravitomágneses teret,

$$\mathbf{b} = -\frac{4GI_m}{c^2 r} \mathbf{e}_\varphi, \quad (4.16)$$

amely arányos az áramerősséggel és hosszú, egyenes tömegáram esetén az áramvonaltól mért távolsággal fordítottan arányos. A gravitomágneses tér - azonos eredménnyel - a gravitomágneses gerjesztési törvényből is meghatározható.

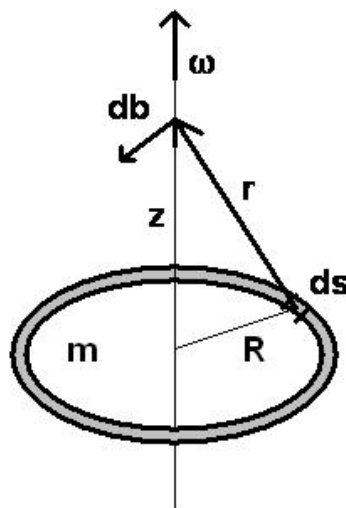
c.) Forgó körgyűrű gravitomágneses tere

Tekintsünk egy R sugarú, m tömegű vékony körgyűrűt. Forogjon a körgyűrű a középpontján átmenő, síkjára merőleges tengely körül, a 10. ábra szerint. A gyűrű keresztmetszetén időegység alatt áthaladó tömeg, a tömegáram erőssége, $I_m = m\omega/(2\pi)$. A (4.12) Biot-Savart törvény ekkor

$$d\mathbf{b} = -\frac{Gm\omega}{\pi c^2 r^3} d\mathbf{s} \times \mathbf{r} \quad (4.17)$$

alakú lesz. Határozzuk meg a szimmetriatengelyen, a középponttól z távolságra lévő pontban a körgyűrű $d\mathbf{s}$ ívelem vektora által létrehozott gravitomágneses teret.

A $d\mathbf{s}$ ívelem vektor és az \mathbf{r} helyvektorok merőlegesek egymásra a gyűrű kerületének bármely pontjában. Vegyük észre, hogy egy $d\mathbf{s}$ ívelem és a gyűrű kerületének átellenes pontjában lévő $d\mathbf{s}'$ ívelemek által létrehozott $d\mathbf{b}$ és $d\mathbf{b}'$ tereknek a forgástengelyre merőleges komponenseik kiejtik egymást, a tengellyel párhuzamos komponenseik pedig



10. ábra Forgó körgyűrű gravitomágneses tere.

összeadódnak. A $d\mathbf{b}$ tengellyel párhuzamos komponense $dbz = db \cos \alpha$, ahol $\cos \alpha = R/r$. A forgó gyűrű által a P pontban létrehozott teljes gravitomágneses teret a $d\mathbf{b}$ elemi terek összegeként kapjuk. A \mathbf{b} eredő gravitomágneses tér tehát párhuzamos a forgástengellyel, a szögsebesség-vektorral ellentétes irányú és nagyságát a

$$\mathbf{b} = -\frac{2Gm\omega \cos \alpha}{2\pi c^2 r^2} \int_0^{2\pi R} ds = -\frac{2GmR^2}{c^2 r^3} \boldsymbol{\omega} \quad (4.18)$$

kifejezés adja. Felhasználva, hogy $r^2 = R^2 + z^2$, a gyűrű által, a P pontban létrehozott gravitomágneses térerősség vektor a szögsebesség-vektorral kifejezve,

$$\mathbf{b} = -\frac{2GmR^2}{c^2(R^2 + z^2)^{3/2}} \boldsymbol{\omega}. \quad (4.19)$$

4.4. Erőhatás és forgatónyomaték gravitomágneses térben

A gravitomágneses térben mozgó testekre a tér gravitomágneses Lorentz-erőt fejt ki. Mashhoon [14] levezetése alapján, egy \mathbf{b} erősségű gravitomágneses térben \mathbf{v}_2 sebességgel mozgó m_2 tömegű tömegpontra

$$\mathbf{F}_{\text{GL}} = 2m_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{b} \quad (4.20)$$

Lorentz-erő hat. Ha a \mathbf{b} gravitomágneses teret egy \mathbf{v}_1 sebességgel mozgó tömegpont a (4.13) egyenletben leírt módon hozza létre, akkor az m_1 tömegpont által az m_2 -re kifejtett gravitomágneses Lorentz-erő

$$\mathbf{F}_{\text{GL}} = -4 \frac{Gm_1 m_2}{c^2 r^3} \mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}). \quad (4.21)$$

Ezzel megkaptuk a gravitomágneses Lorentz-erő (3.18) egyenletben bemutatott alakját. A mozgó testekre ható Lorentz-erő velejárója, hogy gravitomágneses térben lévő \mathbf{m}_{GM} gravitomágneses dipólusra

$$\mathbf{M} = 2\mathbf{m}_{\text{GM}} \times \mathbf{b} \quad (4.22)$$

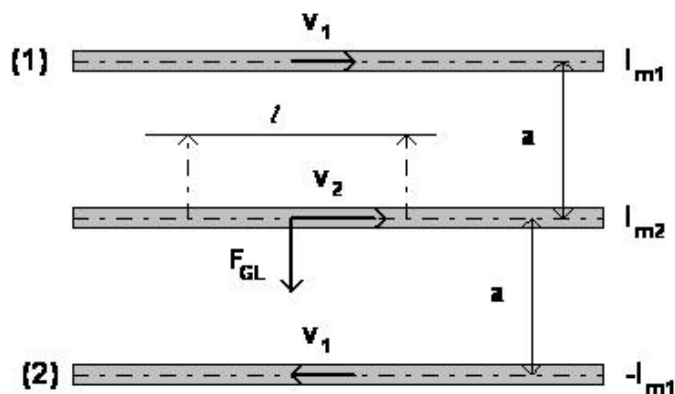
forgatónyomaték hat. Gravitomágneses dipólus minden forgó test. A forgó test gravitomágneses dipólmomentuma

$$\mathbf{m}_{\text{GM}} = I_m \mathbf{A}, \quad (4.23)$$

ahol \mathbf{A} az I_m tömegárammal körülfolylt felület normális vektora.

a.) Párhuzamos csövekben áramló folyadék gravitomágneses kölcsönhatása

Mozgó tömegpontok helyett érdekesebb olyan szimmetrikus tömegkonfigurációk gravitomágneses kölcsönhatásának vizsgálata, ahol az elrendezésből fakadóan a tömegvonzás nem ad járulékot a kölcsönhatáshoz, csupán a gravitomágneses erő. Az elektromos analógiából vett, két párhuzamos, áramjárta vezető mágneses kölcsönhatása vonzó minta lenne, mert a két semleges vezető test között nincs elektromos, csak mágneses kölcsönhatás. A vezetők semlegessége azon alapszik, hogy azonos



11. ábra Tömegáramok között fellépő gravitomágneses Lorentz-erő.

mennyiségben tartalmaznak pozitív és negatív töltéseket. Sajnálatos módon, ennek gravitációs analógiája nem működik, mert negatív tömeg nem létezik. Két párhuzamos csőben folyó víz nem csak gravitomágnesesen, hanem tömegvonzással is hat egymásra. A tömegvonzás hatása három párhuzamos cső alkalmazásával küszöbölhető ki.

Tekintsünk ehhez a gondolatkísérlethez három párhuzamos, egy síkban fekvő, hosszú, egyenes csövet. A felső (1), és az alsó (2) cső középvonala egyaránt a távolságra van a középső cső középvonalától. A csövek átmérője $d \ll a$, és bennük ugyanaz a ρA lineáris sűrűségű folyadék áramlik. (Lásd a 11. ábrát) A felső, illetve alsó csőben az áramlási sebesség azonos, v_1 nagyságú és ellentétes irányú. A középső csőben az áramlás sebessége v_2 és iránya a felső cső áramlási irányával egyező.

Az elrendezés szimmetriája miatt, az (1) és (2) csövek középső csőre kifejtett tömegvonzása teljes mértékben kiegyenlíti egymást, a középső csőre ható gravitációs erők eredője zérus.

Az (1) és (2) csövekben folyó tömegáramok a középső cső helyén, az (4.18) egyenlet szerint azonos irányú, az ábra síkjából kifelé mutató és azonos nagyságú gravitomágneses teret gerjesztenek. Ezért, a középső cső áramlási cső helyén megjelenő, eredő gravitomágneses tér az egyik cső által gerjesztett térerősség kétszerese;

$$b = \frac{8G\rho Av_1}{ac^2}. \quad (4.24)$$

Az (1) és (2) áramlási csövek által a középső cső l hosszúságú szakaszára kifejtett $\mathbf{F}_L = 2m\mathbf{v}_2 \times \mathbf{b}$ Lorentz-erő $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{b}$ vektorszorzat miatt a gravitomágneses Lorentz-erő iránya a (2) vezető felé mutat. Az ellentétes irányú tömegáramok vonzzák, az azonos irányúak taszítják egymást. A középső cső l hosszúságú szakaszában lévő tömeg

$m = \rho Al$, a rá ható gravitomágneses Lorentz-erő nagysága pedig

$$F_L = \frac{16G\rho^2 A^2 v_1 v_2 l}{ac^2}. \quad (4.25)$$

Tegyünk egy nagyságrendi becslést az elképzelt elrendezésben ennek az erőnek a nagyságára. Tegyük fel, hogy a lineáris tömegsűrűség, $\rho = 1 \text{ kg/m}$, $v_1 = v_2 = 100 \text{ m/s}$, a csövek távolsága $0,1 \text{ m}$, akkor a középső cső hosszegységnyi szakaszára ható erő nagyságrendje 10^{-24} N/m . Ekkora erő nem kimutatható.

Összehasonlítás kedvéért megjegyzem, hogy két, egymástól $0,01 \text{ méter}$ távolságra lévő, 20 amper erősségű áram által átjárt, párhuzamos alufólia csíkok esetén 10^{-2} N/m a hosszegységre jutó Lorentz-erő. Ezt az erőt szoktuk az elektromosságtan előadáson demonstrációs kísérletben bemutatni. Gravitomágnesség csak bolygótömeg nagyságrendben és km/s nagyságrendű sebességek esetén ad kísérletileg kimutatható erőhatást.

b.) Pörgettyűre ható gravitomágneses forgatónyomaték

A (4.22) és (4.23) egyenletekben felírtuk gravitomágneses dipólra, vagyis forgó testre ható gravitomágneses forgatónyomatéket és a gravitomágneses dipólmomentum definícióját. Határozzuk meg egy pörgettyű gravitomágneses dipólmomentumát. Tekintsük a pörgettyűt valamely tengely körül ω szögsebességgel forgó merev testnek. A pörgettyű egy dm elemi tömege által képviselt tömegáram $dI_m = dm\omega/(2\pi)$. Ha a tömegelem r távolságra van a forgástengelytől, akkor az általa körbejárt terület $A = r^2\pi$. A tömegelem (4.23) egyenlet alapján számított, gravitomágneses dipólmomentuma

$$d\mathbf{m}_{GM} = dm r^2 \boldsymbol{\omega} / 2. \quad (4.26)$$

Ugyanennek a tömegelemnek az impulzusmomentuma

$$d\mathbf{N} = dm \boldsymbol{\omega} r^2. \quad (4.27)$$

Tehát egy merev pörgettyű \mathbf{N} impulzusmomentuma az ugyanarra a forgástengelyre számított a gravitomágneses dipólmomentum kétszerese, $\mathbf{N} = 2\mathbf{m}_{GM}$ függetlenül a test alakjától vagy tömegeloszlásától. A pörgettyűre ható forgatónyomaték ennek alapján

$$\mathbf{M} = \mathbf{N} \times \mathbf{b} \quad (4.28)$$

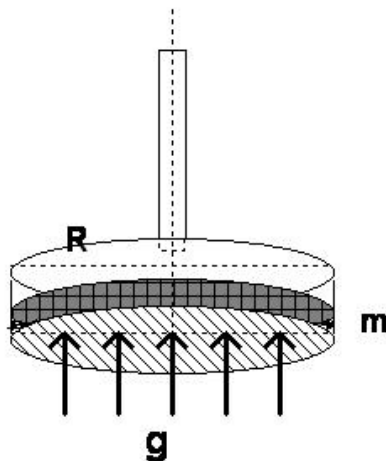
alakban is felírható.

A mechanika törvényei szerint, a szabad tengelyű pörgettyűre ható forgatónyomaték impulzusmomentummal párhuzamos komponense gyorsítja a pörgettyű forgását, az impulzusmomentumra merőleges komponense precesszióra kényszeríti a pörgettyű forgástengelyét. A precesszió szögsebessége

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{N} \times \mathbf{M} / N^2. \quad (4.29)$$

Ha a forgatónyomatéket gravitomágneses tér fejti ki, akkor a precesszió

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{b}) / N^2. \quad (4.30)$$



12. ábra Folyadéktartály időben változó gravitációs tere.

Ha a pörgettyű impulzuszómomentuma merőleges a gravitomágneses térre, akkor $\boldsymbol{\Omega} = -\mathbf{b}$.

4.5. Gravitomágneses indukció jelensége

A (4.1) és (4.2) gravitomágneses Maxwell-egyenletek magukban hordozzák a gravitomágneses indukció jelenségét is. Az időben változó gravitomágneses tér gravitációs örvényteret kelt maga körül, az időben változó gravitációs tér pedig gravitomágneses örvényteret hoz létre. Ha tömegáramok nincsenek a térben, az indukciót leíró (4.1) és (4.2) egyenlet integrális alakja:

$$\oint \mathbf{g} ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{b} d\mathbf{A} \quad (4.31)$$

$$\oint \mathbf{b} ds = \frac{2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{g} d\mathbf{A} \quad (4.32)$$

a.) Időben változó gravitációs tér

A következő gondolat kísérletben nézzük meg az időben változó gravitációs tér által indukált gravitomágneses teret. Tekintsünk egy henger alakú edényt, melynek alapterülete $R^2\pi$ és az edénybe egy csövön folyadékot engedünk be, vagy veszünk ki. Az edény alaplappja alatt, a lap közelében ($d \ll R$) homogén gravitációs tér alakul ki, amely időben változik. Lásd az 12. ábrát!

Az edény alatti gravitációs tér az edény alja felé mutat és pillanatnyi értéke Gauss-tétel alapján számolva

$$g(t) = 2Gm(t)/R^2, \quad (4.33)$$

ahol $m(t)$ az edényben lévő pillanatnyi anyagmennyiséget jelöli. Alkalmazzuk az indukált \mathbf{b} tér meghatározására a (4.32) egyenletet. Zárt görbének vegyünk fel egy az edény aljához közel eső, azzal párhuzamos síkú, r sugarú kört, melynek középpontján átmegy a hengeres edény szimmetriatengelye. A kör sugara kisebb az edény sugaránál ($r < R$). A kör mentén az indukált \mathbf{b} örvények mindenhol érintő irányúak és állandó nagyságúak, így az egyenlet bal oldala $2\pi r b$ értéket vesz fel. A \mathbf{g} homogén gravitációs tér (4.33) egyenletben kapott kifejezését a (4.32) egyenletbe helyettesítve, és a homogén teret integrálva a zárt görbe által határolt $r^2\pi$ területére és elvégezve az idő szerinti deriválást

$$2\pi r b = \frac{4\pi Gr^2 dm(t)}{c^2 R^2 dt}, \quad (4.34)$$

Innen az indukált gravitomágneses tér

$$b = \frac{2Gr}{c^2 R^2} \frac{dm(t)}{dt}, \quad (4.35)$$

Ha $r/R \sim 1$, a dm/dt pedig kg/s nagyságrendű, akkor az indukált gravitomágneses tér nagyságrendje 10^{-27} $1/s$.

b.) Időben változó gravitomágneses tér

Az áramjárta tekercs mintájára egy vízvezetékcsőből hajlított hengeres „tekercsbe” vizet áramoltatva, a csőspirál belsejében homogén, a henger szimmetria tengelyével párhuzamos irányú gravitomágneses tér alakul ki. A csőspirálban áramló víz helyettesíthető egy szimmetria tengelye körül forgó hengerrel is. A forgó henger belsejében szintén homogén, a henger szimmetria tengelyével párhuzamos gravitomágneses tér jön létre. A kialakuló gravitomágneses tér erőssége, egy M tömegű, f fordulatszámmal forgó henger esetén a (4.10) egyenletben adott gravitomágneses gerjesztési törvény alapján:

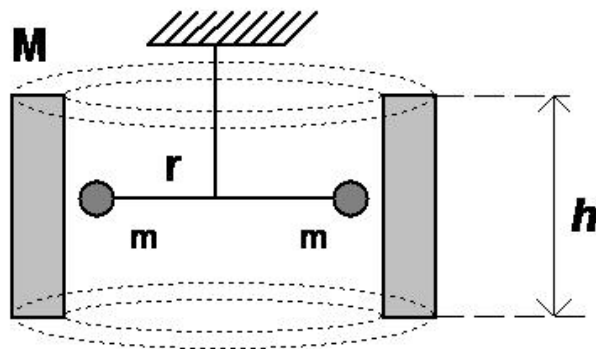
$$b = \frac{8\pi G M f}{c^2 l}, \quad (4.36)$$

ahol l henger magassága. Ha a henger forgásának fordulatszáma változik, akkor a henger belsejében lévő homogén gravitomágneses tér erőssége is változik. Az időben változó gravitomágneses tér pedig az (4.31) egyenlet szerint gravitációs örvényteret indukál.

