

**Doktori értekezés**

**Számítógéppel segített kísérletek a  
középiskolában**

**Tóthné Juhász Tünde**

**Témavezető: Dr. Juhász András ny. egyetemi docens**

**ELTE TTK Fizika Doktori Iskola**

**Vezető: Dr. Tél Tamás**

**Fizika Tanítása Doktori Program**

**Vezető: Dr. Tél Tamás**



**Eötvös Loránd Tudományegyetem**

**Fizika tanítása doktori program**

**2018**



# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b> .....	5
<b>1. Hangtani kísérletek az Audacity programmal</b> .....	10
1.1. Az Audacity program rövid bemutatása.....	10
1.2. Szívhangok vizsgálata .....	11
1.3. Egyszerű hangtani demonstrációs kísérletek .....	13
1.4. Doppler-effektus (mérőkísérlet).....	20
1.5. Borosüveg által kiadott hang frekvenciájának vizsgálata.....	23
1.6. Összefoglalás .....	31
<b>2. Kaotikus mozgás vizsgálata a Dynamic Solver programmal</b> .....	33
2.1. A Dynamic Solver programról röviden .....	34
2.2. A bonyolult tál fogalma .....	35
2.3. A golyó mozgásegyenletei.....	37
2.4. A kaotikus mozgás első jellemzője: szabálytalan mozgás .....	38
2.5. A kaotikus mozgás második jellemzője: előrejelezhetetlenség .....	39
2.6. A kaotikus mozgás harmadik jellemzője: fraktálszerkezet a fázistérben .....	42
2.7. Összefoglalás .....	45
<b>3. Elektromosságtani kísérletek a LabCamera programmal</b> .....	47
3.1. A LabCamera program rövid bemutatása .....	47
3.2. Telep karakterisztikája .....	48
3.3. Bekapcsolási jelenségek .....	50
3.3.1. Lámpa bekapcsolási árama .....	51
3.3.2. Kondenzátor feltöltődése .....	52
3.3.3. Tekercs árama bekapcsoláskor .....	55
3.4. Feszültség és áram fázisviszonya váltakozó áramú körben.....	57
3.4.1. Fázisviszony ohmos ellenállás esetén .....	58
3.4.2. Fázisviszony kondenzátor esetén.....	59
3.4.3. Fázisviszony tekercs esetén .....	61
3.5. Összefoglalás.....	62
<b>4. Kinematikai kísérletek a FIZIKA szimulációs programmal</b> .....	64
4.1. A FIZIKA szimulációs program bemutatása .....	65
4.2. Vonatkoztatási rendszerek tanítása a FIZIKA programmal .....	66
4.2.1. A vonatkoztatási rendszer tanításának háttere .....	66

4.2.2. A diákok megértési nehézségei a vonatkoztatási rendszerek témakörében.....	67
4.2.3. Az origó szerepének vizsgálata.....	69
4.2.4. Áttérés állóból egyenletesen mozgó vonatkoztatási rendszerbe .....	71
4.2.5. Relatív sebesség egymással egy irányban mozgó autók esetén .....	73
4.2.6. Mozgó vonatkoztatási rendszerből könnyen megoldható feladatok .....	76
4.2.7. Összefoglalás.....	84
4.3. A dinamika kritikus pontjainak tanítása a FIZIKA programmal .....	84
4.3.1. Erők összeadása, az eredő erő meghatározása .....	87
4.3.2. Nyomóerő .....	92
4.3.3. Súrlódás.....	96
4.3.4. Az egyenletes körmozgás dinamikája .....	99
4.3.5. Összefoglalás.....	103
<b>5. A FIZIKA program alkalmazásának eredményességét vizsgáló oktatási kísérletek.....</b>	<b>105</b>
5.1. A 2014-2015-ös oktatási kísérlet megszervezése, lebonyolítása .....	106
5.2. Témazáró dolgozat eredményeinek elemzése (2014-2015) .....	107
5.3. A 2015-2016-os oktatási kísérlet lebonyolítása és eredménye.....	111
5.4. Jelenleg futó és a jövőben tervezett oktatási kísérletek .....	113
<b>Összegzés .....</b>	<b>115</b>
<b>Köszönetnyilvánítás.....</b>	<b>116</b>
<b>Summary.....</b>	<b>117</b>
A Függelék: További FIZIKA szimulációk.....	118
B Függelék: Kinematika témazáró dolgozat .....	124
C Függelék: Digitális feladatlap minta .....	129

## Bevezetés

*„A megismerés és az átélt tudás szépsége felér a legmagasabb művészeti élménnyel,  
de nemcsak gyönyörködtet, hanem segít a természet erőinek  
megismerésében és felhasználásában, jövőnk építésében is.”*  
Öveges József

A fizikatanár elsődleges célja az, hogy felkeltse a diákok érdeklődését, lelkesedését a természet törvényeinek megismerése iránt, és hogy a tanítványait önálló és kritikus gondolkodásra ösztönözze.

Ehhez nyilván fontos a jól felépített tananyag és az érthető magyarázat, de a diákok érdeklődését leginkább a kísérletezés kelti fel. Az emberekben alapvetően benne van a kísérletezés szeretete, ezért is olyan sikeresek ma is a népszerűsítő, kísérleteken alapuló „Fizika-show”-k. Minden tanár tapasztalatból tudja, hogy egy kísérlet bemutatása megéri a fáradságot, az előkészítést: olyankor a diákok sokszorozott figyelemmel követik az eseményeket, ha pedig tanulókísérletre kerül sor, még a legkevésbé érdeklődő diák is tőle szokatlan aktivitással veti bele magát a feladatokba. A látványos kísérleteket pedig még évek múlva is emlegetik a tanítványok.

A magyarországi fizikaoktatás jelenleg rengeteg problémával küzd. Ezek hátterében leginkább valamilyen hiány áll: tanárhiány, pénzhiány, időhiány. Én 16 éve tanítok a Karinthy Frigyes Gimnáziumban (magyar és nemzetközi rendszerben érettségiző osztályokat), és a szerencsésebbek közé tartozom azáltal, hogy emberileg és szakmailag is kiváló kollégák között dolgozom, és a szertár amortizációja ellenére is még van mivel kísérletezni. Ami viszont minden egyes fizikatanárt kikerülhetetlenül és könyörtelenül érint, az az időhiány. Ez sajnos nem új probléma, a 90-es évek eleje óta rohamosan és folyamatosan csökkent a fizikaórák száma [1].

Már a 2000-es évek elején többen vészharangot kongattak, s történelmi mélypontról beszéltek, amikor fizikából 9 órára (3 évfolyamon heti 3 óra) csökkent a gimnáziumi heti alapóraszám [1]. Azóta a történelmi mélypontnál is jóval lejjebb vagyunk, hiszen 2011 óta már csak heti 2 órában (szintén 3 évfolyamon) tanítjuk a középszintű fizikát, és ehhez adódik a fakultáció 3+4 órája. Ha fakultációs szemmel nézzük az óraszámokat, akkor első ránézésre nem látszik a változás előnytelen volta, középszinten azonban szembetűnő a probléma. A tananyag jelentős könnyítése nélkül a megtanításhoz rendelkezésre álló időt a korábbi (szintén nagyon szűk) órakeret 2/3-ra csökkentették, ami súlyos következményekkel jár. Heti 2 óra nagyjából arra elég, hogy az ember átszáguldjon a tananyagon úgy, hogy egy-két típusfeladatot megold a diákokkal az órán, azaz olyan, mintha a tanár vonalakban vázolná, miről szól a fizika, de közben nem marad ideje a részletek

kidolgozására. Nincs idő a nehézségek, buktatók hangsúlyozására, a gyengébb tanulók felzárkóztatására, de a tehetséggondozásra sem, hiszen nincs idő egy-két nehezebb, de tanulságos feladat átbeszélésére. Ami pedig a legfájóbb: nem marad elég idő a kísérletezésre sem.

A kísérletek időhiány miatti háttérbe szorulását nem egyszerű orvosolni, de muszáj megoldani, hogy az órai keretbe beleférjenek, hiszen a kísérletek kulcsfontosságúak a diákok motivációjának fenntartásában. Fontos, hogy a tanítványaink megtapasztalják: a fizika egy kísérleti alapokon nyugvó tudomány, nem pedig száraz, feladatmegoldó és csupán elméleti tudást számon kérő tantárgy. Sajnos a hosszú időt igénylő mérések így is csak fakultáción kerülnek elő, hiszen lehetetlen 20-30 perces mérőkísérleteket beleilleszteni a tanórába, amikor amúgy is nagy a rohanás.

Ezen a ponton elő kell kerülnön a tanári leleményesség. Egy igazi pedagógus nem adja föl könnyen, hanem megpróbálja az éppen aktuális körülmények között - ha már a körülményeken nem tud változtatni - kihozni a legtöbbet tanítványaiból és ehhez minden új lehetőséget megragad. A XXI. században annyi technikai vívmány van körülöttünk, hogy pazarlás lenne elmenni mellettük és nem a tanítás szolgálatába állítani őket. A számítógép, a webkamera, az okostelefon mind-mind olyan eszköz, melyet diákjaink – sokszor nálunk ügyesebben – naponta használnak, és kifejezetten örülnek, ha egy-egy tanórán nem kikapcsolva a táskájukban kell tartani őket, hanem fontos részévé válhatnak az órának és a tanulási folyamatnak.

### **A doktori munka aktualitása és célja**

Kutatási munkámban a fent felsorolt érvek miatt arra kerestem a választ, hogy miként lehet a számítógépet órai kísérletezésre használni. Ebben az irányban rengeteg kutatás folyt és folyik jelenleg is [2-4], de azt fontos szem előtt tartani, hogy a tanárok számítógépes ismerete rendkívül változatos. Legtöbbször jól kezelik felhasználói szinten a számítógépet, de számítógépes adatgyűjtő műszereket összeállítani vagy programozni csak a tanárok elenyésző része tud. Így azok a bonyolultabb mérések, amelyek különféle érzékelőket, interfészeket használnak, sajnos nem szólnak a fizikatanárok többségéhez. Arról nem is beszélve, hogy rengeteg iskola számára küzdelmes az iskolai szertár fejlesztéséhez szükséges anyagi háttér előteremtése, tehát az ilyen eszközök beszerzése is komoly nehézségekbe ütközik.

Ezért az első elvárás, amit szem előtt tartottam a kísérletek kitalálásánál és összeállításánál az volt, hogy ne kelljen hozzá külön eszközt vásárolni, azaz ingyenesen megvalósítható legyen. A másik fontos szempont az volt, hogy egy átlagos számítógépes intelligenciával rendelkező tanár is gyorsan meg tudja tanulni a programok kezelését, a kísérlet végrehajtását. A harmadik és egyben talán

legfontosabb szempont pedig az, hogy a számítógépes kísérletnek legyen valami többletértéke, szemléletformáló szerepe a hagyományos kísérletekhez képest.

Nagy csapda van ugyanis abban, ha az ember lelkesen minden kísérletet számítógépen, szimulációval helyettesítve mutat be. Egy labda földön való pattogását például nagyon egyszerűen meg lehet vizsgálni számítógép nélkül, valódi labdát pattogtatva a földön. Ha csak azért, mert a számítógép színesebb és modernebb, ugyanezt a kísérletet szimulációval mutatjuk be, nem közelebb, hanem távolabb visszük a diákjainktól a fizikát. Kell az életszagúság az órán, kellene a valódi kísérletek. Egy számítógépes kísérletnek akkor van létjogosultsága, ha többletértékkel bír az eredeti, valós kísérlethez képest. A pattogó labda példájánál maradva: ha a számítógép segítségével pontosabban tudjuk mérni a labda egymás utáni pattogásokban elért magasságait, vagy ha a program ki tudja rajzolni a labda hely-idő vagy sebesség-idő grafikonját, akkor onnantól van értelme és létjogosultsága a számítógépes kísérletnek.

Doktori munkám fejezeteiben ezért olyan témaköröket járok körül, ahol tapasztalatom szerint sokat segíthet a számítógépes kísérletezés a tananyag mélyebb megértésében, és a diákok által nehezebben megértett részek (úgynevezett „kritikus pontok”) hatékonyabb tanításában.

### **A doktori értekezés fejezeteinek rövid összefoglalása**

Az első fejezetben olyan méréseket mutatok be, melyek az Audacity program használatára épülnek. A program hangtani felhasználása kézenfekvő, ezért kidolgoztam a hangtani alapkísérletek egy lehetséges bemutatási módját a program és hangszerek segítségével. Az újfajta feldolgozás egyik eredménye, hogy olyan fogalomhoz (hangszín) is sikerült kísérletet kapcsolni, amelyhez hagyományos módon eddig nem volt lehetséges. Az alapkísérleteken túl a program spektrum-analizáló funkciójának segítségével kidolgoztam egy Doppler-effektushoz kapcsolódó kvantitatív mérést is, valamint egy olyan tanulói mérést, amely egy üveg megfújásakor keletkező hang frekvenciáját vizsgálja. A tanulói méréseket több csoportomban is sikerrel használtam, tapasztalatom szerint a diákok kifejezetten élvezték a programmal való munkát.

A második fejezetben egy angol nyelvű szimulációs program, a Dynamic Solver segítségével mutatom meg, hogy hogyan lehet középiskolai kereteken belül tanítani, a diákokkal felfedeztetni a káosz alapfogalmait. Egy bonyolult táblán mozgó golyó esetét vizsgálva demonstrálhatjuk a mozgás szabálytalanságát, előrejelezhetetlenségét, vagy a fázistérben mutatott fraktálszerkezetét. Szakköri kereteken belül mindig nagy sikert arat ennek a témakörnek a vizsgálata, már csak azért is, mert a káoszelmélet népszerű tudományág, a diákok érdeklődését jobban felkelti, mint például a hőtan vagy a dinamika sok témaköre. A diákok kifejezetten ügyesen dolgoznak a szimulációval és hatalmas

élmény, amikor önálló felfedezéseket tehetnek (pl. vizsgálhatják, hogy hogyan függ a fraktálszerkezet a mozgás összenergiájától).

A harmadik fejezetben egy magyar fejlesztésű program, a LabCamera (korábban WebCam Laboratory) segítségével mutatom meg, hogy hogyan lehet bizonyos elektromosságtani kísérleteket számítógépes mérésre alakítani interfészek használata nélkül. A program „Univerzális logger” funkciója képes beolvasni digitális (pl. multiméter) és analóg (pl. hőmérő, forgótekerccses árammérő) műszerek által mutatott értékeket, ami bizonyos méréseket gyorsabbá, könnyebben kezelhetővé és utólagosan kielemezhetővé tesz. Alapórán a váltakozó áram és feszültség fázisviszonyát bemutató kísérletek, fizika fakultáció és tehetséggondozó szakkör keretein belül pedig a bekapcsolási jelenségek körében kidolgozott mérések segítették a szemléletességet és a tananyag mélyebb megértését.

A negyedik fejezet a FIZIKA magyar fejlesztésű szimulációs szoftverre írt szimulációkat mutat be. A program használata elősegíti a diákok grafikus szemléletének kialakulását és hasznosnak bizonyult bizonyos kritikus pontok tanításában is. A kinematika témakörében a vonatkoztatási rendszerek tanításához, a dinamika témakörében pedig a nyomóerő, súrlódás és a körmozgás dinamikája nehezen tanítható pontjaihoz dolgoztam ki olyan szimuláció-sorozatokat, amelyek segíthetik az átlagos képességű diákokat a pontosabb megértésben. A programmal nehezebb feladatok is jól elemezhetőek, ezáltal a módszer jól alkalmazhatónak bizonyult a tehetséggondozásban. Ezt mozgó vonatkoztatási rendszerből megoldható feladatokon keresztül mutatom be.

Az utolsó, ötödik fejezetben ismertetem a témában végzett oktatási kísérleteket és azok eredményeit. Egy tanár nyilván azért dolgoz ki újabb és újabb kísérleteket, mert hisz abban, hogy javíthat a tanulási folyamaton akkor, ha szemléletformáló, valamilyen nehezebb pontot jól körüljáró és elemző kísérletet alkalmaz az óráin. A sikeresség első mérője a saját tanítványok visszajelzése, a dolgozatban mutatott teljesítményük javulása lehet. Ez után viszont szükséges a saját érzéseinket objektívebb módon is ellenőrizni, erre a célra alkalmazzuk az oktatási kísérleteket. Ilyen oktatási kísérletet a negyedik fejezetben bemutatott magyar fejlesztésű programok esetén az ELTE Fizika Tanítása Program keretén belül működő Oktatási Kísérlet munkacsoporttal szerveztünk. Vizsgáltuk, hogy a FIZIKA program használatával sikeresebben tanítható-e a kinematika a középiskola kilencedik osztályában. Ez utóbbi kísérletet kétszer is elvégeztük, mindkét esetben pozitív eredményt kaptunk. A doktori értekezésben az oktatási kísérlet azon részeit mutatom be, melyek a saját munkáim, így elsősorban a témazáró dolgozatot és értékelését tárgyalom. Egy jelenleg is futó oktatási kísérletben a FIZIKA program dinamikában való alkalmazhatóságát vizsgáljuk, emellett már folyik az előkészítése a



következő oktatási kísérletnek, amelyben bizonyos kritikus pontok tanításának hatékonyságát vizsgáljuk majd a FIZIKA programmal.

### Hivatkozások

- [1] Szabó Á.: A fizikatanítás kialakulásáról, fejlődéséről és jelenlegi helyzetéről, Fizikai Szemle (2009), LIX. Évf., 6.sz., p217.
- [2] Kopasz K., Gingl Z., Makra P., Papp K.: A virtuális mérés technika kísérleti lehetőségei a közoktatásban, Fizikai Szemle, 2008 (7-8), 267-271
- [3] Bérces Gy.: Informatika és természettudományok (a tanításban), in: *Természettudomány tanítása korszerűen és vonzóan*, konferenciakiadvány, szerk.: Tasnádi Péter, ELTE Természettudományi Oktatásmódszertani Centrum, Budapest, pp86-97, 2011.
- [4] Piláth K.: HiTech eszközök a fizikaórán, *Természettudomány tanítása korszerűen és vonzóan*, konferenciakiadvány, szerk.: Tasnádi Péter, ELTE Természettudományi Oktatásmódszertani Centrum, Budapest, pp247-251, 2011.

## 1. Hangtani kísérletek az Audacity programmal

Az Audacity program [1.1] a 2010-es évek elejére vált közzismertté a magyarországi fizikaoktatásban. Az ELTE TTK által 2011-ben szervezett „Természettudomány tanítása korszerűen és vonzóan” című konferencián már szerepelt az ismertetése [1.2], én is erre a konferenciára írtam meg az alapkísérletekről szóló ismertető cikkemet [1.3]. Nem sokkal ezután, 2013-ban, az emelt szintű érettségi tételek között már található volt egy Audacity használatára épülő mérés [1.4], amelynek köszönhetően minden középiskolai fizikatanár megismerte a program alapszintű használatát.

A legkézenfekvőbb terület, ahol az Audacity jól alkalmazható, a hangtan témaköre. A hangtan legtöbb alapkísérlete vizuálisan oszcilloszkópon mutatható be a középiskolában. Az oszcilloszkóp drága és ezért az iskolákban általában ritka műszer, ráadásul kezelése sem egyszerű: a diákok a beállító-gombok rengetegében elvesznek, így tanulókísérletre sem igazán alkalmazható. Ezen felül problémát okoz az is, hogy az oszcilloszkóppal megfigyelt jelenségeket nagyon nehézkesen lehet csak rögzíteni (pl. fényképezőgéppel), ezért ez a műszer leginkább csak az órák színesítésére és demonstrálásra alkalmas, mérőkísérlet elvégzésére nem, pedig ilyen kísérletekre, azok részletes kiértékelésére a hangtanban is nagy szükség lenne.

A hangtan területén ezekre a nehézségekre próbáltam megoldást keresni az Audacity program használatával. A program nagy előnye, hogy nincs nagy rendszerigénye, bármilyen számítógépen, laptopon gond nélkül fut, ráadásul a laptop képernyőjét projektorral kivetítve sokkal jobban látható és követhető a diákok számára, hogy mi történik, mint egy oszcilloszkóp kis képernyője esetén, amiből legfeljebb az első két sorban ülők látnak bármit. A jelenségek a programmal nemcsak megfigyelhetők, hanem elemezhetőek is: az eredmények elmenthetőek, illetve a programmal készült hangfelvétel utólag újra kiértékelhető, így jobban vizsgálhatóak vele az apró részletek.

Az alap hangtani kísérleteken túl kidolgoztam olyan új, bonyolultabb jelenségek vizsgálatára alkalmas kísérleteket, amelyeket projekt munka vagy szakkör keretein belül sikerrel alkalmaztam a tehetséggondozásban.

### 1.1. Az Audacity program rövid bemutatása

Az Audacity egy olyan hangrögzítő és elemző program, amely mindenki számára hozzáférhető, ingyenesen használható. Különböző operációs rendszerek (Windows, Linux, Mac) alatt futtatható, kezelése pedig rendkívül egyszerű, így a kísérletek gyorsan elvégezhetőek vele. Ahhoz, hogy

bármilyen mérést végrehajtsunk, csak egy egyszerű mikrofonra van szükségünk, amely lehet laptopba beépített is, de ha rendelkezésre áll, szerencsésebb és kényelmesebb a külső mikrofon használata. A program részletes ismertetése megtalálható többek között a Sulinet honlapján is [1.5].

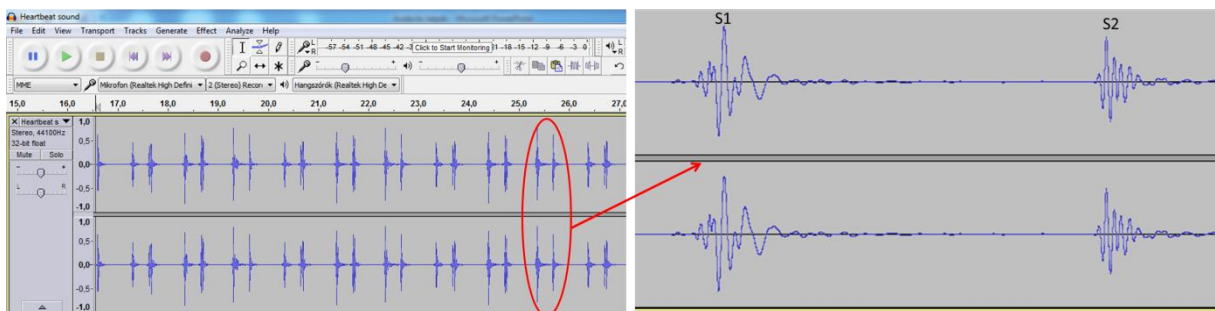
A program fizikaórán való használhatóságának az alapja az, hogy a program a mikrofon által érzékelt hangot nagy mintavételi frekvenciával (44100Hz) rögzíti. Az így felvett hang bármikor visszajátszható, részletesen elemezhető (lásd később: lebegés, Doppler effektus), így az akusztikus és a vizuális információ összekapcsolása révén lehetőséget kínál a fizikai tartalmak jobb megértésére és középiskolai szinten pontos mérések elvégzésére is.

## 1.2. Szívhangok vizsgálata

A hangtanban bemutatható kísérleteket jórészt az Audacity program használatára alapozom, ezért a program bemutatásához bevezető kísérletként szívhangokat szoktam vizsgálni. Természetesen a program bemutatása bármilyen más, hangot adó jelenséggel megoldható, de a szívhang vizsgálata kifejezetten alkalmas arra, hogy a diákok érdeklődését felkeltse, és a program alapfunkcióit is be lehessen vele mutatni.

Rengeteg youtube-videó van, amiken egészséges, illetve kóros szívhang hallható [1.6, 1.7], ezeket könnyen elemezhetjük az Audacity programmal, ha előtte mp3 formában letöltjük őket. (Több próbálkozást is tettem a szívhang sztetoszkóppal való rögzítésére, hiszen így még izgalmasabb lenne a kísérlet, de egy egyszerű sztetoszkóppal nem sikerült megfelelően elemezhető hangfelvételt készíteni, így maradtam a letöltött hangfelvételek használatánál.)

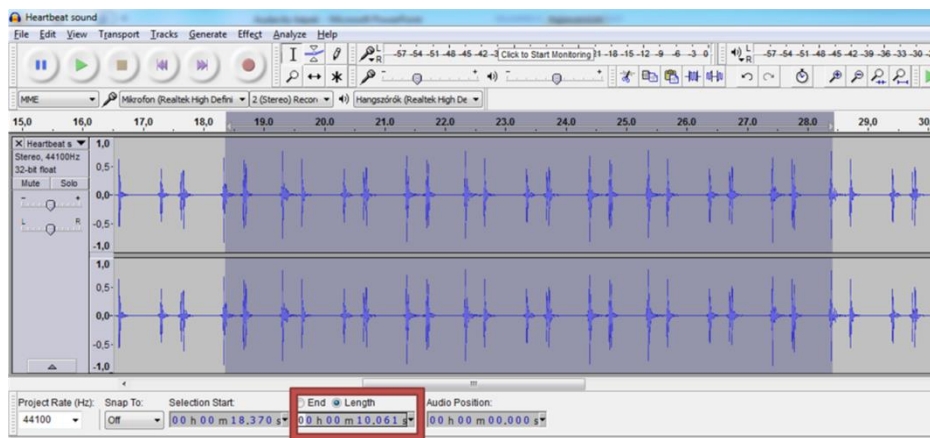
Először egy egészséges szívhang esetében megnézzük a program által kirajzolt hanggörbét, amit az 1.1. ábra mutat. (A hangfelvétel sztereó módban történt, ezért két azonos sávot látunk minden felvételen.)



1.1. ábra. Normál szívhang görbéje az Audacity programban. [1.6]

A jobb oldalon látható kinagyított egy szív cikluson (1 szívdobbanás) megfigyelhető, hogy az tulajdonképpen két hangeffektusból áll. Az első hangeffektust (S1: pitvari szisztolé) a kamra telítődése után kamra és pitvar közötti szívbillentyűk (vitorlás billentyűk) záródása, a másodikat (S2: kamrai diasztolé) pedig a kamra kiürülése után a kamrákat a főverőérrel illetve a tüdőverőérrel összekötő billentyűk (zsebes billentyűk) záródása okozza [1.7].

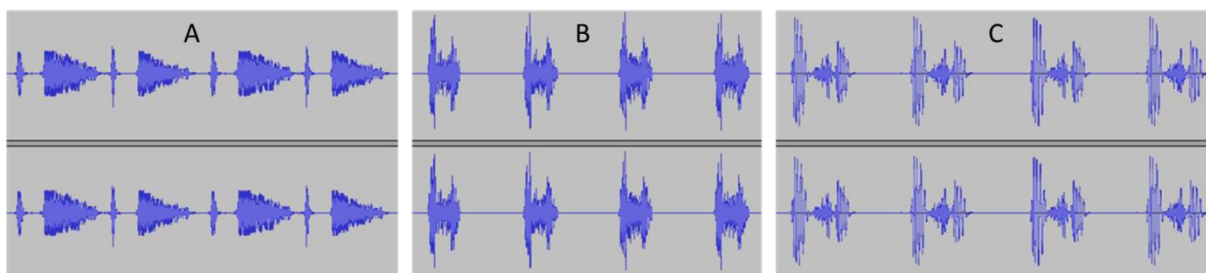
A szívhang példáján keresztül gyorsan megmutatható a program néhány alapvető funkciója: a függvény nagyítása, kicsinyítése, kivágása, valamint az időtartam mérése. Ez utóbbit a pulzus meghatározásán keresztül tanítom. Ehhez először lemérünk 10 szívdobbanáshoz szükséges időt, ahogy azt az 1.2. ábra mutatja.



1.2. ábra. 10 szívdobbanáshoz szükséges idő kimérése az Audacity programmal.

A hangmintán a megfelelő részt kijelöljük, majd leolvassuk a kijelölt rész idejének hosszát az ábrán piros kerettel jelölt részből. Ez az ábrán mutatott példa esetén  $t=10,061s$ , amiből kiszámolható, hogy két szívdobbanás között eltelt idő kb. 1 másodperc, azaz a pulzus (1 perc alatt történő szívdobbanások száma) ebben az esetben körülbelül 60.

Az érdekesség kedvéért meg szoktam mutatni, hogy hogyan néz ki néhány tipikusan kóros szívhang (1.3. ábra). A vér áramlása egészséges esetben lamináris, ami nem jár zörejjel, így az S1 és S2 impulzusokon kívül nincs más hallható hangeffektus. Kóros esetekben azonban a vér általában valamilyen szűkületen keresztül halad át, így az áramlás turbulens lesz és zörejt okoz. Ez azért izgalmas, mert egy egyszerű hangfelvétel elemzésének segítségével még annak is szembetűnő a különbség, aki esetleg a szívhangot laikusként hallgatva nem is hallana jelentős különbséget az esetek között.



1.3. ábra. Kóros szívhangok képe az Audacity programmal. A: aortabillentyű elégtelensége; B: vitorlás billentyű elégtelensége; C: aortabillentyű szűkülete [1.7]

Az „A” esetben az aortabillentyű nem záródik jól, így a tüdőverőérből a vér visszaáramlik a bal kamrába, és ez okozza az S2 utáni zörejt. A „B” esetben a pitvar és kamra közötti vitorlás billentyű nem záródik jól, ezért a kamra kiürülési szakaszában a pitvar felé visszaáramlik a vér. A „C” esetben, az aortabillentyű szűkületekor a kamrából távozó vér egy összeszűkült nyíláson keresztül távozik, ez adja az először erősödő, majd halkuló hangeffektust, amelynek képe orsó alakú [1.7].

Miután a programot sikerült megismertetni a diákokkal, következhetnek az órai hangszeres kísérletek, amelyekben nem korábbi felvételeket használunk, hanem az órán élőben vesszük föl és elemezzük a jelenségeket.

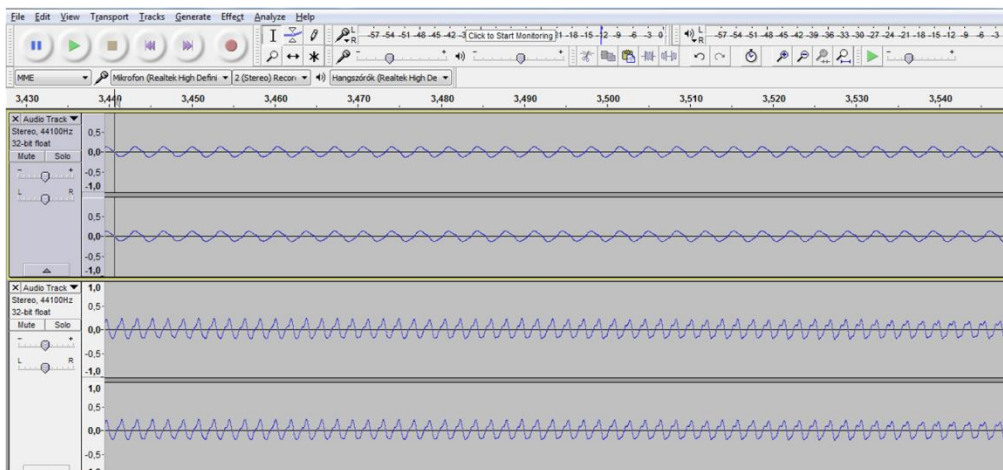
### 1.3. Egyszerű hangtani demonstrációs kísérletek

A hangtani alapkísérletek (pl. hangmagasság, lebegés) Audacity-vel történő bemutatásának egyik lehetséges módja az, hogy a hangokat a program hanggenerátorával keltjük, és az így kapott hangokat elemezzük. Ez azért nem igazán szerencsés, mert így a kísérlet azon részét (nevezetesen a vizsgálandó hang keltését) is számítógéppel váltjuk ki, amit könnyen megoldhatnánk a diákok részvételével is. Az így bemutatott kísérletben a diákoknak nem jut szerep, és ettől túlságosan lecsupaszított, gépiesített lesz az egész.

A diákokat sokkal jobban érdeklik azok a kísérletek, amelyeknek ők is aktív részesei. Így a hangtani alapkísérleteket én nem hanggenerátorral, hanem hangszeres használatával tanítom. A Karinthy Frigyes Gimnáziumban tanulók jelentős része zeneiskolába is jár, így minden csoportban van 4-5 diák, aki szívesen behozza hangszerét (gitárt, fuvolát, hegedűt) a fizikaórára, ezáltal az osztály aktív résztvevőjévé válik a kísérletnek.

## Hangmagasság vizsgálata

A hang jellemzői (hangmagasság, hangerősség, hangszín) jól taníthatóak - a diákok aktív részvételével - az Audacity program segítségével. A hangmagasság vizsgálatához egy diák megszólaltat valamilyen hangszeren egy mélyebb, majd egy magasabb hangot (lehetőleg körülbelül ugyanolyan erősen). A hangokat a programmal felveszem, majd a felvételt megfelelően kinagyítva együtt elemezzük ki a csoporttal a két hang képe közötti különbséget. Az 1.4. ábra egy ír furulya két különböző magasságú hangját mutatja.



1.4. ábra. Hangmagasság vizsgálata az Audacity programmal. A felső felvétel egy ír furulya mélyebb (D4), az alsó egy magasabb (C#5) hangját mutatja.

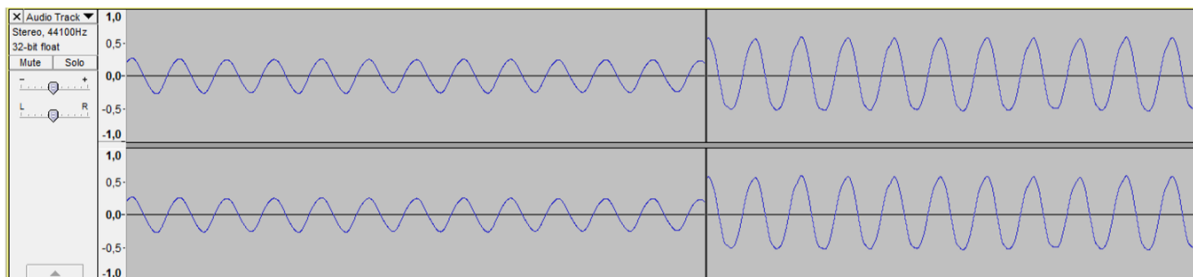
A diákok a látott kép alapján könnyen rávezethetőek (sokan persze eredetileg is tudják), hogy a hangmagasság a hang frekvenciájával áll kapcsolatban. Minél nagyobb egy hang frekvenciája (azaz minél sűrűbben követik egymást a függvényben a hullámok), annál magasabbnak halljuk az adott hangot.

A hangtan sok érdekes kísérletére, így például a hangközök frekvencia-arányainak pontos kimérésére órai keretek között sajnos nincs elegendő idő, de szakköri projektmunkában könnyen megvalósítható egy ilyen méréssorozat. A diákok számára érdekes és meglepő, hogy a frekvencia-arányok kimérésével már a Kr.e. VI. században foglalkozott az általuk csak matematikusként ismert Pitagorasz (Püthagorasz). Egy egyszerű mérés-sorozattal az ő kísérleteit és számításait végezhetjük el – számítógépes segítséggel kicsit gyorsabban és könnyebben, mint az ókorban. A projektmunkában résztvevő diákok házi feladatként, önálló feldolgozásban ismerkednek meg Pitagorasz munkásságával [1.8]. Ezután a munka csoportokban folytatódik: a tanulók egy csoportja elméleti úton kiszámolja, hogy mi a dúr-skála hangjainak frekvencia-aránya. Ehhez – középiskolai szolfézs-ismeretek birtokában – elég, ha megmondjuk, hogy az oktáv 2:1, a tiszta kvint pedig 3:2 frekvencia-arányt jelent (ez volt Pitagorasz számolásainak is a kiindulópontja). A diákok másik csoportja egy C-s furulya segítségével

rögzíti a C-dúr skála hangjait az Audacity program segítségével, majd meghatározzák a hallott hangok frekvenciáit (spektrumelemzéssel), és ez alapján kiszámolják, hogy az egyes hangok frekvenciája hogyan aránylik az alaphang (C) frekvenciájához. A diákok harmadik csoportja pedig egy gitár húrja rezgő részének hosszát vizsgálja, szintén C-dúr skála esetén. A húr hossza fordítottan arányos a frekvenciával, így a hosszmérés segítségével (és egy kis számolással) meg tudják határozni a dúr skála frekvenciáinak arányát az alaphanghoz viszonyítva egy harmadik módszerrel. A három csoport eredményét összevetve megállapítható, hogy közel azonos eredményre jutunk a Pitagorasz által is megállapított frekvencia-arányokkal.