Az indukált gravitációs tér elvben kimutatható egy, a függőleges helyzetű, forgó henger belsejébe torziós szálon belógó súlyzónak a henger fékezésekor, vagy gyorsításakor történő elfordulásával.

A fékezett henger belsejében, az r sugarú kör mentén indukált gravitációs körfeszültség a (4.31) egyenlet alapján egyenlő az r sugarú körön átmenő gravitomágneses fluxus felének időegységre eső megváltozásával;

$$2\pi r g_i = -\frac{r^2\pi}{2} \frac{db}{dt}, \quad (4.37)$$



13. ábra Forgó henger fékezésekor indukált gravitációs örvénytér.

az indukált gravitációs tér nagysága, pedig,

$$g_i = -\frac{r}{4} \frac{d\omega}{dt}. \quad (4.38)$$

Az indukált gravitációs tér dt idő alatt

$$dN = \Theta d\omega = 2mr g_i dt \quad (4.39)$$

értékkel változtatja meg a két m tömegből álló "súlyzó" impulzusmomentumát. Felhasználva a (4.38) egyenletet és alkalmazva a $\Theta = 2mr^2$ összefüggést,

$$d\omega = -db/4. \quad (4.40)$$

A súlyzó szögsebességének megváltozása a gravitomágneses tér változásának negyedével egyenlő.

Vizsgáljuk meg a 13. ábra szerinti elrendezésben, az f fordulatszámmal forgó henger megállításakor mekkora szögsebességre tesznek szert a felfüggesztett m tömegek. Legyen $M = 1000 \text{ kg}$, $f = 50 \text{ 1/s}$ és $l = 1 \text{ m}$! Ekkor $b = 9,3 \cdot 10^{-22} \text{ 1/s}$. A henger f -ről történő teljes lefékezése során, az eredetileg nyugalomban lévő súlyzó $d\omega = 2,3 \cdot 10^{-22} \text{ 1/s}$ szögsebességre tesz szert. Ez a szögsebesség semmilyen mérhető elfordulást nem okoz a torziós szálon.

4.6. Gravitációs hullámok

a.) A gravitomágneses Maxwell-egyenletek hullám megoldása

A (4.1) - (4.4) gravitomágneses Maxwell-egyenleteknek - hasonlóan az elektromágneses Maxwell-egyenletekhez - a $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ gravitációs és $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$ gravitomágneses terekre létezik

hullámmegoldása. Ha feltételezzük, hogy a térben nincsenek sem mozgó sem nyugvó tömegek, azaz $\mathbf{j}_m = \rho = 0$, akkor a (4.2) egyenlet

$$\text{rot } \mathbf{b} = \frac{2}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}, \quad (4.41)$$

és a (4.3) egyenlet $\text{div } \mathbf{g} = 0$ alakot ölt. Vegyük a (4.1) egyenlet rotációját és a (4.41) egyenlet idő szerinti parciális deriváltját

$$\text{rot rot } \mathbf{g} = -\frac{1}{2} \text{rot } \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{b} = \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial t^2}, \quad (4.42)$$

majd ejtsük ki a két (4.42) egyenletből a \mathbf{b} -t, akkor

$$\text{rot rot } \mathbf{g} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.43)$$

egyenlethez jutunk. Felhasználva a $\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}$ azonosságot, valamint a $\text{div } \mathbf{g} = 0$ feltételt,

$$\Delta \mathbf{g} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.44)$$

hullámmegyenlethez jutunk. A (4.44) egyenlet megoldása c , azaz a fény vákuumbeli sebességével terjedő gravitációs, vagy gravitomágneses hullám.

Egy periodikus, gravitációs gömbhullámot $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{g}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$ alakú függvény ír le, amely kielégíti a (4.44) egyenletet, és amelyben \mathbf{k} a hullám terjedési irányába - gömbhullám esetén radiális irányba - mutató hullámszám vektor, ω a körfrekvencia és \mathbf{g}_0 az amplitúdó vektor. A gravitomágneses gömbhullámban terjedő \mathbf{b} teret a (4.1) egyenlet idő szerinti integrálásával kapjuk,

$$\mathbf{b} = -2 \int \text{rot } \mathbf{g} dt. \quad (4.45)$$

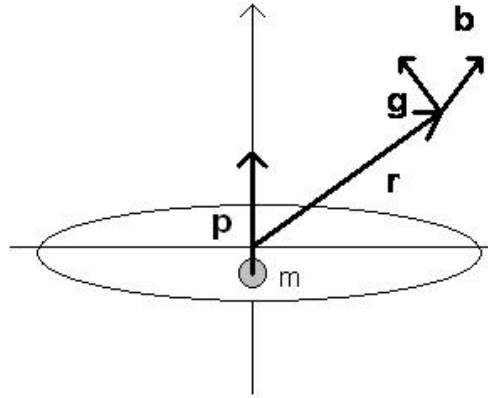
Felhasználva, hogy $\text{rot } \mathbf{g} = i\mathbf{k} \times \mathbf{g}$ és $\omega/k = c$, valamint hogy \mathbf{g} gömbhullám

$$\mathbf{b} = -\frac{2}{rc} \mathbf{r} \times \mathbf{g}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}. \quad (4.46)$$

Mivel a (4.1) és (4.2) áramsűrűséget nem tartalmazó alakja szimmetrikus \mathbf{g} -re és \mathbf{b} -re, ezért a gravitációs gömbhullámban teljesül a

$$\mathbf{g} = \frac{c}{2r} \mathbf{r} \times \mathbf{b}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}. \quad (4.47)$$

egyenlőség is. A (4.46) és (4.47) egyenletek alapján látszik, hogy a gravitációs hullámban \mathbf{g} és \mathbf{b} merőlegesek egymásra és a hullám terjedési irányra. Az egyenletek alapján a két amplitúdó vektor abszolút értéke $b_0 = 2g_0/c$ egyenlőségnek tesz eleget. Kijelenthetjük, hogy a gravitomágneses közelítés alapján létezhetnek fénysebességgel terjedő, transzverzális, gravitációs hullámok, amelyekben egymásra és terjedés irányára merőleges gravitációs és gravitomágneses terek terjednek.



14. ábra A rezgő tömegpont által keltett gravitomágneses hullámok terjedése.

b.) *A gravitomágneses hullámok keltése*

A gravitomágneses Maxwell-egyenletek hullámmegoldása nem ad információt a gravitomágneses hullámok keletkezéséről. Az elektrodinamikai analógiák alapján szóba jöhet, hogy a gravitációs hullámokat időben változó gravitációs, vagy gravitomágneses dipólus kelti. Mivel negatív tömeg nem létezik, a gravitációs dipólust két ellentétes előjelű tömeg formájában nem hozhatjuk létre. Élhetünk viszont azzal a lehetőséggel, ahogy az elektromosságban is tesszük, amikor a rezgő $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}$ dipólust egy $I = I_0 \cos \omega t$ váltóárammal helyettesítjük, ahol $I_0 = p_0 \omega / l$.

Vegyünk egy l hosszúságú szakaszon folyó, $I_m = I_{m0} \cos \omega t$ periódikusan változó tömegáramot, amely $\mathbf{p}(t)$ a gravitációs dipólust képviseli $\mathbf{p}(t) = I_m l / \omega$ alakban. Ekkor az elektromágneses analógiára, a hullámban terjedő gravitációs teret kifejezhetjük a gravitomágneses dipólmomentum vektor idő szerinti második deriváltjával;

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = \frac{G}{c^2} [\mathbf{r}(\mathbf{r}\ddot{\mathbf{p}})/r^3 - \ddot{\mathbf{p}}/r] = \frac{G}{c^2 r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}}), \quad (4.48)$$

a gravitomágneses teret pedig a

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \frac{2G}{c^3 r^2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}, \quad (4.49)$$

függvény írja le. A (4.48) és (4.49) egyenletekbe helyettesítsük be a $\ddot{\mathbf{p}} = -\omega I_m \mathbf{l} \cos \omega t$ kifejezést. Ha a tömegáramot egy m tömegpont l amplitúdójú, ω körfrekvenciájú harmonikus rezgése hozza létre, akkor $I_{m0} = m\omega$, $\omega = v/l$ és $\ddot{\mathbf{p}} = -mv^2/l^2 \mathbf{l} \cos \omega t$. Ekkor a hullámban terjedő gravitációs és gravitomágneses terek abszolút értéke a koordináta rendszer középpontjától $r \gg l$ távolságra és ϑ irányban

$$g(r, \vartheta, t) = \frac{Gmv^2}{lr^2} \sin \vartheta \cos(\omega t - kr), \quad (4.50)$$

illetve,

$$b(r, \vartheta, t) = \frac{2Gmv^2}{lc^3} \sin \vartheta \cos(\omega t - kr) \quad (4.51)$$

függvény szerint változik.

Megállapítható, hogy a (4.51) egyenletben a gravitomágneses hullámkomponenst leíró függvény együtthatója ütközik a gravitomágnességet leíró közelítés feltételeivel, mivel a gravitomágnesség a Φ/c^2 , illetve v^2/c^2 legfeljebb első rendű hatványit tartalmazó tagokra érvényes. Az (4.51) egyenletben szereplő együttható viszont tartalmazza a Φ/c^2 és a v/c szorzatát. Ki kell jelentenünk, hogy a gravitomágneses Maxwell-egyenletek hullám megoldása sugallja a gravitációs hullámok létét, de a gravitációs hullámok keletkezését a gravitomágneses közelítés nem tudja konzisztensen leírni. Ezért a gravitációs hullámokról a gravitomágnesség eszközével többet nem tudhatunk meg.

5. A Földdel kapcsolatos gravitomágneses jelenségek

5.1. A Föld, mint gravitomágneses dipólus

Laboratóriumi körülmények között, két test között fellépő gravitációs erő kimutatása nem egyszerű. A Cavendish-kísélet mechanika előadáson szokásos, demonstrációs bemutatása komoly előkészületeket igényel. Két mozgó test között fellépő gravitomágneses erő laboratóriumi körülmények között történő kimutatása pedig, a 4. fejezetben bemutatott, igen gyenge hatású gravitomágnesség miatt, nem lehetséges. A gravitomágneses kölcsönhatás gyengeségének oka, hogy a gravitomágneses Lorentz-erő $v_1 v_2 / c^2$ szorzóval gyengébb a nehezen kimutatható gravitációs erőnél is. A $v_1 v_2 / c^2$ szorzó, még km/s nagyságú sebességek esetén is, legalább tíz nagyságrenddel gyengébb a gravitációs kölcsönhatásnál. A gravitomágnesség jelenségének kísérleti kimutatásához a laboratóriumban előforduló tömegeknél nagyobb tömegű testekre van szükség. Tekintsük a közelünkben lévő legnagyobb tömegű testet, a Földet, amely $5,98 \cdot 10^{24} kg$ tömegével esetleg érzékelhető gravitomágnességet képvisel. Külső, azaz a Föld forgásától független megfigyelő számára, a forgó Föld tömegáramot képvisel és ennek következtében, gravitomágneses tere van. A forgó tömeg gravitomágneses dipólmomentummal rendelkezik, ezért a Föld gravitomágneses tere dipóltér.

A pontszerű, \mathbf{m} momentumvektorral jellemzett dipólus tere - függetlenül annak elektromos, mágneses, vagy gravitomágneses jellegétől - ismert vektortér:

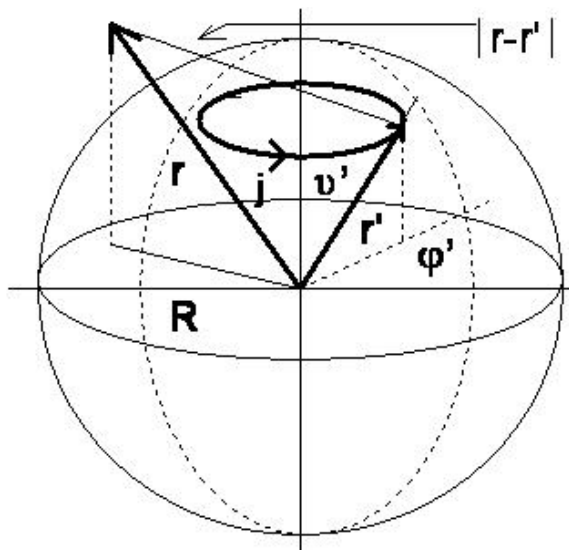
$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r^5} [3\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{m}) - \mathbf{m}r^2]. \quad (5.1)$$

Gömbi koordinátákban felírva, a koordinátarendszer középpontjában, a koordinátarendszer tengelyével párhuzamos momentumvektorral elhelyezett, pontszerű dipólus tér-erőssége $v_r = 2\alpha m \cos \vartheta / r^3$, $v_\vartheta = \alpha m \sin \vartheta / r^3$, ahol m a dipólmomentum és α együttható a mértékrendszerre jellemző állandó. SI egységekben felírt gravitomágneses dipóltér esetén $\alpha = -2G/c^2$.

Az (5.1) egyenletben felírt pontszerű dipólus közelítés akkor érvényes, ha a teret keltő objektum (áramjárta tekercs, vagy körvezető, mágnesrúd, stb.) mérete a megfigyelő tőle mért távolsághoz képest kicsi. Például egy áramjárta szolenoid tekercs közvetlen közelében a mágneses tér nem írható le pontszerű dipólközelítéssel. Egy, a Föld felszín közelében keringő mesterséges holdon lévő megfigyelő sem tekintheti pontszerűnek a forgó Földet. Milyen szerkezetű és erősségű a Föld - pontszerűnek nem tekinthető - dipólusának gravitomágneses tere? Mivel $\mathbf{m}_F = \Theta_F \boldsymbol{\omega}_F / 2$, erre az előbbieket alapján most csak azt mondhatjuk, hogy a Földtől elegendően nagy, $r \ll R_F$ távolságra a Föld gravitomágneses terét közelíthetjük

$$b_r = -2 \frac{G \Theta_F \omega_F}{c^2} \cos \vartheta / r^3, \quad b_\vartheta = -\frac{G \Theta_F \omega_F}{c^2} \sin \vartheta / r^3, \quad (5.2)$$

pontszerű dipóltérrel, ahol az F index a Föld tehetetlenségi nyomatékára és szögsebességére utal. A Föld felszín közelében ez a közelítés nem alkalmazható



15. ábra Merev testként forgó, homogén gömb gravitomágneses vektorpotenciálja.

ellenőrzés nélkül. A továbbiakban célul tűzzük a forgó Föld felszín közeli gravitomágneses terének meghatározását.

5.2. Forgó, homogén gömb gravitomágneses tere

a.) A tömegáram-sűrűség térfogati integrálja

Bár a Föld nem homogén tömegeloszlású, gravitomágneses terének meghatározását közelítsük egy homogén, merev testként forgó gömb környezetében kialakuló gravitomágneses térrel. Tekintsünk egy ω szögsebességgel forgó, R sugarú, ρ sűrűségű homogén gömböt. A gravitomágneses tér meghatározásának egy lehetséges módja, hogy a Poisson-egyenlet megoldását reprezentáló (4.8) egyenlet jobb oldalának integrálásával meghatározzuk a forgó gömb gravitomágneses vektorpotenciálját, és a vektorpotenciál rotációjaként állítjuk elő a gravitomágneses tér komponenseit. Vegyünk fel ehhez egy gömbi koordinátarendszert, melynek szimmetria tengelye a gömb forgástengelye és tekintsük az 15. ábrát.

Mutasson az $\mathbf{r}' = [r', \vartheta', \varphi']$ helyvektor arra a térfogatelemre, amely vektorpotenciált hoz létre az $\mathbf{r} = [r, \vartheta, \varphi]$ helyvektorral jelzett pontban. Határozzuk meg az áramsűrűséget, mint r' és ϑ' koordináták függvényét. Válasszuk ki a forgó gömb dr' szélességű és $r'd\vartheta'$ magasságú $r' \sin \vartheta'$ sugarú körgyűrű elemét, amelynek szimmetria tengelye a forgástengely. Ez a gyűrű egy dI_m erősségű tömeg köráramot képvisel. Mivel a gömb homogén, az elemi gyűrű tömege

$$dm = 2\pi\rho r'^2 \sin \vartheta' d\vartheta' dr', \quad (5.3)$$

A gyűrű forgása által létrehozott áramerősség egyenlő a gyűrű tömegének és

fordulatszámának a szorzatával, $dI_m = \omega dm/(2\pi)$, amiből a gyűrű keresztmetszetén vett tömegáram-sűrűség:

$$j_\varphi(r', \vartheta') = \rho\omega r' \sin \vartheta'. \quad (5.4)$$

A forgásszimmetria miatt az áramsűrűség nem függ φ' -től. Az áramsűrűség vektornak, és ezáltal a vektorpotenciálnak csak φ' irányú komponense van. Helyettesítsük (4.8) egyenletbe a kapott áramsűrűséget és az \mathbf{r} valamint \mathbf{r}' helyvektorok különbségének abszolút értékét, mint a bevezetett gömbi koordináták függvényét. A gömb vektorpotenciálja ebben a rendszerben

$$a_\varphi(r, \vartheta) = -\frac{2G\rho\omega}{c^2} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r'^3 \sin^2 \vartheta' d\varphi' d\vartheta' dr'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \varphi')}} \quad (5.5)$$

integrállal adódik, de az (5.5) egyenletben felírt elliptikus integrál nem határozható meg zárt alakban, így analitikus vizsgálatra nem alkalmas.

b.) Gravitomágneses tér a forgó gömb forgástengelye mentén

A (4.19) egyenletben meghatároztuk az R sugarú, m tömegű, ω szögsebességgel forgó körgyűrű gravitomágneses terét, a gyűrű szimmetriatengelye mentén. Ilyen elemi körgyűrűkből ki tudjuk rakni a gömb térfogatát. Tekintsünk a forgó, merev gömb belsejében egy x sugarú, dx szélességű, dy vastagságú körgyűrűt, amelynek szimmetriatengelye a forgástengely. Az elemi körgyűrű tömege, $dm = 2\pi\rho x dx dy$. Ekkor, a gyűrű középpontjától z távolságra, a gyűrű gravitomágneses tere

$$db_z(z) = -\frac{4\pi G\rho\omega x^3}{c^2(z^2 + x^2)^{3/2}} dx dy. \quad (5.6)$$

A forgó, homogén gömb forgástengelye mentén kialakuló gravitomágneses terét meg tudjuk határozni a gömböt alkotó, forgó körgyűrűk gravitomágneses terének összegéből. A forgó körgyűrűknek a forgástengely mentén radiális irányú gravitomágneses tere nincsen, $b_r = 0$. A z -forgástengellyel párhuzamos, b_z komponens pedig az elemi körgyűrűk mágneses terének a gömb térfogatára vett összegéből kapjuk.

Vegyünk fel egy henger-koordinátarendszert. Legyen egy körgyűrű középpontja y távolságra a gömb középpontjától. (Lásd a 16. ábrát.) A forgástengelyen fekvő P pontban, amely z távolságra van a forgó gömb középpontjától, azaz a koordinátarendszer kezdőpontjától, a kiválasztott körgyűrű

$$db_z(z) = -\frac{4\pi G\rho\omega x^3}{c^2[(z - y)^2 + x^2]^{3/2}} dx dy \quad (5.7)$$

gravitomágneses teret gerjeszt. Ahhoz, hogy a 16. ábra szerinti $P(0, z)$ pontban gerjesztett gravitomágneses teret, vagyis a $b_z(0, z)$ függvényt meghatározzuk, össze kell

adni valamennyi forgó gyűrű járulékát, vagyis az (5.7) egyenletet integrálni kell a gömb térfogatára:

$$b_z(0, z) = -\frac{4\pi G\rho\omega}{c^2} \int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{x^3 dx dy}{[(z-y)^2 + x^2]^{3/2}}. \quad (5.8)$$

Az integrál kiszámítását lépésekben végezzük. Először, parciális integrálással határozzuk meg az

$$\int \frac{x^3 dx}{[(z-y)^2 + x^2]^{3/2}} = \frac{x^2 + 2(z-y)^2}{[(z-y)^2 + x^2]^{1/2}} \quad (5.9)$$

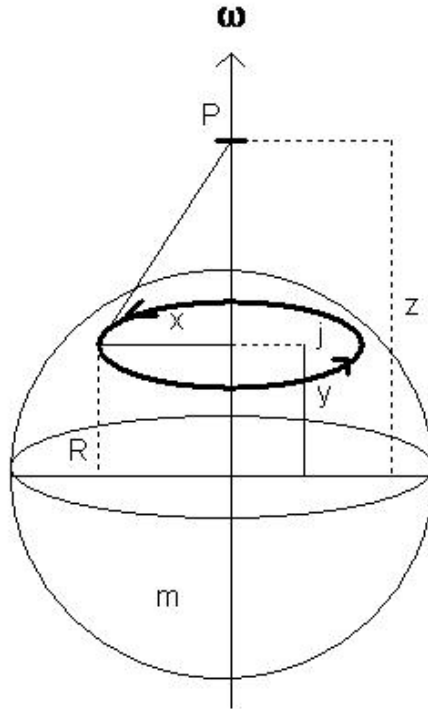
határozatlan integrált. A határozott integrál az integrálási határokon vett helyettesítési értékekkel

$$\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{x^3 dx}{[(z-y)^2 + x^2]^{3/2}} = \frac{R^2 + y^2 + 2z^2 - 4zy}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2yz}} + 2y - 2z \quad (5.10)$$

eredményt ad. Ezután elvégezzük a dy szerinti integrálást,

$$\int \left(\frac{R^2 + y^2 + 2z^2 - 4zy}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2yz}} + 2y - 2z \right) dy = \quad (5.11)$$

$$\pm \frac{1}{15z^3} \sqrt{R^2 - 2yz + z^2} \left[2R^4 + R^2 z(2z - y) + 3z^2(y^2 - 6yz + 4z^2) \right] + y^2 - 2yz$$



16. ábra Forgó, homogén gömb gravitomágneses tere a forgástengely mentén.

Az integrálási határokon való helyettesítést két ágon vizsgáljuk, a \pm előjelnek megfelelően. A \pm előjel éppen a gömbön kívül és a gömbön belüli tartományt választja két részre:

a.) $z \geq R$

$$\int_{-R}^R \left(\frac{R^2 + y^2 + 2z^2 - 4zy}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2yz}} + 2y - 2z \right) dy = \frac{4}{15} \frac{R^5}{z^3} \quad (5.12)$$

b.) $z < R$

$$\int_{-R}^R \left(\frac{R^2 + y^2 + 2z^2 - 4zy}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2yz}} + 2y - 2z \right) dy = \frac{10R^2 - 6z^2}{15} \quad (5.13)$$

Az eredményt az (5.8) egyenletbe helyettesítve kapjuk az R sugarú, forgó gömb gravitomágneses terét a forgástengelyen, a középponttól $z \geq R$ távolságra, illetve az $z < R$, gömbön belüli tartományra:

$$b_z(0, z) = -\frac{4\pi G\omega\rho}{c^2} \frac{4R^5}{15z^3}, \text{ ha } z \geq R, \quad b_z(0, z) = -\frac{4\pi G\omega\rho}{c^2} \frac{10R^2 - 6z^2}{15}, \text{ ha } z < R. \quad (5.14)$$

Felhasználva, hogy a gömb tömege $m = 4\pi R^3\rho/3$, tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = 2mR^2/5$, az eredmény

$$b_z(0, z) = -2\frac{G\Theta\omega}{c^2 z^3}, \text{ ha } z \geq R, \quad b_z(0, z) = -\frac{G\Theta\omega}{c^2} \frac{5R^2 - 3z^2}{R^5}, \text{ ha } z < R. \quad (5.15)$$

Az (5.15) egyenletben szereplő két tartomány határán, a $z = R$ helyen, a külső és a belső teret leíró függvények értéke azonos. A kapott eredmény alapján megállapítható, hogy a forgástengely mentén a pólusoknál, illetve a gömbön kívüli tartományban a forgó, homogén gömb gravitomágneses tere olyan, mintha a középpontjában $\theta\omega/2$ gravitomágneses dipólmomentumú, pontszerű dipólus lenne elhelyezve. A forgó homogén gömb gravitomágneses tere a pólusoknál, közvetlenül a gömb felszínén dipóltér. Ebből azonban még nem következik, hogy egy külső megfigyelő a gömb felszíne mentén, mindenhol dipólteret talál.

c.) *A forgó, homogén gömb gravitomágneses Laplace- és Poisson-egyenlete*

A vektorpotenciált nem tudjuk meghatározni az (5.5) egyenletből, ezért a forgó gömb gravitomágneses terét más úton, a (4.7) egyenlet közvetlen megoldásával kell meghatározni. Időben változó gravitációs tér nincs, ezért a (4.7) egyenlet a

$$\Delta \mathbf{a} = \begin{cases} 8\pi Gc^{-2} \mathbf{j}_m, & \text{ha } r < R \\ 0, & \text{ha } r \geq R, \end{cases} \quad (5.16)$$

alakot ölti. Az (5.16) egyenlet lineáris parciális differenciálegyenlet; a gömbön kívüli tartományban Laplace-egyenlet, és Poisson-egyenlet a gömb térfogatán belül.

Írjuk fel gömbi koordinátákban az (5.16) egyenletet. Alkalmazzuk a \mathbf{j}_m tömegáram-sűrűség (5.4) egyenletben, gömbi koordinátákban meghatározott alakját. Vezessük be

az $A = 4\pi G\rho\omega c^{-2}$ jelölést. Mivel a vektorpotenciál hengersizmetrikus és csak φ komponense van, így az (5.16) egyenlet gömbi koordinátás alakja

$$\frac{\partial^2(ra_\varphi)}{r\partial r^2} + \frac{\partial}{r^2\partial\vartheta} \left[\frac{\partial(\sin\vartheta a_\varphi)}{\sin\vartheta \partial\vartheta} \right] = \begin{cases} 2Ar \sin\vartheta, & \text{ha } r < R \\ 0, & \text{ha } r \geq R. \end{cases} \quad (5.17)$$

Az (5.17) parciális differenciálegyenletet az $r \geq R$, illetve $r < R$ tartományokra, külön-külön kell megoldani, és a megoldásokat illeszteni kell az $r = R$ helyen. A gömbön kívüli, illetve gömbön belüli tartományok vektorpotenciálját a_{I} -el, illetve a_{II} -vel jelöljük.

Először oldjuk meg az (5.17) egyenlet homogén részét. A homogén egyenlet általános megoldása az $r \geq R$ tartományra érvényes megoldás. Az $r < R$ tartományra érvényes megoldást pedig úgy kapjuk, hogy a homogén egyenlet általános megoldásához hozzáadjuk az (5.17) egyenlet inhomogén részének egy partikuláris megoldását.

d.) *A Laplace-egyenlet megoldása*

Az $a_\varphi(r, \vartheta)$ vektorpotenciál

$$\frac{\partial^2(ra_\varphi)}{r\partial r^2} + \frac{\partial}{r^2\partial\vartheta} \left[\frac{\partial(\sin\vartheta a_\varphi)}{\sin\vartheta \partial\vartheta} \right] = 0 \quad (5.18)$$

Laplace-egyenletének megoldását a valós függvények halmazán keressük. A megoldásában segítséget nyújt, hogy $r \gg R$ esetben a vektorpotenciál rotációjának komponensei $b_r = 2\alpha m \cos\vartheta/r^3$, $b_\vartheta = \alpha m \sin\vartheta/r^3$, kvázipolinóm alakban, egy hatványfüggvény és egy harmonikus függvény szorzatából állnak.

Állítsuk elő ennek a homogén, másodrendű, parciális differenciálegyenletnek az általános megoldását

$$a_h(r, \vartheta) = \sum_i r^i (a_i \sin\vartheta + b_i \cos\vartheta) \quad (5.19)$$

hatványsor alakban. Az a_i és b_i együtthatókra egyenleteket kaphatunk, mivel az $a_h(r, \vartheta)$ megoldásnak ki kell elégíteni az (5.18) egyenletet.

Az (5.19) vektorpotenciált az (5.18) Laplace-egyenletbe helyettesítve az (5.19) egyenlettel definiált függvény csak akkor megoldás, ha az i kitevőkre fennáll az $i(i+1) = 2$ egyenlőség, továbbá, ha valamennyi b_i együttható zérus. Az a_i együtthatók bármilyen konstans értéket felvehetnek. Az $i(i+1) = 2$ egyenlet megoldása $i_{1,2} = 1$ és -2 . Az (5.19) megoldás ennek alapján két tagból áll. Az (5.18) Laplace-egyenlet és ezzel az (5.17) egyenlet gömbön kívüli, ($r \geq R$) térfogatra vonatkozó általános megoldása az

$$a_1 = a_h(r, \vartheta) = \left(a_1 r + \frac{a_2}{r^2} \right) \sin\vartheta, \quad (5.20)$$

vektorpotenciál, ahol az a_1 és a_2 integrációs állandók a peremfeltételekből határozhatók meg. Az (5.20) vektorpotenciál rotációjából megkapjuk a gravitomágneses térerősség $r \geq R$ tartományban érvényes komponenseit,

$$b_{\text{I}r} = 2 \left(a_1 + \frac{a_2}{r^3} \right) \cos\vartheta, \quad b_{\text{I}\vartheta} = \left(-2a_1 + \frac{a_2}{r^3} \right) \sin\vartheta. \quad (5.21)$$

e.) *Az inhomogén egyenlet megoldása*

Keressük az (5.17) inhomogén egyenlet, az a_φ vektorpotenciál

$$\frac{\partial^2(ra_\varphi)}{r\partial r^2} + \frac{\partial}{r^2\partial\vartheta} \left[\frac{\partial(\sin\vartheta a_\varphi)}{\sin\vartheta \partial\vartheta} \right] = 2Ar \sin\vartheta \quad (5.22)$$

Poisson-egyenletének egy partikuláris megoldását

$$a_{ih} = f(r) \sin\vartheta \quad (5.23)$$

alakban. Az (5.23) megoldást az (5.22) egyenletbe helyettesítve az ismeretlen $f(r)$ függvényre $r^2 f'' + 2r f' - 2f = 2Ar^3$ másodrendű, lineáris differenciálegyenletet kapunk, amelynek partikuláris megoldása:

$$f(r) = \frac{A}{5} r^3. \quad (5.24)$$

Az (5.22) Poisson-egyenlet partikuláris megoldása az

$$a_{ih}(r, \vartheta) = \frac{A}{5} r^3 \sin\vartheta \quad (5.25)$$

függvény. Az (5.22) Poisson-egyenlet gömbön belüli, $r < R$ térfogatra érvényes általános megoldása

$$a_{II} = a_h + a_{ih} = (a_3 r + \frac{a_4}{r^2} + \frac{A}{5} r^3) \sin\vartheta. \quad (5.26)$$

Az a_3 és a_4 integrációs állandókat itt is a peremfeltételekből lehet meghatározni. A gravitomágneses tér gömbi koordinátákban kifejezett komponensei az $r < R$ tartományra az (5.26) egyenletben adott a_{II} vektorpotenciál rotációjából

$$b_{IIr} = 2 \left(a_3 + \frac{a_4}{r^3} + \frac{A}{5} r^2 \right) \cos\vartheta, \quad b_{II\vartheta} = \left(-2a_3 + \frac{a_4}{r^3} - \frac{4A}{5} r^2 \right) \sin\vartheta \quad (5.27)$$

formában adódnak.

f.) *A megoldás peremfeltételei*

Az a_1 , a_2 , a_3 és a_4 integrációs állandók meghatározásához szükségünk van peremfeltételekre. A vektorpotenciál $r \rightarrow \infty$ esetén zérus. Ez a feltétel akkor teljesül, ha az (5.21) egyenletben az $a_1 = 0$. Az $r \rightarrow 0$ esetén a vektorpotenciál nem lehet szinguláris. Ez akkor biztosított, ha az (5.27) egyenletben $a_4 = 0$. Ezzel két integrációs állandót meghatároztunk. A gömb felszínén a két megoldásnak illeszkednie kell egymáshoz, tehát $a_I(R) = a_{II}(R)$. Ebből, (5.20) és (5.26) egyenletek felhasználásával következik, hogy

$$a_2 = a_3 R^3 + \frac{A}{5} R^5 \quad (5.28)$$

A gravitomágneses tér nem hat kölcsön a merev testként forgó gömb tömegével, mivel a tér csak külső megfigyelő számára létezik. Ebben az esetben megkövetelhetjük, hogy a gravitomágneses térnek ne legyen ugrása az $r = R$ közegethatáron, azaz a

$\mathbf{b}_I(R) = \mathbf{b}_{II}(R)$, újabb peremfeltételt kapjuk. Ennek a peremfeltételnek ϑ komponense a $b_{I\vartheta}(R) = b_{II\vartheta}(R)$ egyenlet. Ebből, felhasználva az (5.21) és (5.27) egyenleteket, a_2 -re és a_3 -ra az

$$a_2 = -2a_3R^3 - \frac{4A}{5}R^5 \quad (5.29)$$

összefüggést kapjuk. Az (5.28) és (5.29) egyenletrendszerből a_2 és a_3 integrációs állandó meghatározható;

$$a_2 = -\frac{2}{15}AR^5, \quad a_3 = -\frac{1}{3}AR^2. \quad (5.30)$$

Ezzel megkaptuk az (5.17) egyenlet teljes megoldását. A vektorpotenciál az R sugarú gömbön kívül és belül

$$a_I = -\frac{2}{15} \frac{AR^5}{r^2} \sin \vartheta, \quad a_{II} = \left(\frac{1}{5}Ar^3 - \frac{1}{3}AR^2r \right) \sin \vartheta. \quad (5.31)$$

A peremfeltételekből meghatározott integrációs állandókat az (5.21) és (5.27) egyenletekbe helyettesítve meghatározhatjuk a gravitomágneses tér komponenseit;

$$b_{Ir} = -\frac{4}{15}A \frac{R^5}{r^3} \cos \vartheta, \quad b_{I\vartheta} = -\frac{2}{15}A \frac{R^5}{r^3} \sin \vartheta, \quad (5.32)$$

illetve

$$b_{IIr} = \left(-\frac{2}{3}AR^2 + \frac{2}{5}Ar^2 \right) \cos \vartheta, \quad b_{II\vartheta} = \left(\frac{2}{3}AR^2 - \frac{4A}{5}r^2 \right) \sin \vartheta. \quad (5.33)$$

Helyettesítsük az (5.32) egyenletbe az A együttható értékét. Használjuk az $m = 4\pi R^3 \rho/3$, és $\Theta = 2mR^2/5$ helyettesítést. Ezzel megkapjuk a forgó, homogén gömb felszínén tapasztalható gravitomágneses teret:

$$b_r = -\frac{2G}{c^2} \frac{\Theta \omega}{r^3} \cos \vartheta, \quad \text{illetve} \quad b_\vartheta = -\frac{G}{c^2} \frac{\Theta \omega}{r^3} \sin \vartheta. \quad (5.34)$$

Ugyanezzel a helyettesítéssel a forgó, homogén gömb felszínén kívüli tartományban érvényes gravitomágneses vektorpotenciálja is kifejezhető a forgó gömb tehetetlenségi nyomatékával és a forgási szögsebességgel;

$$a_\varphi(r, \vartheta) = -\frac{G}{c^2} \frac{\Theta \omega}{r^2} \sin \vartheta. \quad (5.35)$$

Kimondhatjuk, hogy egy forgó, homogén gömb gravitomágneses vektorpotenciálja, illetve gravitomágneses tere a gömbön kívüli tér bármely pontjában olyan, mintha a gömb középpontjában lévő, a forgó gömb gravitomágneses dipólmomentumával azonos erősségű, pontszerű dipólus hozná azt létre.