## A hang erősségének vizsgálata

A hang erősségének bemutatása nagyon egyszerűen zajlik: egy adott hangszeren (pl. furulyán) ugyanazt a hangot először halkán, majd hangosabban szólaltatjuk meg, és ezt az Audacity programmal rögzítjük (1.5. ábra).



1.5. ábra. Hangerősség és amplitúdó kapcsolatának bemutatása az Audacity programmal.

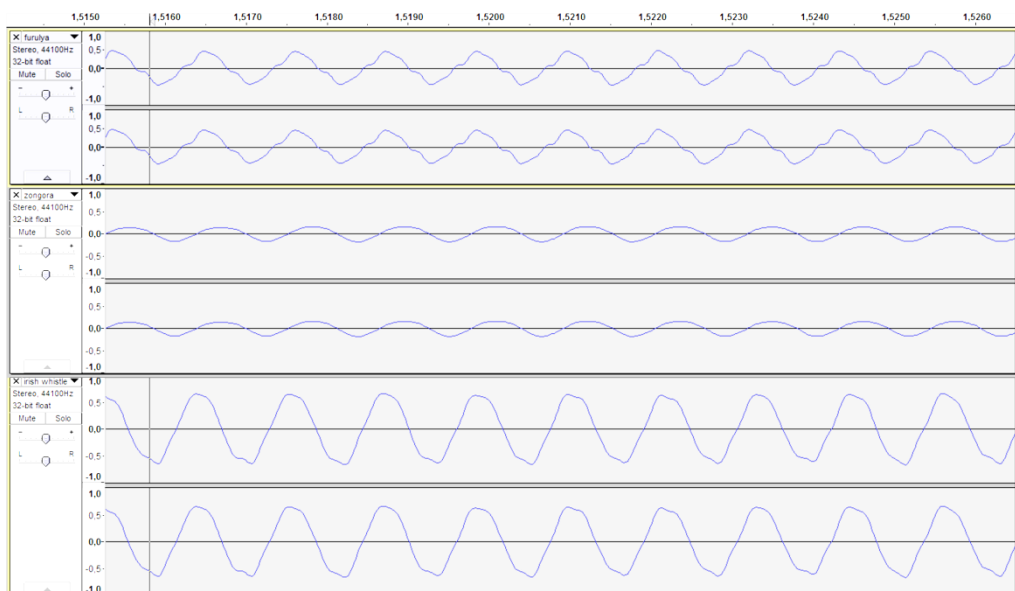
A felvételeket egymás mellé vágva és megfelelően kinagyítva jól látszik, hogy a két hang frekvenciája ugyanaz, de a hangosabb hang amplitúdója nagyobb. Fontos megjegyezni, hogy a hangerősség nem arányos az amplitúdóval (a hangerősség, decibelskála, hangszennyezés témaköre fakultatív projekt munkában szintén feldolgozható), de az igaz, hogy nagyobb hangerősséghez nagyobb amplitúdó tartozik.

## Hangszín vizsgálata

Az Audacity használatakor a hang rögzítésének és utólagos elemzésének hatalmas előnye, hogy olyan fogalmakat is taníthatunk vele, amelyekhez demonstrációs vagy mérőkísérletet eddig egyáltalán nem lehetett hozzákapcsolni középiskolai szinten. Erre az egyik legjobb példa a hangszín tanítása. Minden diák tudja, hogy a hangszerek hangja (valamint az emberek hangja is) azonos frekvencia esetén is különbözik egymástól: csukott szemmel is meg lehet mondani, hogy egy adott hangot éppen egy hegedűn vagy furulyán szólaltattunk-e meg. A különböző hangszíneket a fizikaórán eddig csak elméleti módon tudtuk megmagyarázni (a felharmonikusok arányával), kísérleti vizsgálatra középiskolai körülmények között nem volt lehetőség. Az Audacity programmal azonban a hangszínek

közötti különbség is jól vizsgálható, ráadásul egy meggyőző és gyorsan elvégezhető kísérlettel alátámaszthatóvá válik az elméleti magyarázat.

A kísérlet első lépéseként felvesszük ugyanazt a zenei hangot más-más hangszerekkel megszólaltatva (1.6. ábra).

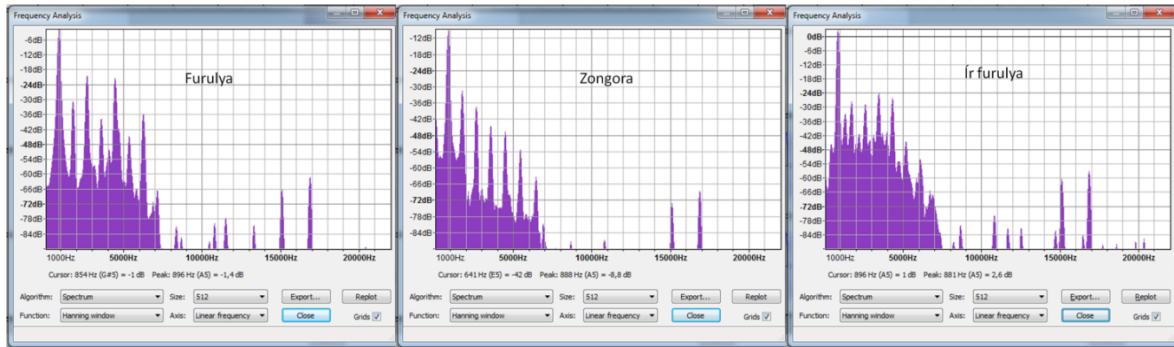


1.6. ábra. Különböző hangszerekkel megszólaltatott azonos magasságú (A5, azaz  $f=880\text{Hz}$ ) hangok képe. A felső hangszer furulya, a középső zongora, a legalsó pedig ír furulya.

A korábbi kísérletek visszacsatolásaként először megbeszéljük a diákokkal, hogy a hangok ugyanolyan magasságúak, hiszen frekvenciájuk megegyezik, és különböző erősségűek, mert az amplitúdójuk is különböző (a zongora a leghalkabb). Ezután természetesen következik a kérdés, hogy mégis mitől halljuk másnak a különböző hangszerek hangját. A diákok gyorsan rájönnek, hogy a hanghullámok alakja más és más az egyes hangszerek esetében.

Ilyenkor hagyományosan közöljük a diákokkal, hogy az alaphang mellett megszólalnak bizonyos felharmonikusok is, amik erőssége különböző hangszerek (vagy embereknél különböző koponyák) esetében más és más, így válik a hangszerek (vagy az emberek) hangja egymástól különbözővé. Az Audacity programot használva ezt nem csak elméletben tanítom, hanem gyakorlatban is tudom demonstrálni. A program spektrum-elemző funkcióját használva megtekinthető, hogy egy adott hang milyen alaphangból és felharmonikusokból tevődik össze. Mindhárom hangszer esetén kielemezhető a programmal a spektrum, ezt az 1.7. ábra mutatja.





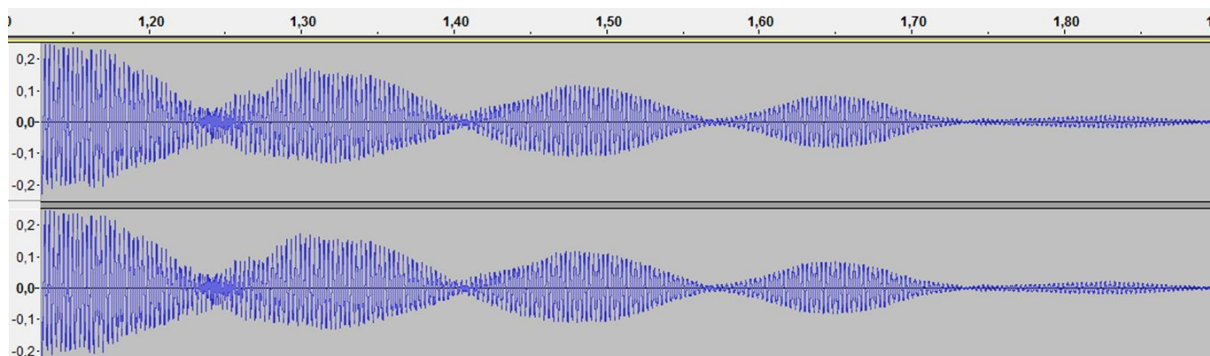
1.7. ábra. Hangszín vizsgálata az Audacity programmal: három hangszer spektruma azonos hangmagasság ( $f=880\text{Hz}$ ) esetén.

A spektrumokról leolvasható, hogy az alapfrekvencia mindhárom esetben ugyanaz (880 Hz körüli érték), valamint látható az is, hogy az intenzitáscsúcsokban ennek az alapfrekvenciának a többszörösei jelennek meg (felharmonikusok), de az intenzitások aránya más és más mindhárom hangszer esetén. Ezzel a kísérlettel a hagyományosan kissé megfoghatatlan és elméleti síkon mozgó hangszín fogalmának tanítása kísérleti alapra helyezhető.

### Lebegés gitárhúrokkal

A lebegés jelenségét hagyományosan egymáshoz képest kicsit elhangolt hangvillákkal, oszcilloszkóppal szokás bemutatni, amely az oszcilloszkóp miatt kissé nehézkes és körülményes kísérletnek számít, ráadásul az oszcilloszkóp képének rögzítése nélkül a jelenség részletes elemzése lehetetlen.

A lebegés jelensége az Audacity program segítségével is bemutatható, és mivel szinte minden osztályban van valaki, aki gitározik, ezért nem hangvillákon, hanem gitárhúrokon szoktam bemutatni. Egy adott hangot a gitár két különböző húrján egyszerre meg lehet szólaltatni (pl. a felső e húr szabadon, az alatta lévő H húr pedig az 5. bundon lefogva). Ha az egyik húr kissé elhangoljuk az ideális beállítástól, majd a fent leírt módon megpengetjük a két húr, hallhatóvá válik a lebegés. Ha ezt a jelenséget a program segítségével föl vesszük, akkor semmilyen egyéb előzetes beállítást nem igényel a kísérlet, hiszen a felvétel pár kattintással szerkeszthető, a jelenség kinagyítható, az eredmény pedig magáért beszél (1.8. ábra).



1.8. ábra. Gitárhúrokkal létrehozott lebegés felvétele az Audacity programban.

Az ábrán mind a lebegés (orsó alakú periodikus változás), mind a csillapodás (az egymást követő orsókon belüli maximumok csökkenése) jól megfigyelhető, és ez összhangban áll a kísérlet során hallott hang erősségének változásaival, amit a felvétel lejátszásával bármikor újra meghallgathatunk.

Szakkörön a jelenséget tovább elemezhetjük. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a két hanghullám amplitúdója egységnyi, azaz a lebegéskor két szinuszosan változó függvény összegét halljuk:

$$y_{1+2} = y_1 + y_2 = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t), \quad (1.1)$$

Kihasználva azt az azonosságot, hogy

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right), \quad (1.2)$$

kapjuk, hogy

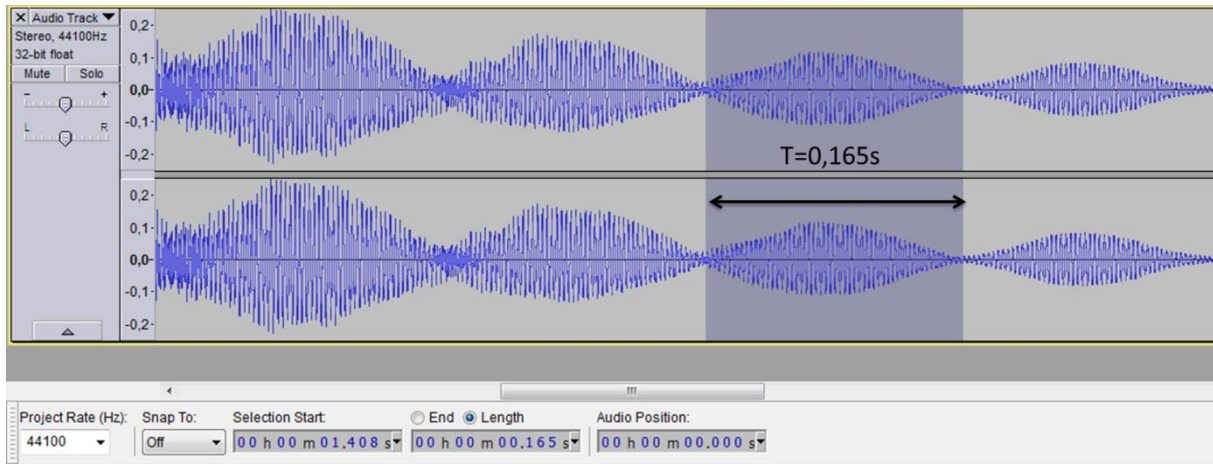
$$y_{1+2} = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) = 2 \sin\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right) \quad (1.3).$$

A lebegés hanggörbéje tehát két részből áll: az első, szinuszos rész felel a hallható hang frekvenciájáért, amely  $f_{\text{hallható}} = \frac{f_1 + f_2}{2}$ , a második, koszinuszos tényező pedig az úgynevezett burkológörbe, amely a hallható hang intenzitásának változásáért, azaz a lebegés jelenségéért felelős. Ha észrevesszük, hogy a burkológörbe egy periódusa alatt 2 periódusnyi lebegést hallunk, akkor megállapíthatjuk, hogy a lebegés frekvenciája

$$f_{\text{lebegés}} = |f_1 - f_2|. \quad (1.4)$$

Ezen képlet igazolásához először fölvevük a két húr hangját külön-külön, és spektrumelemzéssel megmértük, hogy a két frekvencia  $f_1 = 325\text{Hz}$ , illetve  $f_2 = 319\text{Hz}$ . Ezután

visszatértünk a lebegés görbéjéhez, és megmértük a lebegés periódusidejét: kijelöltünk a grafikonon két egymást követő minimum közötti részt, és leolvastuk a kijelölés hosszát (1.9. ábra).



1.9. ábra. Lebegés periódusidejének kimérése.

A lebegés periódusidejéből ( $T=0,165s$ ) kiszámoltuk a frekvenciát:

$$f_{lebegés} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,165} = 6,06Hz ,$$

ami valóban hibán belül a két eredeti hang frekvenciájának (325Hz és 319Hz) különbsége.

## Nyitott és zárt síp frekvenciája

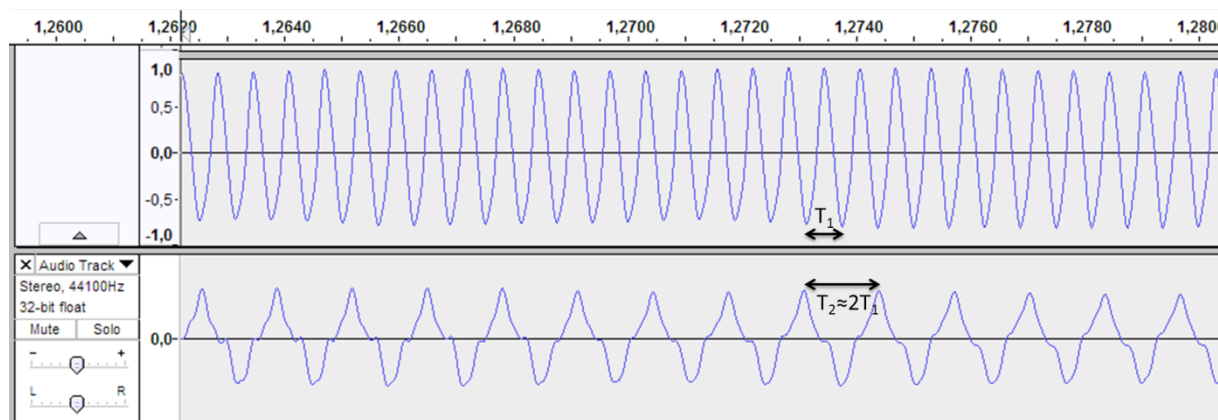
Ez az egyszerű demonstrációs kísérlet a nyílt és zárt síp alapfrekvenciája közötti kapcsolat ( $f_{nyitott}=2f_{zárt}$ ) bemutatásához használható. Ehhez egy furulya felső részét (fejét) kell megszólaltatni először nyitott, majd zárt véggel, kézzel befogva az alsó nyílást (1.10. ábra).



1.10. ábra. Nyitott és zárt síp vizsgálata furulya fejének segítségével.

A hagyományosan oszcilloszkópon bemutatott kísérlet problémája szintén a jó beállítás időigényessége, valamint az, hogy a két hang egyszerre nem, csak külön-külön látható és vizsgálható. Ezzel szemben az Audacity programmal egymás után felvéve a két hangot, azokat egymás alatti sávokon egyszerre szerkeszthetjük. Ezen módszerrel kinagyíthatjuk őket olyan méretre, ahol szépen látszik (1.11. ábra), hogy a nyitott síp alapfrekvenciája a vele azonos hosszúságú zárt síp

alapfrekvenciájának kétszerese. A zenei tudással rendelkező gyerekek azt is meg tudják ilyenkor mondani, hogy a két megszólaltatott hang körülbelül 1 oktáv távolságra van egymástól, így megállapíthatjuk, hogy a kétszeres frekvencia egy oktáv különbségnek felel meg.



1.11. ábra. Nyitott és zárt síp alapfrekvenciája

Ennél a kísérletnél is látható, hogy a felvétel utólagos elemzése rendkívül tanulságos, nagyban javítja a hangtani demonstrációs kísérletek hatékonyságát.

Az Audacity programra épülő hangtani kísérletek az elmúlt években beváltották a hozzájuk fűzött reményeket, és azóta a hagyományos oszcilloszkópos módszerhez képest jóval egyszerűbb ezeknek a kísérleteknek a bemutatása, a diákok számára pedig az így elvégzett mérés élvezetesebb, jobban követhető és tanulságosabb is.

## 1.4. Doppler-effektus (mérőkísérlet)

A Doppler-effektus a hangtan egyik érdekes jelensége, ami a gyakorlati alkalmazások mellett (pl. traffipaxos sebességmérés) a modern fizikában is kiemelt jelentőségű. Ez utóbbiként gondoljunk a csillagok fényének vörös-eltolódására ami a Világegyetem tágulására, illetve visszafelé extrapolálva az ősrobbanásra utal. A Doppler-effektus tanítását ez teszi igazán fontossá, a lényeg megértéséhez azonban a jelenség hangtani feldolgozása az első lépés.

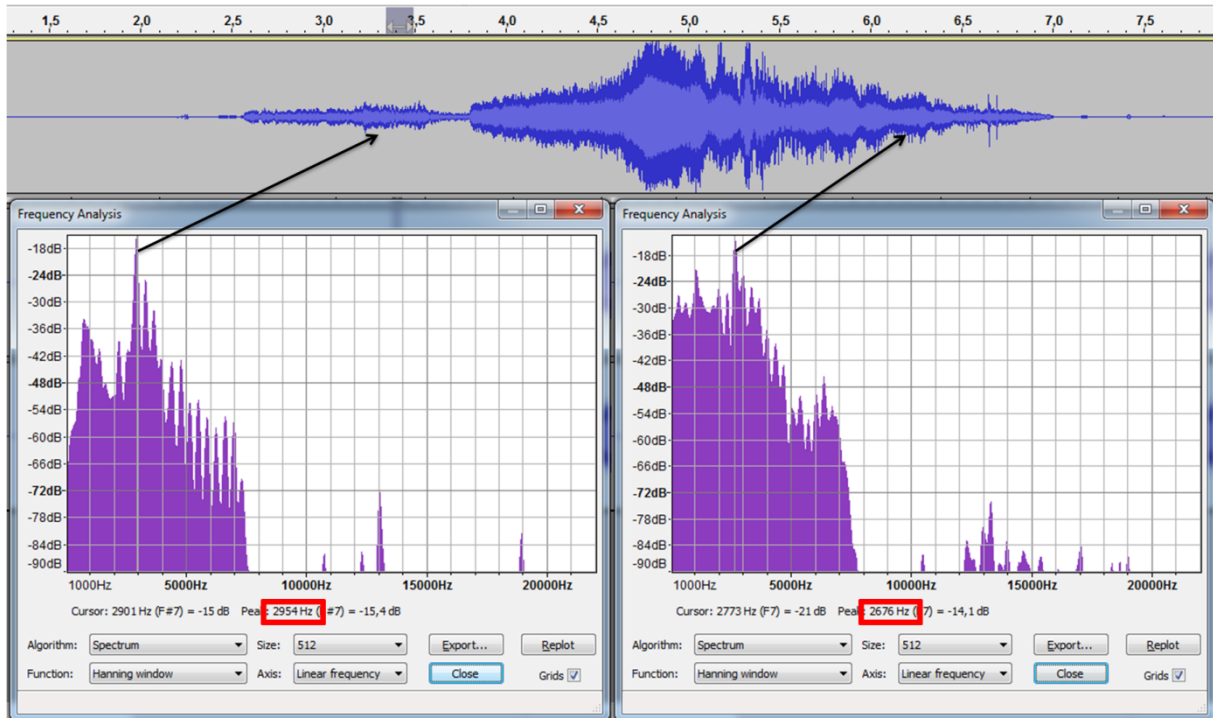
A hangtani Doppler-effektust a középiskolában legtöbbször csak kvalitatív szinten tárgyaljuk [1.9]. Felhívjuk a figyelmet a legtöbb diák számára ismert hétköznapi tapasztalatra, hogy közeledő hangforrás esetén magasabb, távolodó esetén mélyebb hangot hallunk (mellettünk elhaladó mentőautó hangja). Ezt a tapasztalatot alátámasztjuk a sebesség és a frekvencia kapcsolatát leíró, táblán levezetett képlettel, amivel néhány feladatot is megoldunk.

Az Audacity program használatával egy átlagos iskolában is megvalósítható a Doppler-effektus kísérleti alapon történő kvantitatív tárgyalása. A kísérlet gondos előkészítéssel (tervezéssel) kezdődik. Meg kell találni a kísérlet elvégzésére alkalmas helyszínt, (legalább 500m hosszú, egyenes, forgalomtól elzárt útszakaszt), biztosítani kell egy autót, az állandó sebesség tartására képes gyakorlott vezetővel (általában ezt a szerepet a tanár vállalja), ki kell jelölni az autó indulási pontját, a mérés helyét, ki kell osztani a mérésben résztvevők feladatait.

Az előkészületek után kerül sor a mérőkísérletre. A digitális hangfelvétel számítógépes kiértékelése a korábbi hangtani kísérletek során már megismert Audacity programmal történik, csoportmunkában. Ennek során a munkacsoportoknak meg kell határozni a közeledő, majd távolodó hangforrás frekvenciáját, és ezekből ki kell számítani a kürtölő autó haladási sebességét. A számított és a kísérlet során a kocs sebességmérő műszerén leolvasható sebesség egyezése a Doppler-effektust, illetve a Doppler-formula érvényességét igazolja. (A kocs sebességét a kísérlet során az autóban utazó két diák figyeli és jegyzi.)

Ha az „in situ” kísérletezésre nincs lehetőségünk, a leírt kísérlet kiértékelése előre elkészített hangfelvétel alapján is elvégezhető. Egy ilyen kísérletről készült videó és a hangfelvétel letölthető google-drive mappából [1.10]. A Doppler-effektus kvantitatív igazolását szolgáló kísérleti projekt kiértékelését ezen hangfelvétel feldolgozásával illusztrálom.

A kísérlet közben az autó sebessége körülbelül 60 km/h volt az autó sebességmérő műszere szerint (a felvétel külterületen történt). A hangfelvétel elemzésének célja tehát az, hogy megmutassuk, az autó nagyjából 60 km/h sebességgel haladt. Az 1.12. ábra a hangfelvétel program által mutatott hanggörbéjét, és a frekvenciák meghatározásához szükséges spektrumelemzéseket mutatja.



1.12. ábra. Hangfelvétel Doppler-effektusról (fent), a közeledő (bal alsó) és távolodó (jobb alsó) hangforrás spektrumának elemzésével.

Ahhoz, hogy a közeledő hangforrás frekvenciáját ( $f_1$ ) meghatározzuk, jelöljük ki a felvétel első feléből egy szakaszt, majd végezzünk rajta spektrumelemzést. A távolodó hangforrás frekvenciája ( $f_2$ ) is meghatározható, ehhez a felvétel második szakaszának egy részét használjuk. A spektrumelemzésből érdemes egy jól azonosítható csúcsot választani, ez esetünkben a lehangosabb csúcs, ami  $f_1 = 2954\text{Hz}$  és  $f_2 = 2676\text{Hz}$  értékeket ad. A frekvenciákra vonatkozó képletek:

$$f_1 = \frac{c}{c - v} f_0 \text{ és } f_2 = \frac{c}{c + v} f_0, \quad (1.5)$$

ahol  $c$  a hangsebesség,  $v$  pedig a hangforrás (azaz az autó)sebessége. A képletekből az autó sebessége kifejezhető:

$$v = c \left( 1 - \frac{f_0}{f_1} \right), \text{ valamint } v = c \left( \frac{f_0}{f_2} - 1 \right) \quad (1.6)$$

Ezekből a képletekből úgy tűnik, hogy a sebesség meghatározásához szükségünk van a hangforrás álló helyzetben hallható frekvenciájának ( $f_0$ ) mérésére is. Ez természetesen könnyen megtehető, de matematikában tehetségesebb diákoknak érdemes azt is megmutatni, hogy a sebességre kapott két egyenlet jobb oldalának egyenlővé tétele után azt kapjuk, hogy

$$f_0 = \frac{2}{\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}}, \quad (1.7)$$

azaz az álló helyzetben hallható frekvencia a közeledéskor és távolodáskor hallott két frekvencia harmonikus közepe (így újabb mérés nélkül a már meghatározott két frekvenciából számolható). Esetünkben

$$f_0 = \frac{2}{\frac{1}{2954} + \frac{1}{2676}} \approx 2808 \text{ Hz}.$$

Most már visszatérhetünk az autó sebességének kiszámolásához. Ehhez szükség van a hangsebességre, számoljunk  $c = 340 \frac{m}{s}$  értékkel:

$$v = c \cdot \left(1 - \frac{f_0}{f_1}\right) = 340 \cdot \left(1 - \frac{2808}{2954}\right) = 16,8 \frac{m}{s} = 60,4 \frac{km}{h},$$

ami megfelel az előzetes elvárásunknak.

A Doppler-effektus vizsgálata az Audacity programmal egyszerű, és szép, pontos eredményt ad. Ezzel a jelenséget nem csak elméletileg tudjuk levezetni és számolni, hanem mérni is tudunk vele, ami segít a diákok tudásának elmélyítésében.

## 1.5. Borosüveg által kiadott hang frekvenciájának vizsgálata

Amikor elfújunk egy üres, vagy részben vízzel teli palack fölött, az hangot ad. Az üveg által kiadott hang magassága (frekvenciája) függ az üvegben lévő víz mennyiségétől: minél több a víz az üvegben, annál magasabb a hang.

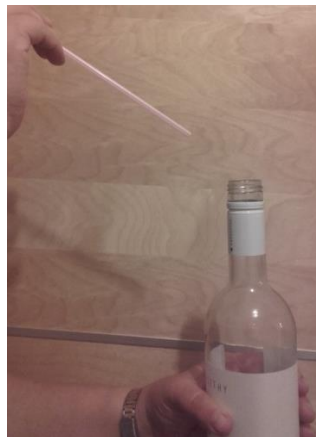
A jelenséget sokan ismerik. A „palack-muzsika” egyszerű hangszer, aminek bemutatását fizika órán (vagy szakkörön) több szerző is ajánlja [1.11]. A jelenség a tanulók számára szórakoztató és tanulságos. A különböző zenei hangmagasságok beállításával különösen az általános iskolai korosztály tanulóinak kísérletező kompetenciája fejlődik, a hangolt üvegekkel egyszerű dallamokat játszó „zenekar” szervezése pedig a csoportmunkát, az együttműködést erősíti. Középiskolások számára a jelenség érdekes, de komolyabb kihívást nem látnak benne. A fizikatanár feladata, hogy a gyerekesnek tűnő kísérletben megláttassa a problémát, melynek megoldása akár tehetséggondozási munkának is tekinthető.

Első ránézésre a jelenség nagyon hasonlónak tűnik a korábbi évek egyik emelt szintű érettségi kísérletéhez, ahol egy hangvilla adott frekvenciájú hangját egy vízbe süllyesztett üvegcsőben lévő levegőoszlop felerősíti, és megmutatható, hogy ekkor az levegőoszlop hossza körülbelül negyede a hullámhossznak. A két kísérlet látszólagos hasonlóságát az adja, hogy mindkét esetben a bezárt levegő adja a hangot, és a hang változik a vízszint és a cső, illetve a palack nyitott végének távolságával.

A fújásra hangot adó borosüveg azonban lényegesen különbözik a fentebb leírt közismert rezonancia-kísérlettől, a jelenséget a hang keletkezésének magyarázatából kiindulva érthetjük meg. Középiskolai szinten a hangkeltés magyarázatára elméleti modellt alkotunk, majd e modell alapján vizsgáljuk meg a kapcsolatot a palackban lévő levegő mennyisége és a létrejövő hang frekvenciája között. A számítások eredménye azt mutatja, hogy a hang hullámhossza nem az üvegben levő levegőoszlop magasságával, hanem a levegő térfogatának négyzetgyökével arányos. Az Audacity hangtani számítógépes mérőprogram segítségével az elméleti úton kapott eredmény mérésekkel igazolható. Az elvont elméleti számítások és a kísérleti mérések eredményének egyezése igazolja a hang keletkezésére alkotott egyszerű elméleti modellünk igazságtartalmát. A vázolt program a fizikai jelenségek megismerésének tipikus módszere. Ennek az útnak a bejárása a fizika iránt érdeklődő tehetséges gimnazisták számára szemléletformáló jelentőségű.

## Elméleti háttér

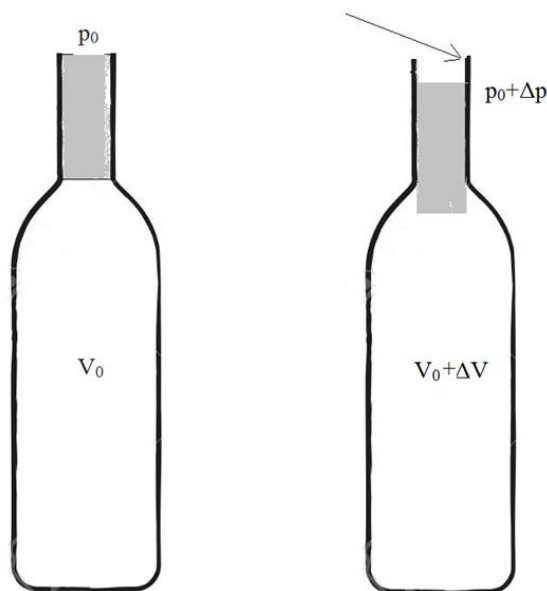
Amikor az üveg felett elfújunk, az üveg nyakában lévő levegő kezd el rezegni. Ennek kiváltó oka az, hogy amikor megfújunk az üveget, kissé lefelé fújunk, úgy, hogy a szánkából kifújott levegő nekiütközzön a nyak szánktól távolabbi végének. (Azt, hogy valóban ilyen irányban kell fújunk az üveg megszólaltatásához, ellenőrizhetjük, ha egy szívószálon keresztül fújunk ki a levegőt. Az üveg akkor ad hangot, ha az 1.13. ábrán lévő pozícióban áll a szívószál.)



1.13. ábra. Borosüveg megszólaltatása szívószálon keresztül kifújott levegővel. Az üveg megszólaltatásához a szánkából kiáramló levegő neki kell ütközzön az üvegnyak belső peremének.



A jelenség értelmezéséhez válasszuk külön a nyakban és az üveg testében lévő levegőt. Az általunk kifújott levegő az üveg nyakának ütközve az ott lévő levegőt hirtelen lefelé nyomja, és ezáltal ezt a kis levegőadagot rezgésbe hozza, hasonlóan ahhoz, mint ahogy egy rugóra függesztett test a nyugalmi állapotából való kitéréssel rezgésbe hozható [1.12]. Az 1.14. ábra ezt a folyamatot mutatja.



1.14. ábra. Üres üveg nyakában lévő levegő nyugalmi állapotban (bal oldal) és az üveg felett való elfújáskor (jobb oldal).  $V_0$  az üveg testében lévő levegő mennyisége,  $p_0$  pedig a légnyomás, a mennyiségek változásait pedig  $\Delta V$  (értéke az ábrán negatív), illetve  $\Delta p$  (értéke az ábrán pozitív) jelzi.

Mivel a folyamat gyors, feltételezhetjük, hogy adiabatikus, így

$$p \cdot V^\kappa = \text{állandó}, \quad (1.8)$$

ahol  $p$  és  $V$  az üveg belsejében lévő nyomás és térfogat,  $\kappa$  pedig az adiabatikus kitevő, vagy fajhőviszony, értéke levegő esetén kb. 1,4.

A nyomás és a térfogat kis megváltozásaira az (1.8) egyenlet deriválásával kapjuk, hogy:

$$\Delta p \cdot V^\kappa + p \cdot \kappa \cdot V^{\kappa-1} \cdot \Delta V = 0, \quad (1.9)$$

azaz

$$\Delta p = -\kappa \cdot \frac{\Delta V}{V_0} \cdot p_0. \quad (1.10)$$

Nézzük meg, hogy az üveg nyakában lévő levegőre mekkora erővel hat az üvegben lévő adiabatikusan összenyomott levegő, amikor a levegőoszlop lefelé mozdul el. Ezt az esetet az 1.15. ábra mutatja.



1.15. ábra. Az egyensúlyi helyzettől  $x$  távolságra lefelé elmozdult levegőoszlop miatt az üveg testében összenyomódik a levegő. ( $\Delta V$  értéke negatív)

Ha az üveg nyakának hossza  $L$ , keresztmetszete  $A$ , a levegő sűrűsége pedig  $\rho$ , akkor a rezgő levegőoszlop tömege

$$m = \rho AL. \quad (1.11)$$

Newton II. törvénye szerint a levegőoszlop gyorsulása:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{A\Delta p}{\rho AL} = \frac{\Delta p}{\rho L}. \quad (1.12)$$

Tételezzük fel, hogy az üveg nyakában rezgő levegőoszlop az egyensúlyi helyzettől  $x$  távolságot mozdult el lefelé. Beírva  $\Delta p$  helyébe az (1.10.) egyenletet, és kihasználva, hogy  $\Delta V = Ax$ , kapjuk, hogy:

$$a = \frac{1}{\rho L} \cdot \left( -\kappa \frac{\Delta V}{V} p \right) = -\kappa \frac{p}{\rho LV} \cdot Ax. \quad (1.13)$$

A levegőoszlop gyorsulása tehát ellentétes irányú és egyenesen arányos az egyensúlyi helyzetéből való kitérésével, tehát harmonikus rezgőmozgást végez. Az (1.13) egyenletet összehasonlítva a harmonikus rezgőmozgás feltételével ( $a = -\omega^2 x$ ), kapjuk, hogy a rezgés körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho LV} \cdot A}. \quad (1.14)$$

Mivel  $\omega = 2\pi f$ , a levegőoszlop rezgésének és egyben a létrejövő hang frekvenciája:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho LV}} \cdot A. \quad (1.15)$$

Kihasználva, hogy a hang terjedési sebessége

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}, \quad (1.16)$$

a frekvenciára kapott képlet az alábbi végső formába egyszerűsödik:

$$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{LV}}. \quad (1.17)$$

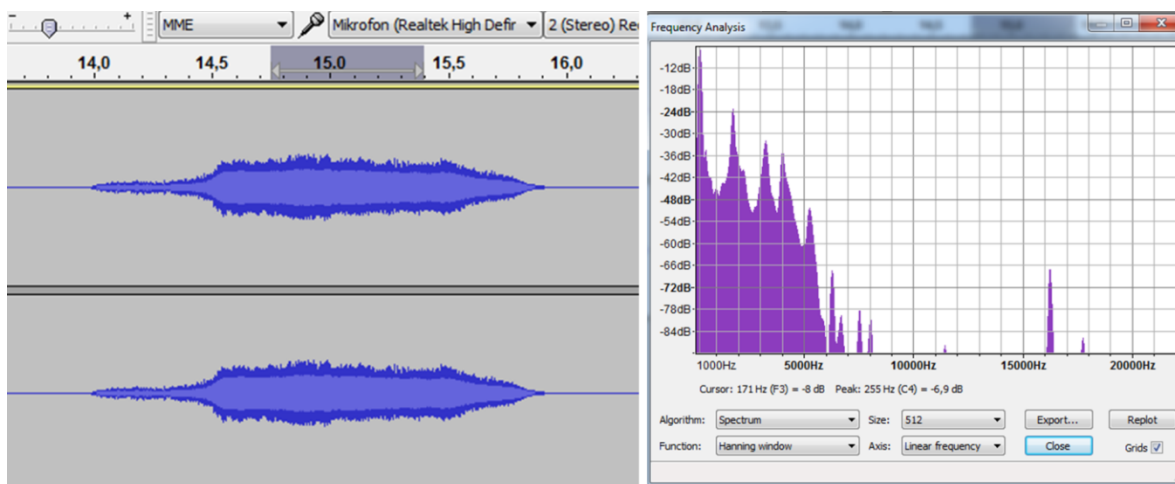
Az elméleti levezetéssel kapott képletből látható, hogy a frekvencia több, az üveg nyakára jellemző állandó mellett egyedül az üvegben lévő levegő térfogatától függ. Így szerencsésebb, ha az üvegben lévő víz mennyisége helyett az üvegben maradt levegő térfogatára fogalmazzuk át kvantitatív tapasztalatunkat is: ha az üvegben lévő levegő térfogata kisebb, magasabb lesz a kialakuló hang frekvenciája.

Kihasználva, hogy  $\lambda = \frac{c}{f}$ , azt is megmutathatjuk, hogy a bevezetőben említett érettségi kísérlettől eltérően itt a hullámhossz valóban nem a magassággal arányos. Ennek ellenőrzésére - ha az idő engedi - érdemes elvégezni az alábbi egyszerű kísérletet: vegyünk két műanyag ásványvizes PET-palackot, az egyik legyen fél, a másik másfél literes. Az ásványvizes palackok nyaka egyforma, így a bennük kialakuló hang frekvenciáját a nyak különbsége nem befolyásolhatja. Töltsük tele a nagyobbik palackot vízzel, majd töltsünk át belőle a kisebbikbe pontosan annyit, hogy az tele legyen, végül ürítsük ki a kisebbik palackot. Ezzel a módszerrel kaptunk két olyan palackot, amikben ugyanakkora a levegő térfogata, de a levegőoszlop magassága jelentősen különbözik, mivel a másfél literes palack jóval szélesebb. A két palackot megfújva hallható (és mérhető), hogy a kialakuló hangok elfogadható hibán belül egyformák, így belátható, hogy az üvegben kialakuló hang valóban a térfogattól, és nem a levegőoszlop magasságától függ.

### Tanulói mérőkísérlet

Az elméleti levezetéssel kapott eredmény ellenőrizhető egy egyszerűen végrehajtható tanulói méréssel. Egy borosüveget töltsünk föl a nyakáig vízzel, majd mérjük meg a tömegét. Ezután öntsünk ki belőle valamennyi vizet, és újra mérjük meg a tömegét. Így az üveg testében lévő levegő térfogata meghatározható a hiányzó víz tömegének segítségével. Ezek után indítsuk el az Audacity programban

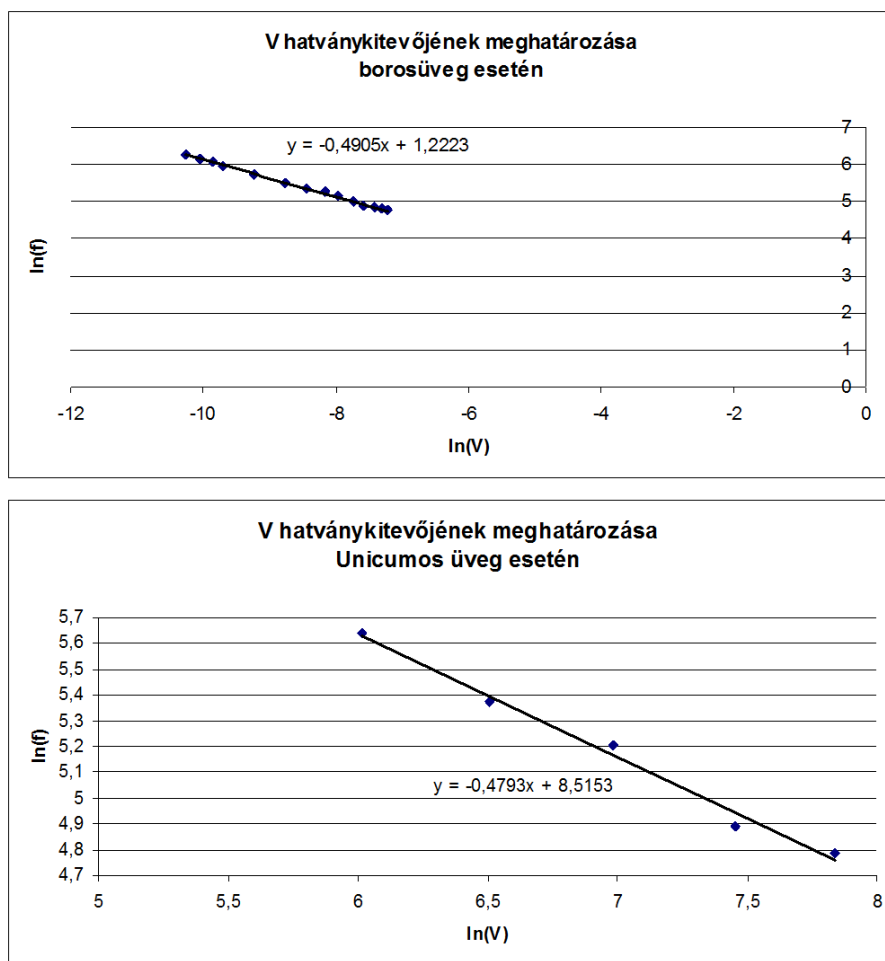
a felvételt és szóltassuk meg az üveget. A hangfelvételt kielemezve (spektrumelemzés) határozzuk meg a létrejövő hang frekvenciáját. Az 1.16. ábra egy ilyen felvételt és a hozzá tartozó spektrumot mutatja.



1.16. ábra. Borosüveg által kiadott hang felvétele és spektrumelemzése ( $V=157\text{cm}^3$ ,  $f=255\text{Hz}$ )

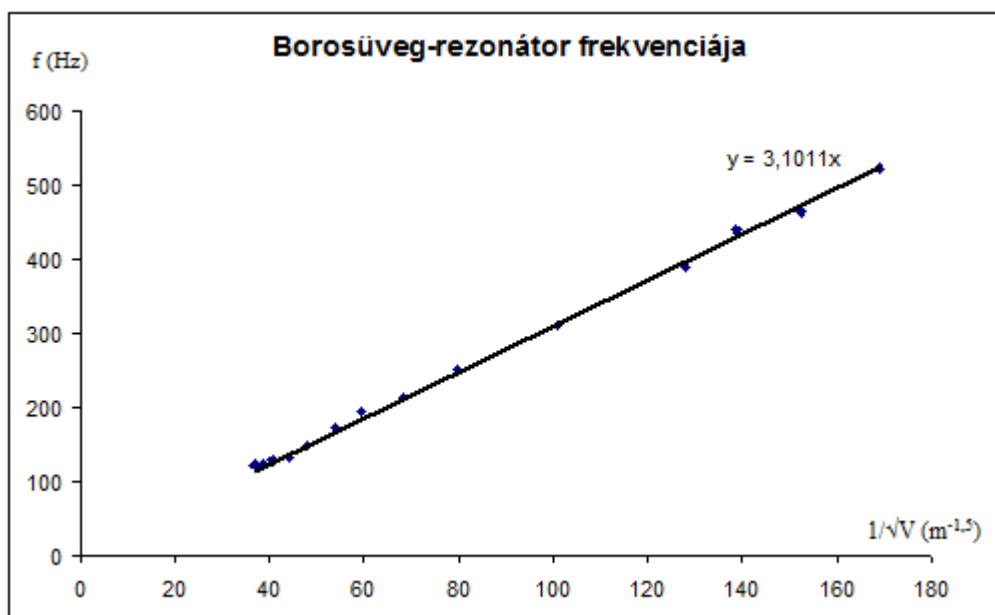
Apránként kitöltögetve az üvegben lévő vizet, ismételjük meg a mérést legalább 10-15 alkalommal. Így kapunk egy térfogat-frekvencia adatsort, amit pl. Excel program segítségével tovább elemezhetünk.

Ha feltételezzük, hogy a frekvencia a térfogat valamilyen hatványával arányos ( $f = a \cdot V^b$ , ahol  $a$  és  $b$  konstans), és szeretnénk kideríteni, hogy mi lehet  $V$  kitevőjének az értéke, akkor érdemes az  $\ln f - \ln V$  függvényt ábrázolnunk (1.17. ábra). Ilyenkor ugyanis – ha a kapott grafikon egyenes – az egyenes meredeksége megadja a keresett hatványkitevőt, hiszen a logaritmus azonosságai miatt ekkor  $\ln f = b \cdot \ln V + \ln a$ . Az elmélet helyességének ellenőrzése miatt ezt a függvényt egy másik, jelentősen eltérő alakú Unicum-os üvegre is megrajzoltuk.



1.17. ábra. Az  $f = V^a$  összefüggésben lévő  $a$  értékének meghatározása. Az ábrázolt egyenesek meredeksége a térfogat kitevőjét adja.

Látható, hogy az egyenes meredeksége mindkét esetben jó közelítéssel  $m=-0,5$ , ami azt jelenti, hogy az elméleti modellel összhangban a kísérleti eredményeink is azt mutatják, hogy a frekvencia a térfogat reciprokának négyzetgyökével arányos. Most már készíthetünk egy olyan grafikont (1.18. ábra), ahol a frekvenciát  $\frac{1}{\sqrt{V}}$  függvényében ábrázoljuk.



1.18. ábra. Borosüveg által kiadott hang frekvenciája  $\frac{1}{\sqrt{V}}$  függvényében. (V az üveg testében lévő levegő térfogata)

A mérőkísérlet tehát igazolta a modell segítségével levezetett összefüggésnek azt a részét, hogy  $f = \text{konstans} \cdot \frac{1}{\sqrt{V}}$ .

Az egyenes meredekségét tovább vizsgálva a konstans értékét is megpróbálhatjuk ellenőrizni. Az (1.17) egyenlet alapján a konstans értéke:

$$m = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{L}}. \quad (1.18)$$

Behelyettesítve a hangsebességet ( $c \approx 340 \frac{m}{s}$ ) és a vizsgált borosüveg adatait (nyak hossza  $L = 9cm$ , a nyak sugara pedig  $r = 1cm$ ) azt kapjuk, hogy az elméletileg várt meredekség:

$$m = \frac{340}{2\pi} \sqrt{\frac{0,01^2 \pi}{0,09}} = 3,2 \quad (1.19)$$

ami jól egyezik a kísérleti eredménnyel, hiszen az 1.18. ábrán látható illesztett egyenes meredeksége  $m=3,1$ .

A borosüveggel végzett mérés jó példa arra, hogy egy középiskolás szinten viszonylag bonyolult háttérű jelenség hogyan mérhető egyszerűen az Audacity programmal, és ezáltal hogyan válhat a szakkör, a tehetséggondozás részévé.

## 1.6. Összefoglalás

A fent bemutatott kísérletek jó példái annak, hogy egy nehezen kezelhető iskolai műszer, mint az oszcilloszkóp, hogyan váltható ki egy egyszerű és ingyenes hangelemző program segítségével. Az Audacity program ráadásul nemcsak egyszerűbbé és kényelmesebbé teszi az eddig is bemutatható kísérleteket, de a felvételek utólagos vizsgálatával (a hanghullám kinagyításával, összehasonlító elemzésekkel) szemléletesebb és részletesebb magyarázatokat adhatunk olyan jelenségek esetén is, amelyek oszcilloszkóppal eddig nem is voltak vizsgálhatóak.

A program egyszerű kezelhetősége és nagy mintavételi frekvenciája miatt alkalmasnak bizonyult bonyolultabb jelenségek vizsgálatára is. Projektmunka keretein belül mértük a Doppler-effektust, tehetséggondozó szakkörön pedig elméleti magyarázatot, majd az elmélet igazolására alkalmas mérőkísérletet végeztünk a „palack-muzsika”, azaz a fújás hatására hangot adó üveg jelenségére.

## Hivatkozások (1. fejezet)

- [1.1] <https://www.audacityteam.org/download/windows/>
- [1.2] Jenei P., Enreiter Á., Juhász A., Nagy M.: Kísérletek hullámokkal, in: *Természettudomány tanítása korszerűen és vonzóan*, konferenciakiadvány, szerk.: Tasnádi Péter, ELTE Természettudományi Oktatásmódszertani Centrum, Budapest, pp79-85, 2011.
- [1.3] Tóthné J.T.: Számítógépes mérések az Audacity programmal, in: *Természettudomány tanítása korszerűen és vonzóan*, konferenciakiadvány, szerk.: Tasnádi Péter, ELTE Természettudományi Oktatásmódszertani Centrum, Budapest, pp263–267, 2011.
- [1.4] [https://www.youtube.com/watch?v=LC5hHRYR-VA&list=PLDsgfHK7gc9M76xg\\_i6snYdu1AfrwUBif&index=5](https://www.youtube.com/watch?v=LC5hHRYR-VA&list=PLDsgfHK7gc9M76xg_i6snYdu1AfrwUBif&index=5)
- [1.5] <http://tudasbazis.sulinet.hu/hu/informatika/informatika/informatika-9-12-efolyam/a-felulet-bemutata/a-audacity-program-bemutata>
- [1.6] [https://www.youtube.com/watch?v=gJpT\\_wHZeF8](https://www.youtube.com/watch?v=gJpT_wHZeF8)
- [1.7] <https://www.youtube.com/watch?v=dBwr2GZCmQM>
- [1.8] <http://ematlap.hu/index.php/gazda-g-sag-2017-12>
- [1.9] Fizikai Kísérletek Gyűjteménye I-III. kötet, Arkhimédész Bt – Tipotex Kiadó, Budapest, 1992
- [1.10] [https://drive.google.com/open?id=1OROH\\_F0lWBgudUXwpgHXhc-OfHEt7SNz](https://drive.google.com/open?id=1OROH_F0lWBgudUXwpgHXhc-OfHEt7SNz)
- [1.11] Nagy A., Papp K.: Hangszerek a semmiből, *Fizikai Szemle* 2009/2, pp65-72, 2009
- [1.12] [https://people.seas.harvard.edu/~jones/cscie129/nu\\_lectures/lecture3%20ho\\_helmholtz/ho\\_helmholtz.html](https://people.seas.harvard.edu/~jones/cscie129/nu_lectures/lecture3%20ho_helmholtz/ho_helmholtz.html)

## Az 1. fejezet alapjául szolgáló publikációk:

- 1.) Tóthné J.T.: Számítógépes mérések az Audacity programmal, in: *Természettudomány tanítása korszerűen és vonzóan*, konferenciakiadvány, szerk.: Tasnádi Péter, ELTE Természettudományi Oktatásmódszertani Centrum, Budapest, pp263–267, 2011.

2.) Tóthné J.T., Juhász A.: Üveg megfűtésakor keletkező hang frekvenciájának vizsgálata Audacity programmal (összeállítás alatt)



## 2. Kaotikus mozgás vizsgálata a Dynamic Solver programmal

A káosz mindenkit érdekel. Napjainkban sok félig-meddig jól értelmezett, káosszal kapcsolatos fogalom (pl. pillangó-effektus) terjedt el a hétköznapi emberek között, aminek leginkább az az oka, hogy nagysikerű filmekben (pl. Jurassic Park) is rendszeresen feltűnnek káoszelméletre való (néhol helyes, néhol helytelen) hivatkozások. A káoszelmélet tehát „menő”, felkapott dolog, talán éppen filozófiai vonatkozású kérdései miatt: előrejelezhetőek vagy előrejelezhetetlenek a mozgások, jelenségek?

A fizika tanításában is ez utóbbi miatt lenne fontos helye a kaotikus mozgások vizsgálatának. Jelenleg ugyanis a diákjaink csak olyan problémával találkoznak a fizikaórán az első 2,5 évben, amelyek idealizáltak, ezért hosszú távon is előrejelezhetőek (ami gyakorlatilag a kivétel a valós mozgások között). Ezért hidegzuhanyként éri őket a kvantummechanika, ahol egy részecske helyét nem lehet pontosan meghatározni, hanem valószínűségi számítás segítségével lehet csak megmondani, hogy mekkora eséllyel lesz egy adott helyen egy adott pillanatban. Ha lenne időnk és lehetőségünk egy-egy egyszerű mechanikai példán szemléltetni, hogy az egyszerű mozgások is könnyen kaotikussá válnak, ha például több egyszerű rendszert csatolunk össze (kettős-inga, rugalmas fonalú inga), nem érné diákjainkat olyan váratlan fejleményként a valószínűségi szemlélet szükségessége.

A kaotikus mozgás kísérleti vizsgálaton keresztül tanításához az ihletet saját tapasztalatom adta: az ELTE Fizika Doktori Iskolájának előadásait látogatva meglepetten tapasztaltam, hogy a kaotikus mechanika nevű tantárgy vizsgafeltétele az volt, hogy mindenki készítsen saját szimulációt egy tetszőlegesen választott kaotikus példából. Eleinte hitetlenkedve fogadtam, hogy én erre valaha is képes leszek, azonban a szimuláció során szerzett tapasztalatok alapján egyértelművé vált számomra, hogy a káosz megértéséhez egyetlen jó út vezet: a saját felfedezés élménye.

Szakkörön 12 matematika iránt érdeklődő 10. osztályos diákkal a Dynamic Solver program segítségével vizsgáltunk egy számukra is érthető és könnyen megfogható kaotikus mozgást: a bonyolult tálban mozgó golyót. Ugyanennek a problémának egy másik változatát már Stonawski Tamás [2.1] is vizsgálta, de kettőnk közelítése és a vizsgálat hangsúlya merőben eltérő. Ő a mozgás periodikusságát és kaotikusságát szemléltette egyszerű illetve bonyolult tálak esetén úgy, hogy a golyó mozgását Tracker mozgáskövető szoftverrel rögzítette, majd a mozgást Scilab programmal szimulálta és összehasonlította az így kapott görbéket. Mindkét esetben a mozgás súrlódásos volt, és

Stonawski Tamás diákjaival leginkább a valós és a szimulált eredmények összehasonlítására koncentrált.

Az én megközelítem ezzel szemben az volt, hogy a mozgás igazán szép, kaotikus jellegét csak akkor tudjuk vizsgálni, ha a súrlódást elhanyagoljuk. (Vagy súrlódó esetben rezgetjük a tálát, ami a diákok számára jóval bonyolultabb mozgásegyenleteket eredményezett volna.) Ezért én a golyót egy – Stonawski Tamás kísérletében használttól eltérő egyenlettel megadott - bonyolult tálban, súrlódásmentes esetben vizsgáltam kizárólag a Dynamic Solver szimulációs programmal. Kihasználtam, hogy a szimulációval könnyen vizsgálható a mozgás fázistérben is, így diákjaimmal nem csak az egyes esetekben létrejövő mozgást, hanem a kaotikus mozgás általános jellemzőit (szabálytalan mozgás, előrejelezhetetlenség, fraktálszerkezet a fázistérben) vizsgáltam [2.2]. A golyó példáján keresztül megmutattam azt is, hogy a fraktálszerkezet függ a paramétereiktől (esetünkben az összenergiától), valamint bemutattam a hasonlóságot a golyó fákyadiagramja és a meteorológiában használatos fákyadiagramok között. A mozgás előrejelezhetetlenségét nem csak fákyadiagrammal, hanem fáziscsepp szétfolyásának vizsgálatával is szemléltettem.

A szakkör tapasztalatai alapján egy oktatási segédanyagot is készítettem, amely segítséget ad a kollégáknak a program alapfunkcióinak használatához és megmutatja, hogy mit és hogyan érdemes felfedeztetni a diákokkal egy ilyen szakkör során. Az oktatási segédanyag a hozzá kapcsolódó szimulációkkal együtt letölthető az ELTE Fizika Tanítása Doktori Iskola honlapjáról [2.3], vagy egy szintén mindenki számára hozzáférhető google-drive mappából [2.4].

## **2.1. A Dynamic Solver programról röviden**

A Dynamic Solver egy ingyenesen letölthető szimulációs program [2.5], amelynek segítségével általunk megadott differenciálegyenletek megoldásait kereshetjük meg és ábrázolhatjuk adott kezdőfeltételek esetén.

Előnye, hogy rendkívül pontos szimulációkat lehet vele végezni, mert nem középiskolai demonstrációs célra, hanem egyetemi kutatásokat segítő készült. A problémák elemzéséhez többféle numerikus közelítő módszer (pl. Euler, Runge-Kutta) közül választhatunk a lépésközt is magunk állíthatjuk be.

Hátránya ugyanabból fakad, mint az előnye: professzionális célra készült, ezért középiskolában ismeretlen fogalmakkal (pl. differenciálegyenlet) dolgozik. Emiatt diákjaimmal csak olyan szimulációkat futtattunk, amikhez én előre beírtam a differenciálegyenleteket a programba.

Természetesen az érdekesség kedvéért ezeket meg lehet nekik mutatni, de mivel a fő cél nem a differenciálegyenletek megtanítása, hanem a kaotikus mozgás vizsgálata, ezért a program részletes ismertetésétől én eltekintettem. A programhoz kiadott hivatalos útmutató 180 oldalas, ami még egy átlagosan lelkes tanár kedvét is elveszi attól, hogy egymaga belevágjon a program kezelésének megtanulásába. A doktori iskola hallgatói számára egy számítógépes programokban jártas kollégánk, dr. Nagy Péter készített oktatóvideót [2.6], amely segítségünkre volt a program megismerésében. Ez sarkallt arra, hogy a középiskolákban tanító kollégák számára én is megírjam azt az oktatási segédanyagot, amely 10 oldalban bemutatja azokat a funkciókat, amelyeknek ismerete már elégséges a bonyolult tálban mozgó golyó vizsgálatához.

## 2.2. A bonyolult tál fogalma

A kaotikus mozgás szabálytalan. Szabálytalanságon azt értjük, hogy a mozgást tetszőlegesen hosszú ideig vizsgálva sem tapasztaljuk azt, hogy ismételné önmagát.

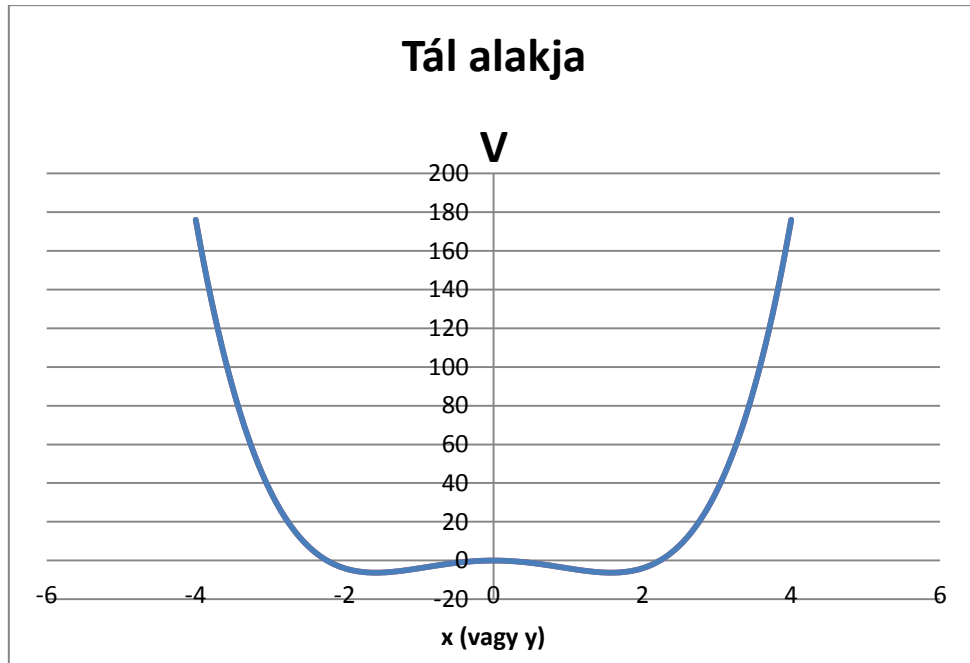
Matematikailag nézve minden legalább három elsőrendű nemlineáris közönséges differenciálegyenlettel leírható rendszer viselkedése általában kaotikus [2.7]. Ez a megfogalmazás persze nagyon messze áll attól, amit középiskolás diákoknak szakkör keretein belül meg lehet tanítani, de ezt leegyszerűsíthetjük számukra úgy, hogy például az egydimenziós gerjesztett és a kétdimenziós súrlódásmentes mozgások döntő többsége kaotikus. Az általunk bemutatott példa ez utóbbi osztályba tartozik, itt azonban figyelni kell arra, hogy ha az energián kívül még egy megmaradó mennyiség létezik, akkor az megakadályozza a kaotikus mozgás kialakulását. (A bolygómozgás például kétdimenziós és súrlódásmentes, de mivel a perdület is megmarad, a mozgás periodikus.

Tálban mozgó golyó esetén (súrlódásmentes esetben) - ahol maga a tál alakja határozza meg a potenciált - tehát azt kell megkövetelnünk, hogy a tál legyen „bonyolult”, azaz ne legyen forgásszimmetrikus. Ilyenkor ugyanis a tál alakja centrális potenciálnak felelne meg, ahol az impulzusmomentum (perdület) megmaradása miatt a pályák egyszerűek lennének, éppúgy, ahogy a centrális erőterben mozgó bolygó példájában is, így nem alakulhatna ki szabálytalan mozgás. [2.8]

Az általunk vizsgált (nem forgásszimmetrikus) potenciálfüggvény a következő volt:

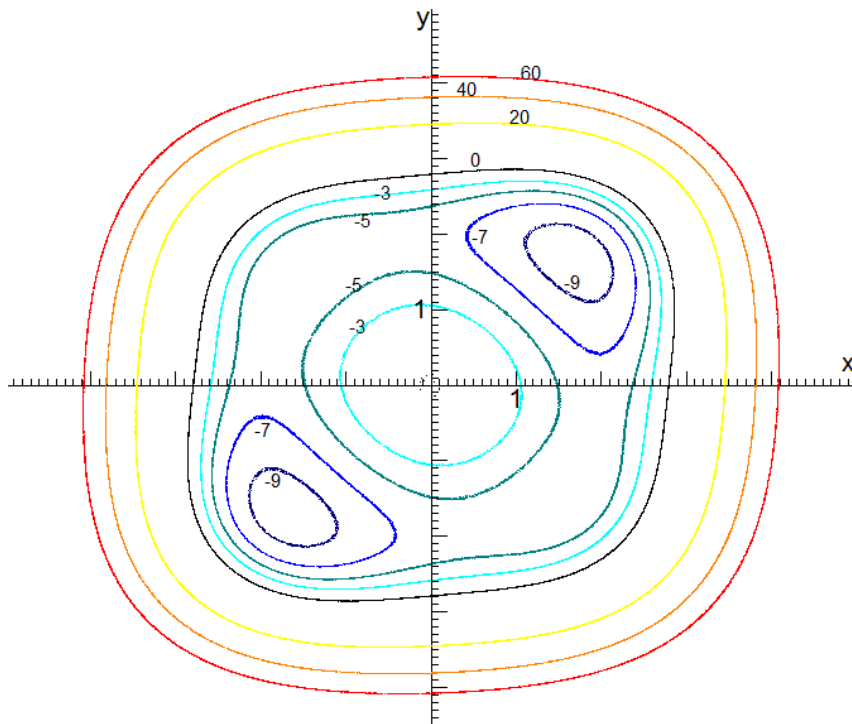
$$V(x, y) = x^4 + y^4 + x^2 y^2 - 5x^2 - 5y^2 - xy \quad (2.1)$$

Alkalmasan megválasztott (dimenziótlan) egységekben a  $V$ =konstans görbe egyben az adott konstans magasságú tál alakja is (2.1. ábra).



2.1. ábra. A tál x-tengely (vagy y-tengely) szerinti metszete. A vízszintes segédvonalak mutatják adott  $V$  értékek mellett a tál peremét.

A tál alakját szintvonalak (ahol  $V$ =állandó) segítségével is szemléltethetjük, ezeket a Dynamic Solver segítségével is ki tudjuk rajzoltatni (2.2. ábra):



2.2. ábra. A tál alakjának szintvonalas ábrázolása a Dynamic Solver programmal. A szintvonalra írt számok  $V$  értékét mutatják.

### 2.3. A golyó mozgásegyenletei

A golyó mozgását leíró dimenziótlan differenciálegyenletek – abban az esetben, ha a tál nem túl meredek - egyszerűek:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \text{ valamint } \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.2)$$

Elvégezve a (2.1) egyenlettel megadott potenciálfüggvény parciális deriválását, valamint bevezetve az  $\dot{x} = u$  és  $\dot{y} = v$  jelöléseket, megkapjuk a golyó mozgását leíró elsőrendű nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert, amelyeket már a programba is beírhatunk:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{y} &= v \\ \dot{u} &= -4x^3 - 2xy^2 + 10x + y \\ \dot{v} &= -4y^3 - 2x^2y + 10y + x \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Súrlódásmentes esetben az energiamegmaradás miatt igaz, hogy a golyó potenciális és mozgási energiájának összege állandó, így a dimenziótlan összenergiára kapjuk, hogy:

$$E(\text{paraméter}) = E_{\text{mozgási}} + E_{\text{potenciális}} = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + V(x; y) = \text{állandó} \quad (2.4)$$

Azt, hogy a szimulációs program valóban az általunk megadott energiával számoljon, úgy érhetjük el, hogy a kezdőfeltételek megadásakor az egyik kezdősebesség (pl.  $u_0$ ) kiszámítását rögzítjük:

$$u_0 = \sqrt{2E - 2(x_0^4 + y_0^4 + x_0^2y_0^2 - 5x_0^2 - 5y_0^2 - x_0y_0) - v_0^2}. \quad (2.5)$$

Így tehát a szimuláció során csak 3 kezdőérték lesz egymástól függetlenül megadható  $(x_0; y_0; v_0)$ , a negyediket a program számolja a megadott egyenlet alapján a többi kezdőértékből és az  $E$  paraméterből. Így tetszőleges kezdőpontból indítva a testet elérhető lesz, hogy az összenergia mindig ugyanaz az érték legyen.

Az  $E$  paraméter változtatásával vizsgálható például az is, hogy különböző energiák esetén hogyan változik a mozgás jellege, erre a 2.6 pontban láthatunk példát.

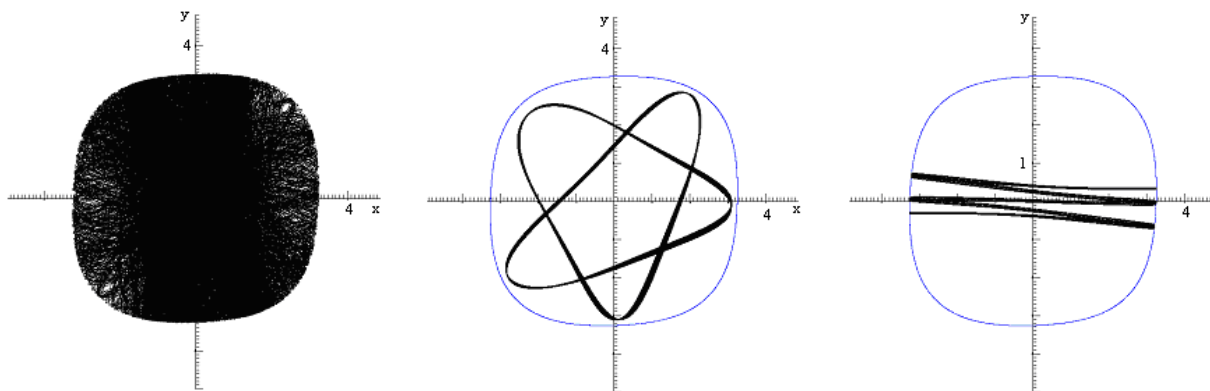
Most pedig nézzük meg, hogyan mutatható be a kaotikus mozgás három fő jellemzője (szabálytalanság, előrejelezhetetlenség, fraktálszerkezet a fázistérben) [2.7] ezen az egyszerű példán.

## 2.4. A kaotikus mozgás első jellemzője: szabálytalan mozgás

Természetesen az előző pontban leírt differenciálegyenletek programba való bevitelétől megkíméltem a diákokat, az érdeklődők kedvéért azonban megmutattam, hogyan is értem el, hogy a program valóban az általunk vizsgált tálban való mozgást ábrázolja. (Bár a diákok egészen biztosan nem értették minden egyes lépését a levezetésnek, mégis fontosnak tartottam megmutatni, hogy a nekik adott előre programozott szimuláció nem „varázslat”, hanem a megfelelő ismeretek birtokában valójában egyszerűen létrehozható.)

A diákok első igazi saját feladata az volt, hogy a golyót különböző kezdőfeltételekkel (különböző pontokra kattintva) indítsák el, és figyeljék meg a golyó mozgását. Természetesen azt találtuk, hogy - a fenti elvárásnak megfelelően - az esetek döntő többségében a golyó mozgása kaotikus, a tál minden pontját bejárja úgy, hogy közben a mozgása teljesen szabálytalan.

Akadnak azonban olyan jól megválasztott kezdőfeltételek is, amelyekből indulva a mozgás kváziperiodikus lesz. Ez azt jelenti, hogy a mozgás közel önmagába visszatérő mozgás. Mivel a visszatérés nem tökéletes, a pályák nem vékony vonalként, hanem fekete „sávokként” jelennek meg. Az ilyen mozgásokat szabályosaknak tekintjük. A következő, 2.3. ábrán láthatjuk a mozgást az  $xy$  síkon egy kaotikus, valamint két kváziperiodikus esetben. Ez a felismerés illusztrálja, hogy súrlódásmentes esetekben a kaotikus mozgás általában együtt létezik a kváziperiodikusokkal [2.7].



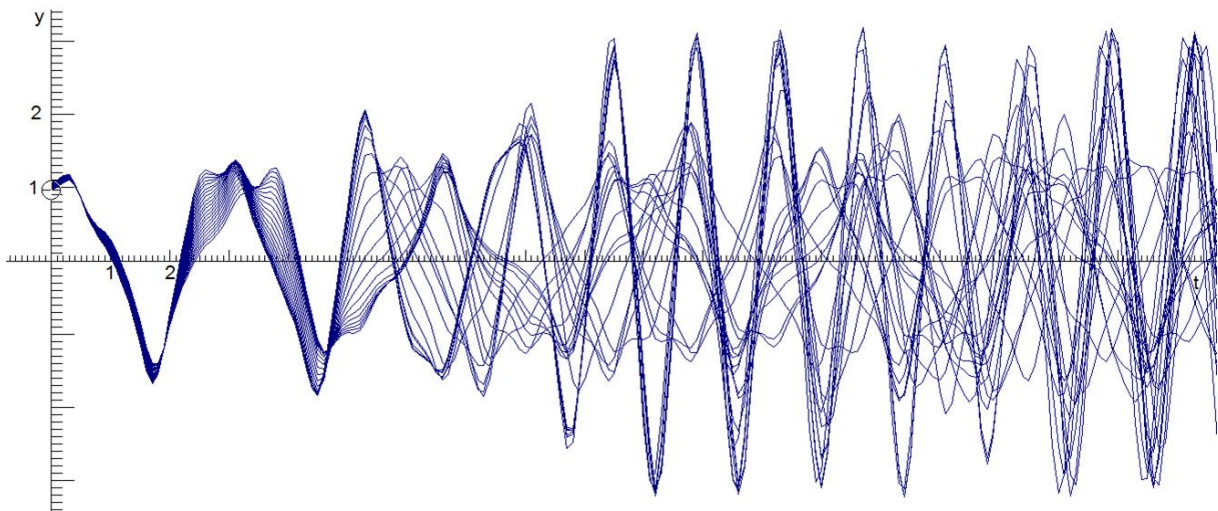
2.3. ábra. Bonyolult tálban mozgó golyó mozgása az  $xy$  síkban. Mindhárom esetben  $E=60$  és  $v_0=0$ , a további kezdőfeltételek pedig a három különböző esetben: a)  $x_0=-1$   $y_0=1,3$ ; b)  $x_0=-2,1$   $y_0=-2,3$ ; c)  $x_0=-2,4$   $y_0=-0,3$ . Az a) eset kaotikus, a golyó bejárja az egész tálát, a fekete tartomány így a tál pereméig terjed az adott összenergia esetén. A b), c) eset kváziperiodikus, ott a tál peremét segítségképpen berajzoltuk.