A fenti kijelentés - a teljes formai analógia miatt - érvényes homogén térfogati töltéeloszlású, forgó, szigetelő gömb mágneses vektorpotenciáljára és mágneses terére is. Ekkor a forgó töltött gömb által gerjesztett mágneses tér a gömbön kívül bármely pontban olyan, mintha azt a gömb középpontjában lévő, a forgó gömb dipólmomentumával azonos erősségű, pontszerű, mágneses dipólus hozná létre.

5.3. A forgó Föld gravitomágneses dipóltere

A forgó Föld csak durva közelítéssel tekinthető homogén sűrűségű gömbnek. A Föld sűrűségét a geofizikusok, Völgyesi [17] gömbszimmetrikus $\rho(r)$ sűrűségfüggvénnyel írják le. Egyszerűbb esetben két koncentrikus gömbbel (köpeny és mag), két eltérő sűrűségű belső és külső tartománnyal modellezik. A középponttól, 3400 km-ig tart a mag, melynek átlagos sűrűsége $11,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ és fölötte 3400 km-től 6370 km-ig a köpeny, melynek átlagsűrűsége $4,2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Vizsgáljuk meg hogyan alkalmazható a homogén gömb gravitomágneses terére kapott (5.35) megoldás az inhomogén, de gömbszimmetrikus tömegeloszlású gömbök esetére. Az (5.16) parciális differenciálegyenlet megoldását, két különböző sűrűségű tartományból álló gömbhéj esetére elvégezve, a megoldás részleteinek mellőzésével a gömb felszínén kívüli tartományra kapott gravitomágneses vektorpotenciál

$$a_\varphi(r, \vartheta) = -\frac{G}{c^2} \frac{(\Theta_{01} + \Theta_{12})\omega}{r^2} \sin \vartheta, \quad (5.36)$$

ahol a Θ_{01} és Θ_{12} a belső, illetve külső tartomány tehetetlenségi nyomatékát jelöli, a $(\Theta_{01} + \Theta_{12})\omega$ szorzat pedig a forgó gömb teljes impulzusmomentuma.

Az eljárást tetszőleges számú gömbhéjra folytatva belátható, hogy homogén gömbhéjakból kirakott gömb esetén mindig

$$a_\varphi(r, \vartheta) = -\frac{G}{c^2} \frac{\sum \Theta_i \omega}{r^2} \sin \vartheta, \quad (5.37)$$

alakú vektorpotenciál írja le a gömbön kívüli gravitomágneses teret. Ez igaz tetszőleges számú gömbhéj és héjvastagság $\rightarrow 0$ határátmenet esetén is, ami azt jelenti, hogy tetszőleges, folytonos, gömbszimmetrikus sűrűségeloszlás esetén is dipólteret kapunk a gömb felszínén. Ezzel általánosíthatjuk a forgó, homogén gömb gravitomágneses terének tételét:

Az (5.37) egyenlet alapján kimondhatjuk, hogy egy merev testként forgó, gömbszimmetrikus tömegeloszlású gömb gravitomágneses tere a gömbön kívüli tér bármely pontjában olyan, mintha azt a gömb középpontjában lévő, a forgó gömb gravitomágneses dipólmomentumával azonos erősségű, pontszerű dipólus hozná létre.

A fenti tételből következik, hogy a forgó Föld gravitomágneses tere dipóltér, a Föld felszínétől tetszőleges távolságban lévő pontban. A gravitomágneses tér erőssége a pólusoknál

$$b_F(P) = \frac{2G}{c^2} \frac{\Theta_F \omega}{R_F^3}. \quad (5.38)$$

Felhasználva, hogy a Föld tehetetlenségi nyomatéka [17] alapján $\Theta_F = 0,33M_F R_F^2$, a gravitomágneses tér pólusoknál mérhető erőssége $b_F(P) = 3,33 \cdot 10^{-14} \text{ 1/s} = 0,217 \text{ arcsec/év}$.

Az 1980-as évek közepén felmerült az ötlet, hogy földi laboratóriumban megmérjék a forgó Föld gravitomágneses terét. Braginski [18] szerint a Déli sarkon létesítendő laboratóriumban elhelyezett Foucault-inga lengési síkjának elfordulásából

lehet meghatározni a forgó Föld gravitomágneses terét. A Foucault-inga azért alkalmas a föld gravitomágneses terének mérésére, mivel az inga nem forog együtt a Földdel. A Déli-sarkon álló laboratórium falaihoz képest az inga naponta egyszer körbefordul. Az inga napi körbefordulása azonban a gravitomágneses tér miatt nem teljesen 360 fok, hanem évente 0,217 ívmásodperccel több. A mérés nehéz, mert az évi 0,217 ívmásodperc kimutatása nagyon érzékeny műszerrel lehetséges és meg kell gátolni egyéb, zavaró hatásokat. A mérési eljárás tervét 2002-ben Pasqual [19] aktualizálta, de akkor már a 2004-ben induló Gravity Probe B kísérletre koncentrált szakma.

5.4. Gravitomágnesség a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben

A forgó Föld – mint minden forgó test - gravitomágneses dipólus, így saját környezetében gravitomágneses dipólteret hoz létre. Egy külső, tehát nem a Földdel együttforgó, megfigyelő közvetlenül a Föld forgási pólusai közelében $3,33 \cdot 10^{-14}$ 1/s erősségű gravitomágneses teret észlel. A Földdel együtt forgó megfigyelő számára a Föld nyugalomban van, a Föld felszínéhez rögzített vonatkoztatási rendszerben a Föld nem gerjeszt gravitomágneses teret, ezért a megfigyelő hiába áll a Föld pólusán, az ő vonatkoztatási rendszerében ilyen tér nincs.

Ez természetesen nem jelenti azt, hogy a Föld felszínén rögzített vonatkoztatási rendszerben, pl. egy laboratórium falai között más - a Földhöz képest mozgó - testek nem keltenek gravitomágneses teret. Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben, mozgó testek gravitomágneses hatását. A Föld vonatkoztatási rendszerében a Föld mozdulatlan és körülötte, $K \rightarrow NY$ irányban keringenek az égitestek. Így képzelte a középkorban a tudomány az Univerzumot. Most éppen erre a vonatkoztatási rendszerre van szükségünk. A keringési szögsebesség egy forgás nélküli Univerzum-modellben minden testre azonos, $\omega_U = -\omega_F$. Az ω_U szögsebességgel keringő tömegek a Föld vonatkoztatási rendszerében gravitomágneses teret keltenek.

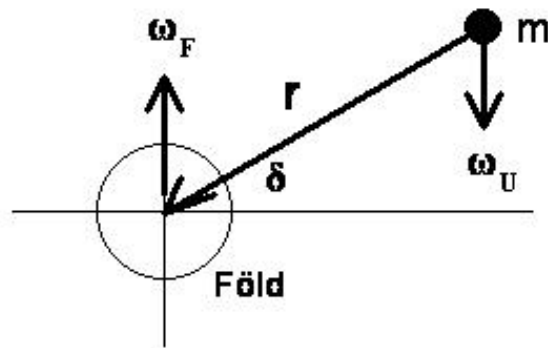
Tekintsünk az 17. ábrát. A Föld középpontjától r távolságban lévő, m tömegű testet a Föld középpontjával összekötő szakasz δ szöget zár be a Föld egyenlítői síkjával. Ezt a szöget a deklinációjának hívják. Mutasson az \mathbf{r} vektor a test középpontjából a Föld középpontjába. Ekkor a test Földhöz viszonyított, pálya menti sebessége

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}_U. \quad (5.39)$$

A vektorszorzat abszolút értéke $v = r\omega_U \cos \delta$. Írjuk fel a v sebességgel mozgó m tömeg a Föld vonatkoztatási rendszerében keltett gravitomágneses terét a Biot-Savart törvény alapján.

$$\mathbf{b} = -\frac{2Gm}{c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} = 2 \frac{Gm}{c^2} \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}_U)}{r^3} \quad (5.40)$$

A gravitomágneses tér merőleges a \mathbf{v} és \mathbf{r} vektorokra, és $\delta = 0$ esetén párhuzamos a Föld tengely körüli forgásának szögsebesség vektorával. A \mathbf{b} vektornak a $\delta \neq 0$ esetben



17. ábra A Föld felszínén, a Föld forgása miatt, külső objektum által okozott gravitomágneses tér.

a Föld forgástengelyével párhuzamos és arra merőleges komponense van.

$$b_{\parallel} = 2 \frac{Gm}{c^2} \frac{\omega_F}{r} \cos^2 \delta, \quad b_{\perp} = 2 \frac{Gm}{c^2} \frac{\omega_F}{r} \cos \delta \sin \delta \quad (5.41)$$

A Föld forgástengelyére merőleges komponensnek a Föld egy teljes körülfordulására vett átlagértéke zérus. Ezért ez a komponens hosszú időskálán elhanyagolható. A párhuzamos komponens viszont állandó a Föld forgása során. Ezzel megállapítottuk, hogy a Földtől r távolságra lévő, m tömegű, δ deklinációjú testek a Földön, hosszú időre átlagolva, a Föld forgástengelyével párhuzamos

$$\mathbf{b} = 2 \frac{Gm}{c^2} \frac{\cos^2 \delta}{r} \boldsymbol{\omega}_F \quad (5.42)$$

gravitomágneses teret hoznak létre. A tér erőssége az m/r hányadostól és a deklinációtól függ.

a.) *A Nap gravitomágneses tere a Föld vonatkoztatási rendszerében*

Határozzuk meg ezek után Nap által, a Föld tengely körüli forgása következtében, a Föld felszínén keltett gravitomágneses terét. A Naprendszerben vizsgálódva

megállapítható, hogy a Nap tömegének és földtől mért távolságának m_N/r_N hányadosa nagyságrendekkel nagyobb a bolygók tömeg/távolság hányadosánál.

A Földhöz rögzített megfigyelő számára, a Nap pálya menti sebessége kis mértékben eltér az (5.39) egyenletben megadott értéktől, mivel a Nap egy év alatt, az állócsillagoknál eggyel kevesebbszer kerüli meg a Földet. A csillagokra vonatkozó 366,24 helyett, 365,24 körülfordulás 0,003 -nél kisebb átlagos, relatív eltérést okoz a pálya menti sebességben, ezért annak hatását elhanyagoljuk. A Nap deklinációja időben változik, jó közelítéssel a $\delta(t) = \alpha \sin \omega_N(t - t_0)$ függvény szerint, ahol $\alpha = 23^\circ 27'$, $\omega_N = 2\pi/365,24$; t = a január 1. óta eltelt napok száma és $t_0 = 284$. A Nap által keltett gravitomágneses tér

$$\mathbf{b}_N(t) = 2 \frac{G\omega_F m_N}{c^2 r_N} \cos^2 \delta(t) \quad (5.43)$$

A $\cos \delta$ értéke 1 és 0,917 között változik és a $\cos^2 \delta$ egy évre számolt átlaga 0,92.

A Nap egy évre átlagolt gravitomágneses tere $b_N = 1,3 \cdot 10^{-12}$ 1/s. Ez a tér kb. 40-szer erősebb a Föld külső megfigyelő számára érzékelhető dipólterének az (5.38) egyenletben, a pólusra levezetett értékénél.

b.) A Napnál távolabbi objektumok által keltett gravitomágneses tér

Ha a gravitomágneses hatás vizsgálatában a Napnál távolabbi objektumokat vesszünk számba, számolni kell azzal, hogy a vizsgált objektum Földhöz rögzített, forgó rendszerbeli kerületi sebessége meghaladja a fénysebességet. Ez kb. 25 CSE távolságon, tehát még a Naprendszeren belül bekövetkezik. Ki kell azonban jelteni, hogy négyes távolság invarianciája biztosítja, hogy a forgó rendszer alkalmas az ilyen objektumok leírására is, ha a vizsgált objektum a forgó rendszerben épp a forgó rendszer forgási szögsebességével, de azzal ellentétes irányban forog. Ez a visszafelé forgás azt jelenti, hogy a vizsgált objektum a nyugvó rendszerben nem végez forgó mozgást. Másrészt, az (5.42) egyenletben, a \mathbf{b} vektor kifejezésében nem szerepel az objektum kerületi sebessége, csak a szögsebessége.

Ha távolodunk a Földtől, számottevő gravitomágneses tér keltésében olyan objektumok jöhetnek szóba, amelyeknek nem csak távolabbiak a Napnál, hanem a tömegük is jelentősen nagyobb a Nap tömegénél. Ilyen objektum a Tejútrendszer, amelynek középpontja 25 000 fényév távolságra van a Földtől, tömege, irodalmi adatok alapján 200 – 600 Mrd m_N és deklinációja $\delta = -29^\circ$. Ha a 25 000 fényév távolságot átváltjuk csillagászati egységre, vagyis a Nap – Föld átlagos távolságra, akkor $r_T = 1,6 \cdot 10^9 r_N$ távolságot kapunk. Becslésnek vegyük a tejút tömegét 320 Mrd naptömegnek, ekkor a Tejút tömeg/távolság aránya $m_T/r_T = 200m_N/r_N$. Figyelembe véve, hogy a $\cos^2 \delta = 0,76$, a Tejútrendszer tömege a Föld forgása következtében a Napnál 150-szer, a Föld dipólterének maximumánál 6000-szer erősebb, $b_T = 2 \cdot 10^{-10}$ 1/s erősségű gravitomágneses teret kelt. A közeli extra galaxisok, mint a Nagy- és Kis Magellán-felhő és az Andromeda köd tömeg/távolság aránya

és így a Földre kifejtett gravitomágneses hatása legalább két nagyságrenddel kisebb a Tejút keltette gravitomágneses térerősségnél. A nagy tömegű objektumok mellett nem szabad elfelejteni, hogy az Univerzum összes anyaga ad - mérésel szét nem választható - járulékot a Földön keltett gravitomágneses térhez, és az objektumok gravitomágneses hatásának szuperpozícióját érzékeljük. A két bemutatott példában mindössze a Nap és a Tejút hatását vettük figyelembe. Az Univerzum gravitomágneses hatásának meghatározásához az Univerzum teljes, a Földdel kauzális kapcsolatban álló, V_K térfogatra összegezni kell a gravitomágneses gerjesztést. Az összes „kauzális” tömeg együttes gravitomágneses tere pedig az (5.42) egyenletben szereplő tömegek hatásának összegeként

$$\mathbf{b} = 2 \frac{G\boldsymbol{\omega}_F}{c^2} \int_{V_K} \frac{\rho(r)}{r} \cos^2 \delta dV \quad (5.44)$$

alakba írható.

Mielőtt az Univerzum gravitomágneses gravitomágneses hatását leíró integrált vizsgálnánk, nézzük meg, milyen hatása van az Univerzum gravitomágneses terének a forgó Földön.

c.) A külső testek gravitomágneses terének hatása a forgó Földön

A Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben jelen van az Univerzum anyaga által, a Föld forgása következtében gerjesztett gravitomágneses tere. A gravitomágnesség egyik megnyilvánulása, hogy mozgó testekre gravitomágneses Lorentz-erőt fejt ki, ami egy m tömegű, v sebességű test esetén; $\mathbf{F}_{GL} = 2m\mathbf{v} \times \mathbf{b}$. Ez az erő erős a formai hasonlóságot mutat a forgó rendszerekben, így a Földön mozgó testekre ható Coriolis tehetetlenségi erővel, $\mathbf{F}_{COR} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_F$.