## 2.5. A kaotikus mozgás második jellemzője: előrejelezhetetlenség

A kaotikus mozgás egy másik fontos tulajdonsága, hogy nagyon érzékeny a kezdőfeltételekre. Ennek következménye az a - középiskolai diákoknak meglepő - tény, hogy két, egymáshoz nagyon közel indított golyó pályája gyorsan szétválik, azaz kis kezdeti eltérés nagyon nagy későbbi különbséghez vezet. Ez azt is jelenti, hogy a golyó mozgása hosszú távon előrejelezhetetlen, leírása csak valószínűségi fogalmakkal lehetséges.

Mindez persze azért olyan meglepő a középiskolában, mert ott gyakorlatilag csak olyan mozgásokat tárgyalunk, melyek túl egyszerűek ahhoz, hogy kaotikussá váljanak. Azaz csak a „kivételt” tanítjuk, a bonyolultabb fizikai rendszerekre jellemző általános mozgásformát nem.

A kezdőfeltételekre való érzékenységet legjobban az úgynevezett fáklya-diagrammon szemléltethetjük. Ezen különböző, de egymáshoz nagyon közeli kezdőfeltételekből indított mozgások valamilyen jellemzőjét (például a helykoordináta egyik komponensét) ábrázoljuk az idő függvényében. A tipikus fáklya-diagram (2.4. ábra) valóban fáklya alakra emlékeztet: egy bizonyos ideig a különböző mozgások együtt haladnak, később azonban drasztikusan szétválnak, és jól látszik, hogy teljesen lehetetlen előrejelezni a golyó mozgását.

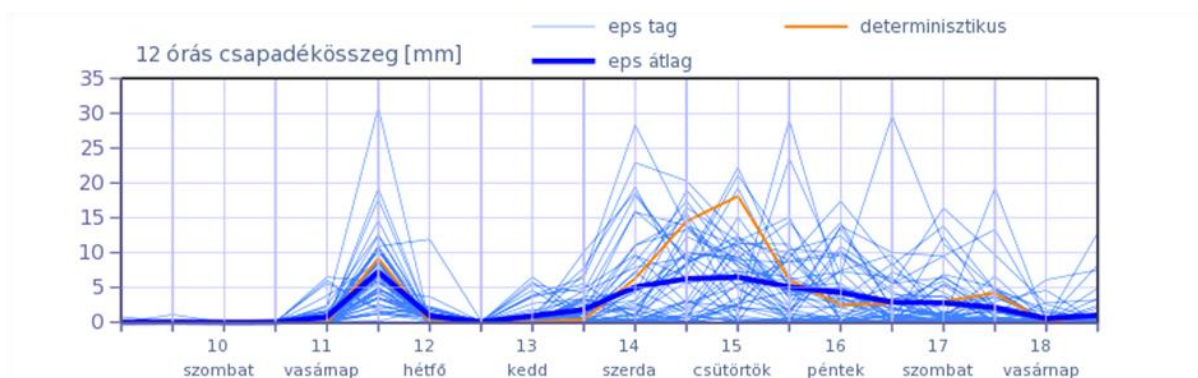


2.4. ábra.  $V(x, y) = x^4 + y^4 + x^2 y^2 - 5x^2 - 5y^2 - xy$  alakú tálban kaotikusan mozgó golyó fáklyadiagramja 20 egymáshoz közeli kezdőfeltétellel indítva. A paraméter:  $E=60$ , a kezdőfeltételek:  $x_0=0, v_0=0, y_0 = 0,97 + n \cdot 0,005$ , ahol  $n=1,2,\dots,20$ .

A mozgás  $y$ - $t$  grafikonját 7 különböző, de egymáshoz nagyon közel eső kezdőfeltétellel indítva ábrázoltuk. Látszik, hogy nagyjából  $t=4$  időpontig a grafikonok együtt mozognak, utána viszont szétválnak. A mozgás tehát csak kb. 4 időegységig jelezhető előre. Ennél jóval hosszabb időkre az adható meg, hogy milyen valószínűséggel kerül a mozgó test adott állapot környezetébe. Mivel a bonyolult tálban mozgó golyó konzervatív rendszer, ezért az  $y$  értéke csak az  $E$  paraméter által

meghatározott értékeken belül mozoghat, így a fáklya nem nyílik teljesen szét (az edény y irányú mérete az  $E=60$  magasságban kb. 3,26 egység, lásd 2.1. ábra).

Érdekes és a mindennapokkal való kapcsolatot erősítő lehet a diákok számára, ha megmutatjuk, hogy a meteorológiai előrejelzésben is teljesen hasonló fáklya-diagramokat használnak. Az adott időpontban mért légköri adatokból, valamint több, nagyon közeli adatból kiindulva párhuzamosan több szimulációt futtatnak egyszerre, és nézik, hogy a különböző adatokból indult előrejelzések meddig maradnak nagyjából együtt. Az Országos Meteorológiai Szolgálat honlapján is található ilyen fáklyadiagramok, a 2.5. ábra szemléltetésképpen mutatja a 2014. május 9-én készült előrejelzés egy grafikonját (ezt vizsgáltuk a szakkörön is, de természetesen bármikor találhatunk az éppen aktuális időszakra vonatkozó fáklyadiagramokat).



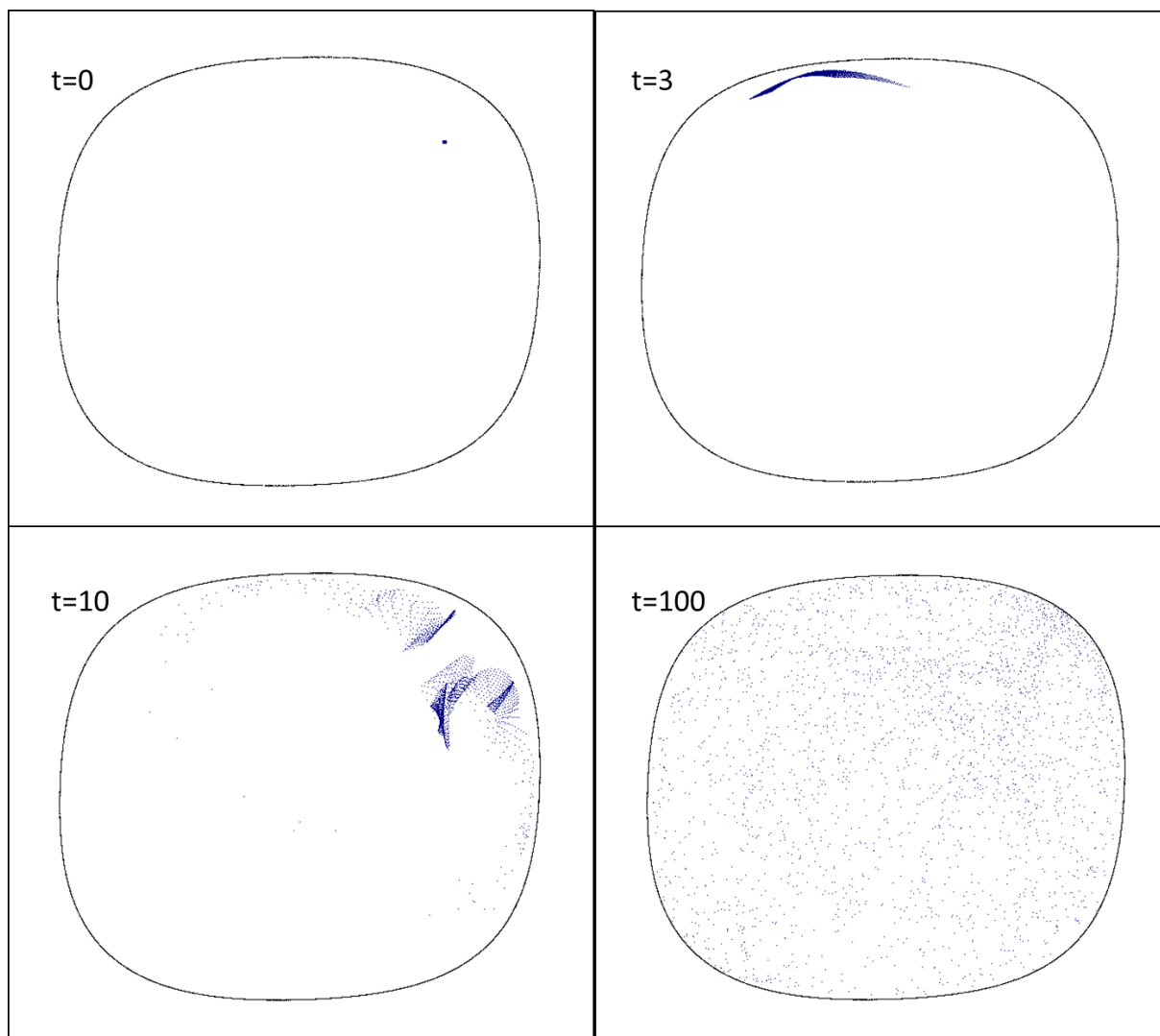
2.5. ábra. Az Országos Meteorológiai Szolgálat honlapján található, a 12 órás csapadékösszegre vonatkozó valószínűségi előrejelzés 2014. május 9-én délelőtt. [2.9]

Jól látható, hogy a grafikonok itt másfél napig futnak együtt, az előrejelzési idő tehát kb. 1,5-2 nap. Vasárnap estére szinte biztos, hogy valamennyi csapadék várható (a mennyisége bizonytalan), de hogy pl. 15-én, csütörtökön várható-e csapadék és hogy mennyi, az már teljesen véletlenszerű, a grafikon alapján nem jósolható meg előre. Ezen a ponton diákjaimmal levontuk azt a tanulságot is, hogy 10-30 napos időjárás-előrejelzéseket teljesen fölösleges nézni, ott már a valószínűségi szemlélettel lehet csak bármit is mondani.

A mozgás előrejelezhetetlensége abból adódik, hogy a kaotikus rendszer érzékeny a kezdőfeltételekre. Nagyon kicsi kezdeti különbségek is (pl. egymáshoz közeli pontokból való indítás) egy idő után jelentős eltéréseket okoznak. Ezt a legjobban az úgynevezett fáziscsepp szétfolyásának vizsgálatával mutathatjuk be (2.6. ábra). A Dynamic Solver program lehetővé teszi, hogy egyszerre ne csak egy, hanem több, egymáshoz közeli pontból szimuláljuk a golyó mozgását. A több egymáshoz közeli pontból álló halmazt fáziscseppnek nevezzük, és a program segítségével nyomon követhetjük, hogy különböző időtartamok elteltével éppen hol lesznek az eredetileg fáziscseppet alkotó (tehát



egymáshoz nagyon közlről indított) golyók a fázistérben. Mivel ez a diákok számára nehéz (a program magabiztos kezelését igénylő) feladat lett volna, ezt a saját gépemről kivetítve mutattam be.



2.6. ábra. Fáziscsepp szétfolyásának bemutatása a  $V(x, y) = x^4 + y^4 + x^2y^2 - 5x^2 - 5y^2 - xy$  alakú tálban. A pillanatképek  $t=0;3;10$  és  $100$  időegység elteltével készültek. A fáziscseppet  $t=0$  időpontban az  $x \in [1,95;2]$  és  $y \in [1,95;2]$  tartományban lévő  $50 \times 50$  pont alkotja,  $v_0=0$ .

Látható, hogy az eredetileg kis helyen lévő pontok egy ideig még együtt maradnak, de  $t=100$  időegység eltelte után már a tál nagy részében szétszóródtak. Ez is mutatja, hogy a kezdeti kicsiny eltérések olyan nagy különbségekhez vezetnek, hogy egy idő után a golyó helyzete már csak valószínűségi szemlélettel jelezhető előre.

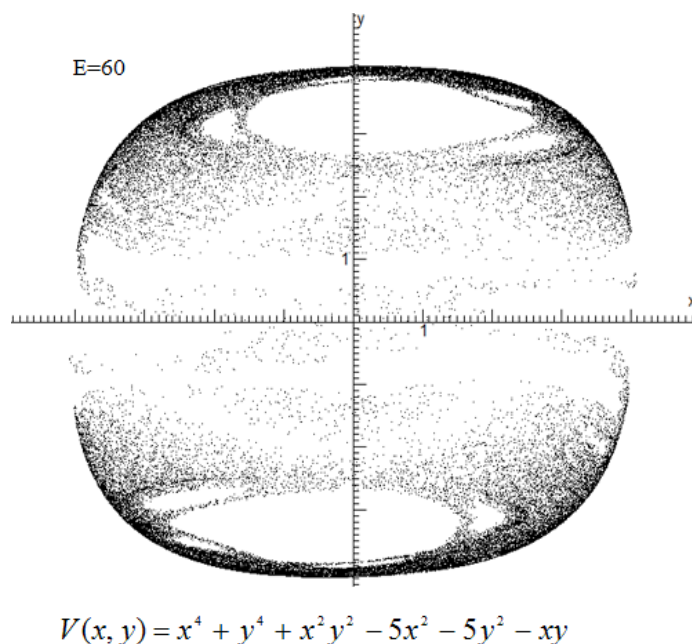
## 2.6. A kaotikus mozgás harmadik jellemzője: fraktálszerkezet a fázistérben

Mindeddig arról volt szó, hogy a kaotikus mozgás szabálytalan, előrejelezhetetlen, így gyakorlatilag derült égből villámcsapásként éri diákjainkat (és mindenkit, aki először foglalkozik a káosszal) a harmadik tulajdonság: a rendezettség. Sokakban az a tévképzet él ugyanis, hogy a kaotikus mozgás teljesen rendezetlen, véletlenszerű. (Mint ahogy a hétköznapi káosz szavunk is erre utal.)

Ahhoz, hogy a káoszban rejlő rendezettséget megtaláljuk, megfelelő módon kell vizsgálnunk a mozgást. A módszer lényege, hogy például a bonyolult tálban mozgó golyó esetében az  $xy$  síkot nézve csak bizonyos pillanatokban ábrázoljuk a golyó helyét. Ez az úgynevezett Poincaré-leképezés.

Azt, hogy milyen pillanatokban ábrázoljuk a golyó pozícióját, többféleképpen is megválaszthatjuk, azonban talán a legegyszerűbb eset az, amikor a  $v=0$  és  $u>0$  feltételt választjuk. Ez azt jelenti, hogy azokban a pillanatokban „fényképezzük le” a golyó helyzetét, amikor az  $y$  irányú sebessége éppen 0 lesz, és balról jobbra halad az  $x$  irányban.

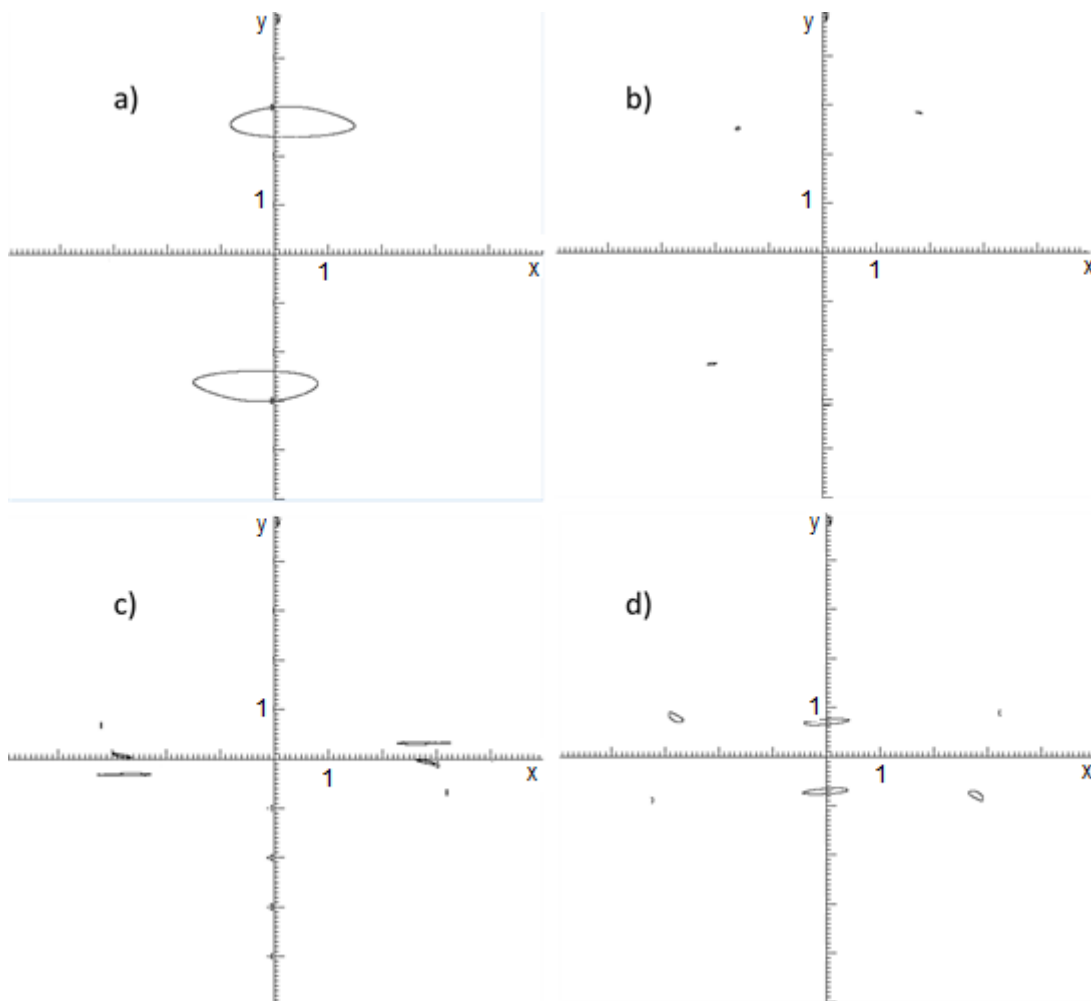
A programban előre beállítható, hogy a mozgás Poincaré-leképezését szeretnénk ábrázolni az imént említett feltétellel, a diákok egy ilyen előre elkészített szimulációt vizsgáltak. Ha egy véletlenszerűen választott kezdőfeltétellel elindítjuk a mozgást, az  $(x_1; y_1)$ ,  $(x_2; y_2)$ , ... számpárokat kapjuk, s ezek összessége  $n=40000$  leképezési lépésig a kaotikus eset Poincaré-metszetét adja (2.7. ábra).



2.7. ábra. A golyó kaotikus mozgásának Poincaré-metszete az  $xy$  síkon ( $v=0$  és  $u>0$ , valamint  $E=60$ ). Kezdőfeltétel:  $x_0=0$ ;  $y_0=-1$ ;  $v_0=0$ . Az ábrán  $n=40000$  lépést ábrázoltunk

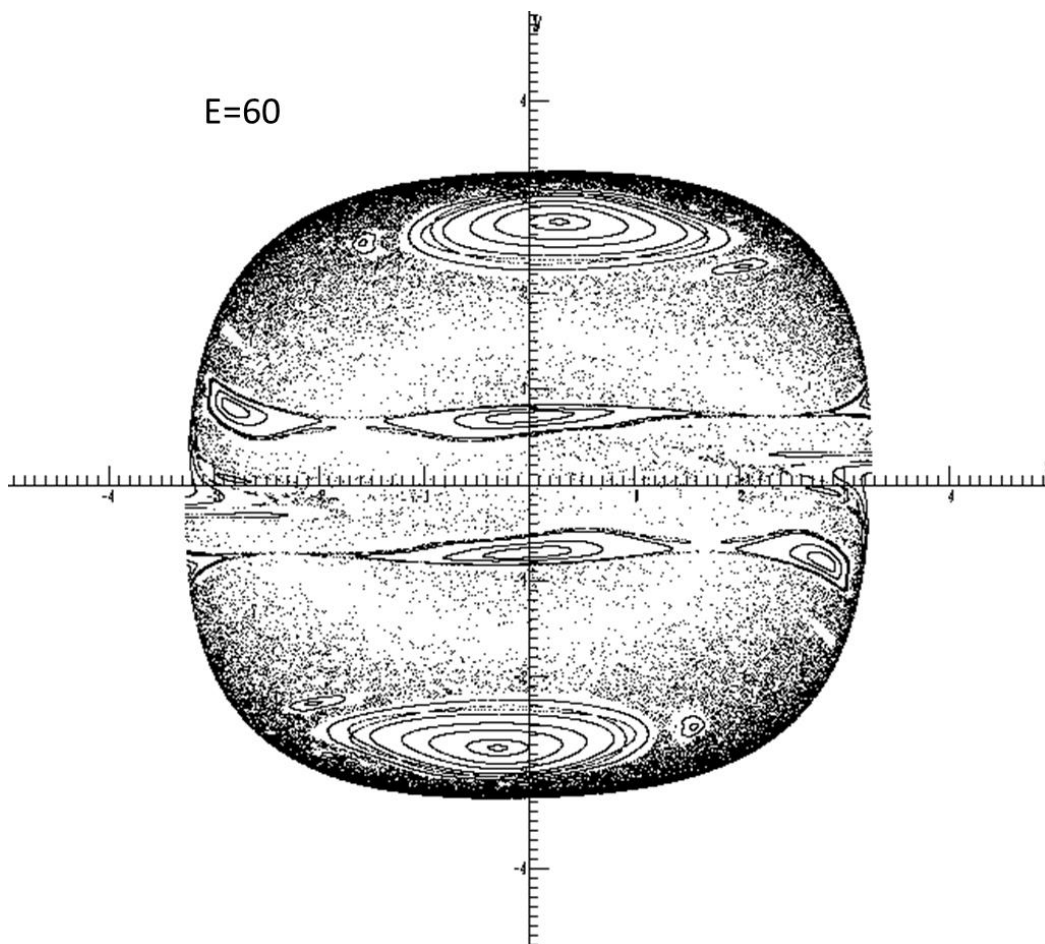
A kaotikusság ebben az ábrázolásban onnan látszik, hogy a pontok beszórnak egy kiterjedt tartományt, összhangban az előrejelezhetetlenséggel. (Az a tény, hogy az itteni kezdőfeltétel jelentősen eltér a 2.3. és a 2.4. ábrák kezdőfeltételeitől, mutatja, hogy a rendszerben nagyon könnyű kaotikus mozgást találni.)

A grafikont nézve mindjárt szembetűnik, hogy a pontokkal beszórt kaotikus tartományban vannak „lyukak”, azaz fehér foltok. Állítsuk be most úgy a kezdőfeltételeket, hogy a lyukakban lévő mozgásokat vizsgáljuk. A következő ábra négy olyan, különböző kezdőfeltétellel elindított mozgás Poincaré-metszetét mutatja, melyek a lyukakba esnek. Ezek az esetek az úgynevezett kváziperiodikus esetek, amelyekhez hasonlókat már korábban bemutattunk. A 2.8. ábra b) és c) része a 2.3. ábra b) és c) részében ábrázolt kváziperiodikus mozgások Poincaré-metszete. A kváziperiodikus mozgások képe ebben az ábrázolásban tehát zárt görbe, ami utal arra is, hogy az ilyen mozgások pontosan jelezhetők előre, s ezért tekinthetjük őket egyszerűeknek.



2.8. ábra. A golyó néhány kvázi-periodikus mozgásának Poincaré-metszete ( $v=0$  és  $u>0$ , valamint  $E=60$ ) kvázi-periodikus részekkel. Kezdőfeltételek: a)  $x_0=-0,8$ ;  $y_0=2,6$ ;  $v_0=0$ ; b)  $x_0=-2,1$ ;  $y_0=-2,3$ ;  $v_0=0$ ; c)  $x_0=-2,4$ ;  $y_0=-0,3$ ;  $v_0=0$ ; d)  $x_0=2,7$ ;  $y_0=-0,7$ ;  $v_0=0$ ;

Ezek után nem marad más hátra, mint a grafikonok egyesítése, azaz a Poincaré-metszetek több, különböző kezdőfeltétellel való megrajzolása, ami kiadja a mozgás teljes Poincaré-térképét (2.9. ábra).

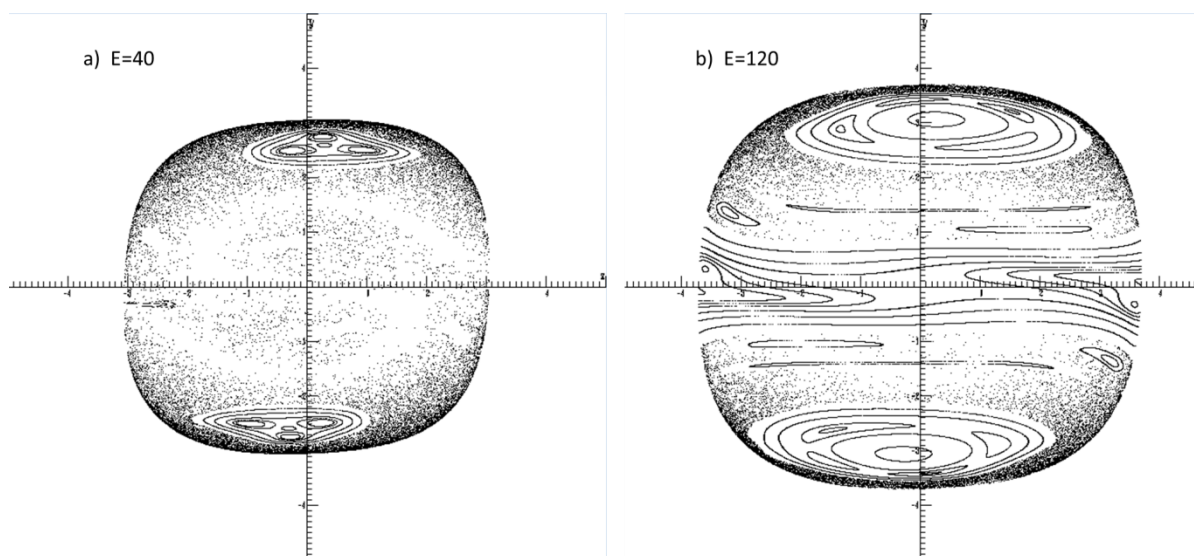


2.9. ábra. A golyó mozgásának teljes Poincaré-térképe ( $E=60$ ). A 2.7. és 2.8. ábra görbéit közös koordináta-rendszerben rajzoltuk fel, számos további kezdőfeltételhez tartozó görbével kiegészítve.

Ha valami meglepő, és izgalmas a káoszban a diákok számára, akkor ez biztosan az. Egy ilyen Poincaré-térkép megrajzolása (előre beprogramozott szimuláció esetén) egyáltalán nem bonyolult, viszont benne rejlik a saját felfedezés élményének lehetősége, a kísérletezés szépsége. Ráadásul ez az, ami segít megértetni a diákokkal azt, hogy a káosz nem teljes rendezetlenség (véletlenszerűség), hanem annál jóval szebb, szabályos struktúrával rendelkező rendszer.

A bonyolult tálban mozgó golyó Poincaré-metszete fraktálszerkezetű, pontosabban úgynevezett kövér fraktál, ami a konzervatív rendszerek sajátossága [2.7].

Érdekes azt is megfigyelni, hogy hogyan változik a Poincaré-metszet fraktálszerkezete, ha változtatjuk a golyó teljes energiáját mint paramétert. Szakkörön ezt gyorsan megmutathatjuk, ha a Poincaré-metszet rajzolását eleve úgy adjuk ki csoportmunkának, hogy a különböző csoportok különböző  $E$  értékekre vizsgálják a metszetet. Egy ilyen összehasonlítást mutat be a 2.9. ábra. A kaotikus (pontozott) tartomány mindkét esetben nagy kiterjedésű, de eltérő szerkezetű. Látható például, hogy  $E=40$  esetén a kaotikus tartomány jóval nagyobb része a fázistérnek, itt a fázistér közepén nincs is periodikus tartomány, míg  $E=120$  esetén több kváziperiodikus tartomány is megjelenik a tál közepén. A kaotikus tartományokon belül a mozgás előrejelezhetetlen, hosszú távon valószínűségi szemléletben értelmezhető. (A zárt görbék előrejelezhető, kváziperiodikus mozgásokhoz tartoznak.)



2.10. ábra. A 2.9. ábrához hasonlóan megrajzolt Poincaré-térképek  $E=40$  és  $E=120$  esetekben.

## 2.7. Összefoglalás

A bonyolult tálban mozgó golyó szimulációs vizsgálata jó választásnak bizonyult a káosz tanítására. A jelenség egyszerű, a diákok számára könnyen érthető, ugyanakkor a káosz minden jellemzője és szépsége megmutatható rajta. A szimulációs programmal (elsősorban a Poincaré-metszetek paraméterfüggésének vizsgálata közben) a diákoknak lehetősége nyílt az önálló kísérletezésre és felfedezésre, amely maradandó élmény lett számukra.

A diákok számára a káosszal kapcsolatos két legnagyobb felismerés a következő volt:

- 1.) A káosz nem teljes rendezetlenséget és véletlenszerűséget jelent, hanem egy úgynevezett „rendezett rendetlenséget”. (A fázistérben való fraktálszerkezet megrajzolása volt a legtöbb diák számára a legnagyobb élmény.)
- 2.) A káosz jelen van a mindennapi jelenségek körében, pl. a meteorológiában is.

A káosz tanítása azért is hasznos, mert egy népszerű területről van szó, ahol nem árt, ha diákjaink tájékozottak, de még inkább azért, mert a jelenségek döntő többsége kaotikus jelleget mutat, így nem szerencsés, ha a középiskolai fizikaoktatás során csak a „kivételes eseteket”, azaz a periodikus mozgásokat tanítjuk. Ráadásul a kaotikus jelenségek előrejelezhetetlensége elfogadhatóbbá teszi a később, a kvantummechanika során előkerülő valószínűségi szemléletet.

## Hivatkozások (2. fejezet)

- [2.1] Stonawski T. A digitális média alkalmazása a tanulói kreativitás, problémamegoldás és önálló kísérletezés fejlesztésére általános és középiskolában (2015), 85-99
- [2.2] Tóthné Juhász T., Gócz É.: Káosz egy tálban, Fizikai Szemle 2014/12, pp421–425, 2014
- [2.3] <http://csodafizika.hu/fiztan/kozkincs/szakmhallg/index.html>
- [2.4] [https://drive.google.com/open?id=1kesLnpoMZWYocxKgCxf\\_-GPis\\_L9qWfM](https://drive.google.com/open?id=1kesLnpoMZWYocxKgCxf_-GPis_L9qWfM)
- [2.5] <http://tp.lc.ehu.es/jma/ds/ds.html>
- [2.6] [http://indavideo.hu/video/Dynamics\\_Solver\\_bemutato](http://indavideo.hu/video/Dynamics_Solver_bemutato)
- [2.7] Tél T., Gruiz M.: Kaotikus dinamika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Bp., 2006
- [2.8] Gruiz M., Tél T.: *A káosz* - Fizikai Szemle 55 (2005) 191-193
- [2.9] <http://www.met.hu/idojaras/elorejelzes/valoszinusegi/> (letöltés időpontja: 2014. május 9.)

## A 2. fejezet alapjául szolgáló publikáció:

Tóthné Juhász T., Gócz É.: Káosz egy tálban, Fizikai Szemle 2014/12, pp421–425, 2014

### 3. Elektromosságtani kísérletek a LabCamera programmal

Az elektromosságtan témakörében vannak egyszerű és gyors kísérletek (pl. elektromos térerősség-vonalak szemléltetése, fémek viselkedésének vizsgálata, ellenállások soros és párhuzamos kapcsolásának mérése), de akadnak sajnos olyan mérések is (telep karakterisztikája, bekapcsolási jelenségek vizsgálata), amelyek akár a mérés időigényessége, akár a jelenség követhetetlenül gyors volta miatt kimaradnak a középszintű fizikaórákról.

Az elektromosságtan legtöbb kísérletét egy egyszerű interfésszel jól át lehetne alakítani számítógépes méréssé, de sajnos nem minden iskola engedheti meg magának az ilyen mérőeszközök beszerzését. Létezik azonban egy olyan magyar fejlesztésű szoftver (LabCamera), amellyel nincs szükségünk új mérőeszköz beszerzésére, csak egy egyszerű webkamerára, amely lehet külső, USB csatlakozós, de ugyanígy megfelel bármelyik laptop beépített kamerája is. Ezzel a szoftverrel a szertárak többségében megtalálható, alapvetően demonstrációs célra készült lengőtekerces (Deprez-) műszereket gyorsan és egyszerűen digitalizálhatjuk, így a velük végzett mérések egy része nem csak demonstrációs, hanem tanulókérdéletes mérésként is elvégezhető. A kvantitatív mérések nagy előnye, hogy a mért adatok utólagos elemzése jóval szemléletformálóbb, mint egy kvalitatív demonstrációs kísérlet.

Doktori munkámban elsősorban a bekapcsolási jelenségek, valamint a soros RLC kör elemeinek fázisviszonyai témakörében dolgoztam ki olyan kísérleteket, ahol a LabCamera program segíthet a fizika tanításában. A mérések egy részénél gyorsabb és gördülékenyebb lett a számítógépes kísérlet a hagyományos mérésnél, egy másik részénél viszont nem csak kényelmi, de tartalmi előrelépést is jelentett a mérőműszerek digitalizálása: a bekapcsolási jelenségek esetén lehetővé vált a gyorsan változó adatok rögzítése, így ezek a jelenségek mennyiségileg is vizsgálhatóvá váltak.

#### 3.1. A LabCamera program rövid bemutatása

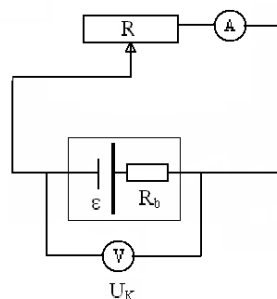
A LabCamera (korábban WebCam Laboratory) programot egy magyar cég (Intellisense Zrt.) fejlesztette. A program működésének alapja a színelismerés: a szoftver a videókon a színük alapján felismeri a tárgyakat, és képes követni azok mozgását. A LabCamera részletes ismertetése megtalálható az eredeti fejlesztő cég honlapján [3.1], de mivel 2018 elején a MOZAIK Kiadó felvásárolta a programot, ezért mostantól új felhasználóknak csak a mozaweb felületén érhető el [3.2].

A programnak több hasznos funkciója van: mikroszkóp (képek elemzésére, távolságok, szögek mérésére alkalmas funkció), kinematika (mozgások grafikonjainak rögzítésére, elemzésére alkalmas funkció), time-lapse videók készítése, valamint az úgynevezett „Universal logger” funkció, amely mérőeszközök adatainak digitalizálását teszi lehetővé. Bár az összes itt felsorolt menüpont nagyon hasznos a fizikatanítás során, az elektromosságtan esetében leginkább ez utóbbi, a logger (adatgyűjtő) funkció alkalmas arra, hogy a kísérleteket gyorsabbá, szemléletesebbé és tanulságosabbá tegyünk.

A logger funkció segítségével rögzíthetünk digitális mérőműszer, mutató analóg műszer vagy akár folyadékos hőmérő vagy nyomásmérő által mutatott értékeket az idő függvényében. Ehhez a webkamerát ráállítjuk a mérőműszerre (egyszerre akár többre is, ha mind belefér a képernyőbe), majd a programban kiválasztjuk a mérőeszköz típusát. Ezután a programban megjelenő kis mérőműszer-ablakot a valódi mérőműszer képe fölé húzzuk, majd méretre igazítás után kalibrálhatjuk is a műszerünket (ilyen programképernyőt mutat például a 3.13. ábra). Egyszerre akár több műszer mérési adatát is rögzíthetjük, így – bár mindegyiket alapvetően az idő függvényében menti a program – későbbi elemzés esetén egymástól való függésük is vizsgálható (lásd telep karakterisztikája).