Az (5.42) egyenletben láttuk, hogy az égi objektumok gravitomágneses tere párhuzamos a Föld forgási szögsebesség vektorával. Ennek következtében a külső objektumok - beleértve a teljes Univerzumot - által kifejtett gravitomágneses Lorentz-erő is párhuzamos a Coriolis-erővel, mondhatnánk járulékot ad ahhoz. Az Univerzum gravitomágneses terének Coriolis-erő járuléka

$$\mathbf{F}_{COR_U} = \mathbf{F}_{GL} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_F \left(\frac{2G}{c^2} \int_{V_K} \frac{\rho(r)}{r} \cos^2 \delta dV \right). \quad (5.45)$$

Forgó vonatkoztatási rendszerekben a Coriolis-erő forgatónyomatéka kényszeríti precesszióra a szabad pörgettyűk forgástengelyét, forgatja el a Foucault-inga lengési síkját a vonatkoztatási rendszer forgásával ellentétes irányba. A gravitomágneses Lorentz-erő is ugyanilyen hatású forgatónyomatékot fejt ki a szabad pörgettyűkre és az ingákra. A külső objektumok gravitomágneses tere által keltett precesszió szögsebessége:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\mathbf{b} \quad (5.46)$$

Az Univerzum gravitomágneses terének forgó Földön kifejtett hatásmechanizmusa ismeretében, egyre izgalmasabb kérdés, mekkora lehet az Univerzum keltette gravitomágneses tér erőssége. Ha a \mathbf{b} -ben csak a Tejút $2 \cdot 10^{-10}$ 1/s mértékű gravitomágneses terét vesszük figyelembe, akkor az évi túlfordulás mértéke 21,7 ívperc (a GB P kísérletben a geodetikus precesszió értéke 6,6 ívmásodperc/év). Az (5.42) egyenletből látszik, hogy az Univerzum anyaga által keltett gravitomágneses tér erőssége csak $1/r$ szerint csökken a távolsággal, ellentétben a forgó testek gravitomágneses terének $1/r^3$ lecsengésével. Így az Univerzum gravitomágneses tere - a Tejútrendszeren túli tömegek hatása miatt - jóval meghaladhatja a fenti értéket.

d.) A tehetetlenségi erők és a Mach-elv

Ernst Mach, bécsi fizikus az 1880-as években komoly kritika alá vette a newtoni mechanikát [28] a gyorsuló rendszerekben, önkényesen felvett, fiktív, tehetetlenségi erők miatt. Ezeket - nem törődve Newton harmadik törvényével - ellenerő nélküli erőként használja a newtoni mechanika. Ezzel - Mach szerint - a newtoni elmélet önmagával áll ellentmondásban.

Mach a tehetetlenségi erőkről azt vallotta, hogy ugyanúgy két test között fellépő erők, mint az összes többi, a természetben előforduló erő. A tehetetlenségi erők „másik végére” az Univerzum anyagát tette. Mach elve szerint gyorsuló rendszerekben fellépő transzlációs, centrifugális és Coriolis-erőt az Univerzum fejt ki a testekre.

Einstein azt vallotta [29], hogy az általános relativitáselmélet kidolgozásában egyik fő motivációja a Mach-elv bizonyítása volt. Későbbi éveiben írja, annak sem igazolása, sem tagadása nem született meg az elméletből. Mint Hraskó Péter állítja [30], a Mach-elv igazolására azóta sem született kidolgozott elmélet. A Mach-elv a tudomány mai stádiumában nyitott kérdésnek számít.

Ezen a ponton meg kell jegyeznünk, hogy az (5.44) egyenletköl következik, hogy az Univerzum a forgó Földön (és más forgó objektumon) kifejtett hatása járulékot ad a Coriolis-erőhöz, ami felveti a Mach-elv Coriolis-erőre vonatkozó alkalmazásának lehetőségét. Nem mindegy azonban, hogy mekkora ez a járulék. Ezért vállalkozunk arra, hogy becslést adunk az Univerzum által, a hozzá viszonyítva forgó vonatkoztatási rendszerekben keletkezett gravitomágneses térre.

e.) Az Univerzum gravitomágneses hatása és a Coriolis-erő

Az Univerzum gravitomágneses terének becsléséhez Univerzum modellre van szükségünk. A legegyszerűbb feltevések szerint tekintsünk egy (Mpc léptékben) homogén, hatalmas kiterjedésű, táguló anyagfelhőt, amelynek minket az a része érdekel, amellyel kauzális kapcsolatban állunk. Ezt a kauzalitás határáig kiterjedő objektumot tekintsük Univerzumnak, mert a kauzális tartományon túli anyag nem fejt ki hatást a Földre. Ebben az Univerzumban forog a Föld, ezért vonatkoztatási rendszerében az Univerzum tömegárama gravitomágneses teret kelt.

Az általunk vizsgált gravitomágneses tér az általános relativitáselmélet $1/c^2$ szerinti lineáris közelítéséből származik, tehát a várt eredmény is ebben a közelítésben érvényes. Számoljuk ki az (5.44) egyenletben felírt integrált. A metrikában fellépő relativisztikus korrekcióktól eltekintünk, mivel az már $1/c^4$ rendű járulékot ad. Az Univerzum radiális tágulása nem ad járulékot a gravitomágneses térhez, mivel ebben az esetben az (5.40) egyenletben szereplő $\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ vektorszorzat zérus. A forgásszimmetriát figyelembe véve a térfogatelem $dV = 2\pi r^2 \cos \delta d\delta dr$. A konstans sűrűséget kiemelve, és dV -t az (5.44) egyenletbe helyettesítve

$$\mathbf{b} = 4\pi \frac{G\rho\boldsymbol{\omega}_F}{c^2} \int_0^{R_K} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \cos^3 \delta d\delta dr. \quad (5.47)$$

Az (5.47) egyenletet δ , majd r szerint integrálva és felhasználva, hogy $\rho = 3M_U/(4\pi R_K^3)$,

$$\mathbf{b} = \frac{2GM_U}{c^2 R_K} \boldsymbol{\omega}_F. \quad (5.48)$$

Az Univerzum által keltett gravitomágneses tér erőssége az Univerzum paramétereitől, pontosabban a kauzális tartomány méretétől és a benne lévő tömegtől függ. A szakirodalom alapján [31] az Univerzum látható tartományának tömege - ami fizikailag megegyezik a kauzális tartomány tömegével - $M_U \sim 10^{53} \text{ kg}$, illetve mérete $R_K \sim 10^{26} \text{ m}$ nagyságrendbe esik. Ezeket az értékeket az (5.48) egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\frac{2GM_U}{c^2 R_K} \approx 1, \quad (5.49)$$

amiből az következik, hogy az Univerzum forgó Földön keltett gravitomágneses tere $\mathbf{b} \approx \boldsymbol{\omega}_F$. Az eredmény komoly következményekkel jár a Coriolis-erőre nézve, hiszen az Univerzum gravitomágneses tere nagyjából ugyanakkora hatást fejt ki a Földön mozgó testekre, mint a fiktív, newtoni Coriolis-erő. A két erő együttes hatására a Foucault-inga, és a szabad pörgettyűk forgástengelye naponta közel kétszer fordulna körbe a forgó Földön. A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy azok legalább három tizedesjegy pontossággal naponta csak egy fordulatot tesznek. A két erő nem létezhet egymás mellett. A fiktív Coriolis-erőre az általános relativitáselméletből levezetett gravitomágnesség szerint nincs szükség, mert a Coriolis-erőt maga az Univerzum fejti ki a forgó vonatkoztatási rendszerben mozgó testekre.

A fent ismertetett levezetés szerint az általános relativitáselmélet - Einstein korai sejtésének megfelelően - részlegesen igazolja a Mach-elvet. A három tehetetlenségi erő egyike, a Coriolis-erő nem fiktív erő, hanem valódi, az Univerzum tömege által kifejtett gravitomágneses Lorentz-erő. Másrészt, a megállapítás, miszerint a Coriolis-erőt az Univerzum gravitomágneses tere okozza, azt jelenti, hogy az (5.49) egyenletnek nem csak közelítőleg hanem legalább három tizedesjegy pontossággal kell teljesülnie. Ez fontos adat az Univerzumra nézve. Ha így tekintünk a (5.49) egyenletre, akkor azt látjuk, hogy az egy Schwarzschild kritérium jellegű egyenlet. Az pedig azt sugallja,

hogy a kauzalitási határ egy fekete lyuk eseményhorizontjával esik egybe. Vagyis elképzelhető, hogy a fekete lyukakat tartalmazó Univerzum maga is fekete lyuk.

6. Pörgettyűk relativisztikus mozgása és a Gravity Probe B kísérlet

6.1. Szabad pörgettyűk tulajdonságai

a.) Klasszikus pörgettyűk

A klasszikus fizikában a szabad pörgettyűk mozgásának fontos tétele, hogy a szabad, vagyis egy pontban felfüggesztett, nyomatékmentes pörgettyűk forgástengelye megtartja irányát az "abszolút" térben. Ezt azt jelenti, hogy a pörgettyű forgástengelye önmagával párhuzamos helyzetben marad, akár hogy mozgatják a pörgettyűt a felfüggesztésénél fogva. Ezért a pörgettyűk navigációs eszközként is használhatók, jól helyettesítik az iránytűt, olyan helyen, ahol ferromágneses anyagok, vagy indukciós eszközök közelsége megzavarja a mágnesű viselkedését. A leírt szabályok szerint működő pörgettyű forgástengelye inerciarendszerben mozdulatlan. Forgó vonatkoztatási rendszerben felfüggesztett pörgettyű - ha a pörgettyű és a vonatkoztatási rendszer tengelyei nem párhuzamosak - forgástengelye, a Coriolis-erő forgatónyomatéknak hatására, a forgó vonatkoztatási rendszer szögsebességével, de azzal ellentétes irányba elfordul, idegen szóval precesszál. Inerciarendszerhez kötött megfigyelő ekkor is azt tapasztalja, hogy a pörgettyű forgástengelye nem fordul el, annak helyzete folyamatosan párhuzamosak korábbi helyzetükkel, a tengely a tér ugyanazon, távoli pontjába mutat.

A fenti bekezdésben leírt viselkedés a klasszikus fizikában is csak ideális pörgettyűre érvényes. Az ideális pörgettyű a forgástengelyére vonatkozóan tökéletesen forgásszimmetrikus. Aszimmetrikus tömegeloszlás esetén a pörgettyűre ható külső erő - például a Föld nehézségi ereje, forgó vonatkoztatási rendszerben a centrifugális erő - forgatónyomatékat fejt ki forgástengelyre, ami annak precessziós elfordulását eredményezi. Mivel tökéletesen forgásszimmetrikus testet nem lehet mechanikai megmunkálással készíteni, a gyakorlatban működő pörgettyűk tengelye a forgásszimmetria és a külső erők hatása által meghatározott mértékben tarja meg irányát.

b.) Pörgettyűk viselkedése a speciális relativitáselmélet szerint - a Thomas-precesszió

A relativitáselmélet nem hagyta érintetlenül a pörgettyűk mozgásának fizikáját sem. A tágabb értelemben ideális; szabad felfüggesztésű és forgásszimmetrikus pörgettyűk inerciarendszerekhez rögzítve továbbra is megtartják forgástengelyük irányának állandóságát. Gyorsuló, vagy forgó vonatkoztatási rendszerekhez rögzített pörgettyűk forgástengelyét viszont - ellentétben a klasszikus fizikával - inerciarendszerbeli megfigyelő is elfordulni, precesszálni látja. Ezt a relativisztikus jelenséget felfedezőjéről [20], Thomas-precesszióknak nevezik.

A Thomas-precesszió oka az idődilatació, fizikai megértéséhez tekintsük az alábbi, Mashhoon és munkatársai [21] munkája nyomán adott magyarázatot. Végezzon egy

ideális pörgettyű egyenletes körmozgást, tetszőleges centrum körül, ω_K szögsebességgel. Ebben az esetben a pörgettyű saját rendszere gyorsuló vonatkoztatási rendszer, a benne rögzített pörgettyű centripetális gyorsulással mozog a centrum felé. A pörgettyű forgó, saját rendszerében a pörgettyű forgástengelye ω_K szögsebességgel, a körmozgással ellentétes irányba precesszál. Idődilatáció nélkül a pörgettyű tengelyének iránya, inerciarendszerből nézve állandó lenne. A valóságban, a körmozgást végző rendszer $d\tau$ sajátideje eltér az inercia rendszer dt idejétől,

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt, \quad (6.1)$$

ahol $v = r\omega_K$. A (6.1) egyenlet szerint egy körülfordulás alatt több idő telik el az inerciarendszer megfigyelőjének óráján, mint a körmozgást végző órán. Ez azt jelenti, hogy az inercia rendszerből nézve, a pörgettyű ω_K -nál kisebb szögsebességgel halad;

$$\omega = \omega_K d\tau/dt, \quad (6.2)$$

és az inerciarendszer megfigyelője számára a pörgettyű forgástengelyének iránya $\omega - \omega_K$ szögsebességgel elfordul. A precesszió szögsebességét Ω_T -vel jelölve, a (6.1), (6.2) egyenletek felhasználásával

$$\Omega_T = \omega_K (\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1). \quad (6.3)$$

Amennyiben $v \ll c$, a Thomas-precesszió szögsebessége v^2/c^2 szerinti, első rendű közelítésben

$$\Omega_T = -\frac{v^2}{2c^2} \omega_K. \quad (6.4)$$

Meg kell jegyezni, hogy a (6.4) egyenletből kitűnik, az Ω_T és ω_K szögsebesség vektorok párhuzamosak és ellentétes irányúak. A pörgettyű forgástengelyének elfordulása a körmozgás síkjában, a körmozgás irányával ellentétes irányba történik.

Ha a vizsgált pörgettyű R sugarú körpályán, M tömegű gravitációs centrum körül végez Kepler-mozgást, akkor a pörgettyű pálya menti mozgásából származó kinetikus energiája a gravitációs helyzeti energia felével egyenlő. Ennek alapján, a pálya menti sebesség négyzete, $v^2 = GM/R$. A pörgettyű forgástengelyének Thomas-precesszióból származó szögsebessége:

$$\Omega_T = -\frac{GM}{2c^2 R} \omega_K. \quad (6.5)$$

c.) Pörgettyűk mozgása az általános relativitáselmélet alapján

Az általános relativitáselmélet tovább módosítja a pörgettyűk mozgására vonatkozó ismeretünket. Az általános relativitáselmélet alapján, annak megjelenése után néhány évvel Fokker [22] mutatott rá, hogy Kepler-pályán keringő pörgettyűk forgástengelye - a Thomas-precesszió felül további - elfordulást szenved a pályasíkjában. Ez a precesszió a pálya menti körmozgás irányával megegyező. A Fokker-precesszió és a Thomas-precesszió összegét szokás geodetikus precessziónak nevezni.

Lense és Thirring [23] egy másik, az általános relativitáselmélet által prognosztizált jelenséget fedezett fel. Egy forgó centrum körül keringő test impulzusmomentum vektora a vonzó centrummal azonos irányú forgómozgást vesz fel. Ez a jelenség a "frame dragging", vagy Lense-Thirring-effektus. Pörgettyűre alkalmazva ez azt jelenti, hogy a pörgettyű forgástengelye a forgó vonzócentrum szögsebességével azonos irányú szögsebességgel precesszál.

Néhány évtizeddel később, a mesterséges holdak megjelenése kapcsán Schiff [24] az általános relativitáselmélet módszerei alapján meghatározta, hogy viselkedik egy pörgettyű a Föld körül, egy R sugarú körpályán keringő, mesterséges hold fedélzetén. Schiff számításai alapján, poláris körpályán keringő mesterséges hold fedélzetén elhelyezett szabad pörgettyű, melynek forgástengelye a pályasíkban úgy helyezkedik el, hogy az merőleges a Föld forgástengelyére, két egymásra merőleges irányú precessziót végez. Egyik precesszió a forgástengely pályasíkban, a keringés irányával megegyező irányú elfordulása. Ez a geodetikus precesszió, ami pörgettyű Föld körüli keringésének következménye. A másik precesszió a forgástengely pályasíkra merőleges irányú elfordulása. Ez az elfordulás a "frame dragging" effektus, ami a Föld tengely körüli forgásának következménye. Schiff levezetése szerint a geodetikus precesszió a keringés irányában állandó,

$$\Omega_G = \frac{3G M}{2c^2 R} \omega_K, \quad (6.6)$$

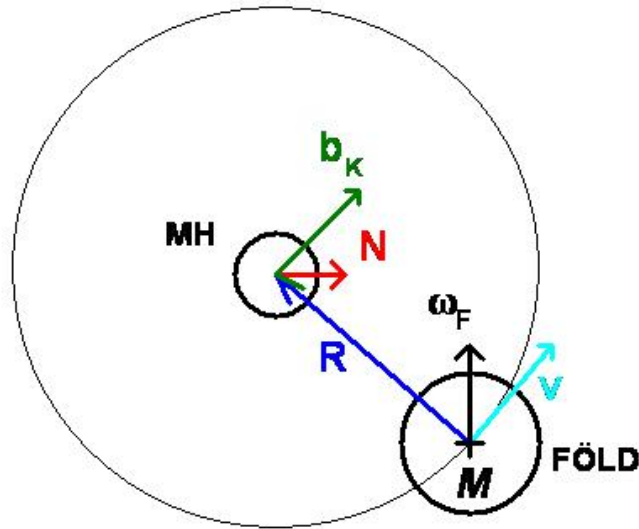
szögsebességgel történik. A "frame dragging" effektus két precessziós mozgásból tevődik össze. Egy körülfordulásonként periodikus mozgásból és egy állandó szögsebességgel történő precesszióból. A periodikus tag egy Kepler-féle körülfordulás alatt kiátlagolódik, ezért hosszú időskálán elhagyható. Az egy körülfordulásra átlagolt Lense-Thirring precesszió szögsebessége:

$$\Omega_{FR} = \frac{G}{2c^2} \frac{\Theta}{R^3} \omega_F, \quad (6.7)$$

ahol Ω_G a geodetikus precesszió, Ω_{FR} a "frame dragging" szögsebessége, G a gravitációs állandó, M a Föld tömege, R a műhold pálya sugara, Θ a Föld tehetetlenségi nyomatéka, az ω_K a műhold Föld körüli mozgásának szögsebessége és ω_F pedig a Föld tengely körüli forgásának szögsebessége.

6.2. A gravitomágneses tér egy Föld körül keringő műhold fedélzetén

A geodetikus precesszió és a Lense-Thirring-effektus nem csak az általános relativitáselméletből, hanem annak lineáris közelítéséből, a gravitomágnesség jelenségéből is következik. A (4.30) egyenletben láttuk, hogy gravitomágneses térben, \mathbf{N} impulzusmomentummal forgó pörgettyű precessziót végez a rá ható gravitomágneses forgatónyomaték hatására. Ha szeretnénk meghatározni egy a Föld körül R sugarú, poláris körpályán keringő mesterséges hold fedélzetén elhelyezett ideális pörgettyű precesszióját, akkor meg kell határozni, a mesterséges hold fedélzetén tapasztalható



18. ábra A műhold körül körpályán keringő Föld. A \mathbf{b}_K tér az ábra síkjára merőlegesen befelé mutat.

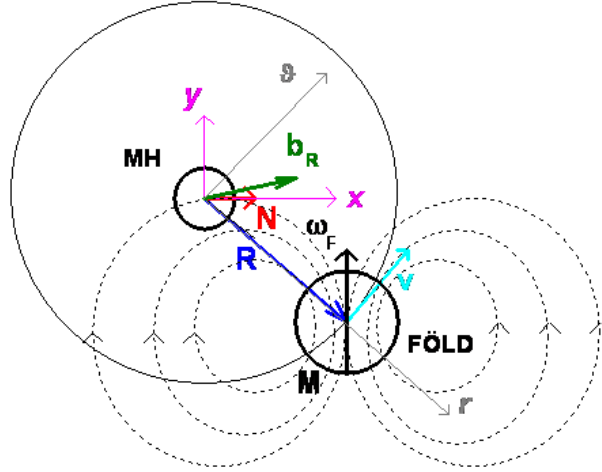
gravitomágneses teret és a kapott térerősség vektort a (4.30) egyenletbe helyettesítve, megkapjuk a pörgettyű precessziójának szögsebességét. A Föld körül keringő műhold fedélzetén megjelenő gravitomágneses teret meghatároztam és publikáltam Vető [25]. A hivatkozásban ismertetett levezetés szerint határozzuk meg a műhold fedélzetén mérhető gravitomágneses teret. A műhold vonatkoztatási rendszerében a Föld körmozgást végez a kabin körül, és eközben tengely körüli forgást végez. A kabinból nézve mindkét mozgás tömegáram, amely gravitomágneses teret gerjeszt a kabinban. Határozzuk meg ezeket a gravitomágneses tereket.

a.) *A mesterséges hold pályamozgásából származó gravitomágneses tér*

Alkalmazzuk a mozgó tömegpontra érvényes, gravitomágneses Biot-Savart törvényt a Föld Kepler-féle pályamozgása által gerjesztett, \mathbf{b}_K gravitomágneses tér meghatározására, a (4.13) egyenlet szerint. A Föld műhold körüli \mathbf{v} pálya menti sebességét és R pályasugarát a (4.13) egyenletbe helyettesítve, megkapjuk Föld-műhold rendszer Kepler-féle mozgásából által, a műhold fedélzetén keltett gravitomágneses teret:

$$\mathbf{b}_K = -\frac{2GM\mathbf{v} \times \mathbf{R}}{c^2 R^3}. \quad (6.8)$$

A körmozgás miatt a $\mathbf{v} \times \mathbf{R}$ vektorszorzat állandó és az $\boldsymbol{\omega}_K$ vektorral azonos irányú, lásd 18. ábra.



19. ábra A Föld forgásából származó, pillanatnyi \mathbf{b}_R gravitomágneses dipóltér a műhold fedélzetén. A térerősség vektor a pályasíkban fekszik.

Alkalmazva a $\mathbf{v} \times \mathbf{R} = R^2 \boldsymbol{\omega}_K$ helyettesítést, kifejezzük a \mathbf{b}_K gravitomágneses teret a szögsebesség vektorral;

$$\mathbf{b}_K = -\frac{2GM}{c^2 R} \boldsymbol{\omega}_K. \quad (6.9)$$

b.) A Föld tengely körüli forgásától származó gravitomágneses tér

A forgó Föld gravitomágneses dipólus, gravitomágneses terét az 5. fejezetben vizsgáltuk. Megállapítottuk, hogy a Föld forgásától származó gravitomágneses tér a felszínen kívül mindenhol leírható egy pontszerű, $\mathbf{m}_{GM} = \Theta \boldsymbol{\omega}/2$ erősségű dipólus terével. A műhold Föld körüli keringése során ebben, a Föld forgásával létrehozott \mathbf{b}_R dipóltérben mozog, ezért a műholdon periodikusan változó gravitomágneses tér tapasztalható. Amikor a műhold helyvektora ϑ szöget zár be a Föld forgástengelyével, akkor a műhold fedélzetén a gravitomágneses tér pillanatnyi, radiális és tangenciális komponensei a

$$b_r = -\frac{2G}{c^2} \frac{\Theta_F \omega_F}{R^3} \cos \vartheta, \quad \text{ill.} \quad b_\vartheta = -\frac{G}{c^2} \frac{\Theta_F \omega_F}{R^3} \sin \vartheta \quad (6.10)$$

értéket veszik fel a ϑ elfordulás függvényében.

Ha a gravitomágneses teret, illetve annak hatását hosszú időskálán vizsgáljuk, az időben változó gravitomágneses teret helyettesíthetjük annak egy körülfordulásra számított átlagértékével. A gravitomágneses tér átlagolásához transzformáljuk a \mathbf{b}_K vektor komponenseit a 19. ábrán látható, a kabinhoz rögzített Descartes-féle koordináta rendszerbe.

A transzformációval a

$$b_x = \frac{3G\Theta_F\omega_F}{c^2 R^3} \sin \vartheta \cos \vartheta \quad b_y = -\frac{G\Theta_F\omega_F}{c^2 R^3} (2 \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \quad (6.11)$$

térerősség komponenseket kapjuk. A vektorkomponensek teljes körülfordulásra számított integrál középértéke,

$$\bar{b}_x = 0, \quad \bar{b}_y = -\frac{G\Theta_F}{2c^2 R^3} \omega_F. \quad (6.12)$$

Mivel az y -tengely párhuzamos az ω_F vektorral, így a Föld forgásából származó átlagos gravitomágneses térerősség vektor kifejezhető a Föld forgási szögsebesség vektorával:

$$\bar{\mathbf{b}}_R = -\frac{G\Theta_F}{2c^2 R^3} \omega_F. \quad (6.13)$$

6.3. Pörgettyűk gravitomágneses precessziója Föld körül keringő műhold fedélzetén

Vizsgáljuk meg a gravitomágnesség alapján, hogyan viselkednek a szabad felfüggesztésű, ideális pörgettyűk a Föld körül poláris körpályán keingő műhold fedélzetén. A (4.30) egyenletben felírtuk, hogy a szabad felfüggesztésű pörgettyűk gravitomágneses térben precesszálnak. A (6.9) és (6.13) egyenletekben meghatároztuk a Föld körül poláris körpályán keringő műhold fedélzetén kialakuló gravitomágneses tér a pálya menti szögsebesség-, illetve a Föld forgási szögsebesség vektorával párhuzamos komponenseit. A feladat ezek után mindössze annyi, hogy a (4.30) egyenletbe helyettesítjük műhold Földkörüli keringéséből, illetve a Föld forgásából származó gravitomágneses teret.

A Schiff-féle számítással történő könnyebb összehasonlíthatóság kedvéért, a vizsgált pörgettyű forgástengelye, tehát impulzusmomentum-vektorának iránya kezdetben a pályasíkban fekszik úgy, hogy legyen merőleges a Föld forgástengelyére. Az impulzusmomentum-vektor kezdeti helyzetét a 18. és 19. ábrán \mathbf{N} vektor jelöli. Ezzel az elhelyezéssel az impulzusmomentum merőleges mind az ω_K pálya menti, mind az ω_F Föld forgási szögsebesség vektorára. A pörgettyű fenti irányításával elérjük, hogy a pörgettyű impulzusmomentuma merőleges mind a (6.9), mind a (6.13) egyenletekben meghatározott gravitomágneses térerősségre. A (4.30) egyenlet alapján a gravitomágneses tér okozta precesszió szögsebessége ekkor maximális, a gravitomágneses tér nagyságával azonos, de azzal ellentétes irányú.

a.) A geodetikus precesszió

A műhold Föld körüli keringéséből származó gravitomágneses precesszió szögsebessége $\Omega_{GM} = -\mathbf{b}_K$. A \mathbf{b}_K gravitomágneses tér (6.9) egyenlet szerinti kifejezésével

$$\Omega_{GM} = 2\frac{GM}{c^2 R} \omega_K. \quad (6.14)$$

A pörgettyű gravitomágneses precessziójának szögsebesség vektora az ω_K szögsebességgel párhuzamos, tehát a pályasíkban, a pálya menti mozgással azonos irányú. Másrészt, a pörgettyű pálya menti mozgása miatt Thomas-precessziót is végez, amely a pálya menti mozgással ellentétes irányú. A pörgettyű teljes pálya menti, geodetikus precessz-

iója a gravitomágneses és a Thomas-precesszió összege: $\Omega_G = \Omega_{GM} + \Omega_T$. A geodetikus precesszió szögsebessége a (6.14) és (6.5) egyenletek felhasználásával

$$\Omega_G = \frac{3GM}{2c^2R} \omega_K, \quad (6.15)$$

a (6.6) egyenletben, a Schiff-formulával meghatározott precesszióval azonosnak adódik.

b.) A Lense-Thirring precesszió

A Föld forgásából származó gravitomágneses tér hatással van a pörgettyűre, a Lense-Thirring effektus is precessziót okoz. Mivel a pörgettyű impulzusmomentuma merőleges a Föld forgástengelyére, a "frame dragging" precesszió szögsebessége $\Omega_{FR} = -\bar{\mathbf{b}}_R$. Figyelembe véve a Föld forgásából származó gravitomágneses tér (6.13) egyenletben meghatározott értékét,

$$\Omega_{FR} = \frac{G\Theta_F}{2c^2R^3} \omega_K. \quad (6.16)$$

A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy a geodetikus precesszió és a Lense-Thirring effektus levezethető a gravitomágnesség jelenségéből.

6.4. A Gravity Probe B kísérlet

A Gravity Probe B kísérlet az előző szakaszban bemutatott geodetikus precesszió és a "frame dragging" jelenség kísérleti bizonyítását tűzte célul. A kísérleti terv lényege egy Föld körül keringő mesterséges hold fedélzetén berendezett laboratórium, amelyben a súlytalanság állapotában, ezen felül a Föld forgása következtében fellépő centrifugális és Coriolis-erők jelenléte nélkül mérhető a műhold fedélzetén elhelyezett, szabad pörgettyűk precessziója. A kísérletet és annak majd négy évtizedes előkészítését a NASA és a Stanford Egyetem által létrehozott kutatócsoport végezte. A kísérlet, pontosabban a mérés három évig, 2004. április 20-tól 2007. második feléig tartott. A mesterséges hold $R = 7020$ kilométer sugarú, poláris körpályán, $T = 97,5$ perc periódusidővel keringett. Ezek mellett a pályaadatok mellett a (6.15) és (6.16) egyenletek alapján a geodetikus precesszió és a "frame dragging" által okozott precesszió várható értéke,

$$\Omega_G = 1,015 \cdot 10^{-12} \text{ 1/s}, \quad \text{illetve} \quad \Omega_{FR} = 5,99 \cdot 10^{-15} \text{ 1/s}, \quad (6.17)$$

ami radiánból átszámolva megfelel 6,606; illetve 0,039 ívmásodperc/év szögsebességnek.

Az effektus láthatóan kicsi, három év alatt a forgástengely durván 20, illetve 0,12 ívmásodpercnyi, álló csillagokhoz képest történő elfordulását kellett megmérni, ezért a mérőberendezésnek rendkívüli érzékenységgel és stabilitással kellett rendelkezni. A mérőberendezés csúcstechnológiák sokaságát alkalmazva megfelelt a célkitűzésnek és alkalmasnak bizonyult a mérés elvégzésére. Többek között, maguk a pörgettyűt megtestesítő, 4 centiméter átmérőjű kvarcgömbök szférikus eltérése kisebb volt, mint

10 nanométer. Ez gyakorlatilag atomi réteg nagyságrendű pontosság. Sűrűségük homogenitása egy a tízmillióhoz. Ezzel sikerült megközelíteni az ideális pörgettyűt. A gömbök mechanikus tengelyezés nélkül, vákuumban pörögtek, lebegésükről minden gömbnél hat elektróda gondoskodott. A kb. 4000 fordulat/perc fordulatszám csillapodásának karakterisztikus ideje 15 000 év.

A kísérlet részletes leírásáról és az elért eredményekről Everitt *et al* [26] tudósít, a Final Report on Gravity Probe B jelentésben. A Gravity Probe B kísérlet eredményes volt. Megerősítette az általános relativitáselmélet által prognosztizált effektusokat. A geodetikus precessziót 1,5 %, a frame dragging effektust 20-30 %-os relatív hibával igazolta. A Fizikai Szemlében Hraskó Péter [16] írt a Gravity Probe B kísérlet eredményéről. Kifejtette, hogy a kísérlet igazolta a globális inerciarendszerek létének tagadását. A Föld körül keringő műhold szabadon esik a Föld középpontja felé. A műhold fedélzetén minden pillanatban teljesül Newton I. törvénye, azonban a vele együtt mozgó, hosszú időre magára hagyott ideális pörgettyű forgástengelye elfordul, tehát globálisan nem lehet inerciarendszer.

A geodetikus precessziót és a "frame dragging" effektust a (6.15) és (6.16) egyenletekben a gravitomágnesség alapján is levezettük. A gravitomágneses értelmezésben a Föld gravitomágneses tere készlet precesszióra a mesterséges hold fedélzetén elhelyezett, szabad felfüggesztésű pörgettyűket. Ezzel a Gravity Probe B kísérlet nem csak a globális inercia rendszerek tagadásának, hanem a gravitomágnesség létjogosultságának is bizonyítéka volt.

7. Pörgettyű-precesszió az elektromágneses jelenségekben

7.1. Az elektron Thomas-precessziója

A Thomas-precesszió közvetlen felfedezése az elektronhoz kapcsolódik. A hidrogénatom Zeeman-effektusának vizsgálata során Uhlenbeck és Goudsmit megállapította, hogy az elektronspin mágneses tér által keltett precessziója fontos szerepet játszik a Zeeman-effektus okozta színeképszerkezet értelmezésében. Thomas [20] azonban rámutatott, hogy a modell által jósolt színeképvonal felhasadás kétszer akkora, mint azt a kísérleti eredmények mutatják. Thomasnak az a nagyszerű ötlete támadt, hogy alkalmazni kell a speciális relativitáselmélet szabályait a hidrogénatom elektronjának mozgására. A speciális relativitáselmélet feloldotta az elmélet és tapasztalat ellentmondását.

A klasszikus modell szerint a \mathbf{B} mágneses térben mozgó elektronra

$$\mathbf{M} = \frac{e}{m} \mathbf{S} \times \mathbf{B} \quad (7.1)$$

forgatónyomaték hat, ahol e/m az elektron fajlagos töltése, \mathbf{S} az elektronspin vektor. Ha feltesszük, hogy az elektron \mathbf{E} elektromos térben mozog \mathbf{v} sebességgel, akkor az elektron által érzékelt mágneses tér $\mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{v}/c^2$. Az elektron spin-precessziójának szögsebessége

$$\boldsymbol{\Omega}_2 = \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{M}}{S^2} = \frac{e}{mc^2} \mathbf{E} \times \mathbf{v}. \quad (7.2)$$

Ez a szögsebesség épp kétszerese a tapasztalt vonalfelhasadás mögött húzódó precessziós szögsebességnek.

Thomas eredeti magyarázata szerint a (7.2) egyenlet Zeeman-effektus értelmezésére történő alkalmazásában hiba van. A levezetett precessziós szögsebesség az elektron (2) pillanatnyi sajátrendszerében érvényes, míg a megfigyelő az atommag laboratóriumi (1) vonatkoztatási rendszerében értelmezi a Zeeman-effektust. A (2) vonatkoztatási rendszer \mathbf{v} sebességgel mozog az (1) rendszerhez viszonyítva, közöttük Lorentz-transzformáció teremt kapcsolatot. Ha az elektron gyorsulása \mathbf{a}_e , akkor a (3) vonatkoztatási rendszer a $\mathbf{v} + \mathbf{a}_e dt$ sebességhez tartozó Lorentz-transzformációval kapcsolódik az (1) rendszerhez. A (2) és (3) rendszerek közötti átjárást pedig egy $\mathbf{a}_e dt$ sebességhez tartozó Lorentz-transzformáció és egy $[\mathbf{v} \times \mathbf{a}_e] dt / (2c^2)$ elforgatás együtt biztosítja. Így az (1) rendszerbeli megfigyelő, első rendű közelítésben

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \frac{e}{mc^2} \mathbf{E} \times \mathbf{v} - \frac{1}{2c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{a}_e. \quad (7.3)$$

mértékű precessziót tapasztal. Végül, figyelembe véve, hogy $\mathbf{a}_e = -e\mathbf{E}/m$ a (7.3) egyenletben felírt precesszió

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \frac{e}{2mc^2} \mathbf{E} \times \mathbf{v}, \quad (7.4)$$

ami épp a klasszikus modellből (7.2) egyenletben számolt érték fele. Ezzel felodást nyert a hidrogén finomszerkezeti spektrumának Uhlenbeck és Goudsmit-féle értelmezés szerinti ellentmondása.