### 3.2. Telep karakterisztikája

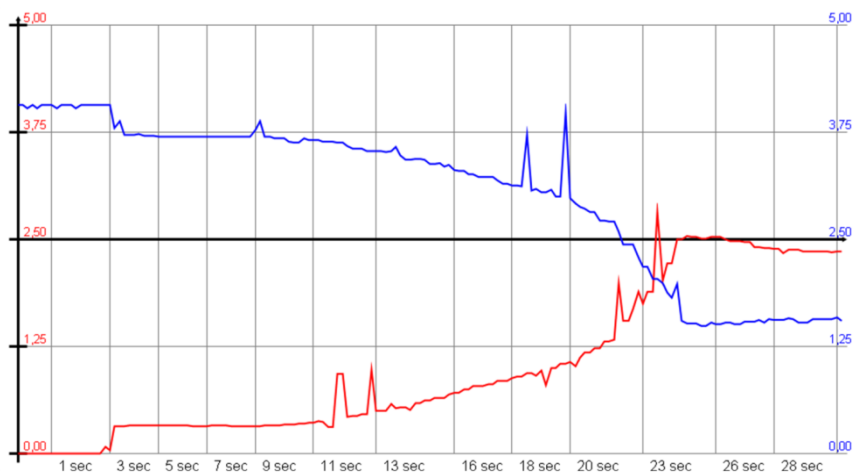
Ez a kísérlet tipikusan jó példája annak, hogyan spórolhatunk időt a LabCamera programmal. Magán az eredeti kísérleti összeállításon [3.3] semmit sem változtattam (3.1. ábra), ugyanúgy az összetartozó áramerősség és kapocsfeszültség értékeket rögzítettük, de gyorsabban tudtuk elvégezni a mérést a LabCamera logger funkcióját használva.



3.1. ábra. Kísérleti összeállítás zsebtelep karakterisztikájának felvételéhez.

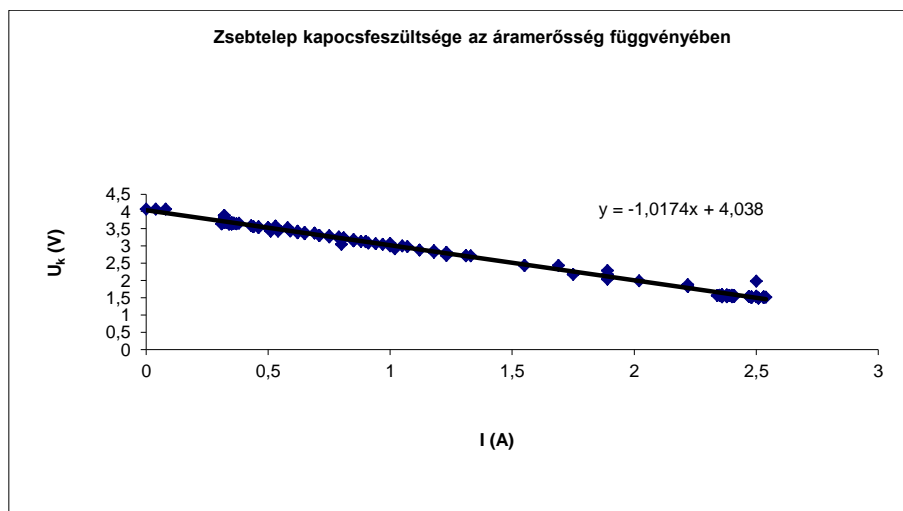


Az áram- és feszültségmérés digitális multiméterekkel történt. Miközben a külső ellenállást lassan, de folyamatosan változtattuk, a program a két multiméter által mutatott értéket egyszerre rögzítette az idő függvényében, így a 3.2. ábrán látható grafikonokat kapjuk.



3.2. ábra.  $U_k$  (kék görbe) és  $I$  (piros görbe) értékek rögzítése a WebCam programmal.

Látható, hogy az adatok rögzítésekor történt néhány leolvasási hiba, ezek a grafikonon kiugró csúcsként jelentkeznek. A program által felvett mérési eredményeket egy kattintással elmenthetjük Excel fájlba, és a hibás adatpontok törlése után ábrázolhatjuk a kapcsolófeszültséget az áramerősség függvényében (3.3. ábra). 4,5V-os zsebtelepet és  $10\Omega$ -os változtatható ellenállást használva a mérési eredmények a következők:



3.3. ábra. Zsebtelep karakterisztikája

Mivel tudjuk, hogy:

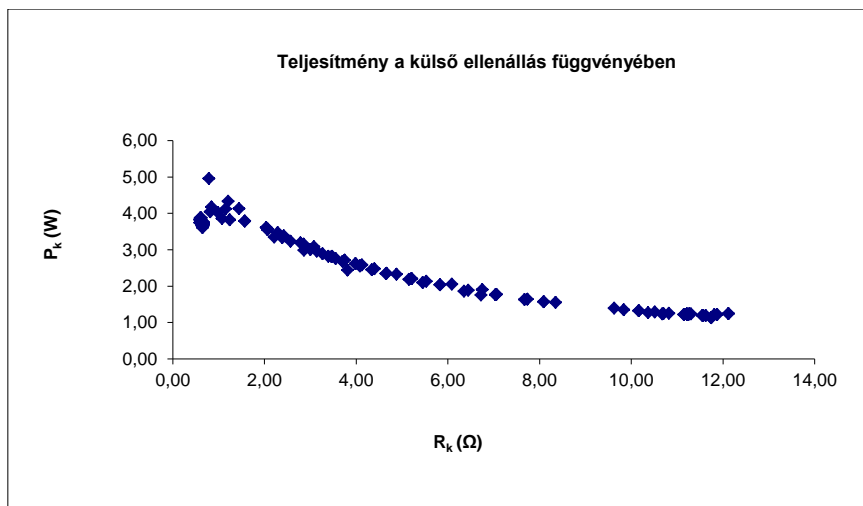
$$U_k = \varepsilon - R_b I \quad , \quad (3.1)$$

így az illesztett egyenes egyenletéből leolvashatjuk a zsebtelep elektromotoros erejét, ami 4V, valamint belső ellenállását, ami körülbelül  $1\Omega$ .

A mért adatok egy másik jellegzetes görbe megrajzolását is lehetővé teszik. A  $P_k$  teljesítmény képletét átalakítva, majd kihasználva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy:

$$P_k = U_k \cdot I = U_k \cdot \frac{U_b}{R_b} \leq \frac{(U_k + U_b)^2}{4R_b} = \frac{U_0^2}{4R_b} = \text{konstans.} \quad (3.2)$$

A külső ellenálláson eső teljesítmény ezek szerint akkor maximális, ha a számtani és mértani közép között egyenlőség van, azaz  $U_k=U_b$ , tehát  $R_k=R_b$  (illesztés). Mivel az összetartozó kapocsfeszültség és áramerősség hányadosa a külső ellenállást ( $R_k$ ), szorzata pedig a külső ellenálláson eső teljesítményt ( $P_k$ ) adja, Excel táblázatban ezek az értékek gyorsan számolhatók. Megrajzolva a  $P_k$ - $R_k$  grafikont (3.4. ábra) valóban láthatjuk, hogy a görbének maximuma van, mégpedig körülbelül  $1\Omega$ -nál, ami – mint korábban láttuk – valóban a zsebtelep belső ellenállása.



3.4.ábra. Teljesítmény a külső ellenállás függvényében.  $P_k$  maximális, ha  $R_k=R_b \approx 1\Omega$ .

Ez a kísérlet jól mutatja, hogy a LabCamera logger funkciójával hogyan lehet egy alapvetően időigényes mérést gyorsan végrehajtani és az így kapott nyers adatokkal (amiket mind az idő függvényében rögzít a program) tovább számolni és azokat egymás függvényében ábrázolni Excel segítségével.

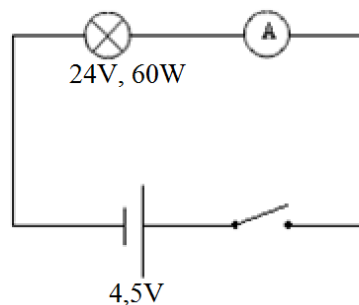
### 3.3. Bekapcsolási jelenségek

A bekapcsolási jelenségek általában olyan gyorsan játszódnak le, hogy kvantitatív mérésük középiskolai körülmények között szinte lehetetlen, ezért ebben a témakörben leginkább oszcilloszkópos demonstrációs méréseket lehet bemutatni. Az oszcilloszkóppal való kísérletezés nehézségeire már az 1. fejezetben kitértem, de itt újra fontosnak tartom kiemelni azt a jelentős

különbséget, hogy amíg az oszcilloszkóppal végzett mérés adatait nagyon nehézkes rögzíteni, addig a számítógépes mérés lehetővé teszi a mért adatok utólagos elemzését is. Az adatok rögzítésével az itt bemutatott mérések többsége kvantitatív mérési kísérletté tehető, így szemléletformálóbbról és mélyebb elemzésre ad lehetőséget a hagyományos módon bemutatott kísérletekhez képest.

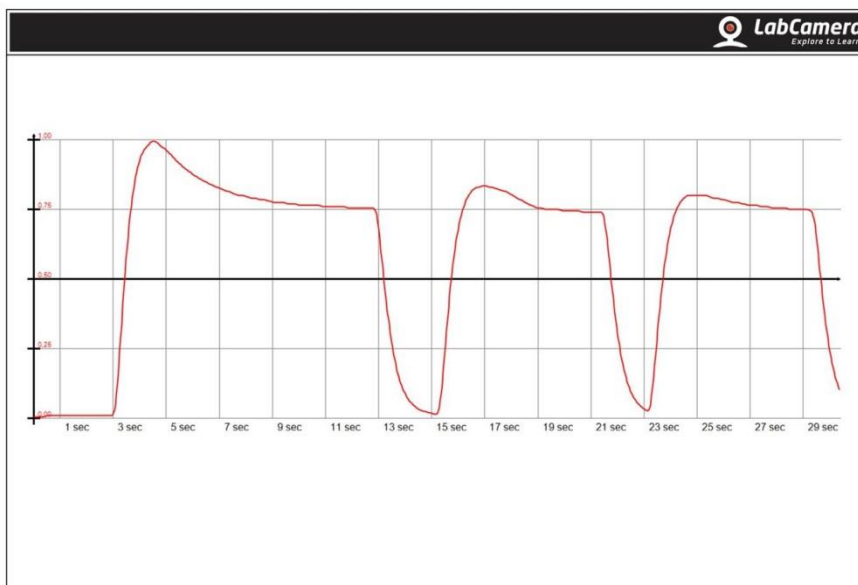
### 3.3.1. Lámpa bekapcsolási árama

Ez a kísérlet egy egyszerű demonstrációs kísérlet, melyben azt mutatjuk be, hogy egy izzólámpa volfrámszálnak ellenállása a hőmérséklet növekedésével nő. Egy közönséges volfrám izzószál ellenállása szobahőmérsékleten sokkal kisebb, mint üzemi hőmérsékleten, ezért a bekapcsolás pillanata után az áramerősség egy csúcserőértékről fokozatosan csökkenve áll be az állandósult hőmérsékleten lévő értékre. Az eredeti kísérletleírás oszcilloszkóppal való megfigyelést javasol [3.4], megfelelő összeállításban viszont enélkül is megfigyelhető a jelenség. Az összeállítást a 3.5. ábra mutatja.



3.5. ábra. Kísérleti elrendezés volfrámszál ellenállásának hőmérsékletfüggésének demonstrálásához.

A kísérleti elrendezés „szíve és lelke” maga az izzó. Ahhoz, hogy a jelenség kellően lassú lefolyású legyen, kell egy olyan izzólámpa, amely esetén a bekapcsolási jelenség elég lassan zajlik ahhoz, hogy egy demonstrációs (Deprez-) műszer vagy digitális multiméter is ki tudja mutatni. Erre alkalmas például a Tungstam 24V, 60W-os izzója, amely a legtöbb iskolában az Elektrovaria készlet részeként megtalálható. (Hasonlóan jól működik a készletben található 24V, 25W-os izzó is.) A bekapcsolási jelenség akkor tehető megfelelően lassúvá, ha a 24V-os izzót jóval alacsonyabb feszültségre, például egy 4,5V-os zseblepre kötjük. Ez azért jó, mert így a kezdeti áramerősség is olyan kicsi, hogy a lámpa nem izzik fel hirtelen, így megnő az izzószál felmelegedéséhez, üzemi hőmérsékletének eléréséhez szükséges idő. A lámpa három egymást követő ki-és bekapcsolása alatti áramerősséget a 3.6. ábra mutatja.



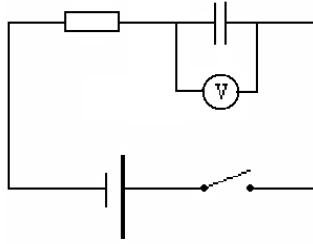
3.6. ábra. Az áramerősség változása három egymást követő be- és kikapcsolás során. (24V, 60W-os Tungram izzó 4,5V-os zseblepre kötve)

Látható, hogy a bekapcsolás pillanatában megfigyelhető áramcsúcs jóval magasabb, mint az állandósult hőmérsékleten folyó áram értéke. Az ábráról az is leolvasható, hogy az egymást követő bekapcsolások során az izzónak nem volt ideje teljesen kihűlni, így az áramcsúcsok értéke a második és harmadik bekapcsolások során már kisebb, mint az első esetben.

Annak, hogy ezt a jelenséget nem oszcilloszkóppal figyeljük meg, elsődleges előnye, hogy a kapott áramerősség-idő függvény projektorra kivetítve jobban látható és részletesen elemezhető.

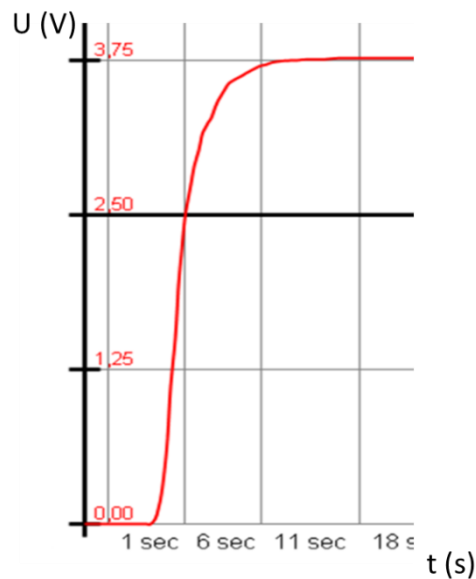
### 3.3.2. Kondenzátor feltöltődése

A kondenzátor feltöltődésének vizsgálata demonstrációs vagy akár mérőkísérletnek is használható. A kísérlet eredeti leírása [3.5] ebben az esetben is oszcilloszkópos megfigyelést javasol, de ismét módosítható a mérési összeállítás (3.7. ábra) úgy, hogy a számítógépes program segítségével részletesebben tudjuk elemezni a jelenséget.



3.7. ábra. Kapcsolási rajz az RC kör bekapcsolási jelenségének megfigyeléséhez

4,5V-os zseblepre sorba kötöttünk egy nagy ellenállást és egy nagy kapacitású kondenzátort kapcsolón keresztül. (A későbbi levezetésben látszik majd, hogy a jelenség karakterisztikus ideje az RC szorzattól függ, így a jobb megfigyelhetőség érdekében a szorzat értékét lehetőleg nagyra kell választani.) A kondenzátor feszültségét egy multiméterrel mértük, az általa mutatott feszültségadatokat pedig a LabCamera logger funkciójának segítségével rögzítettük az idő függvényében a kapcsoló zárása után. A program alapbeállításban 0,034s-os időközönként rögzíti az adatokat, ezen nem változtattunk. A 3.8. ábrán látható grafikon egy  $R=150\text{k}\Omega$  ellenállás és egy  $C=6\mu\text{F}$  kondenzátor esetén mutatja a mérés eredményét.



3.8. ábra. Kondenzátor feszültsége bekapcsoláskor az idő függvényében. ( $R=150\text{k}\Omega$  és  $C=6\mu\text{F}$ )

A kondenzátor feszültsége a feltöltődés során a következő összefüggés szerint nő:

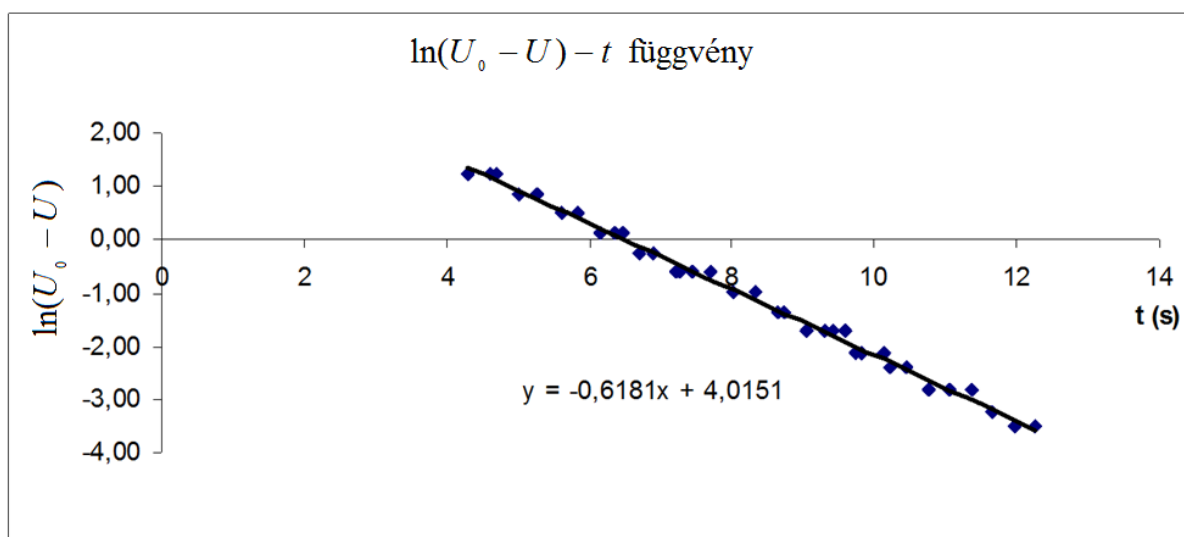
$$U(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad (3.3)$$

ahol  $U_0$  a kondenzátor feltöltődés utáni feszültsége, az RC szorzat pedig az úgynevezett időállandó ( $\tau$ ), ami meghatározza a jelenség lefolyásának gyorsaságát.

A fenti képletet kicsit átalakítva kapjuk, hogy:

$$\ln(U_0 - U(t)) = -\frac{1}{RC}t + \ln U_0. \quad (3.4)$$

Érdemes ellenőrizni, hogy mennyire egyezik mérési eredményünk az elmélettel. Ehhez először mentsük a mérés adatait Excel fájlba, mivel a linearizáláshoz nem a nyers adatokra, hanem a belőlük számolt bonyolultabb kifejezésekre van szükség. A mért  $U(t)$  adatokból vonjuk le az  $U_0$  értéket, majd vegyük az így kapott különbség természetes logaritmusát, így a (3.4) egyenlet bal oldalát kapjuk, amelyet ábrázolhatunk az idő ( $t$ ) függvényében. Az egyenlet alapján egy negatív meredekségű egyenest kell kapjunk, amelynek a meredeksége az elmélet szerint  $-\frac{1}{RC}$  kell legyen. A 3.9. ábra egy ilyen grafikont mutat:



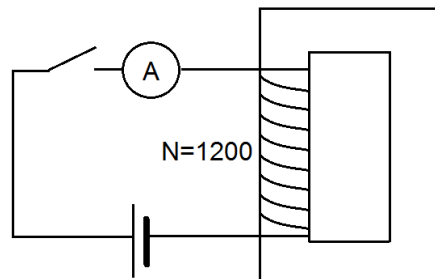
3.9. ábra. RC kör bekapcsolási jelenségének kvantitatív vizsgálata (  $R=150\text{ k}\Omega$ ,  $C=12\mu\text{F}$  )

Az egyenes meredeksége a megadott  $R$  és  $C$  értékek alapján elméleti úton számolható, esetünkben  $-\frac{1}{RC} = -0,56$ . Az illesztés alapján ugyanakkor megkapjuk az egyenesünk mért meredekségét is:  $m = -0,62$ .

Látható, hogy a mért és számolt értékek nem túl nagy hibán belül egyeznek (szakkörön több különböző RC értékre ellenőriztük az elméleti és mért értékek egyenlőségét). A LabCamera program hasznának hatalmas előnye ebben a kísérletben az, hogy az adatok utólagos részletes elemzése lehetővé teszi, hogy megmutassuk: a kondenzátor feszültsége valóban exponenciálisan változik az idő függvényében, és az exponenciális tag kitevője valóban  $-\frac{1}{RC}t$ .

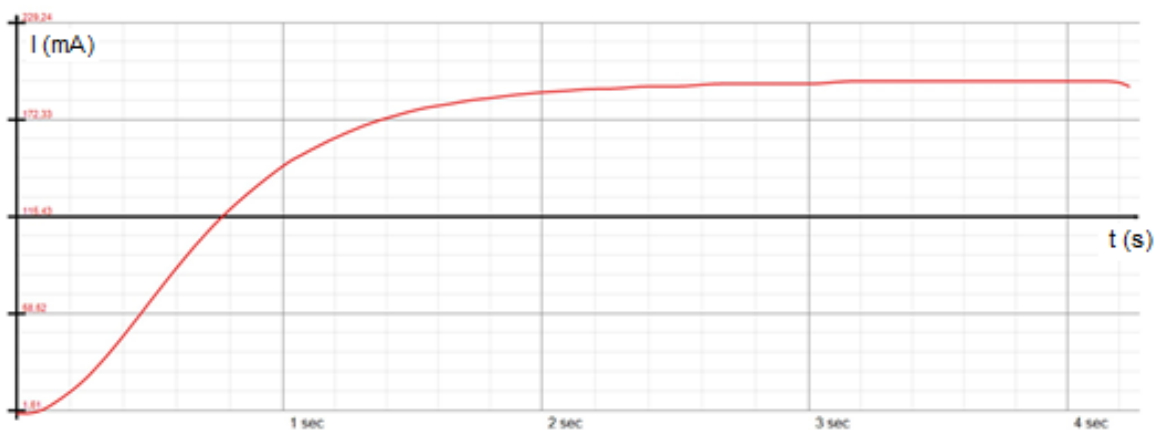
### 3.3.3. Tekercs árama bekapcsoláskor

A tekercs bekapcsolási jelenségének vizsgálata demonstrációs és mérőkíséreltnek is alkalmas, a hozzá kapcsolódó számítások elvégzése pedig jó szakköri kiegészítő anyag lehet. Az indukció jelensége miatt a tekercs bekapcsolás után késlelteti az egyensúlyi áram kialakulását. Az áram fokozatos növekedésének folyamatát úgy mutathatjuk be, hogy egy zárt vasmagra helyezett nagy menetszámú ( $N=1200$ ) tekercset kapcsoló közbeiktatásával csatlakoztatunk egy 4,5 V-os zsebtelephez (3.10. ábra), és a bekapcsolás után mérjük a tekercsen átfolyó áramot.



3.10. ábra. Kapcsolási rajz a tekercs bekapcsolási jelenségének vizsgálatához.

Az áramerősséget forgótekercses, úgynevezett Deprez-műszerrel mérjük, amelynek adatait a LabCamera program logger funkciójának segítségével digitalizáljuk. A kapcsoló zárása után jól érzékelhető, hogy a műszer mutatójának kitérése fokozatosan lassulva éri el az egyensúlyi áramerősség értékét. A műszer mutatójának mozgását követve a program meghatározott időközönként (alapbeállításban 0,034 s) rögzíti a mutató kitérésének szögéhez a kalibráció által hozzárendelt áramerősség értéket, így kirajzoltatható vele az áram növekedését jellemző  $I - t$  grafikon. Iskolai transzformátor-készlet 1200 menetes tekercsével készített grafikont a 3.11. ábra mutatja.



3.11. ábra. Tekercs bekapcsolási áramának időfüggése a LabCamera programmal rögzítve.

A rögzített digitális adatsor természetesen ki is menthető és pl. Excel programmal tovább vizsgálható. Lehetőség van a jelenség exponenciális jellegének igazolására az előző pontban bemutatott módszerhez hasonlóan, de számítógépet jól kezelő és matematikából tehetséges diákoknak a numerikus közelítés módszerét is be lehet mutatni ezen a jelenségen keresztül az alábbi módon.

### Numerikus közelítés

Az áramerősség értékét a bekapcsolást követően minden időpillanatban a tekercsre kapcsolt telep állandó értékű feszültsége ( $U_0$ ) és a tekercsben fellépő önindukciós feszültség aktuális értéke határozza meg. Ez utóbbi a telep feszültségével ellentétes előjelű és az áram változási sebességével  $\left(\frac{\Delta I}{\Delta t}\right)$  arányos. A tekercs áramkörére felírt huroktörvény szerint:

$$I(t) \cdot R = U_0 - L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (3.5)$$

ahol  $I(t)$  az adott pillanatban aktuális áramerősség,  $R$  a tekercs ohmos ellenállása,  $L$  pedig a tekercs önindukciós tényezője. Az egyenlet átrendezésével fejezzük ki az áram változását mint az idő függvényét:

$$\Delta I = \left( \frac{U_0}{L} - \frac{R \cdot I(t)}{L} \right) \Delta t \quad (3.6)$$

A kezdeti áram ( $I_0 = 0$ ) értékét és az idő kezdőpontját ( $t_0 = 0$ ) valamint a (3.6) egyenletben szereplő konstansokat ( $U_0=4,3V$ ;  $R=22\Omega$ ;  $L=13H$ ) alapul véve, általunk választott megfelelő időszakosokkal (a programhoz alkalmazkodva  $\Delta t = 0,034s$ ) haladva, lépésről lépésre meghatározható az áram növekvő értéke.

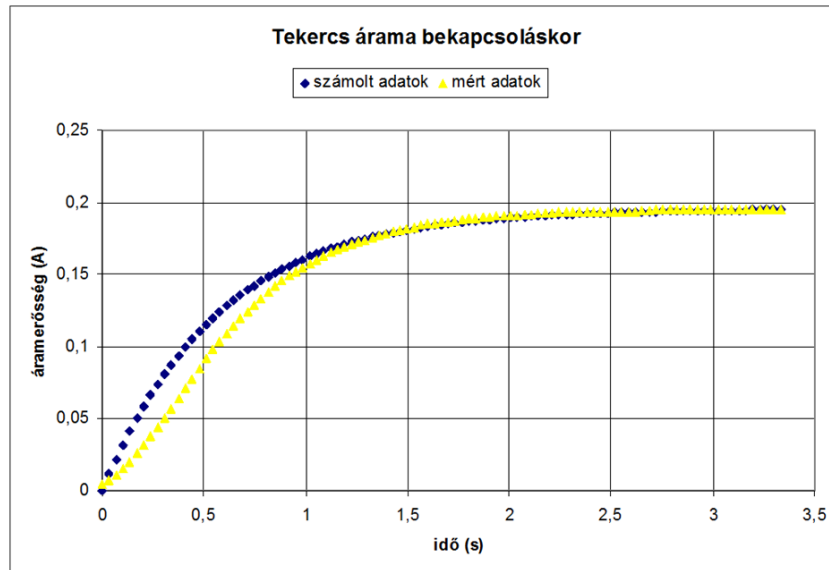
A számítást lépésenként végezzük, a következő rekurzív egyenletek szerint:

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t = (n+1)\Delta t \quad (3.7)$$

$$I_{n+1} = I_n + \left( \frac{U_0}{L} - \frac{R \cdot I_n}{L} \right) \Delta t \quad (3.8)$$

A számítógép (Excel program) használata látványosan meggyorsítja az amúgy lassú és nehézkes számításokat, hiszen csak egy cellahivatkozásokkal ellátott függvényt - a (3.6.) egyenletet - kell begépelni, majd a programmal automatikusan ki lehet számoltatni az áramerősség értékét tetszőlegesen sok lépésig. A 3.12. ábra a fenti adatokkal megadott numerikus számolás eredményét hasonlítja össze a mért áramerősség értékekkel:





3.12. ábra. Tekercs áramának numerikus közelítő módszerrel számolt és a LabCamera programmal mért értékeinek összehasonlítása.

Látható, hogy a mért adatok az első másodpercben elmaradnak az elméleti úton számolt értékektől, de a mérőműszer mutatójának tehetetlenségét figyelembe véve ez nem meglepő. Az első másodperc után viszont már jól egyezik a kétféle módszerrel kapott adatsor, ami igazolja a numerikus közelítés módszerének helyességét.

Emelt szintű tanulócsoporthoz a numerikus közelítés módszere segít megérteni a folyamat fizikai hátterét, de hasznos a számítógépes módszerek fizikai alkalmazási körének bővítése szempontjából is.

### 3.4. Feszültség és áram fázisviszonya váltakozó áramú körben

Színuszos váltakozó feszültséggel táplált áramkörben a kondenzátoron illetve tekercsen mérhető feszültség és áram fáziseltolódásban vannak egymáshoz képest. A fáziseltolódás kimutatása hagyományosan oszcilloszkóp segítségével történik [3.6], azonban megfelelő összeállítás esetén az oszcilloszkóp használata kiküszöbölhető és a kísérlet a LabCamera logger funkciójával is bemutatható. Ilyenkor a mérési eredményeket nem csak „in situ” figyelhetjük meg egy kis képernyőn, hanem a kapott grafikont utólagosan is elemezhetjük (pl. kinagyíthatjuk), ezzel is segítve a hatékonyabb magyarázatot.

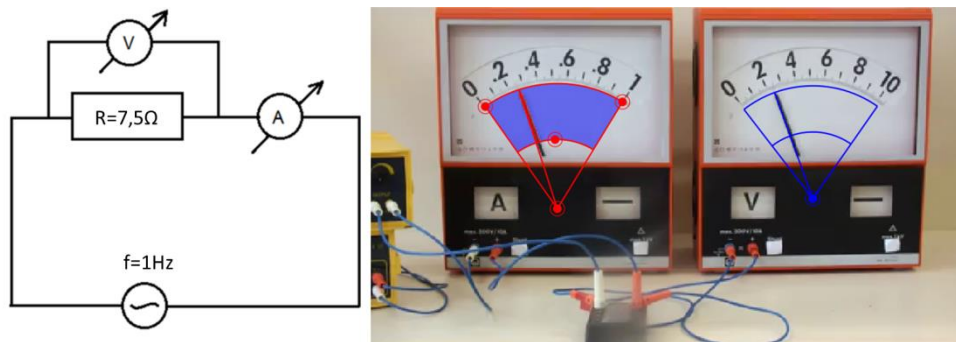
Fontos, hogy a kísérletben olyan feszültségforrást használjunk, amely alacsony frekvenciájú váltakozó feszültséget tud létrehozni, hiszen a feszültséget és az áramerősséget is egyszerű forgótekercses (Deprez-) műszerrel szeretnénk mérni, és fontos, hogy a program követni tudja a

mutatók mozgását. Erre a célra legalkalmasabb egy hanggenerátor, amelynek frekvenciája változtatható, így kellően alacsony, 1-2Hz körüli értékre is beállítható.

A nagy, demonstrációs célra készült forgótekerces műszerek mutatóját (3.13. ábra) a LabCamera program könnyen felismeri és követi. Mivel váltakozó áramot és feszültséget szeretnénk mérni velük, a mutató zérushelyét elállítottuk úgy, hogy az a skála közepén legyen. Így a szinuszos görbék vízszintes szimmetriatengelye felfelé eltörlődik, de mivel itt csak a görbék egymáshoz képesti vízszintes eltoltságát vizsgáljuk, ez egyáltalán nem okoz problémát.

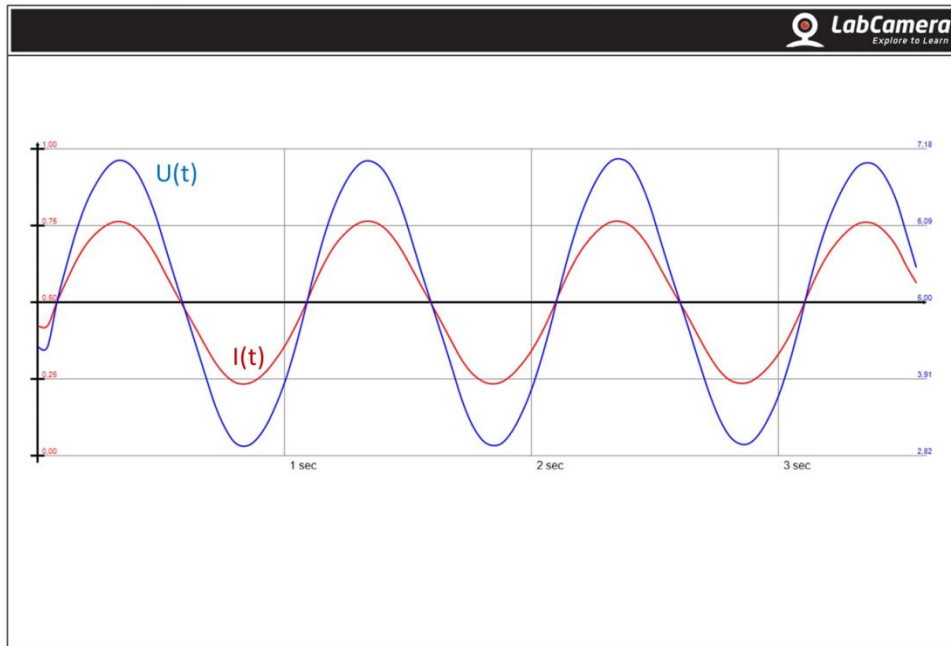
### 3.4.1. Fázisviszony ohmos ellenállás esetén

Vizsgálatunkat érdemes egy ohmos ellenállást tartalmazó áramkörrel kezdeni. A mérés kapcsolási rajzát és az aktuális összeállításról készült fényképet a 3.13. ábra mutatja.



3.13. ábra. Kapcsolási rajz és mérési összeállítás LabCamera által rögzített képe ohmos ellenállás feszültség-áram fázisviszonyának vizsgálatához.

Ohmos ellenállás esetén az áram és a feszültség azonos fázisban vannak, így szabad szemmel is megfigyelhető, hogy a két műszer mutatója egymással szinkronban mozog. Az U-t és I-t grafikonok egy koordinátarendszerben való felrajzoltatása (3.14. ábra) ezt a megfigyelést még pontosabban alátámasztja.

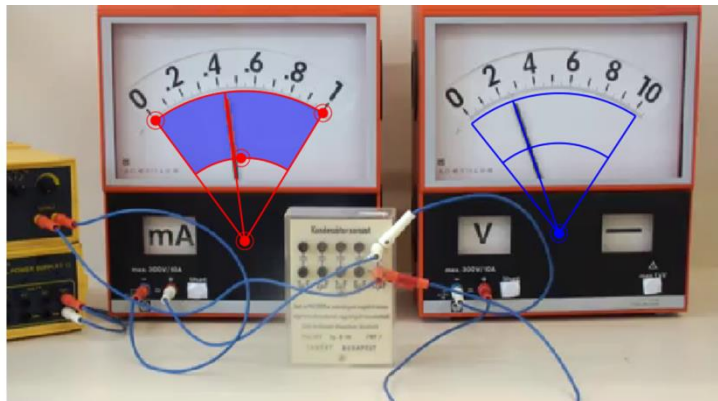
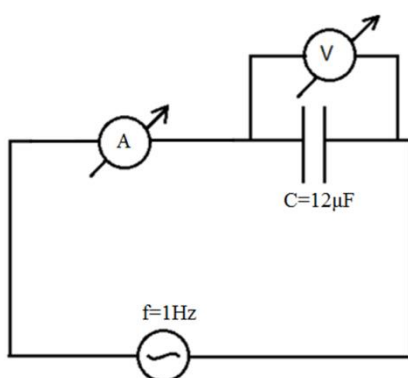


3.14. ábra. Ohmos ellenállás U-t és I-t grafikonja. A feszültség és az áramerősség azonos fázisban vannak.

Az ábrán jól látszik, hogy a két szinuszcörbe egymással szinkronban van, azaz nincs köztük fáziseltolódás. (A görbék függőleges eltolódását a program segítségével korrigáltuk.)

### 3.4.2. Fázisviszony kondenzátor esetén

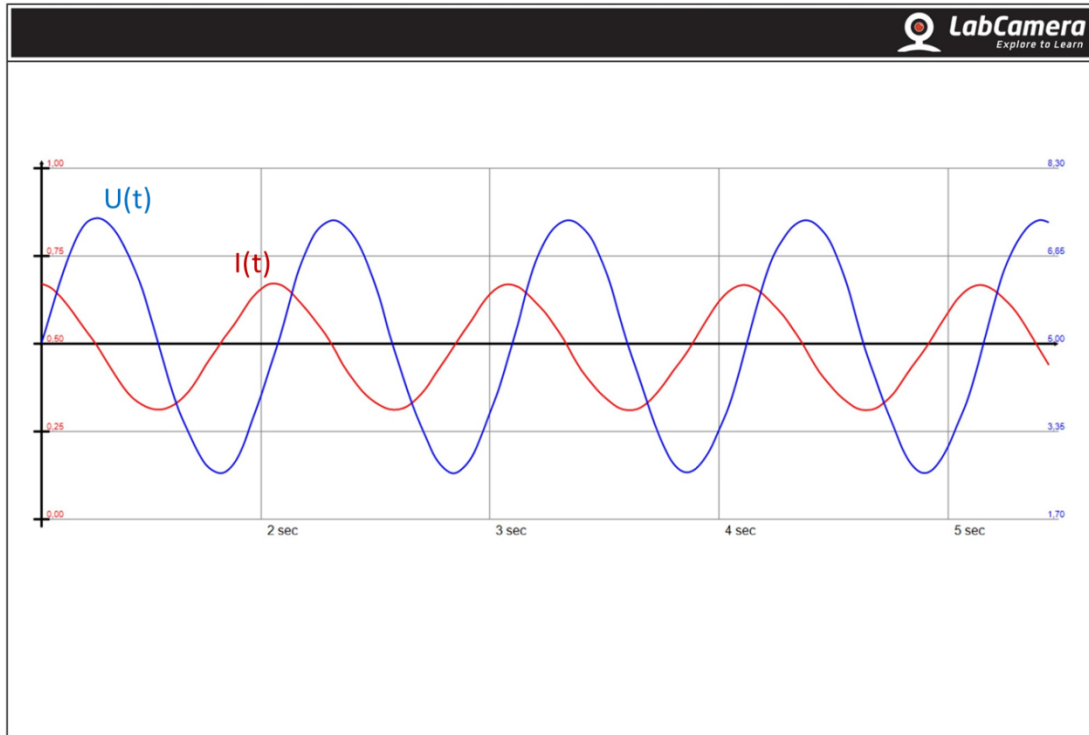
Kondenzátort tartalmazó áramkör vizsgálatának kapcsolási rajzát a 3.15. ábra mutatja.



3.15. ábra. Kapcsolási rajz és a LabCamera által rögzített kép az összeállításról: kondenzátor feszültség-áram fázisviszonyának vizsgálata.

A hanggenerátort továbbra is alacsony frekvenciára ( $f=1\text{Hz}$ ) állítottuk be, és egy  $12\mu\text{F}$ -os kondenzátoron mértük a rajta eső feszültséget és a rajta átfolyó áramot. A kísérlet elindítása után

szabad szemmel is jól látszik, hogy a mutatók nincsenek szinkronban egymással, de nyugodtabban és részletesebben kielemezhetjük a jelenséget, ha a műszerek adatait a LabCamera program logger funkciójának segítségével rögzítjük az idő függvényében. Mérési eredményünket a 3.16. ábra mutatja.

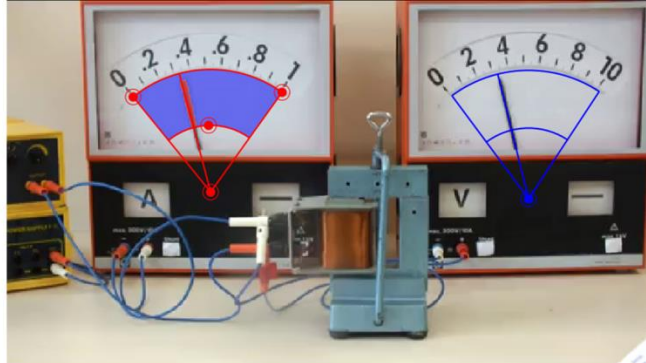
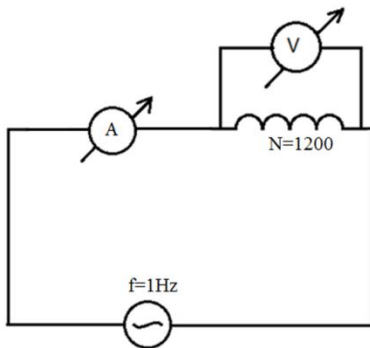


3.16. ábra. Kondenzátoron átfolyó áram és a rajta eső feszültség az idő függvényében.

Jól látszik, hogy a kondenzátoron átfolyó áram körülbelül  $90^\circ$ -kal siet a rajta eső feszültséghez képest. A LabCamera programmal tehát sikerült kimérni a kondenzátor feszültség-áram fázisviszonyát, és mivel mérési adatainkat, grafikonunkat könnyedén elmenthetjük, kivetíthetjük, ezért a részletes elemzés érthető és követhető lesz diákjaink számára.

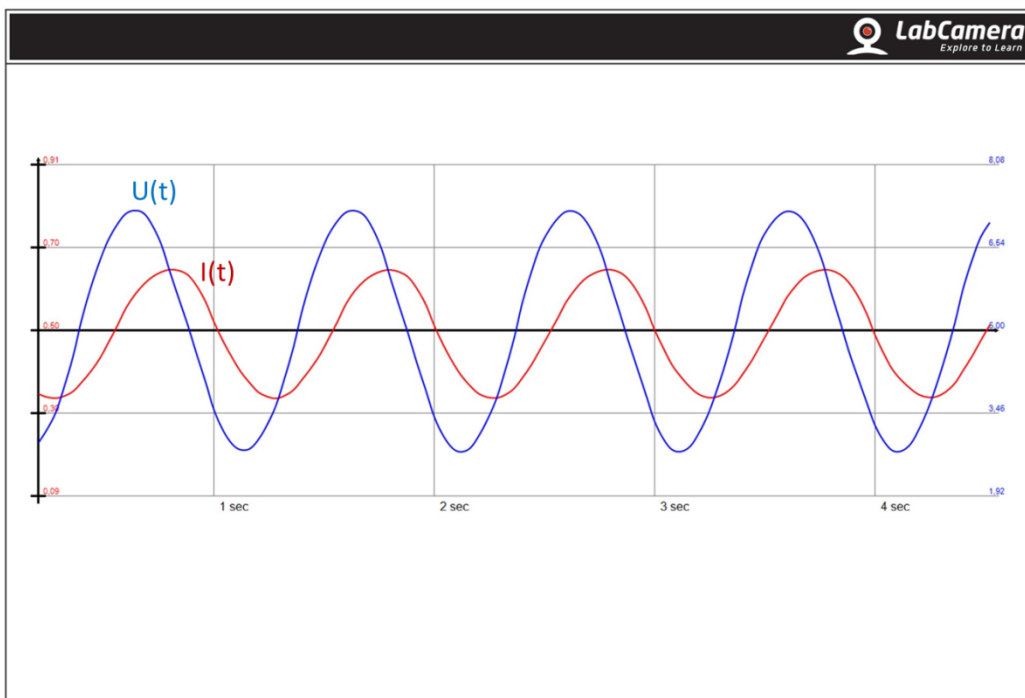
### 3.4.3. Fázisviszonyy tekercs esetén

Tekercset tartalmazó áramkör vizsgálatának kapcsolási rajzát a 3.17. ábra mutatja.



3.17. ábra. Tekercs feszültség-áram fázisviszonyának vizsgálata. Kapcsolási rajz és a LabCamera program által rögzített kép az összeállításról.

Az 1 Hz frekvencián működő hanggenerátorra egy 1200 menetes tekercset kötöttünk, és mértük a rajta eső feszültséget és áramerősséget. A kísérlet bemutatásakor ebben az esetben is jól látszik szabad szemmel, hogy a mutatók nincsenek szinkronban egymással, de a részletes elemzés érdekében érdemes rögzíteni itt is az adatokat a LabCamera programmal. Az így kapott grafikonokat a 3.18. ábra mutatja.



3.18. ábra. Tekercsen átfolyó áram és a rajta eső feszültség az idő függvényében.

Ebben az esetben a tekercs ohmos ellenállása nem hanyagolható el teljesen az induktív ellenállásához képest, így a fáziseltolódás nem mutatja tökéletesen az elméletileg várt  $90^\circ$ -ot, de jól látszik, hogy a tekercsen átfolyó áramerősség késik a rajta eső feszültséghez képest.

### 3.5. Összefoglalás

A fejezetben bemutatott kísérletek jó példái annak, hogy a LabCamera program nem csak a kinematika témakörében - a mozgások követése révén - lehet hasznos, hanem az adatgyűjtő logger funkciója segítségével könnyedén digitalizálhatjuk vele a szertárban található analóg műszereket. Így a program segítségével gyors és meglepően pontos kvantitatív kísérleteket végezhetünk a bekapcsolási jelenségek témakörében, ahol az exponenciális jellegű görbék további részletes elemzésére is lehetőség nyílik pl. az Excel program használatával. Ezek a kísérletek szakkörön, a tehetséggondozásban jól használhatóak.

A váltakozó áramú áramkör elemeinek feszültség-áram fázisviszonyának vizsgálata a középszintű fizikaoktatásban alkalmazható kísérlet, ahol az oszcilloszkópos demonstrációs kísérletet egy egyszerűbb eszközökön alapuló méréssé tettük, és ehhez a szertárban már amúgy is meglévő analóg mérőműszereket használtuk.

Az Excel programmal való mérésiértékelésnek szintén fontos szerepe van a tehetséggondozásban, hiszen bármely későbbi laborjegyzőkönyv esetén alkalmazható tudást kapnak így diákjaink.

### Hivatkozások (3. fejezet)

[3.1] <http://intellisense.education/resources/>

[3.2] <https://www.mozaweb.hu/Shop/labCam>

[3.3] Fizikai Kísérletek gyűjteménye II. kötet, Arkhimédész Bt – Típotex Kiadó, Budapest, 1995, pp156-157

[3.4] Fizikai Kísérletek gyűjteménye II. kötet, Arkhimédész Bt – Típotex Kiadó, Budapest, 1995, p145

[3.5] Fizikai Kísérletek gyűjteménye II. kötet, Arkhimédész Bt – Típotex Kiadó, Budapest, 1995, p298

[3.6] Fizikai Kísérletek gyűjteménye II. kötet, Arkhimédész Bt – Típotex Kiadó, Budapest, 1995, pp294-295

### **A 3. fejezet alapjául szolgáló publikációk:**

1.) Tóthné J.T.: Kísérletek a WebCam Laboratory programmal, in: *A fizika, matematika és művészet találkozása az oktatásban, kutatásban*, konferenciakiadvány szerk.: Juhász András és Tél Tamás, ELTE TTK, pp267–272, 2013.

2.) Zs. Szigetlaki, T. Tóthné Juhász: Computer-aided measurement and simulation using LabCamera and Fizika software in physics education in: TPI-15 Conference Proceedings ed.: A. Király, T. Tél, Budapest, pp243-248, 2016.

## 4. Kinematikai kísérletek a FIZIKA szimulációs programmal

Doktori munkám során a legtöbb időt a FIZIKA programmal bemutatható kísérletek kitalálásának, kipróbálásának szenteltem. A szimulációkkal kapcsolatban a legtöbb tanárnak fenntartásai vannak, hiszen a fizika egy kísérleti tudomány, ahol valódi kísérletek segítségével próbáljuk megismerni a természeti törvényeket. Ezzel szemben a szimulációk során egy emberek által programozott virtuális valóságban végzünk kísérleteket, ami – ha rosszul van megírva a program - nem is biztos, hogy a valóságot mutatja. Ezért szimulációs kísérleteket csakis olyan témakörökben szabad használni, ahol ez a fajta kísérlet többet tud adni a valós kísérleteknél és törekedni kell arra, hogy a szimuláció megfelelő (valóság-hű) működését egyszerűbb kísérletek során ellenőrizzük. Kutatásom során ezen alapelvek betartására törekedtem.

A 4. fejezetben bemutatott szimulációs kísérletek egy részének létjogosultságát az adja, hogy lehetőséget ad a mozgások grafikonjainak (hely-idő, sebesség-idő, gyorsulás-idő) megjelenítésére, elemzésére és a köztük lévő kapcsolat felfedezésére, ezáltal segítve a diákok szemléletformálását a grafikus ábrázolás terén. Ez a témakör a hagyományos feldolgozásban nagyon elméleti, absztrakt, ezért a diákok számára nehezen érthető, és vannak olyan kritikusan nehéz pontjai (pl. függőleges hajítás hely-idő és sebesség-idő grafikonja), amelyek megértésében sokat tud segíteni a szimulációs kísérlet.

Az első FIZIKA szimulációk szinte kivétel nélkül a kinematika témakörében születtek. Témavezetőm irányításával egy munkacsoportban kidolgoztuk a kinematika legfontosabb alapkísérleteit, ahol az elsődleges cél az általános képességű diákoknak tervezett kísérletek esetén a grafikus szemlélet kialakítása, a tehetséggondozás területén pedig a mélyebb megértés elősegítése volt. Ezt a munkát egy olyan (az 5. fejezetben bemutatott) oktatási kísérlet követte, amelyben arra szeretnénk volna választ kapni, hogy helyes-e az az előzetes feltevésünk, miszerint a diákok tudásában, grafikus szemléletében mérhető javulást eredményez, ha a tanár az általunk tervezett szimulációkat beépíti a tanórákba. Az oktatási kísérlet pozitív eredménye felülmúlta előzetes elvárásainkat.

A pozitív visszajelzés arra sarkallt minket, hogy tovább keressük a szimuláció használatában rejlő előnyöket. Az én feladatomban volt, hogy olyan – még feldolgozásra nem került – kritikus pontokat keressek először a kinematika, majd később a dinamika témakörében, amelyek megértése tapasztalatom szerint problémát okoz a diákoknak, és ahol várható, hogy a szimulációs program használata segíti a szemléletes tanítást. Így a kinematika témakörében a vonatkoztatási rendszerek



tanítására dolgoztam ki egy olyan szimuláció-sorozatot, amely segíti a megértést mind az átlagos, mind a tehetségesebb tanulók esetén.

#### **4.1. A FIZIKA szimulációs program bemutatása**

A FIZIKA magyar fejlesztésű, oktatást segítő számítógépes mozgás-szimulációs program, melynek fejlesztője ugyanaz az Intellisense Zrt, aki az előző fejezetben bemutatott LabCamera számítógépes programcsomagot is elkészítette. Természetesen a FIZIKA program részletes leírása is megtalálható a cég honlapján [4.1], ezért ettől itt eltekintek, és csak a tanítás szempontjából fontos általános előnyeit emelem ki.

A FIZIKA program nem egyedülálló, természetesen több hasonló szimulációs program is létezik - pl. ALGODOO [4.2] - a piacon, ami hasonlóan jól használható az iskolai fizikaoktatásban. A FIZIKA program előnye versenytársaihoz képest az, hogy úgy tervezték, hogy a tanárok és diákok által könnyen és egyszerűen használható legyen a mindennapi oktatásban. Ezért kezelése rendkívül egyszerű, fél óra alatt az összes funkció használata elsajátítható. A tanári felhasználást segíti, hogy a cég honlapján a programokhoz számos alkalmazási példa is rendelkezésre áll. Jelenleg körülbelül 60 előre megszerkesztett szimulációt találhatunk, amelyekhez részletesen kidolgozott feladatsor és órán való felhasználást segítő leírás is tartozik.

A program a saját tervezésű szimulációkat is támogatja, ezáltal sokkal jobban használható, mint pl. a sokak által ismert és használt Java-alapú Phet-szimulációk [4.3], amelyek külön-külön egy-egy jelenség tárgyalására íródtak, így önálló kreatív kísérletezésre nem alkalmasak. A FIZIKA programban ezzel szemben a felhasználó maga rajzolhatja meg a vizsgálni kívánt elrendezést, amelyből a program bizonyos paraméterek (pl. nehézségi gyorsulás, tömeg, súrlódási együttható, rugalmasság) figyelembevételével, és az előre beprogramozott erőtvények felhasználásával numerikusan megoldja a testek mozgását megadó differenciálegyenletet. A program a mozgásegyenlet megoldásának megfelelően a számítógép képernyőjén megjeleníti a mozgásokat, és képes ábrázolni a mozgó testen (testeken) kiválasztott pontok különböző grafikonjait (pl. hely-idő, sebesség-idő grafikonok). Így tehát a FIZIKA program határozott előnye, hogy a vizsgálható elrendezések saját ötleteink szerint alakíthatóak, ezáltal a program széles teret biztosít a tanári és tanulói kreativitásnak.

A program minden egyes funkcióját és a hozzá kapcsolódó előnyök ismertetését itt nem részletezem, hiszen ezeket sokkal könnyebb bemutatni konkrét példákon, a következő alfejezetekben tárgyalt kísérleteken keresztül.

## **4.2. Vonatkoztatási rendszerek tanítása a FIZIKA programmal**

### **4.2.1. A vonatkoztatási rendszer tanításának háttere**

A vonatkoztatási rendszerek tanítása a gimnáziumban első látásra nem tűnik nehéz feladatnak. A legtöbb diák képes arra, hogy megtanulja az ezzel kapcsolatos alapvető fogalmakat (origó, koordinátarendszer, relatív sebesség), azonban a mélyebb megértés szintjére – tapasztalatom szerint - csak nagyon kevesen jutnak el. A háttérben valószínűleg az állhat, hogy a diákok többsége a fizikaórán is megmarad a magával hozott hétköznapi szemléleténél. Így a mozgások esetén mellékes jelentőséget tulajdonít a vonatkoztatási rendszernek és ezzel együtt a pozitív és a negatív irányok egyértelmű rögzítésének, a fizikában szükséges sebesség vektorfogalma (velocity) helyett elegendőnek véli, hogy ismeri a gyorsaságot köznapi értelemben jellemző skaláris sebesség (speed) fogalmát. Pedig a vonatkoztatási rendszer és az ebben értelmezhető vektormennyiségek nem megfelelő hangsúlyozása már a legegyszerűbb egyenes vonalú mozgások esetén is nehézségeket okoz. Ide vezethető vissza az a tévképzet is, hogy a lassulást mindig negatív gyorsulásnak kell tekinteni. A nyugvó vonatkoztatási rendszer fogalma viszonylag egyszerű a tanulók számára, ezért bevezető szinten nyugvó viszonyítási rendszerben tárgyaljuk a mozgásokat. Jóval nehezebb a helyzet, ha a vonatkoztatási rendszer maga is mozog. Ilyen mozgó koordinátarendszer például az, amikor egyenletesen haladó autóból, vagy vonatból figyeljük más testek – például egy másik autó vagy vonat - mozgását. A nyugvó illetve az egyenletesen mozgó rendszerekben megfigyelt mozgások összehasonlító leírásával Galilei foglalkozott először. Tapasztalatait a róla elnevezett relativitási elv fogalmazza meg, ami a kinematikából már átvezet a dinamikába. A viszonyítási rendszer gyorsulása esetén a mozgások értelmezése tovább bonyolódik.

A következőkben röviden összefoglalom a diákjaimnál tapasztalt, a vonatkoztatási rendszerrel kapcsolatos problémákat, és a saját gyakorlatomból vett példákon illusztrálom, hogy a FIZIKA program egyaránt felhasználható a megértési nehézségekkel küzdő gyenge tanulók segítésére, illetve a kiemelkedő képességű diákok tehetséggondozó fejlesztésére is.

#### 4.2.2. A diákok megértési nehézségei a vonatkoztatási rendszerek témakörében

A vonatkoztatási rendszerek tanításának legfőbb kritikus problémáit eddigi tanítási tapasztalatom szerint négy pontban lehet összefoglalni:

1. A diákok vonatkoztatási rendszerrel kapcsolatos nehézségeinek alapvető oka, hogy a köznapi életben ritkán használunk koordinátarendszert. A vonatkoztatási rendszer erősen absztrakt matematikai fogalom, aminek megértése a diákok többségének 14 évesen még nehézséget okoz. Ráadásul a témakör a mozgások grafikus ábrázolását is tartalmazza, ami szintén absztrakciót igényel, és a diákoknak gyakran különbséget kell tenniük a mozgás pályagörbéje és a mozgás grafikonjai között, ami egy átlagos diák számára nem túl egyszerű feladat. (A tapasztalat szerint tipikus hiba ebben a témakörben például a vízszintes hajítás parabolikus pályagörbéjének és a szabadesés út- idő grafikonjának összekeverése.) A kinematika tárgyalása során gyakran abba a csapdába esünk, hogy az absztrakt vonatkoztatási rendszert egy szintén absztrakt grafikus ábrázolással próbáljuk meg alátámasztani és szemléltetni. A nehézségek leküzdése nem megy egyik pillanatról a másikra, a megoldást a fokozatos közelítés és a sok gyakorlás jelentheti. Ez utóbbihoz ad hathatós segítséget a „Fizika” szimulációs program.
2. Kisgyerekek számára a saját nézőpontjuk jelenti az automatikus vonatkoztatási rendszert. Amikor mérésekkel akarjuk meghatározni egy test pillanatnyi helyzetét, a saját szubjektív vonatkoztatási rendszerünk helyett célszerű egy állandó helyzetű pontot választani, amely megegyezés alapján minden távolságmérés kiindulópontja. A diákok többsége ezt megtanulja, de a koordinátarendszer választását illetően már bizonytalan. Ezen a problémán úgy léphetünk túl, ha gondolatban először egy-egy álló tereptárgyhoz – pl. az út mentén álló fához, házhoz, villanyoszlophoz – rögzítjük a koordinátarendszert, és ezt rajzban is megjelenítjük (a grafikon függőleges tengelyének 0 pontja mellé megrajzoljuk a fát, házat, stb.) Ezután azonnal kijelöljük a tengelyen a pozitív és negatív mozgásirányokat. Gimnáziumban nem nehéz, de feltétlenül gyakorolandó feladat ugyanazon mozgást több különböző (de egyformán nyugvó) rendszerben ábrázolni. (A diákoknak azt kell elképzelniük, hogy mi változik, ha egy mozgás adott grafikonját egy másik vonatkoztatási rendszerből szemléljük. Két különböző, de nyugvó viszonyítási pontból nézve változik a test kezdeti helyzete, és ebből adódóan az origótól mért pillanatnyi távolsága, de sebessége változatlan

marad.) A mozgás grafikonjának origó-függését a számítógépes programmal megoldott feladatokkal gyakoroltathatjuk.

3. A mozgás értelmezése mozgó vonatkoztatási rendszerben már a középiskolában is nehéz feladat. Ez tanulóink többségénél már az egyenes vonalban egyenletesen mozgó vonatkoztatási rendszer esetén is problémát jelent, annak ellenére, hogy a diákoknak a mozgó viszonyítási rendszerre vonatkozóan van közvetlen tapasztalata. Általában könnyű felidézni azt a kisgyerekkori meglepő élményt, hogy a vonat ablakán kinézve a sín menti fák, házak a vonathoz képest „hátrafelé futnak”. Azt is tapasztalták már, hogy az autópályán egymás mellett egy irányban haladó autók egymáshoz képest meglepően lassan mozognak, de irreálisan gyorsnak tűnnek szembeforgalomban. A mozgó viszonyítási rendszerben a relatív sebességérzékelésünk azonban csalóka. Ezt igazolja az előzéses közlekedési balesetek nagy száma is. Az előzésbe kezdő kocsit vezetője ugyanis gyakran nem tudja jól megbecsülni az előzni kívánt és a szembe közlekedő autók sebességét, és így a biztonságos előzéshez szükséges utat és időtartamot sem. Az előzés problémájának tárgyalása - az előzésbe kezdő autóhoz rögzített mozgó vonatkoztatási rendszerben - rendkívül tanulságos a manőver veszélyességének megértésére.
4. Emellett természetesen számos olyan nehéznek számító fizikafeladat van, melyeknek megoldása mozgó vonatkoztatási rendszerben egyszerűbb, áttekinthetőbb, mint nyugvóban. A mozgások mozgó vonatkoztatási rendszerben történő grafikus elemzése a tehetséges és érdeklődő középiskolai diákok számára szemléletformáló. Mivel a rendelkezésre álló idő kevés, e probléma megoldásában is hasznos segítséget jelent a számítógépes mozgás-szimuláció és a szimulált mozgások grafikus megjelenítése. A számítógép segítségével a diákok a legkülönbözőbb mozgásokat szimulálhatják, azaz a képernyőn animált formában és grafikus formában is megjeleníthetik. Így nagyon idő-hatékonyan közvetlen tapasztalatokat szerezhetnek arról, hogy a mozgó test paramétereinek, a mozgás kezdőfeltételeinek, illetve a vonatkoztatási rendszer sebességének a változtatása milyen módon jelenik meg a grafikus ábrázolásban.

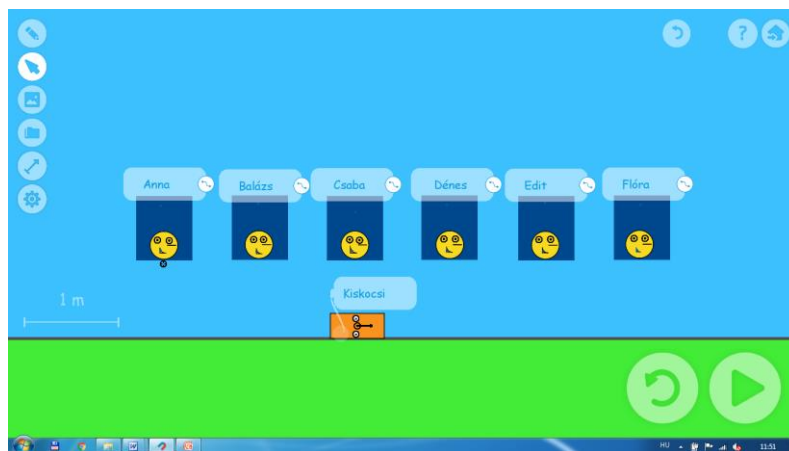
A fent ismertetett problémák kezelésére létrehoztam egy olyan szimuláció-sorozatot, amely könnyen és egyszerűen használható a középiskolai oktatásban, és lépésről lépésre végigvezeti a diákokat a vonatkoztatási rendszerek problémáján (az egyszerűbbtől kezdve az emelt szintig), ezzel

segítve a kísérletező önálló megértést. Bár a program lehetővé tenné az itt feldolgozottnál bonyolultabb esetek vizsgálatát is, a tárgyalást a középiskolai követelményeknek megfelelően kizárólag a nem gyorsuló rendszerekre korlátoztam. A hely szűkossége miatt a szimuláció-sorozat egyes részei az A Függelékben találhatóak, itt csak néhány fontosabb részét emelem ki. Az általam létrehozott szimulációk megtalálhatóak egy mindenki számára hozzáférhető Google-drive mappában [4.4] és onnan ingyenesen letölthetőek.

### 4.2.3. Az origó szerepének vizsgálata

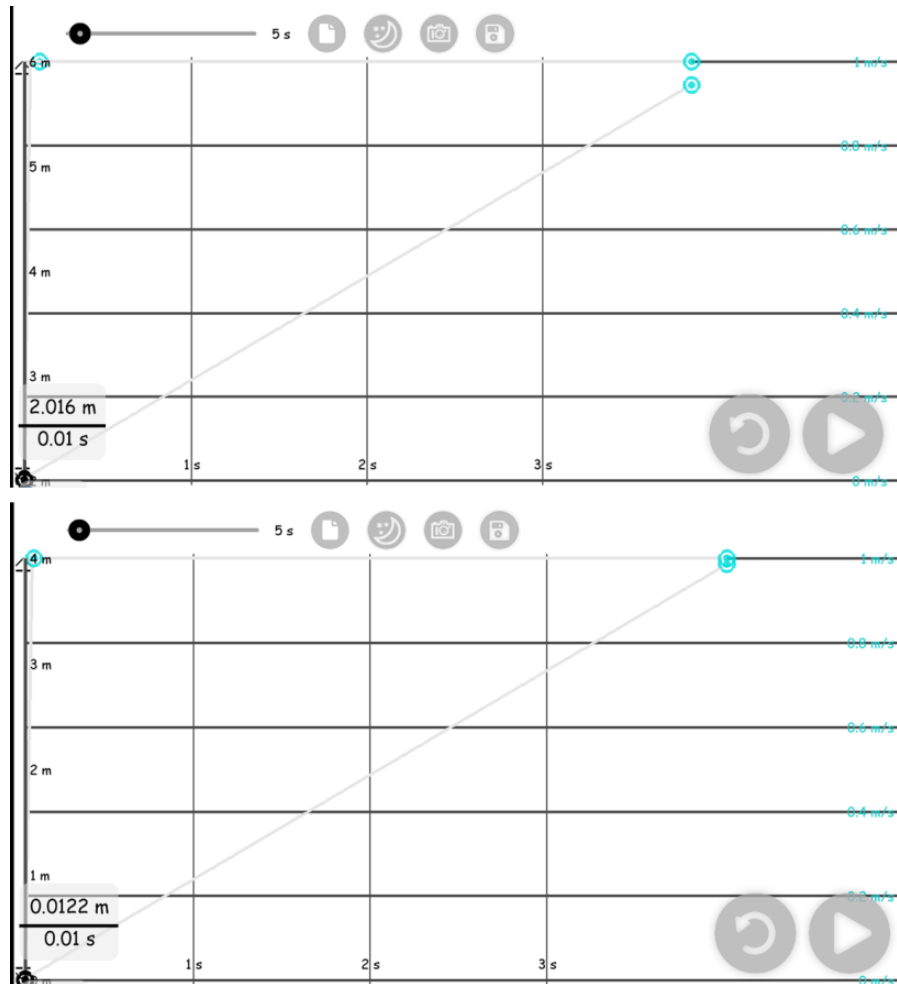
A grafikus ábrázolás tanításának legelején, már az egyenes vonalú egyenletes mozgás tárgyalásakor érdemes egy kis időt eltölteni az origó szerepének vizsgálatával. Erre azért van szükség, mert a középiskolás diákok többségében olyan téves kép él a hely-idő grafikonokkal kapcsolatban, hogy az mindenképpen át kell menjen a koordinátarendszer origóján. A tehetséges diákoknak persze nem okoz gondot az, hogy elképzeljék, mi történik, ha a test nem az origóból indul, azonban az átlagos képességű diákoknak nem árt megmutatni, hogy mi történik a test mozgás-grafikonjaival, ha annak mozgását különböző pontokból szemléljük.

A vizsgálandó szimuláció, amely a „reframe1” nevet viseli, egy egyenletes 1m/s sebességgel jobbra mozgó autót mutat, amelyet több ember is figyel. Az egyszerűség kedvéért az autót egy téglalappal ábrázoljuk. Az emberek egymástól való vízszintes távolsága 1 méter, amit a program mérőeszközével lehet (de nem feltétlenül szükséges) ellenőrizni (4.1. ábra). Feladat, hogy az autó mozgásának a különböző megfigyelők viszonyítási rendszeréből felvett út-idő és sebesség-idő grafikonjait elemezzük.



4.1. ábra. Szimuláció az egyenletes mozgás vizsgálatára különböző álló vonatkoztatási rendszerekből.

A megoldáshoz a számítógépes program vonatkoztatási rendszerét rendre a képernyőn látható „megfigyelőkhöz” állítjuk és a kísérletet párszor megismételve kirajzoltatjuk az autó különböző vonatkoztatási rendszerekben adódó elmozdulás-idő és sebesség-idő grafikonjait. A 4.2. ábra két ilyen grafikont mutat, melyeknek összehasonlítása hasznos és tanulságos:



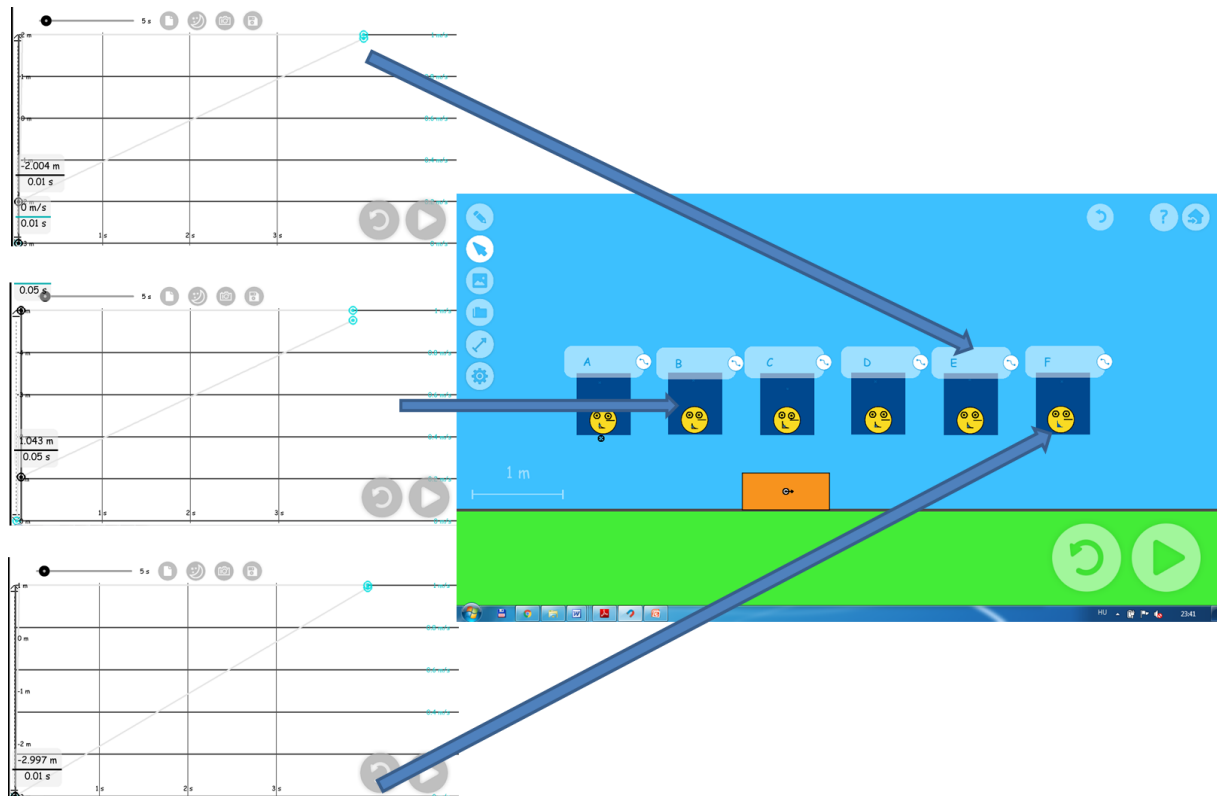
4.2. ábra. „Reframe1” szimuláció: a kiskocsi mozgásának grafikonjai Anna (fent) és Csaba (lent) szemszögéből. A kezdeti pozíciók rendre  $x_0=+2\text{m}$  és  $x_0=0\text{m}$ .

Az ábrán látható két grafikon felületes szemlélő számára teljesen ugyanolyan. Valójában a két  $x-t$  grafikonnak a meredeksége ugyanaz, de különbözik a mozgó test kezdeti pozíciója (azaz a tengelymetszet). A program ugyanis a grafikonok optimális helykihasználása miatt nem a ferde egyenes fel/le történő eltolásával ábrázol, hanem az ábrázolt skálatartomány eltolásával, ami ebben az esetben nem túl hasznos. (Erre feltétlenül fel kell hívjuk a diákok figyelmét, ugyanakkor érdemes táblán rajzolt grafikkal megmutatni, hogy ha ugyanabban a koordináta-rendszerben a két mozgás grafikonját egyszerre ábrázoljuk, a két párhuzamos egyenes egymáshoz képest eltolt helyzetű lesz.)

A 4.2. ábrán látható két hely-idő grafikon meredeksége, azaz a mozgások sebessége azonos. Ez a grafikonokról leolvasott elmozdulás- és időkoordináták hányadosát kiszámítva könnyen

igazolható. Még egyszerűbb azonban, ha a mozgások sebesség – idő grafikonjait vizsgáljuk. A sebesség állandóságát jelzi, hogy a  $v_x$ -t grafikon vízszintes egyenes. Konkrét példánkban a sebesség állandó értéke (a képernyő jobb oldalán található kék skáláról leolvastva) mindkét esetben  $1 \frac{m}{s}$ .