7.2. A geodetikus precesszió és a frame dragging elektromágneses megfelelője

Képzeld el a Gravity Probe B kísérlet elektromágneses megfelelőjét. A Föld körül keringő mesterséges hold helyett egy elektromosan töltött pörgettyű kering egy másik, ellentétes töltéssel feltöltött, szigetelő gömb körül. Ebben az esetben a pörgettyút a Coulomb-erő tartja körpályán, a gravitációs kölcsönhatás elhanyagolható. Legyen a két töltött, gömbszimmetrikus és homogén fajlagos töltésű test töltése q és Q , tömege m , illetve M és teljesüljön, $M \gg m$. Legyen a m tömegű test ideális és nyomatékmentes, \mathbf{N} impulzusmomentummal forgó pörgettyű, és keringjen a M tömegű test körül R sugarú körpályán $\boldsymbol{\omega}$ pálya menti szögsebességgel. A pörgettyű forgástengelye a pályasíkban helyezkedjen el.

A szigetelő anyagból készült pörgettyűvel együtt forognak a rajta, illetve benne lévő töltések. A forgó töltések, mint köráramok mágneses momentumot képviselnek, tehát az elektromosan töltött pörgettyű mágneses dipólus. A töltött pörgettyű egy tömegelemének impulzusmomentuma és mágneses dipólmomentuma közötti kapcsolat a pörgettyű fajlagos töltéseloszlásától függ

$$d\mathbf{m}_M = \frac{\rho_q}{2\rho_m} d\mathbf{N}. \quad (7.5)$$

Ha a töltés és tömegsűrűség hányadosa állandó a q töltésű, m tömegű pörgettyű teljes térfogatában (pl. homogén töltés és tömegeloszlás esetén), akkor a pörgettyű mágneses dipólmomentuma

$$\mathbf{m}_M = \frac{q}{2m} \mathbf{N}. \quad (7.6)$$

Az elektron mágneses dipólmomentuma $\mathbf{m}_{Me} = e/m\mathbf{S}$, ahol \mathbf{S} az elektronspin. Azt mondjuk, az elektron giromágneses állandója kétszerese a homogén fajlagos töltésű pörgettyű $q/(2m)$ állandójának.

A pörgettyű a Q töltésű középponti test körül keringve, $\mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{v}/c^2$ mágneses térben mozog. Felhasználva, hogy a Q töltésű test elektromos tere, a pálya mentén $\mathbf{E} = kQ\mathbf{R}/R^3$ és figyelembe véve, hogy $\mathbf{R} \times \mathbf{v} = R^2\boldsymbol{\omega}$, a mágneses tér

$$\mathbf{B} = \frac{kQ}{c^2 R} \boldsymbol{\omega}. \quad (7.7)$$

Mivel a pörgettyű mágneses dipólmomentumára a mágneses tér $\mathbf{M} = \mathbf{m}_M \times \mathbf{B}$ forgatónyomatéket fejt ki, a pörgettyű forgástengelye mágneses precessziót fog végezni $\boldsymbol{\Omega}_M = \mathbf{N} \times \mathbf{M}/N^2$ szögsebességgel. Felhasználva, hogy a pörgettyű homogén fajlagos töltésű és ezért $\mathbf{m}_M = q/(2m)\mathbf{N}$, továbbá az \mathbf{N} merőleges $\boldsymbol{\omega}$ -ra, vagyis a pörgettyű forgástengelye a pályasíkban fekszik, a mágneses precesszió szögsebessége

$$\boldsymbol{\Omega}_M = -\frac{q}{2m} \mathbf{B} = -\frac{kqQ}{2mc^2 R} \boldsymbol{\omega}. \quad (7.8)$$

Mivel a q és Q töltések ellentétes előjelűek, az $\boldsymbol{\Omega}$ és $\boldsymbol{\omega}$ vektorok azonos irányúak, mágneses precesszió a a pályasíkban, a pálya menti mozgás irányába forgatja a forgástengelyt

Ne felejtjük el, hogy a körmozgást végző pörgettyű forgástengelye, a (6.4) egyenlet szerint $\boldsymbol{\Omega}_T = -v^2 \boldsymbol{\omega}_K / (2c^2)$ Thomas-precessziót végez. A pörgettyűt a Coulomb-erő tartja körpályán, $mv^2/R = -kqQ/R^2$, ezért $-v^2 = kqQ/(mR)$. Ezzel a Thomas-precesszió szögsebessége

$$\boldsymbol{\Omega}_T = \frac{kqQ}{2mc^2R} \boldsymbol{\omega}_K, \quad (7.9)$$

ami a mágneses precesszióval azonos nagyságú, de ellentétes irányú. Az elektromágneses "geodetikus" precesszió, a mágneses és a Thomas-precesszió szögsebességének összege, homogén fajlagos töltésű pörgettyűkre zérus.

Más a helyzet a hidrogénatomban kötött elektron esetében. Az elektron mágneses momentuma $\mathbf{m}_{Me} = e\mathbf{S}/m$, ezért a spin mágneses precessziójának szögsebessége kétszerese a homogén fajlagos töltésű pörgettyűre kapott (7.8) szögsebességnek. A Thomas-precesszió független a pörgettyű elektromos tulajdonságától, ezért az elektron esetében, Bohr-modell közelítésben, az elektronspin elektromágneses "geodetikus" precessziója, egyezésben a (7.4) egyenlettel:

$$\boldsymbol{\Omega}_G = \frac{ke^2}{2m_e c^2 R} \boldsymbol{\omega}_e. \quad (7.10)$$

A "frame dragging"-effektusnak is létezik elektromágneses megfelelője. Ha az előbbi példában leírt, elektromosan töltött, homogén fajlagos töltésű, keringő pörgettyű kísérletben a központi M tömegű, Q töltésű test forog, akkor mágneses dipólként, mágneses dipólteret hoz létre. Ha a központi test $\boldsymbol{\omega}_C$ forgási szögsebesség vektora (a Gravity Probe B kísérlethez hasonlóan) a m tömegű pörgettyű pályasíkjában fekszik, akkor a keringő pörgettyű által érzékelt, egy körülfordulásra átlagolt, a központi test forgásából származó \mathbf{B}_R mágneses tér a (6.12) egyenlethez hasonló módon,

$$\mathbf{B}_R = \frac{kQ\Theta}{4Mc^2R^3} \boldsymbol{\omega}_C \quad (7.11)$$

formában adódik. Ha kezdetben a pörgettyű forgástengelye merőleges az $\boldsymbol{\omega}_C$ szögsebesség vektorra, akkor a pörgettyűre ható mágneses forgatónyomaték által okozott $\boldsymbol{\Omega}_{EMFR}$ elektromágneses "frame dragging":

$$\boldsymbol{\Omega}_{EMFR} = -\frac{q}{2m} \mathbf{B}_R = -\frac{kqQ\Theta}{8mMc^2R^3} \boldsymbol{\omega}_C. \quad (7.12)$$

Ebben az esetben a központi testet és a pörgettyűt homogén fajlagos töltésűnek tekintettük. Ha a giromágneses tényező bármelyik test esetében eltér a $q/(2m)$, illetve $Q/(2M)$ értéktől, az befolyásolja a (7.12) eredményt.

8. Függelék

8.1. A gravitomágnesség levezetése az általános relativitáselméletből

A gravitomágnesség gyenge gravitációs tér és kis sebességek (Φ , $v^2 \ll c^2$) esetén levezethető az általános relativitáselmélet összefüggéseiből [14]. Gyenge gravitációs tér esetén a sík, $\eta_{\mu,\nu}$ Minkowski-téridőt a Φ gravitációs potenciál kis mértékben perturbálja. A perturbált metrikus tenzor felírható

$$g_{\mu,\nu} = \eta_{\mu,\nu} + h_{\mu,\nu} \quad (8.1)$$

alakban, ahol a $h_{\mu,\nu}$ perturbáló függvény első rendben tartalmazza a gravitációs potenciált. Érdekes bevezetni a $\bar{h}_{\mu,\nu} = h_{\mu,\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu,\nu}$ mennyiséget, ahol $h = \text{sp}(h_{\mu,\nu})$. Az Einstein-egyenlet ekkor

$$\square \bar{h}_{\mu,\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu,\nu} \quad (8.2)$$

alakot ölti, és a $\bar{h}^{\mu,\nu}{}_{,\nu} = 0$ mértékfeltétel kiegészíti azt. Bevezetve a $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ jelölést, a gravitomágnesség szempontjából a (8.2) Poisson-egyenlet

$$\bar{h}_{\mu,\nu} = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu,\nu}(ct - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (8.3)$$

retardált megoldása lényeges. Ha az energia-impulzus tenzorba behelyettesítjük a ρ sűrűség és \mathbf{j} tömegáram elosztást, akkor $T^{00} = \rho c^2$ és a $T^{0i} = c j^i$.

Bevezetve a

$$\Phi = -G \int \frac{\rho(ct - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}', \quad \text{ill. az } a_i = -\frac{2G}{c^2} \int \frac{j_i(ct - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (8.4)$$

jelölést, a $\bar{h}_{\mu,\nu}$ komponenseire, $1/c^2$ szerinti első rendű közelítésben, a (8.3) egyenletből a

$$\bar{h}_{00} = \frac{4\Phi}{c^2}, \quad \bar{h}_{0i} = -\frac{2a_i}{c}, \quad \bar{h}_{ij} = O(c^{-4}) \quad (8.5)$$

eredményt kapjuk. Itt Φ a gravitációs potenciált és \mathbf{a} a gravitomágneses vektorpotenciált jelenti SI mértékegységben. Elhagyva az $1/c^4$ nagyságrendű tagokat, a $\bar{h}^{\mu,\nu}{}_{,\nu} = 0$ mértékfeltétel az elektrodinamikából ismerős

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{div } \mathbf{a} = 0 \quad (8.6)$$

Lorentz-feltétellé egyszerűsödik. A $\bar{h}^{\mu,\nu}$ négyes tenzor négyes vektor lesz, és ezáltal a gravitációs teret is az A^μ négyes gravitomágneses vektorpotenciál írja le;

$$A^\mu = [2\Phi, -c\mathbf{a}] = \frac{c^2}{2} \bar{h}^\mu. \quad (8.7)$$

A (8.2) egyenlet felírható a gravitomágneses, négyes vektorpotenciállal,

$$\square A^\mu = -\frac{8\pi G}{c^2} [\rho c^2, -j_i c] \quad (8.8)$$

Határozzuk meg a gravitomágneses Maxwell-egyenleteket a (8.8) Poisson-egyenlet és a (8.6) Lorentz-feltétel segítségével. A gravitációs és gravitomágneses térerősségeket definíció szerint a potenciálok deriválásával kapjuk,

$$\mathbf{g} = -\text{grad}\Phi - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}. \quad (8.9)$$

A fenti egyenletből, a $\text{rot grad } u = 0$ és a $\text{div rot } \mathbf{v} = 0$ azonosságok alapján rögtön következik két gravitomágneses Maxwell-egyenlet,

$$\text{rot } \mathbf{g} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \quad \text{ill.} \quad \frac{1}{2} \text{div } \mathbf{b} = 0. \quad (8.10)$$

A másik két Maxwell-egyenlet levezetéséhez a (8.8) egyenletből indulunk ki. Először írjuk fel a (8.8) egyenlet első komponensét;

$$\square \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \text{div grad } \Phi = -4\pi G\rho. \quad (8.11)$$

A (8.6) Lorentz-feltétel idő szerinti parciális deriváltját a (8.11) egyenletbe helyettesítve kapjuk a

$$\text{div } \mathbf{g} = -4\pi G\rho, \quad (8.12)$$

harmadik gravitomágneses Maxwell-egyenletet. A negyedik Maxwell-egyenlet levezetéséhez írjuk fel a (8.8) egyenlet \mathbf{a} -ra vonatkozó részét

$$-\square \mathbf{a} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} + \Delta \mathbf{a} = \frac{8\pi G\rho}{c^2} \mathbf{j}. \quad (8.13)$$

A (8.9) első egyenletét idő szerint deriválva,

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (8.14)$$

az \mathbf{a} vektorpotenciál idő szerinti második deriváltját a (8.13) egyenletbe helyettesítjük. Felhasználva a $\Delta \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \text{rot rot } \mathbf{v}$ azonosságot, a $\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}$ definíciót, és a Lorentz-feltételt, megkapjuk a

$$\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{b} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} - \frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{j}, \quad (8.15)$$

negyedik gravitomágneses Maxwell-egyenletet. A gravitomágneses Maxwell-egyenletek tartalmazzák a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (8.16)$$

kontinuitási egyenletet, és invariánsak a

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a} + 2 \text{grad } \Psi \quad (8.17)$$

típusú mérték-transzformációra.

A tárgyalt gravitomágneses közelítésben a négyes ívemelelemnégyszet felírható a gravitomágneses skalár és vektorpotenciállal,

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - 2 \frac{\Phi}{c^2}\right) dt^2 - 4(\mathbf{a} \cdot d\mathbf{x}) dt + \left(1 + 2 \frac{\Phi}{c^2}\right) \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (8.18)$$

A gravitomágneses térben mozgó tömegpont $L = -mcds/dt$ Lagrange-függvénye a ds ismeretében felírható és belőle meghatározható a részecske mozgásegyenlete.

8.2. *A Thomas-precesszió, mint a Lorentz-transzformáció következménye*

Az alábbiakban Bene Gyula [27] munkája nyomán ismertetem a Lorentz transzformáció néhány tulajdonságát és a Thomas-precesszió Lorentz-transzformáció tulajdonságaiból következő levezetését.

a.) *A Lorentz-transzformáció általános alakja*

Tetszőleges irányú sebesség esetén a Lorentz-transzformáció:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma; & -\gamma\mathbf{v}^T/c \\ -\gamma\mathbf{v}/c; & \mathbf{1} + (\gamma - 1)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T/v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (8.19)$$

Itt

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \quad (8.20)$$

$\mathbf{1}$ a 3 X 3-as egységmátrix,

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.21)$$

továbbá a T felső index a transzponálást jelenti, tehát \mathbf{v}^T sorvektor, amely a \mathbf{v} oszlopvektor transzponáltja.

b.) *Lorentz-transzformáció térbeli forgatás nélkül*

Egy Lorentz-transzformáció és egy térbeli elforgatás egymásutánja továbbra is Lorentz-transzformáció (megőrzi az ívelem-négyzetet). Megmutatjuk, hogy a transzformációnak a fenti alakja nem tartalmaz térbeli elforgatást.

Valamely \mathbf{r} térvektort és ezzel együtt egy térbeli irányt a K koordinátarendszerben a vektor végpontjainak megfelelő egyidejű, vagyis azonos t időkoordinátájú események határoznak meg. A K' koordinátarendszerben a megfelelő események azonos t' időkoordinátával rendelkeznek (és persze különböző t -vel). Legyen ez az azonos időkoordináta $t' = 0$, az egyik esemény a négyes koordinátarendszer origója, a másik pedig az \mathbf{r}' vektor végpontja. Ez utóbbi esemény időkoordinátája $t' = 0$, amiből (8.19) szerint következik, hogy

$$t = \frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{r}}{c^2}. \quad (8.22)$$

Az (8.19) transzformáció térbeli részéből ez alapján

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{r}}{v^2} \mathbf{v} = \mathbf{r} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{(\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{r})}{c^2} \mathbf{v} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}. \quad (8.23)$$

Itt \mathbf{r}_{\parallel} és \mathbf{r}_{\perp} az \mathbf{r} vektornak a sebességgel párhuzamos ill. az arra merőleges komponensei.

Láthatóan ez nem forgatás, hanem a sebesség irányában történő összenyomás (Lorentz-kontrakció).

c.) A Lorentz-transzformáció inverze

Közvetlen számolással kapjuk, hogy (8.19) inverze

$$\begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma; & \gamma \mathbf{v}^T/c \\ \gamma \mathbf{v}/c; & \mathbf{1} + (\gamma - 1) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T/v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}, \quad (8.24)$$

vagyis (8.19)-ből a $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ helyettesítéssel kapható.

d.) Két egymást követő Lorentz-transzformáció eredménye

A két Lorentz-transzformáció tartozzon a \mathbf{v}_1 és \mathbf{v}_2 sebességekhez (a hozzájuk tartozó γ_1 és γ_2 mennyiségekkel, (8.20)-nek megfelelően). Tehát a K és K' rendszerek relatív sebessége \mathbf{v}_1 , a K' és K'' rendszerek relatív sebessége \mathbf{v}_2 , végül a K és K'' rendszerek relatív sebessége \mathbf{v}_{12} .

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \gamma_2; & -\gamma_2 \mathbf{v}_2^T/c \\ -\gamma_2 \mathbf{v}_2/c; & \mathbf{1} + (\gamma_2 - 1) \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2^T/v_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1; & -\gamma_1 \mathbf{v}_1^T/c \\ -\gamma_1 \mathbf{v}_1/c; & \mathbf{1} + (\gamma_1 - 1) \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1^T/v_1^2 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \gamma_{12}; & -\gamma_{12} \mathbf{v}_{12}^T/c \\ -\gamma_{12} \mathbf{v}_{12}/c; & \mathbf{1} + (\gamma_{12} - 1) \mathbf{v}_{12} \cdot \mathbf{v}_{12}^T/v_{12}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{O}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.25)$$

ahol $\hat{\mathbf{O}}$ térbeli forgatás mátrixa. A szorzatmátrix bal felső elemének kiszámítása azt adja, hogy

$$\gamma_{12} = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 + \frac{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2}{c^2} \right) \quad (8.26)$$

A bal alsó hármasszoros oszlopvektort mindkét oldalon kiszámítva kapjuk, hogy

$$\mathbf{v}_{12} = \frac{1}{1 + \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2/c^2} \left(\frac{\mathbf{v}_1}{\gamma_2} + \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \frac{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2}{c^2} \right) \mathbf{v}_2 \right) \quad (8.27)$$

Ez a sebességösszeadás képlete általános esetben. Látható, hogy az eredmény a transzformációk sorrendjétől is függ.

A jobb felső hármasszoros sorvektor kiszámításával

$$\hat{\mathbf{O}}^T \mathbf{v}_{12} = \frac{1}{1 + \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2/c^2} \left(\frac{\mathbf{v}_2}{\gamma_1} + \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \frac{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2}{c^2} \right) \mathbf{v}_1 \right) \quad (8.28)$$

Közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy a (8.27) és (8.28) egyenletek jobboldalán álló vektorok hossza egyenlő, mégpedig

$$v_{12} = \frac{c}{1 + \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2/c^2} \sqrt{\left(1 + \frac{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2}{c^2} \right)^2 - \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2} \right)}. \quad (8.29)$$

Ebből nyilvánvaló, hogy $\hat{\mathbf{O}}$ csakugyan térbeli forgatás mátrixa. Ennek explicit kifejezését (8.25) jobb alsó háromszoros hármasszoros mátrixának kiszámításával kapjuk:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{O}} &= \mathbf{1} + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1 + 1} \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1^{\mathbf{T}}}{c^2} + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2 + 1} \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2^{\mathbf{T}}}{c^2} + \left(\gamma_1 \gamma_2 + \frac{\gamma_1^2 \gamma_2^2}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} \frac{\mathbf{v}_1^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}_2}{c^2} \right) \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1^{\mathbf{T}}}{c^2} - \\
&- \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_{12} + 1} \left(\gamma_1 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1 + 1} \frac{\mathbf{v}_1^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}_2}{c^2} \right) \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1^{\mathbf{T}}}{c^2} - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_{12} + 1} \left(\gamma_2 + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2 + 1} \frac{\mathbf{v}_1^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}_2}{c^2} \right) \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2^{\mathbf{T}}}{c^2} - \\
&- \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_{12} + 1} \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2^{\mathbf{T}}}{c^2} - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_{12} + 1} \left(\gamma_1 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1 + 1} \frac{\mathbf{v}_1^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}_2}{c^2} \right) \left(\gamma_2 + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2 + 1} \frac{\mathbf{v}_1^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}_2}{c^2} \right) \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1^{\mathbf{T}}}{c^2} = \\
&= \mathbf{1} + \frac{\gamma_1^2 \gamma_2^2}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)(\gamma_{12} + 1)} \left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2^{\mathbf{T}}}{c^2} - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1^{\mathbf{T}}}{c^2} \right)^2 - \\
&- \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_{12} + 1} \left(1 + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} \frac{\mathbf{v}_1^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}_2}{c^2} \right) \left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2^{\mathbf{T}}}{c^2} - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1^{\mathbf{T}}}{c^2} \right). \quad (8.30)
\end{aligned}$$

Könnyen belátható az is, hogy

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \gamma_2; & -\gamma_2 \mathbf{v}_2^{\mathbf{T}}/c \\ -\gamma_2 \mathbf{v}_2/c; & \mathbf{1} + (\gamma_2 - 1) \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2^{\mathbf{T}}/v_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1; & -\gamma_1 \mathbf{v}_1^{\mathbf{T}}/c \\ -\gamma_1 \mathbf{v}_1/c; & \mathbf{1} + (\gamma_1 - 1) \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1^{\mathbf{T}}/v_1^2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{12}; & -\gamma_{12} \mathbf{v}_{12}^{\mathbf{T}}/c \\ -\gamma_{12} \mathbf{v}'_{12}/c; & \mathbf{1} + (\gamma_{12} - 1) \mathbf{v}'_{12} \cdot \mathbf{v}'_{12}^{\mathbf{T}}/v_{12}^2 \end{pmatrix}, \quad (8.31)
\end{aligned}$$

$$\text{ahol } \mathbf{v}'_{12} = \hat{\mathbf{O}}^T \mathbf{v}_{12}. \quad (8.32)$$

Az (8.25), (8.31) képletekből látható, hogy két “forgatásmentes” Lorentz-transzformáció egymásutánja általában térbeli elforgatást is eredményez. Ez matematikailag már abból is nyilvánvaló, hogy az (8.19) Lorentz-transzformáció mátrixa szimmetrikus, két szimmetrikus mátrix szorzata viszont csak akkor lesz maga is szimmetrikus, ha a tényezők felcserélhetők. Ez azonban különböző irányú sebességek esetén nem teljesül.

Kis sebességek esetén (8.19)-ben elég v/c -ben első rendig megtartani a tagokat, ekkor közelítőleg:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{v}^{\mathbf{T}}/c \\ -\mathbf{v}/c & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}. \quad (8.33)$$

e.) Alkalmazás körmozgásra

A Lorentz-transzformáció fenti képleteit most körmozgást végző origójú koordináta-rendszerre alkalmazzuk úgy, hogy a koordináta-rendszer tengelyei az egymást követő pillanatokban nemrelativisztikusan párhuzamosak maradnak. A körmozgás következtében a sebesség iránya folyamatosan változik, ezért végtelen sok végtelen kis sebességű, a fenti értelemben elforgatásmentes Lorentz-transzformáció egymásutánjaként áll elő bármely véges szögelforduláshoz tartozó koordináta-transzformáció. A célunk az, hogy valamely adott, a koordináta-rendszerhez rögzített vektor irányának megváltozását a körmozgás egy teljes periódusát követően meghatározzuk (az eredeti irányához képest). Csak a vezető rendű relativisztikus korrekciót keressük (klasszikusan az elfordulás szöge 0).

Tekintsünk egy R sugarú, ω szögsebességgel forgó körlapot! A körlap középpontja alkalmas K inerciarendszerben nyugszik úgy, hogy minden pillanatban annak origójával esik egybe, továbbá a forgástengely a z -tengely. Bevezetünk ezek után végtelen sok, a folytonos φ változóval paraméterezett inerciarendszert a következőképpen: a K_φ koordinátarendszer pontjai a $v = R\omega$ kerületi sebességgel mozognak a körlap pereméhez φ szögelfordulásnál húzott érintővel párhuzamosan†. A K_φ koordinátarendszerek koordinátáit a kényelem kedvéért úgy választjuk, hogy térbeli origóik a nulla időpontban egybeessenek (más szóval a négyes origóik legyenek azonosak). Megjegyezzük, hogy ez csak térbeli eltolással tér el “a kör peremére rögzített origójú” koordinátarendszerektől, melyeknek a K -beli $t = \varphi/\omega$ időpillanatban az origója a körlap peremére illeszkedik. Ez az eltolás nem vezethet elforgatáshoz, így a továbbiakban nem foglalkozunk vele.

Legyenek K_0 tengelyei K tengelyeivel párhuzamosak! A többi K_φ rendszer tengelyei párhuzamos eltolással adódnak abban az értelemben, hogy valamely esemény $K_{\varphi+d\varphi}$ -beli koordinátái elforgatásmentes Lorentz-transzformációval adódnak a K_φ -beli koordinátákból. Valamely kis $d\varphi$ szögelfordulás esetén a kerületi sebesség megváltozása (a sebesség irányára merőlegesen) $R\omega d\varphi$. A kerülethez rögzített koordinátarendszerből mérve a sebesség megváltozása ettől csak v^2/c^2 rendben tér el (ami, mivel a sebességváltozást a Lorentz-transzformáció paramétereként alkalmazzuk, az általunk kiszámítandónál magasabbrendű korrekciót eredményezne). A $d\varphi$ szögelfordulás előtti és utáni koordináták kapcsolatát tehát (8.33) adja meg a középpont felé mutató $\mathbf{v} = \mathbf{R}\omega d\varphi$ sebességgel, ahol az \mathbf{R} vektor a körlap középpontjának helyvektora, expliciten (nulladrendű közelítésben, ami céljainkra elegendő)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \\ -R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.34)$$

Mindezek segítségével a $d\varphi$ szögelforduláshoz tartozó (8.33) Lorentz-transzformáció

$$dt = t' - t = \frac{R\omega}{c^2} (x \cos \varphi + y \sin \varphi) d\varphi \quad (8.35)$$

$$dx = x' - x = t R\omega \cos \varphi d\varphi \quad (8.36)$$

$$dy = y' - y = t R\omega \sin \varphi d\varphi \quad (8.37)$$

$$dz = z' - z = 0 \quad (8.38)$$

Ezt a differenciálegyenlet-rendszert kiintegrálva kapjuk adott esemény eredeti (K_0 -beli) koordinátáinak kapcsolatát a 360° -os elfordulás utáni ($K_{2\pi}$ -beli) koordinátáival.

$1/c^2$ szerint nulladrendben a (8.35) egyenletből

$$t^{(0)}(\varphi) = t(0) \quad (8.39)$$

Itt felső index a sorfejtés rendje, az argumentum a szögelfordulás. A kiindulási ($\varphi = 0$) koordinátarendszerbeli mennyiségek kezdeti feltételként jelennek meg, ezeknek tehát

† Vagyis az érintési pontba húzott sugár φ szöget zár be az x -tengellyel.

nincs felső indexük. Ennek megfelelően (8.36), (8.37) szerint

$$x^{(0)}(\varphi) = x(0) + t(0) R\omega \sin \varphi \quad (8.40)$$

$$y^{(0)}(\varphi) = y(0) + t(0) R\omega(1 - \cos \varphi) \quad (8.41)$$

A kezdeti feltételeket abból a nyilvánvaló követelményből határoztuk meg, hogy a K_0 -beli és a K_φ -beli koordináták $\varphi = 0$ esetén egybe kell hogy essenek.

Természetesen a nulladrendű formulák tisztán klasszikusan is levezethetők. A kapott formulákat visszahelyettesítve (8.35)-be kapjuk a következő rendet:

$$t^{(1)}(\varphi) = x(0) \frac{R\omega}{c^2} \sin \varphi + (y(0) + t(0)R\omega) \frac{R\omega}{c^2} (1 - \cos \varphi) \quad (8.42)$$

Ezt behelyettesítve (8.36), (8.37)-be kapjuk:

$$\begin{aligned} x^{(1)}(\varphi) = & x(0) \frac{R^2\omega^2}{c^2} \frac{1}{4} (1 - \cos 2\varphi) \\ & + (y(0) + t(0)R\omega) \frac{R^2\omega^2}{c^2} \left(\sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \varphi \right) \end{aligned} \quad (8.43)$$

$$\begin{aligned} y^{(1)}(\varphi) = & x(0) \frac{R^2\omega^2}{c^2} \left(-\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \varphi \right) \\ & + (y(0) + t(0)R\omega) \frac{R^2\omega^2}{c^2} \left(\frac{3}{4} - \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos 2\varphi \right) \end{aligned} \quad (8.44)$$

A koordinátákat elsőrendű pontossággal a nulladrendű és elsőrendű tagok összegeként kapjuk. A bennünket érdeklő $\varphi = 2\pi$ esetben azt kapjuk, hogy

$$t(2\pi) = t(0) \quad (8.45)$$

$$x(2\pi) = x(0) - \pi \frac{R^2\omega^2}{c^2} (y(0) + t(0)R\omega) \quad (8.46)$$

$$y(2\pi) = y(0) + \pi \frac{R^2\omega^2}{c^2} x(0) \quad (8.47)$$

$$z(2\pi) = z(0) \quad (8.48)$$

Tekintve, hogy $\pi R^2\omega^2/c^2 \ll 1$, ez azt jelenti, hogy a két koordinátarendszerbeli koordináták egymásból a $(0, -t(0)R\omega)$ pont körüli, $\pi R^2\omega^2/c^2 \ll 1$ szögű elforgatással kaphatók. A forgástengely a z -tengellyel párhuzamos, valamint a $K_{2\pi}$ koordinátarendszer tengelyei a körlap forgásirányával ellentétesen fordulnak el. Ez a jelenség a Thomas-precesszió. Ha erőmentes pörgettyű tengelyét vizsgáljuk, az az előbbi, körlaphoz rögzített origójú koordinátarendszerhez képest nem fordul el, más szóval, a Thomas-precesszió egyben a körmozgást végző tömegközéppontú erőmentes pörgettyű tengelyének elfordulását is megadja. Mint láttuk, ez az elfordulás tisztán geometriai jellegű, a Lorentz-csoport nem-ábeli jellegének következménye. Mivel a fenti szögelfordulás a körmozgás egy periódusához tartozott, a Thomas-precesszió szögsebessége (az irányt is figyelembe véve)

$$\boldsymbol{\Omega}_T = -\frac{\pi R^2\omega^2/c^2}{2\pi/\omega} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} = -\frac{R^2\omega^2}{2c^2} \boldsymbol{\omega} = -\frac{v^2}{2c^2} \boldsymbol{\omega} . \quad (8.49)$$

9. Köszönetnyilvánítás

Ez úton fejezem ki köszönetemet Bene Gyula témavezetőnek az értékes konzultációkért. Megköszönöm Tél Tamás programvezető biztatását és a doktori munkához nyújtott erkölcsi támogatását. Köszönöm Palla Lászlónak, az Elméleti Fizikai Tanszék vezetőjének, amiért lehetővé tette, hogy az értekezés anyagából speciális kollégiumot tartsak fizikus hallgatók részére.

10. Felhasznált irodalom

- [1] Nagy Károly, *Elektrodinamika*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968. p. 266
- [2] L. Page, 1912. *American Journal of Science*, XXXIV. p. 57.
- [3] Vető B. Az elektromos kölcsönhatás a speciális relativitáselmélet szemszögéből *Fizikai Szemle* 2009/4. 127-131.
- [4] E. M. Purcell, 1985. *Electricity and Magnetism*. Berkeley Physics Course, vol. 2. ISBN 0-07-004908-4
- [5] L.D. Landau, E. M. Lifsic, 1976. *Elméleti Fizika*, II. kötet, p. 222. Tankönyvkiadó Budapest
- [6] G. Holzmüller, *Z. Math. Phys.* 15. p 69. (1870)
- [7] F. Tisserand, *Compt. Rend.* 75, p. 760 (1872)
- [8] Vető B. Gravitáció és gravitomágnesség, *Fizikai Szemle* 2010/9. 296-299.
- [9] D. Bedford és P. Krumm, On relativistic gravitation. *Am. J. Phys.* 53. p. 889 1985.
- [10] H. Kolbenstvedt, Gravitomagnetism in special relativity, *Am. J. Phys.* 56. p. 523 1988.
- [11] Karlsson A. *LUTEDX/(TEAT-7150)/1-7* 2006. <http://www.es.lth.se/teorel/Publications/TEAT-7000-series/TEAT-7150.pdf>
- [12] L.D. Landau, E. M. Lifsic, 1976. *Elméleti Fizika*, II. kötet, p. 438. Tankönyvkiadó Budapest
- [13] Wald R. M . *General Relativity* (Chicago: The University of Chicago Press 1984. p 66-90
- [14] Mashhoon B. *Preprint* gr-qc/0011014v1 2000.
- [15] Nagy Károly, *Elektrodinamika*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968. p. 158.
- [16] Hraskó P. A GP-B kísérlet *Fizikai Szemle* 2007/6. 181.
- [17] Völgyesi L. *Geofizika*. Műegyetem kiadó, Budapest, 2002. p. 103- 105.
- [18] V. B.Braginsky, A. G. Polnarev, K. S. Thorne: *Phys. Rev. Lett.* 53, 863 1984.
- [19] J. F. Pascual-S'anchez: 2002. Measurement of the Earth's gravitomagnetic field in a terrestrial laboratory, *preprint*
- [20] Thomas L. H. 1926. *Nature* 117. 514.
- [21] Mashhoon B, Gronwald F and Lichtenegger H I M 2001 *Lecture Notes in Physics* **562** 83–108
- [22] A. D. Fokker, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* 23, 729 1920.
- [23] Lense J. Thirring H. 1921. *Phys. Z.* 22. p. 29
- [24] Schiff L I 1960 *Proc. N. A. S.* **46** 871-882
- [25] B. Vető: Gravity Probe B experiment and gravitomagnetism, *Eur. J. Phys.* 2010. vol. 31. p. 1123-1130.
- [26] Everitt C W F *et al*, 2008 *Gravity Probe B Science Results-NASAFinal Report* http://einstein.stanford.edu/content/final_report/GPB_Final_NASA_Report-020509-web.pdf
- [27] Bene Gyula, magánközlés, 2010.
- [28] E. Mach, 1883, 1888, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, Leipzig, Brockhaus.
- [29] A. Einstein, 1918, Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie, *Ann. Physik*, **55** 240-244.
- [30] Hraskó P. 2006, A GP-B kísérlet elvi alapjai, <http://www.hrasko.com/peter/>
- [31] H. Kragh, 1999, *Cosmology and Controversy: The Historical Development of Two Theories of the Universe*. Princeton University Press. p. 212, Chapter 5. ISBN 0-691-00546-X