A diákokban így tudatosíthatjuk az origó helyzetének hatását a mozgás grafikonjaira ( $v_x$ -t grafikon nem változik,  $x$ -t grafikon kezdeti értéke más, de meredeksége ugyanaz). Ezután ellenőrző egyéni feladat következik. Megadjuk a korábbi példánkban megnevezett, de még nem szereplő 3 megfigyelő nézőpontjából adódó 3 újabb grafikon, és a diákok feladata (házi feladatként), hogy a grafikonok elemzésével meghatározzák, melyik grafikon melyik megfigyelő vonatkoztatási rendszerében ábrázolja az autó mozgását. A megoldást a 4.3. ábra szemlélteti.



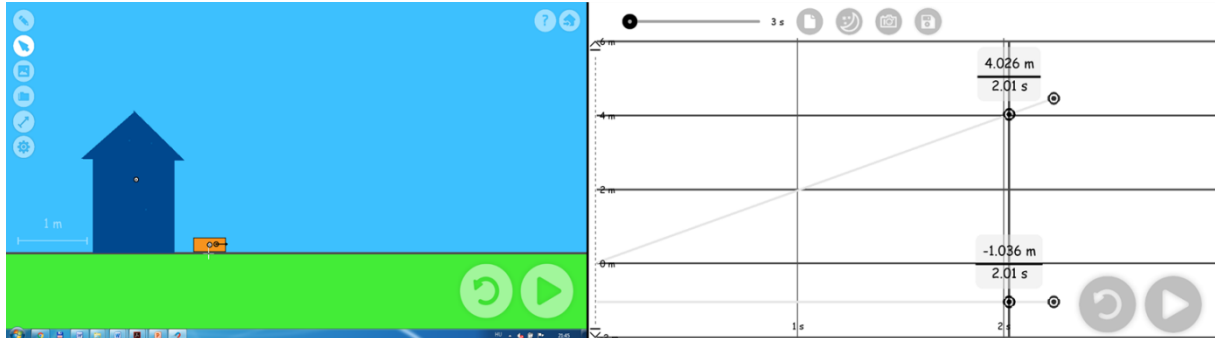
4.3. ábra. Házi feladat és annak megoldása az „reframe1” szimulációval.

A szimuláció-sorozat következő lépése a sebesség vektor jellegének hangsúlyozása. A negatív előjelű sebességet vizsgáló („reframe2”) szimuláció leírása megtalálható az A Függelékben.

#### 4.2.4. Áttérés állóból egyenletesen mozgó vonatkoztatási rendszerbe

A vonatkoztatási rendszerek tárgyalásának következő lépése az egyenletesen mozgó rendszerbe való áttérés vizsgálata. A „reframe3” szimuláció egy házat és egy egyenletes sebességgel

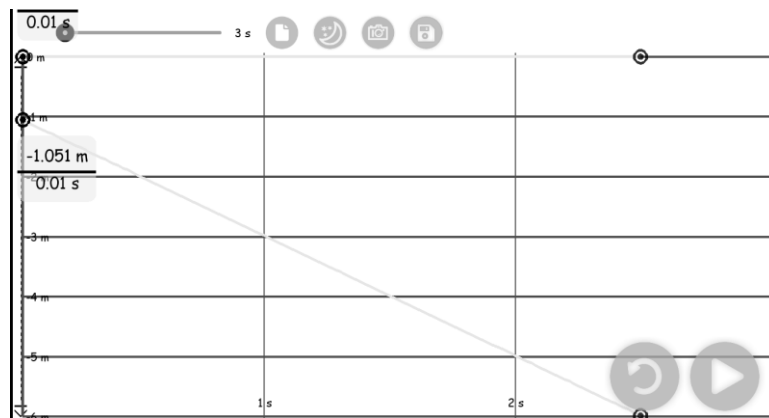
( $2 \frac{m}{s}$ ) jobbra mozgó autót mutat, amit ismét egy téglalappal szemléltetünk (4.4. ábra). A feladat a testek grafikonjainak vizsgálata először álló, majd az autóval együtt mozgó vonatkoztatási rendszerből nézve.



4.4. ábra. „Reframe3” szimuláció kezdőképernyője (bal). A ház és az autó hely-idő grafikonja álló vonatkoztatási rendszerből nézve.

A grafikonról leolvasható, hogy a ház az  $x_0 = -1\text{m}$  helyen áll (grafikonja vízszintes egyenes), az autó pedig egyenletesen mozog  $v = +2 \frac{m}{s}$  sebességgel jobbra (grafikonja pozitív meredekségű egyenes).

Rögzítsük most az origót az autóhoz, és a szimulációt újraindítva vizsgáljuk meg, hogyan változnak a testek hely-idő grafikonjai (4.5. ábra).



4.5. ábra. A ház és a láda hely-idő grafikonja a ládához rögzített vonatkoztatási rendszerből nézve.

Az új grafikonokról leolvasható, hogy az autó a saját vonatkoztatási rendszerében áll (grafikonja vízszintes egyenes), a ház pedig hátrafelé (az autóhoz képest látszólag balra, azaz negatív irányban) mozog, sebessége  $v_{\text{ház}} = -2 \frac{m}{s}$ .

Az „reframe3” szimuláció vizsgálata azért fontos, mert összeköthető a diákok mindennapi tapasztalatával: mozgó autóból nézve a földön álló tárgyak (pl. ház, fa) úgy tűnnek, mintha visszafelé



mozognának. Ha a diákoknak sikerül ezt az egyszerű kísérletet hozzákapcsolni a tapasztalathoz, az egyrészt felidézi és megmagyarázza a korábbi személyes élményüket, másrészt a program működésének hitelességét is erősíti bennük (hiszen egy általuk ismert tapasztalattal tudják összevetni). Ez pedig a későbbi, bonyolultabb szimulációkra nézve fontos: ha a program hitelességét egyszerű kísérleteken leellenőriztük, akkor az összetettebb kísérletek eredményét is könnyebben fogadjuk el mérési eredménynek.

#### 4.2.5. Relatív sebesség egymással egy irányban mozgó autók esetén

Az előző szimuláció során megvizsgáltuk, hogy miként látjuk egyenletesen mozgó vonatkoztatási rendszerből (pl. autóból) az álló tárgyakat. Sokkal összetettebb kérdés azonban az, hogy hogyan érzékeljük más autók mozgását mozgó autóból szemlélve.

Amikor a relatív sebesség fogalmát tanítjuk, legtöbbször arra kérjük a diákokat, „képzeld el”, vagy emlékezzenek vissza, mit érzékelnek, amikor mozgó autóban ülnek. Nyilvánvalóan részben jogos a diákok korábbi tapasztalataira építeni, azonban mint korábban említettem, a relatív sebesség kvantitatív érzékelése nehéz feladat az emberi agy számára. Sokkal hatásosabb hát, ha egyben meg is erősítjük, számítógépes szimulációval alátámasztjuk [4.5] a korábbi tapasztalataikat. Erre kínálnak gyors és hatékony megoldást a FIZIKA programmal készült szimulációk.

A „relspeed1” szimulációban (4.6. ábra) azonos irányban, de különböző nagyságú sebességgel mozgó autókat „modellizzük”. Az autókat itt is egyszerű téglatestek helyettesítik, amiket a számítógépes program állandó, előre beállított nagyságú sebességgel mozgat.

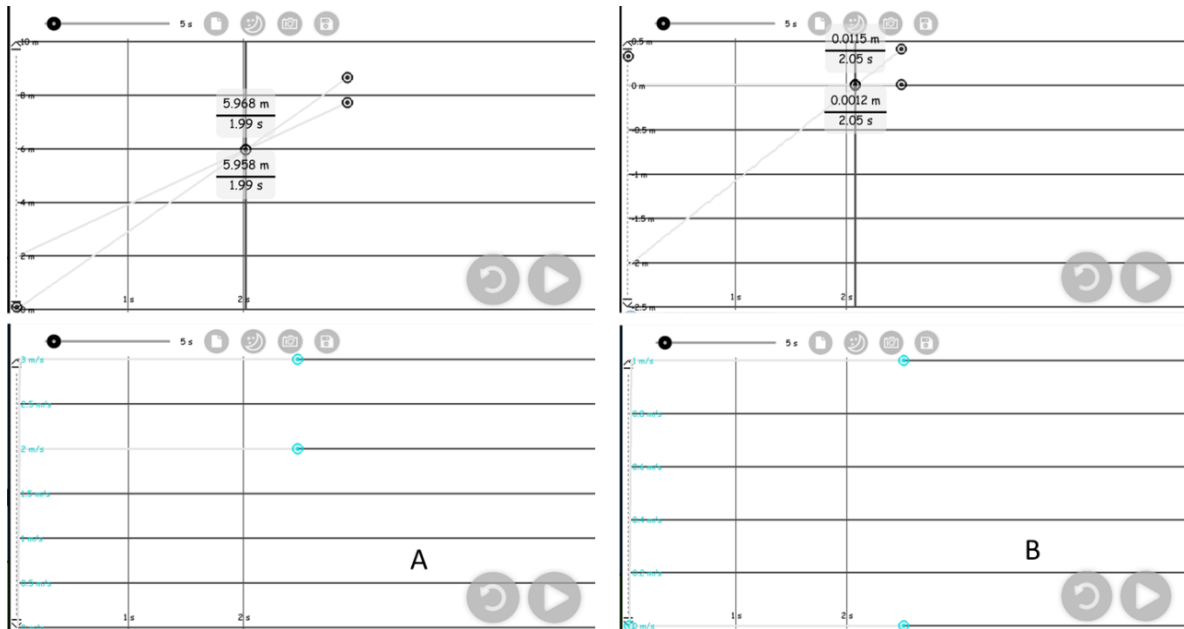


4.6. ábra. A „Relspeed1” szimuláció kezdőképernyője. A gyorsabb autó (A) megelőzi a 2m-rel előrébből induló lassabb autót (B)

A szimuláció során a testek mozgásának grafikonjait először álló vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk. Az origót alapbeállításban a gyorsabb autó (A) alá, a talajra rögzítettük. A gyorsabb autó sebessége  $v_A = +3 \frac{m}{s}$ , míg a lassabb autóé  $v_B = +2 \frac{m}{s}$ , az autók közötti kezdeti távolság 2m.

Ha a szimulációt elindítjuk, a program a testek hely-idő grafikonját rajzolja ki, de a virtuális szenzort sebességmérésre állítva gyorsan kirajzoltathatóak a sebesség-idő grafikonok is. (4.7A ábra)

Ezek után ismételjük meg a szimulációs kísérletet úgy, hogy a viszonyítási rendszer origóját a lassabb autóra (B) helyezzük át. Beszéljük meg a várt eredményt a diákokkal, majd indítsuk el a szimulációt, és vizsgáljuk meg a két autó mozgását mutató elmozdulás-idő és a sebesség-idő grafikonokat! (4.7B ábra)



4.7. ábra. „Relspeed1” szimuláció. Az egy irányban mozgó autók hely-idő (fent) és sebesség-idő (lent) grafikonja nyugvó (A) és lassabb autóhoz rögzített (B) vonatkoztatási rendszerből.

Mindkét esetben a fenti grafikonról leolvasható, hogy a testek az indulástól számított 2s múlva találkoznak. (Ezt a hely-idő grafikonok metszéspontjának időkoordinátájából olvashatjuk le.)

A „B” grafikonokon szépen látszik, hogy a B test a saját magához rögzített vonatkoztatási rendszerben végig az origóban marad, hely-idő és sebesség-idő grafikonja is konstans 0. Az A autó a program elindításának pillanatában -2 méterre van a B jelű autótól, azaz tőle balra, negatív távolságban található. Az A kocsit egyenletesen haladva közelít az origóhoz (B kocsihoz), sebessége a B kocsihoz viszonyítva kisebb ( $u_A = 1 \frac{m}{s}$ ), mint a talajhoz rögzített koordinátarendszer esetén.

Ez természetesen megfelel annak az elvárásunknak, hogy az azonos irányban mozgó autók esetén a relatív sebesség a sebességek különbsége, és középszinten ennyi következtetés elég is.

Tehetségesebb diákok esetén kimondhatjuk azt is, hogy ha álló vonatkoztatási rendszerből egyenletesen mozgóra térünk át, akkor egy adott test új rendszerben mért sebessége úgy számolható, hogy az eredeti (álló rendszerben mért) sebességből kivonjuk az új vonatkoztatási rendszerünk álló rendszerben mért sebességét:

$$\underline{u}_{test} = \underline{v}_{test} - \underline{v}_{rendszer}, \quad (4.1)$$

ahol  $\underline{v}$  az álló rendszerben,  $\underline{u}$  pedig az egyenletesen mozgó rendszerben mért sebességvektorokat jelölik.

Mivel nyugvó rendszerben az autók sebessége  $v_A = +3 \frac{m}{s}$ ,  $v_B = +2 \frac{m}{s}$  volt, ezért ha B autóhoz rögzítjük a rendszert, akkor

$$u_A = v_A - v_B = 3 \frac{m}{s} - 2 \frac{m}{s} = 1 \frac{m}{s} \quad (4.2)$$

A képlet természetesen működik akkor is, ha az eredetileg álló tárgyak sebességét szeretnénk kiszámolni. A korábban tárgyalt „reframe3” szimuláció adataival számolva a ház sebessége a mozgó ládához viszonyítva

$$u_{ház} = v_{ház} - v_{autó} = 0 \frac{m}{s} - 2 \frac{m}{s} = -2 \frac{m}{s}, \quad (4.3)$$

ahogy azt a szimulációban is láttuk.

Hasonlóan tanulságos azt is megmutatni, hogy ha az A testhez rögzítjük a vonatkoztatási rendszert, akkor a B test relatív sebessége

$$u_B = v_B - v_A = 2 \frac{m}{s} - 3 \frac{m}{s} = -1 \frac{m}{s} \quad (4.4)$$

lesz, azaz a test a másik autóból nézve a negatív irány fele (balra) fog mozogni. Ezt az eredményt a szimulációval is ellenőrizhetjük.

Következő lépésként az egymással szemben haladó autók relatív sebességét elemezzük. A módszer teljesen hasonló az egy irányban haladó autókéhoz, a szimuláció („relspeed2”) részletes leírását és elemzését az A függelék tartalmazza.

#### 4.2.6. Mozgó vonatkoztatási rendszerből könnyen megoldható feladatok

A FIZIKA program által kínált lehetőségek túlmutatnak a fentebb tárgyalt középszintű tananyagban: bizonyos mozgások vizsgálata a tehetséggondozásban használható sikerrel. A következőkben néhány olyan szimulációt mutatok be, melyeken keresztül diákjainknak megmutathatjuk, hogy egyes feladatokat könnyebb egyenletesen mozgó vonatkoztatási rendszerből nézve megoldani, mint állóból.

##### A) Kamion előzése személyautóval

Alapfeladat: Egy autó  $90 \frac{km}{h}$  sebességgel haladva utolér egy  $80 \frac{km}{h}$  sebességgel haladó 18m

hosszú kamiont, amit úgy előz meg, hogy a KRESZ szabályait betartva végig  $90 \frac{km}{h}$  sebességgel halad és az előzés kezdetekor 15m-rel a kamion mögül indul, valamint visszasoroláskor is ekkora biztonsági távolságot tart a két gépjármű között. Mennyi idő alatt tudja megelőzni a kamiont?

##### Megoldás elméleti számolással

Az előzési időt egyszerűen megkaphatjuk, ha a kamionhoz rögzített vonatkoztatási rendszerből írjuk le az eseményeket. Ekkor az autó kamionhoz viszonyított sebessége (SI mértékegységbe váltva) körülbelül  $25 \frac{m}{s} - 22 \frac{m}{s} = 3 \frac{m}{s}$ , és ezzel kell megtennie a 48m-es távolságot (kamion hossza, és a biztonságos 15m távolság előzés előtt és után). Innen gyorsan adódik, hogy  $t = \frac{48}{3} = 16s$ . Ezalatt az autó  $s_1 = v_{autó} \cdot t = 25 \cdot 16 = 400m$  távolságot tesz meg.

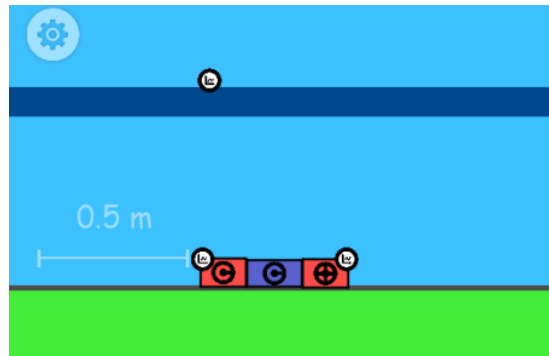
Az elméleti számolásokat célszerű ellenőrizni az előzést modellező szimulációval is, hogy a grafikonok kirajzolásával szemléletesen is alátámasszuk az eddig leírtakat.

##### Számolás ellenőrzése szimulációval

Az „overtaking” szimulációban a fent leírt előzéses feladatot modelleztem. A programban lehetetlen az eredeti méretekben megrajzolni a kamiont, ezért modelleznünk kell a járműveket. A szimuláció bemutatása előtt a diákokkal közösen át kell gondolni, hogy amennyiben a testek méretét 100-ad részére szeretnénk csökkenteni, mit kell még megfelelően átskálázni ahhoz, hogy valóság-hű modellt kapjunk. Ez középiskolás szinten nem triviális kérdés, hiszen figyelembe kell venni, hogy milyen mennyiséget szeretnénk valóság-hűnek tartani (jelen esetben ez az idő), és ehhez mit kell még átskálázni. Természetesen az előzés modellezésénél a hosszúság mellett a sebességek 100-ad részére

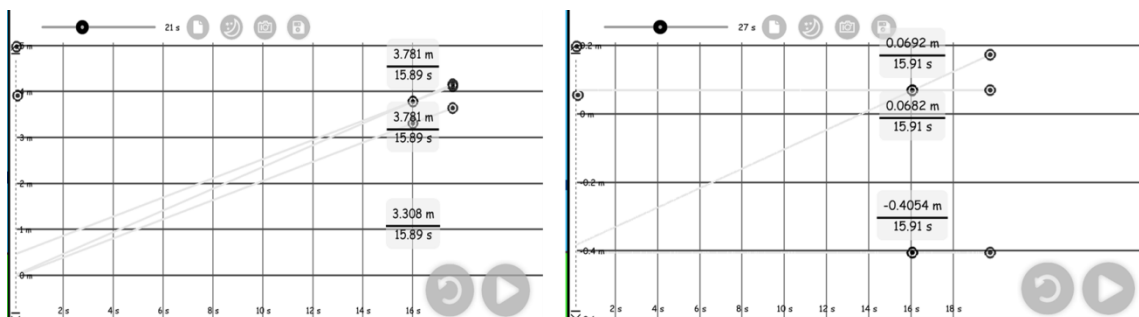
való csökkentésével elérhetjük azt, hogy az idő a valóságban is mért idővel azonos maradjon, hiszen  $t = \frac{s}{v} t$ , ezért ha  $s$  és  $v$  is század részére változik, az idő változatlan marad.

A fent leírt átskálázás miatt a programban megrajzolt kamion (kék téglalap) hossza 18cm, előtte és utána piros 15cm hosszú téglalapok jelzik a biztonságos 15m-es távolságot. Az autó a kamion fölötti sávon mozog, és kb 4cm-es hossza miatt olyan kicsi, hogy a rá rögzített mozgásérzékelő szenzor eltakarja (4.8. ábra).



4.8. ábra. „Overtaking” szimuláció. A kamion (kék téglalap) és biztonságos távolságok (piros téglalapok), valamint az autó modellje.

Az autó  $0,25 \frac{m}{s}$ , a kamion (és a biztonságos távolságot szemléltető piros téglalapok) pedig  $0,22 \frac{m}{s}$  kezdeti sebességgel rendelkeznek, ami 100-ad része a valós sebességüknek. Az autó és az első piros téglalap elejére, valamint a hátsó piros téglalap hátuljára rögzített szenzor méri a testek elmozdulását és grafikusán ábrázolja őket az idő függvényében. Az előzést először álló, majd a kamionhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben vizsgáltuk. Az autó és a kamion hely-idő grafikonjait a 4.9. ábra mutatja:



4.9. ábra. Az előzés x-t grafikonja. A bal oldali grafikon a földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben, a jobb oldali a kamion elejéhez rögzített vonatkoztatási rendszerben mutatja az előzés grafikonjait.

Mindkét grafikonról leolvasható az előzéshez szükséges idő ( $t \approx 16s$ ). Emellett a bal oldali grafikonon látszik az előzéshez szükséges távolság is, azonban itt figyelni kell arra, hogy a távolság a valós érték 100-ad része, így ez a valóságban kb.  $380m \approx 400m$ . A jobb oldali grafikonról az autó relatív sebessége olvasható le, ami a ferde egyenes meredeksége, jó közelítéssel valóban  $0,03 \frac{m}{s}$  (a valódi relatív sebesség ennek 100-szorosa,  $3 \frac{m}{s}$ ).

## B) Vízbe esett kalap

Alapfeladat: Egy halász lefelé evez a folyón. A híd alatt áthaladva vízbe esik a kalapja, de ezt csak fél óra múlva veszi észre. Ekkor visszafordul, és a hídtól 2 km-rel lejjebb éri utol a kalapot. Mekkora a folyó sebessége, ha a halász a folyón felfelé és lefelé haladva egyformán evez?

### Megoldás elméleti számolással

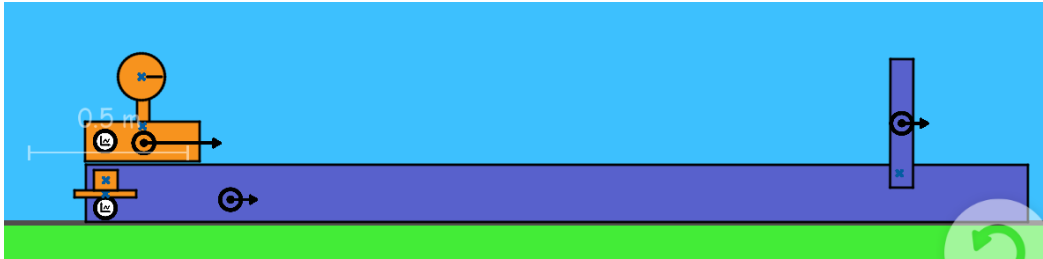
Ez a jól ismert feladat tipikus példája annak, hogy egy problémát meg lehet oldani hosszas számolással és elegánsan is. Ha a halász és a kalap mozgását a partról, azaz álló vonatkoztatási rendszerből nézzük, akkor hosszas számolás után (több kiküszöbölendő paraméterrel megküzdve) megkapjuk, hogy a folyó sebessége  $2 \frac{km}{h}$ . Ha azonban a vízbe esett kalaphoz rögzítjük a vonatkoztatási rendszerünket, jóval egyszerűbbé válik a feladat. A halász ez esetben folyón lefelé és fölfelé is ugyanazzal a sebességgel közlekedik, tehát ha fél órán keresztül távolodott, akkor fél órán keresztül közeledik a kalaphoz (mivel az nem mozdult el az origóból), tehát azonnal látszik, hogy a találkozásig 1 óra telik el, így a folyó sebessége egyenletrendszer nélkül is meghatározható:  $2 \frac{km}{h}$ .

### A vonatkoztatási rendszer megválasztásának fontossága szimulációval demonstrálva

Ahhoz, hogy a fenti gondolatmenetet a diákok is magukévá tegyék, érdemes megvizsgálni egy hasonló esetet feldolgozó szituációt, ami a grafikus szemléltetésen keresztül látványosan alátámasztja a második megoldás gondolatmenetét. Ebben az esetben a szimulációval nem modelleztem (azaz nem figyeltem a feladatban megadott értékek betartására, így a folyó sebessége ezúttal nem  $2 \text{ km/h}$  lesz), csupán az alaphelyzet elemzésének bonyolultságát, illetve egyszerűségét mutattam be álló, majd mozgó vonatkoztatási rendszerből vizsgálva a testek grafikonjait.

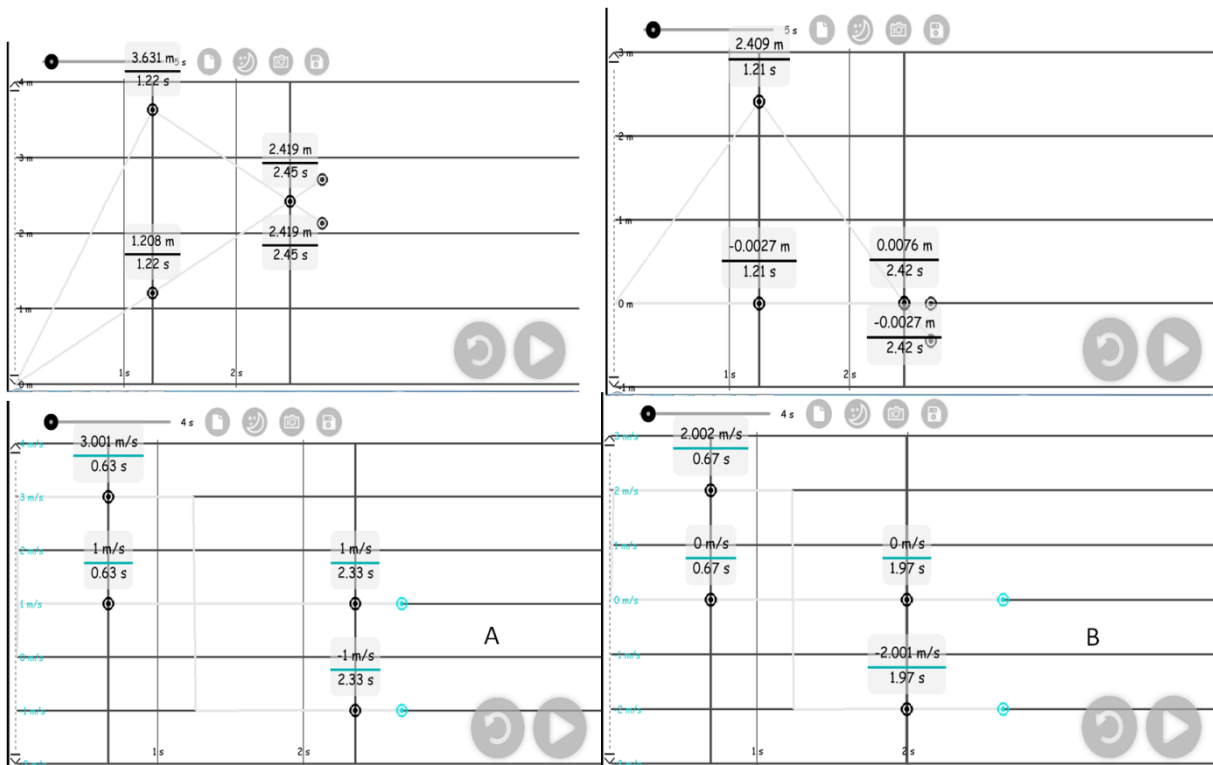
A „folyó” szimulációban (4.10. ábra) a csónakot egy láda jelképezi, a folyót pedig egy hosszú vízszintes téglalap. A téglalap végére ütköző van rögzítve, amelyről a csónak tökéletesen rugalmasan visszapattan. A csónak tömegét a folyó+ütköző rendszerhez képest elhanyagolhatónak állítottam be,

így el lehetett érni azt, hogy álló folyó esetén a csónak ütközés utáni sebessége pont az ütközés előtti ellentettje legyen, és mozgó folyó esetén is úgy működjön a szimuláció, mintha a halász pillanatszerűen visszafordulna egy adott pillanatban. Bár a diákok ekkor még nem tanultak ütközéseket, azt könnyen megértik, hogy egy pillanatszerű visszafordulás olyan, mint egy falról való visszapattanás. (Az ütköző pontos helyének megválasztása most nem volt fontos, mivel nem modellezni, csak demonstrálni szerettem volna a mozgást.)



4.10. ábra. A „folyó” szimuláció kezdőképernyője. A narancssárga láda a csónakot, a kék, hosszú téglalap a folyót jelképezi, benne a vízbe esett kalappal.

A csónak és a kalap mozgásának grafikonjait először álló, majd a kalaphoz rögzített vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk, így a 4.11. ábrán látható grafikonokat kapjuk:



4.11. ábra. A csónak és a kalap hely-idő (fent) és sebesség-idő (lent) grafikonjai álló (A), majd a kalaphoz rögzített (B) vonatkoztatási rendszerben.

Ennek a szimulációnak a bemutatása megelőzi a dinamika tananyagot, ezért fontos, hogy a sebességek vizsgálatával belássuk, hogy a szimuláció jól modellezi a csónak és folyó problémáját. A

„folyó” szimulációban a csónak földhöz viszonyított kezdeti sebessége  $3\frac{m}{s}$ , a folyóé  $1\frac{m}{s}$  (bal alsó grafikon), azaz a csónak a folyóhoz képest kezdetben  $2\frac{m}{s}$  sebességgel halad (jobb alsó grafikon). A szimuláció akkor működik jól, ha a csónak az ütközés után a folyóhoz képest ismét  $2\frac{m}{s}$  sebességgel halad, de most az ellenkező irányban, azaz balra. Ekkor tehát a csónak földhöz viszonyított sebessége  $-1\frac{m}{s}$  kell legyen. Az, hogy ez valóban így van, a testek sebesség-idő grafikonjainak második szakaszáról jól leolvasható.

Ezek után térjünk át a hely-idő grafikonok vizsgálatára. Az alapfeladat álló koordinátarendszertől való megoldásának nehézsége azonnal látszik, ha a 4.11. ábra bal felső grafikonján megnézzük a testek hely-idő grafikonjait álló koordinátarendszertől nézve. A kalap (vagy folyó) hely-idő grafikonja állandó meredekségű egyenes, hiszen végig azonos sebességgel mozog. A halász mozgása már jóval összetettebb: a mozgás első szakaszának grafikonja meredekebb egyenes (miközben pozitív irányban mozog), második szakaszának grafikonja pedig kevésbé meredek egyenes (negatív irányban való mozgással). Álló vonatkoztatási rendszerben nem is látszik első ránézésre a grafikonról, hogy a halász mozgásának két szakasza egyenlő időtartamú. Ezt a megfelelő pontok (halász visszafordulása, és a találkozás) időkoordinátáinak leolvasásával mutathatjuk meg.

A hely-idő grafikonok látványosan egyszerűbbek lesznek a kalaphoz rögzített vonatkoztatási rendszer esetén (jobb felső grafikon). A hely-idő grafikonon azonnal látszik a távolodás és közeledés szimmetriája (az azonos időtartamok le is olvashatóak).

Azzal, hogy ezt a feladatot nem csak elméletileg oldjuk meg (kiszámoljuk), hanem szimulációval is modellezzük, olyan visszacsatolást tudunk adni a diákoknak, ami a grafikus ábrázoláson keresztül vizuálisan is megerősíti őket abban, hogy bizonyos feladatok esetén a feladat megoldása jóval egyszerűbbé válik mozgó vonatkoztatási rendszerben.

### C) Egyenletesen haladó test utolérése álló helyzetből induló gyorsuló mozgással

Alapfeladat: Egy gyalogos egyenletes  $1\frac{m}{s}$  sebességgel halad. Mögötte 1m távolságból, álló helyzetből indul egy biciklista,  $1\frac{m}{s^2}$  gyorsulással. Mennyi idő múlva és mekkora út megtétele után éri utol?



Megoldás földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerből

Az egyenletesen haladó test a találkozásig  $s_1 = v_1 \cdot t$  utat tesz meg, ahol  $t$  a találkozásig eltelt idő, a gyorsuló test pedig  $s_2 = \frac{a}{2} \cdot t^2$  távolságra jut. Mivel a biciklista 1m-rel hátrébből indult, felírhatjuk a következő egyenletet:

$$s_1 + 1 = s_2, \quad (4.5)$$

ahová a fenti képleteket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$v_1 \cdot t + 1 = \frac{a}{2} \cdot t^2, \quad (4.6)$$

azaz 
$$t + 1 = \frac{1}{2} \cdot t^2. \quad (4.7)$$

Ez  $t$ -re nézve egy másodfokú egyenlet, amit 10. osztályban már könnyedén megoldanak a diákok ( $t = 2,73s$ ;  $s_1 = 2,73m$ ;  $s_2 = 3,73m$ ).

Kilencedik évfolyamon azonban a diákjainknak nincsenek még ilyen matematikai eszközeik, tehát hiába jutnának el a másodfokú egyenletig, nem tudnák azt megoldani. Ezért kilencedik osztályban ezen a ponton más megoldási módszert kell keressünk: olyat, amihez nem szükséges a másodfokú megoldóképlet ismerete.

Megoldás az egyenletesen mozgó testhez rögzített vonatkoztatási rendszerből (szimulációval ellenőrizve)

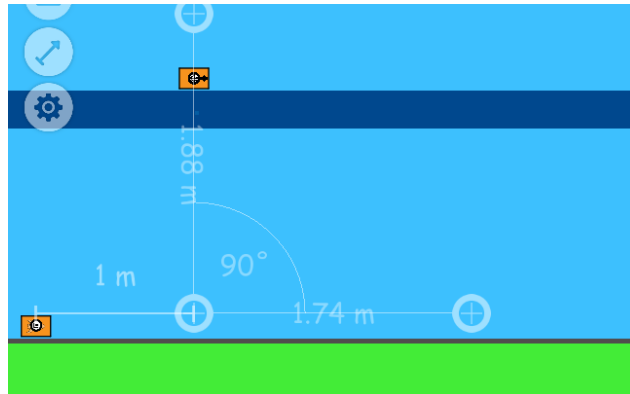
Nézzük a gyorsuló test mozgását a gyalogshoz rögzített vonatkoztatási rendszerből. A biciklista kezdősebességét a korábban levezetett vektoriális egyenlet segítségével kaphatjuk meg ( $u$  a mozgó vonatkoztatási rendszerben lévő sebesség,  $v$ -k pedig az álló vonatkoztatási rendszerben mért sebességek):

$$\underline{u}_{0,biciklis} = \underline{v}_{0,biciklis} - \underline{v}_{0,gyalogos} = 0 - 1 = -1 \frac{m}{s}. \quad (4.8)$$

A gyalogos szemszögéből nézve tehát úgy látszik, mintha a biciklis kezdetben  $1 \frac{m}{s}$ -os sebességgel távolodna tőle, azaz ha feltételezzük, hogy a pozitív haladási irány jobbra van, akkor a biciklista a megfigyelés kezdetén balra mozog, de közben folyamatosan jobbra gyorsul. Ez a diákok

számára nehéz gondolatmenet, ezért itt újra fontos szerepe van a szimulációnak: ellenőrizzük, hogy helyes-e az elméleti következtetésünk.

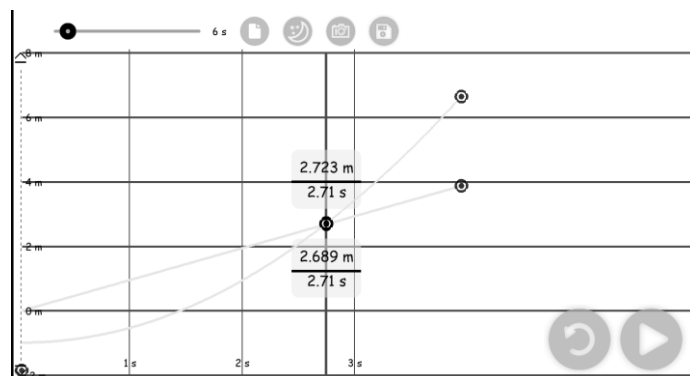
Az „utoleres” szimulációban (4.12. ábra) a gyalogost a felső, a biciklist az alsó téglalap jelképezi.



4.12. ábra. Az „utoleres” szimuláció kezdőképernyője. A felső téglalap az egyenletes sebességgel mozgó gyalogost, az alsó téglalap az egyenletesen gyorsuló biciklist modellezi.

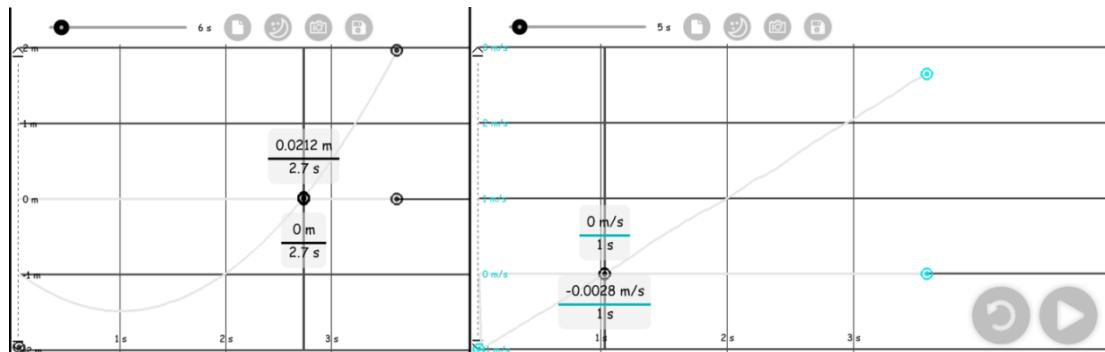
A felső téglalap (gyalogos) súrlódásmentesen, egyenletes sebességgel mozog a kék (rögzített) téglalapon, előre beállított kezdősebessége  $1 \frac{m}{s}$ . Az alsó téglalap (biciklis) 1m-rel hátrébról indul, kezdősebessége nincs, de a programban megrajzolható - külső erőt jelölő - „rakéta” segítségével gyorsulása  $1 \frac{m}{s^2}$  értékre van beállítva.

Ha a földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerből felrajzoltatjuk a két test mozgásának hely-idő grafikonját (4.13. ábra), láthatjuk, hogy a felső test egyenletes sebességgel mozog, grafikonja ferde egyenes, az alsó test pedig 1m-rel hátrébról indul és egyenletesen gyorsul, grafikonja félpárola. A grafikonok metszéspontjának megkeresésével meg is található a találkozás időpontja, ami egyezik a másodfokú egyenlet korábban zárójelben megadott megoldásával.



4.13. ábra. „Utoleres” szimuláció. A gyalogos és biciklis hely-idő grafikonja álló vonatkoztatási rendszerből nézve.

Ezután tegyük át az origót a felső testre (a gyalogosra), majd indítsuk újra a szimulációt. Az új vonatkoztatási rendszerben a biciklis hely-idő és sebesség-idő grafikonja a következő lesz (4.14. ábra):



4.14. ábra. „Utoleres” szimuláció. A biciklis hely-idő (bal) és sebesség-idő (jobb) grafikonja a gyalogoshoz rögzített vonatkoztatási rendszerből nézve.

A szimuláció eredeti célja az volt, hogy ellenőrizzük azt a következtetésünket, hogy a biciklis a gyalogoshoz rögzített vonatkoztatási rendszerben  $-1 \frac{m}{s}$  kezdősebességgel indul. Ez a jobb oldali grafikonról leolvasható.

A diákokat ezen a ponton meg kell kérdezni, hogy milyen mozgás grafikonjára hasonlítanak a 4.14. ábrán látott grafikonok. Saját diákjaim közül mindig volt valaki, aki kitalálta, hogy a biciklis mozgása olyan, mint a függőleges fölfelé hajtás mozgása, csak itt most nem függőleges, hanem vízszintes mozgásról van szó, és a gyorsulás sem  $g$ , hanem a feladatban megadott  $1 \frac{m}{s^2}$ .

Ha az analógiára rátaláltak, akkor már a számolás is könnyen megy. Ugyanúgy, mint fölfelé hajtás esetén, itt is ketté lehet bontani a mozgást. Az első szakaszban a biciklis távolodik, amíg a gyalogoshoz viszonyított sebessége 0 nem lesz. Az ehhez szükséges idő  $t_1 = \frac{-u_1}{a} = 1s$ , ami szintén

leolvasható és ellenőrizhető a 4.14. ábra jobb oldali grafikonjáról. Az első szakasz végéig a biciklis

$x_1 = \frac{a}{2} t_1^2 + u_0 t_1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 = -0,5m$  utat tett meg a gyalogoshoz képest (a negatív előjel a balra való elmozdulást mutatja), azaz  $1,5m$  távolságban van a gyalogostól. A második szakaszban a biciklis a gyalogoshoz képest 0 sebességről gyorsulva megteszi a köztük lévő  $x_2 = 1,5m$  távolságot. Az ehhez

szükséges idő  $t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot x_2}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5}{1}} = 1,73s$ . A biciklis tehát  $t = t_1 + t_2 = 1 + 1,73 = 2,73s$  alatt éri utol

a gyalogost. A biciklist által megtett út esetén figyelniük kell arra, hogy bár a gyalogos szemszögéből

nézve csak 1m-t tett meg a biciklis, közben a gyalogos is elmozdult 2,73 métert, így a biciklis által ténylegesen megtett út 3,73m.

A vonatkoztatási rendszer megfelelő megválasztása ebben az esetben elengedhetetlen ahhoz, hogy diákjaink másodfokú megoldóképlet nélkül is meg tudják oldani a feladatot. A szimuláció további előnye, hogy a függőleges hajítás analógiája által megerősíti az ott tanultakat.

#### **4.2.7. Összefoglalás**

A fent bemutatott szimuláció-sorozat lépésről lépésre vezeti végig a diákokat a vonatkoztatási rendszerek témakörén, ezért alkalmas arra, hogy a tanulók kísérletezve, helyenként önállóan felfedezve sajátítsák el a témakör kritikus pontjait, pl. a relatív sebesség fogalmát.

A Fizika program azonban nem csak az átlagos diák tudásának elmélyítésére alkalmas, hanem ugyanolyan jól használható (pl. bonyolultabb feladatok modellezésén és grafikus elemzésén keresztül) a tehetséggondozásban is. Tizedik osztályos versenyfelkészítő szakkörön a 4.2.6. részben bemutatott szimulációk elemzése sokat segített abban, hogy a diákok meglássák a vonatkoztatási rendszer megválasztásának fontosságát és szépségét egyes versenyfeladatok esetén.

### **4.3. A dinamika kritikus pontjainak tanítása a FIZIKA programmal**

A dinamika tanításának is vannak olyan problémás pontjai, ahol hasznosan alkalmazható a FIZIKA szimulációs program.

A dinamikában való alkalmazhatóságot elsősorban az segíti, hogy a program ki tudja rajzolni az erőket, így jelentős többletet ad az erők tanulmányozásában és bizonyos helyzetekben való elemzésében, hiszen a valódi kísérleteknél lehetetlen megfigyelni a láthatatlan erőket, és egy-egy táblarajznál tanulságosabb és érdekesebb a szimuláció, ahol az erők mennyiségi változásai is jól megfigyelhetők.

A kinematikát érintő oktatási kísérletet 2017-ben kiterjesztettük a dinamika témakörére is. Saját kutatási területem a dinamika témaköre néhány kritikus pontjának feldolgozása volt, így ezen területen is sikerült olyan szimulációkat kidolgozni, amelyek segítik a nehezebb fogalmak megértését (pl. tartóerő, súrlódási erő, körmozgás dinamikája). Ezek hatékonyságát és hasznosságát egy jelenleg előkészítés alatt álló oktatási kísérlet keretében vizsgáljuk majd.

Tanítási tapasztalatom szerint a dinamika témakörében a leggyakrabban előforduló kritikus pontok a következők voltak:

### 1. Vektorok matematikája

Az erő fogalmának egyik legnehezebb pontja az, hogy az erő vektormennyiség. Nem is maga a vektormennyiség elfogadása nehéz - hiszen a diákok is értik, hogy az erőnek iránya is van, nem csak nagysága -, hanem a vektorok matematikája az, ami kihívást jelent. Ez leginkább azért van, mert ebben a témakörben a fizika tantárgy jóval megelőzi a matematikát, ahol a vektorokkal való műveletek csak később szerepelnek a tanmenetben. Ezért a vektorok összeadására célszerű már a kezdetekkor sok példát nézni, hogy a diákok tudása kellően alapos legyen. A rengeteg gyakorláshoz és szemléletes példák bemutatásához jól használható a FIZIKA program.

### 2. Nyomóerő

Az egyik alapvető probléma a nyomóerővel kapcsolatban az, hogy a diákok nagy része abban a hitben él, hogy ez az erő mindig  $F_{ny}=mg$  nagyságú, és a gravitációs erővel ellentétesen, fölfelé mutat. Ez a legtöbb esetben (vízszintes felületen nyugvó testek esetén) így is van, ezért is olyan nehéz eloszlatni ezt a tévképzetet. Bár az egyéb esetek részletes tárgyalása időigényes, mégis fontos elemezni egy-két olyan feladatot, ahol a nyomóerő a ferde felület vagy a függőleges komponenssel rendelkező külső erő miatt nem  $mg$  nagyságú. Ez főként azért fontos, mert később ez abban is segít, hogy a diákok megértsék a súrlódási erő változásait, vagy azt, hogy bukkanón illetve gödörben közlekedő autóra miért nem  $mg$  nagyságú nyomóerő hat. Ezen felül rengeteg versenyfeladat épül a nyomóerő változásaira, így a tehetséggondozásban is fontos, hogy ne csak felületesen érintsük ezt az anyagrészt.

### 3. Súrlódás

A súrlódási erő tanításának két fontos kritikus pontja van. Az első a tapadási súrlódás problémája: adott egy erő, amelynek nagysága változó lehet, amit azzal fejezünk ki, hogy a definíciója nem egyenlet, hanem egyenlőtlenség:

$$F_{\text{tapadási súrl.}} \leq \mu_0 \cdot F_{ny}. \quad (4.9)$$

A diákok többnyire megértik és megtanulják azt azényt, hogy a tapadási súrlódási erő nulla és egy maximális érték között változhat, de ezt feladatban alkalmazni már nem tudják. Erre példa a következő feleletválasztós kérdés:

Egy vízszintes felületen lévő 5 kg-os testre 7N erőt fejtünk ki vízszintes irányban. Mekkora a testre ható súrlódási erő, ha a súrlódási együttható 0,3?

A)12N

B)15N

C)7N

D)3N

A diákok jelentős része helytelenül a B) választ gondolja jónak, mert odáig eljut, hogy a tapadási súrlódás maximuma  $\mu_0 \cdot F_{ny} = 0,3 \cdot 50 = 15N$ , azaz alkalmazza a megtanult képletet. Azt viszont már nem veszi figyelembe, hogy ez csak a súrlódási erő felső határát adja meg, nem magát az erőt, ami jelen esetben a 7N-os húzóerő miatt a maximális értéknél kevesebb, 7N lesz (C válasz).

A súrlódási erővel kapcsolatos második tipikus tévhit az, hogy a súrlódás a mozgást akadályozza. Ennek tisztázására szintén jól használható a FIZIKA program, ahol egyszerű példáktól (pl. gyorsuló teherautó rakfelületén lévő meg nem csúszó láda; induló autó) a bonyolultakig (pl. teherautó rakfelületén megcsúszó láda) vizsgálhatunk olyan eseteket, amikor a súrlódásnak nem lassító, hanem gyorsító szerepe van.

#### 4. Körmozgás

A körmozgás dinamikájának tanítása a kilencedik évfolyam egyik legnagyobb kihívást jelentő része. Az első nehézség annak megértetése, hogy egyenletes körmozgás esetén van gyorsulás. Ez azért ütközik nehézségekbe, mert a diákok többsége ekkorra már megszokta, hogy az egyenletes mozgás egyenértékű azzal a kijelentéssel, hogy a testre ható erők eredője zérus, azaz a test nem gyorsul. Ez az addig tárgyalt egyenes vonalú mozgások esetén természetesen így is van. A körmozgás esetén azonban csak a test sebességének *nagysága* marad változatlan, a sebesség *iránya* folyamatosan változik. Ez azt jelenti, hogy a vektormennyiségként definiált sebesség változik, tehát van gyorsulás is. Ahhoz, hogy ez ne érje a diákokat sokkhatásként, fontos, hogy a kezdetek kezdetén a gyorsulást körültekintően definiáljuk, kihangsúlyozva, hogy a gyorsulás egy olyan vektormennyiség, amely egy másik vektormennyiség (a sebesség) változásának gyorsaságát adja meg, és egy vektor irányváltozásának is van változási gyorsasága.

A második nehézség a körmozgás eredőerejével kapcsolatos. Sok diákban él az a tévképzet, hogy a centripetális erő egy olyan erő, amely minden körmozgásnál fellép, és maga a körmozgás hozza létre. Ennek háttérében valószínűleg az áll, hogy földrajzból már korábban több magyarázathoz használták a centrifugális erőt (folyók sodorvonala, föld alakja), anélkül, hogy pontosan tisztázták volna, mi is az (egy olyan tehetetlenségi erő, amely

minden forgó vonatkoztatási rendszerben fellép, és ebből eredően csak akkor használható, ha magunk is a forgó rendszerből szemléljük az eseményeket). A centripetális erőt is ennek analógiájára próbálják elképzelni (hiszen még a neve is hasonlít), ez pedig komoly nehézségeket okoz a körmozgás dinamikájának részletes tárgyalásánál. Tanítási gyakorlatomban ezért a körmozgás dinamikájának első pár óráján nem is szoktam elárulni diákjaimnak, hogy a körmozgás esetén megfigyelhető eredő erőt centripetális erőnek hívjuk. Egyszerűen csak a körmozgás létrejöttéhez szükséges eredő erőnek nevezzük, s csak jó néhány konkrét példa tárgyalása után említem meg a centripetális erő elnevezést.

Az itt bemutatott problémák egyik lehetséges megoldásaként kidolgoztam olyan szimulációkat a FIZIKA programmal, amelyek használatával gördülékenyebbé tehetjük ezeknek a kritikus pontoknak a megértését és elkerülhetjük bizonyos tévhitik kialakulását. Az általam létrehozott szimulációk megtalálhatóak egy mindenki számára hozzáférhető google-drive mappában [4.6] és onnan ingyenesen letölthetőek. Diákjaimmal az itt leírt kísérleteket részben az órán frontálisan vagy csoportmunkában, részben házi feladatként dolgoztuk fel. (A csoportmunkához a diákok laptopjait használtuk.)

#### **4.3.1. Erők összeadása, az eredő erő meghatározása**

Az erők statikus bevezetését hagyományos, valós kísérletekkel érdemes kezdeni, hiszen a tipikus alapkísérletet - amely az erőt a rugó deformációjához kötve definiálja – nagyon egyszerű az órán élőben bemutatni (vagy tanuló-kísérletként elvégeztetni). Ez az az anyagrész, ahol a szimuláció használata felesleges és öncélú lenne, semmi többletet nem adna a diákoknak a valódi kísérlethez képest. A szimuláció esetleges használatának indoka ezen a ponton a szimuláció kezelésének gyakorlása lehet, valamint annak bemutatása, hogy a szimulációs kísérlet a valódival egyező eredményre vezet.

Az erők bevezetése után azonban szükségünk lesz arra, hogy több erő eredőjének kiszámolását megtanítsuk, és ez az a pont, ahol már hasznos lehet a program használata. Az eredő erő kirajzoltatásával rengeteg jól elemezhető példát adhatunk diákjainknak az erők összeadásának témakörében, ami alapvetően egy nehéz témakör, így szükség van a sok-sok gyakorlásra, ami a szimuláció használatával hatékonyan és gyorsan megoldható.

### Egyirányú és ellentétes erők

Az erők összeadását érdemes először egyirányú, majd ellentétes vektorok összeadásával kezdeni (Mi történik, ha ketten egy irányba illetve ellentétes irányba húznak egy ládát?), mert itt a diákok maguk is ráéreznek arra, hogy két erő összege az első esetben az erők nagyságának összege, a második esetben viszont azok különbsége. Ennek bemutatására és a sejtések megerősítésére jól használható a Fizika programban összeállított „eredoero1” szimuláció.

A szimulációban egy  $m=5,097\text{kg}$  tömegű testre ható erőket vizsgáljuk. A tömeget azért így választottam meg, mert ekkor a program által  $g=9,81$  értékkel számolt gravitációs erő éppen  $50\text{N}$  lesz, ami megkönnyíti a későbbi számolásokat. Ha a programmal a testre ható erőket és az eredő erőt is kirajzoltatjuk, majd a testre felfelé vagy lefelé ható erővel hatunk, akkor a 4.15. ábrán látható képeket kapjuk (a szimuláció futtatása közben a Printscreen gomb megnyomásával):



4.15. ábra. Egyirányú és ellentétes irányú erők összeadásának gyakorlása az „eredoero1” szimulációval. A fehér (gravitációs erő) és a lila (külső erő) eredőjét zöld nyíllal jelöli a program.

A szimuláció segítségével házi feladatot is könnyen gyárthatunk: ha az eredő erő vagy a lila színű külső erő kirajzolását kikapcsoljuk (egyszerre csak az egyiket), akkor a diákoknak kell kiszámolniuk a hiányzó erő nagyságát. (Még izgalmasabb, ha a feladatot nem a tanár, hanem a diákok gyártják egymásnak. Én ezt úgy kiviteleztem, hogy a csoportnak létrehoztam egy google drive mappát, ahová bárki fel tud tölteni és meg is tud nézni képeket, így 2-3 perces csoportmunkával 5-6 egyszerű gyors, és változatos feladatot gyártottunk.)

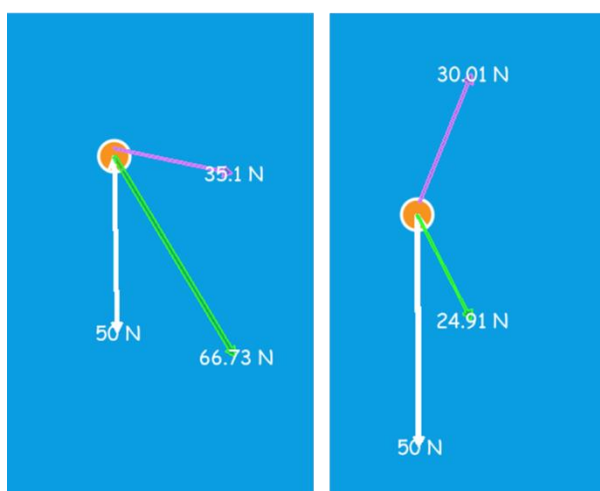
Ezen a ponton szoktam felhívni a diákok figyelmét arra, hogy maguktól rájöttek: a vektorok összeadása nem azonos a skalármennyiségek összeadásával, tehát az erők összeadásánál új szabályokat kell megtanuljanak.



### Szöget bezáró erők összeadása (paralelogramma módszer)

Az egymással szöget bezáró erők eredőjének meghatározásakor a szögfüggvények ismeretének hiánya miatt numerikus feladatmegoldásra leginkább az egymással derékszöget bezáró vektorok alkalmasak, mégis érdemes és szemléletformáló az általános eset vizsgálatával kezdeni.

A jelenség bemutatására az előző pontban leírt „eredoero1” szimuláció használható. A szimuláció elindítása után a testet ferdén oldalra kell mozgatni, miközben a képernyőn folyamatosan kirajzolódnak az erők. A részletes elemzéshez ismét érdemes 1-2 megfelelően elkapott pillanatképet rögzíteni, ezeket a 4.16. ábra mutatja:



4.16. ábra. Erők összeadásának vizsgálata szöget bezáró általános esetben az „eredoero1” szimulációval.

A képek alapján a diákok könnyen rávezethetőek a paralelogramma módszerre, ezt mi a Word dokumentumban az ábrába való berajzolással alá is támasztottuk. (Rajzoltunk egy nyilat pl. a lila nyíl fölé, majd lehúztuk úgy, hogy ne a testből, hanem a fehér nyíl végéből induljon.) Így az alábbi, a paralelogramma módszert jól bemutató ábrákat kaptuk (4.17. ábra):

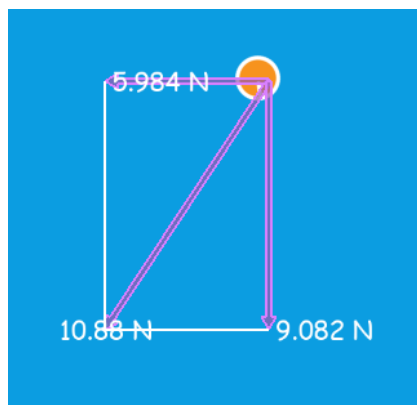


4.17. ábra. A paralelogramma módszer bemutatása az „eredoero1” szimulációból nyert ábrákkal.

Az, hogy általános esetben az eredő erő kiszámítása bonyolult, a fenti ábrákon is jól látszik, hiszen egy paralelogramma átlójának nagyságát kéne meghatározni. Kilencedik évfolyamon erre nincs megfelelő matematikai eszközünk, de téglalap esetén egyszerűsödik a helyzet, azaz a derékszöget bezáró erők eredője számolható.

#### Derékszögű eset numerikus megoldása

Az előző pontokban használt „eredoero1” szimuláció kiválóan alkalmas a különböző esetek áttekintésére, azonban a derékszögű esetet megvalósítani szinte lehetetlen vele, ezért erre egy másik szimulációt („eredoero2”) használtunk. A szimulációban egyetlen testre ható ferde külső erőt vizsgáltunk úgy, hogy a gravitációt kikapcsoltuk (olyan, mintha egy súrlódásmentes asztalt néztünk volna felülnézetből). Beállítottuk, hogy a program bontsa komponenseire a ferde erőket. A szimuláció elindítása után a testet az egérrel megragadva mozgattuk. Az általunk kifejtett külső erő (ami egyben az eredő erő is) komponenseire bontva és egyben is látszódik, így elemezhető két derékszöget bezáró eredőjének meghatározása. Készítünk pillanatfelvételeket a húzás közben (4.18. ábra), és Word dokumentumba illesztve elemezzük azokat. Fontos hangsúlyozni, hogy a ferde lila erő most a vízszintes és függőleges erők eredője.



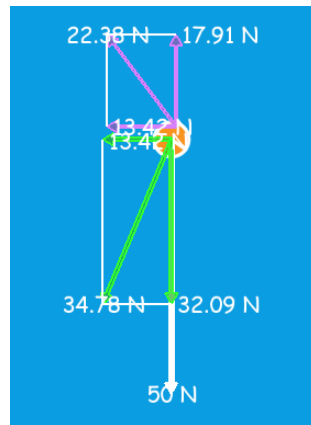
4.18. ábra. Derékszöget bezáró erők eredőjének meghatározása az „eredoero2” szimulációval.

Miután a diákok rájöttek arra, hogy ebben az esetben Pitagorasz-tétellel kell számolni az eredő erő nagyságát, konkrét esetekben le is ellenőriztük, hogy valóban működik-e a módszer. Az ábrán látható esetben például valóban igaz, hogy  $5,984^2 + 9,082^2 = 10,88^2$ .

Házi feladatnak olyan pillanatfelvételeket adtam, amelyekről az eredő erő vagy valamelyik komponensének értékét kitöröltük (Paint programba másolva az eredeti képet). Csoportmunkában minden csoport létrehozott 1-1 ilyen képet, és ezeket a képeket google drive mappába feltöltve használtuk házi feladatnak.

Összetett eset vizsgálata

Miután a derékszögű eset megoldását megbeszéltük, egy olyan bonyolultabb feladatot elemeztünk, melyben egy ferde erő és a gravitáció hat. (Ehhez elég visszakapcsolni a gravitációt az „eredoero2” szimulációban.) Trigonometriai ismeretek hiányában a ferde erőt nem lennének képesek kezelni a diákok, de a program komponenseire bontva is megjeleníti. (Ilyenkor viszont fontos hangsúlyozni, hogy pl. a 4.19. ábrán nem három darab lila erő hat egyszerre a testre, hanem a ferde erő lett felbontva komponenseire, azaz magát a ferde erőt el is felejthetjük, és helyette számolhatunk a komponenseivel.)



4.19. ábra. Összetett eset vizsgálata az „eredoero2” szimulációval.

Az eredő erő számolásának módja jól végigkövethető az ábra alapján. Vízszintes irányban csak a lila színű  $F_{1x}=13,42\text{N}$  erő hat, így ez adja az eredő erő vízszintes komponensét (zöld vízszintes nyíl), tehát  $F_{\text{eredő},x}=13,42\text{N}$ . Függőlegesen lefelé  $F_{\text{grav}}=50\text{N}$ , felfelé  $F_{1y}=17,91\text{N}$  hat, tehát a függőleges eredő erő ezek különbsége:  $F_{\text{eredő},y}=50\text{N}-17,91\text{N}=32,09\text{N}$ , ahogy az ábrán is látszik (függőleges zöld nyíl). Az eredő erő nagysága ezek után két komponenséből Pitagorasz-tétel segítségével számolható:  $F_{\text{eredő}}^2 = F_{\text{eredő},x}^2 + F_{\text{eredő},y}^2 = 13,42^2 + 32,09^2 = 1209,8$ , amelyből négyzetgyököt vonva kapjuk, hogy  $F_{\text{eredő}}=34,8\text{N}$ .

Az erők eredőjének kiszámolásában a program rengeteg gyakorlási lehetőséget biztosít, ráadásul a diákok a szimuláció futtatása közben azt is megfigyelhetik folyamatában, hogy ha az erők változnak, ez miként hat az eredő erőre. Diákjaim az órán élvezték a programmal való játékot és a szimulációnak köszönhetően könnyen és gyakorlati tapasztalatokra építve tudták elsajátítani a vektorösszeadást és kivonást.

Az, hogy egy test hogyan mozog egy adott eredő erő hatására, szintén jól vizsgálható a programmal. Newton II. törvényének tanításához munkacsoportunk szintén kidolgozta a megfelelő

szimuláció-sorozatot. Mivel ez nem saját munkám, így értekezésemnek nem része, de szerves egységet alkot az itt bemutatott részekkel.

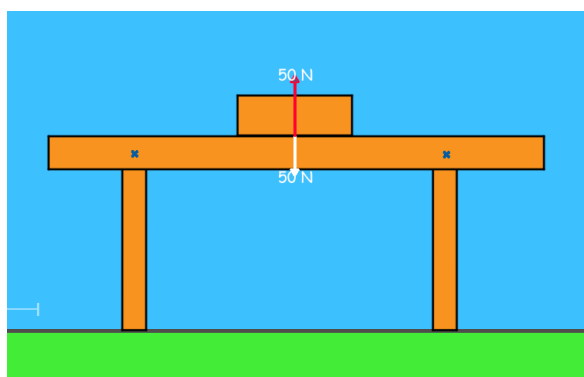
### 4.3.2. Nyomóerő

Az erőfajták tanításának elején, a gravitációs erő után következik a nyomóerő (vagy tartóerő, kényszererő) tárgyalása. Bár a legtöbb tankönyv nem szentel túl részletes tárgyalást neki, a nyomóerő az egyik legérdekesebb és legfontosabb erő a kilencedikes tananyagban, hiszen mindig a körülményekhez alkalmazkodva változik, és az a tulajdonsága később a súrlódásnál, valamint a körmozgás dinamikájánál is fontos szerepet kap a feladatmegoldásban.

Az alábbiakban olyan általam kidolgozott szimulációkat mutatok be, amelyek segítségével könnyen megfigyelhető a nyomóerő viselkedése és orvosolhatjuk a nyomóerővel kapcsolatos, bevezetőben már vázolt problémákat.

#### Vízszintes felületen nyugvó test

Az alapeset (amely minden tankönyvben szerepel) bemutatása fontos, és nem túl bonyolult feladat. A „nyomoero1” szimulációt használva vizsgálhatjuk, hogy milyen erők hatnak egy asztalra helyezett ládára. A felületre helyezett láda tömege legyen a jól bevált  $m=5,097\text{kg}$ , így a gravitációs erő  $50\text{N}$  lesz. A program indítása után kirajzolja a ládára ható erőket (4.20. ábra).



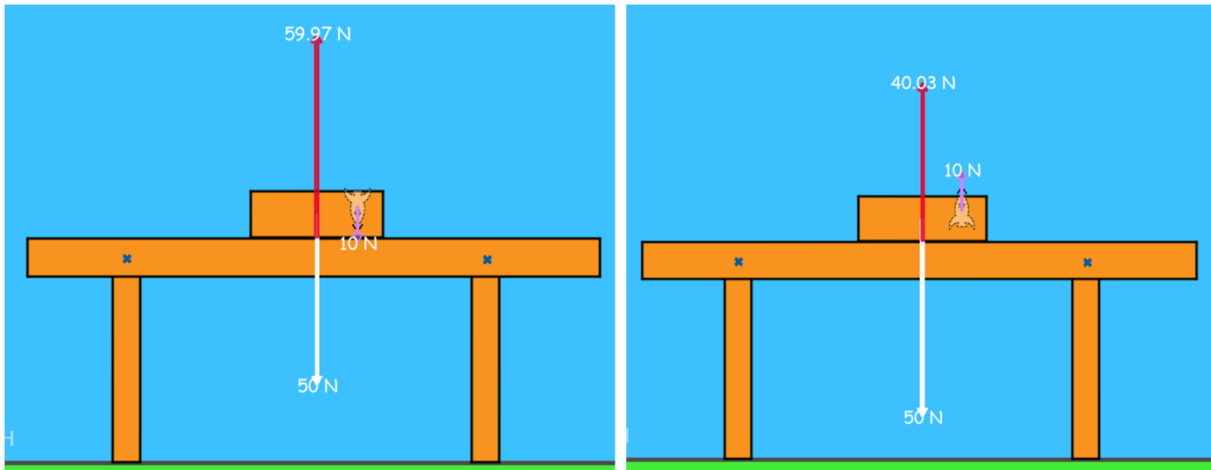
4.20. ábra. Nyomóerő vizsgálata vízszintes felületen, alaphelyzetben a „nyomoero1” szimulációval.

A láda nyugalomban van, így a rá ható erők eredője zérus. (Nem látható zöld színű nyíl az ábrán.) Ebben az esetben a nyomóerő nagysága valóban megegyezik a testre ható gravitációs erővel:  $F_{ny}=mg=50\text{N}$ .

Az alapkísérlet bemutatása után nagyon fontos, hogy az alább következő elrendezéseket szintén megmutassuk és elemezzük.

Vízszintes felületen nyugvó test külső erővel

Az előző pontban bemutatott szituációt úgy módosítottam, hogy a ládára helyeztem egy külső erőt biztosító rakétát, amelyet először függőlegesen lefelé aztán felfelé irányítottam. Az így kapott „nyomoero2” szimulációval kirajzoltatva a ládára ható erőket, a 4.21. ábrán látható képeket kapjuk.



4.21. ábra. A ládára ható nyomóerő külső erő hatására történő változásának vizsgálata a „nyomoero2” szimulációval. A bal oldali ábrán a külső erő lefelé, a jobb oldali ábrán fölfelé hat.

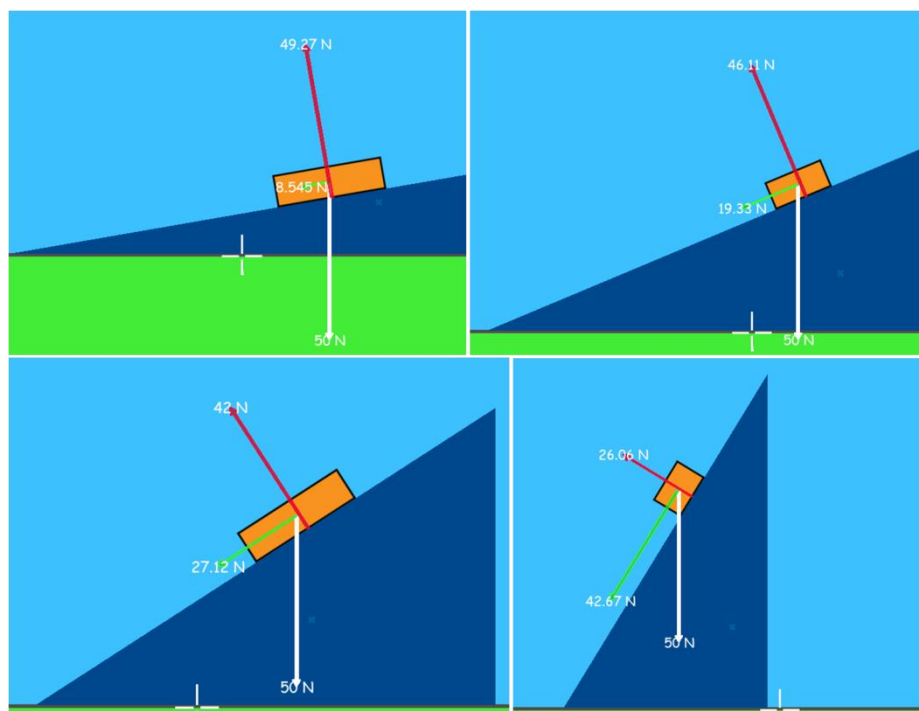
Mivel a láda ismét egyensúlyban van, a nyomóerőnek ellensúlyoznia kell mind a gravitációs erőt, mind a rakéta által kifejtett külső erőt. Így a nyomóerő értéke az első esetben  $F_{ny1} = mg + 10N = 60N$  (az ábrán látható 59, 97N érték 3 értékes jegyre kerekítve 60N lesz), a második esetben  $F_{ny2} = 50N - 10N = 40N$  lesz. (Észrevehető az ábrákon a program egy hibája is: a rakéta gravitációs erőhöz eltolt támadáspontja miatt a nyomóerő támadáspontjának is el kellene tolnia, hogy a ládára ható erők forgatónyomatéka zérus legyen. A program azonban mindaddig a láda aljának közepéből rajzolja a nyomóerőt, amíg az el nem éri a láda egyik sarkát – ilyenkor már helyesen, a sarokból indítva rajzolja meg a nyomóerőt. Ez addig nem feltétlenül baj, amíg a testeket tömegpontokként kezeljük, de kiterjedt testek esetén már mindenképpen megemlítenendő, nehogy a diákokban rossz tapasztalat rögzüljön!)

Már ezen egyszerű kísérletek fényében is megállapítható tehát, hogy a nyomóerő erősen függ a körülményektől, és rengeteg olyan eset van, amikor nagysága nem  $mg$ .

Lejtőn lévő testre ható nyomóerő

Egy másik egyszerű és fontos eset annak demonstrálására, hogy a nyomóerő nem mindig  $mg$  nagyságú, a lejtőn mozgó test vizsgálata. Mivel ezen a ponton a súrlódási erőről még nem esik szó, súrlódásmentes lejtőn mozgó testet vizsgáltunk. A „nyomoero3-nyomoero6” szimulációk különböző

meredekségű súrlódásmentes lejtőn lecsúszó ládát ( $m=5,097\text{kg}$ ) mutatnak, amelyre könnyedén kirajzoltathatjuk a rá ható erőket és az eredő erőt is (4.22. ábra).



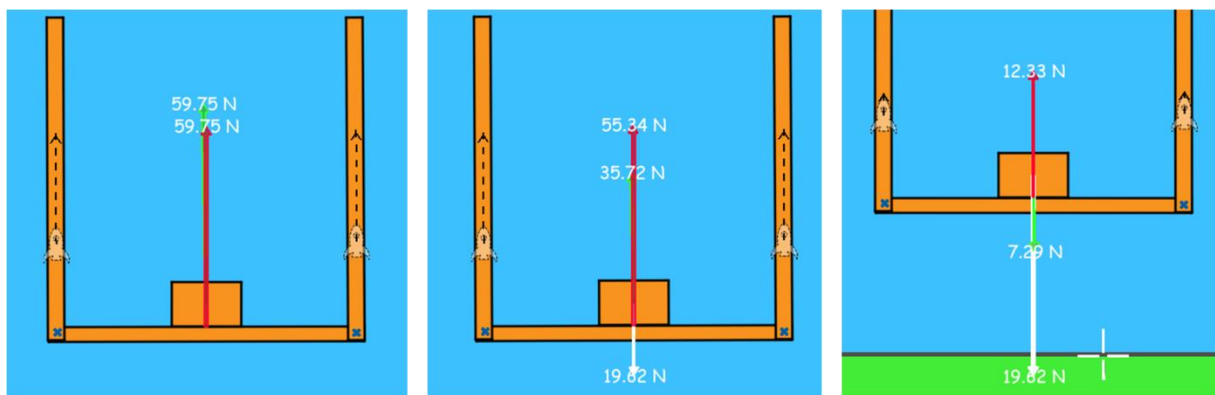
4.22. ábra. Lejtőn lecsúszó testre ható nyomóerő vizsgálata.

Az egyre növekvő meredekségű esetekben szépen megfigyelhető, hogy a nyomóerő mindig merőleges a felületre, és nagysága nem  $mg$ , hanem a gravitációs erő lejtőre merőleges komponensével egyezik meg. (Ez a korábban már használt Word dokumentumos elemzéssel ellenőrizhető). Trigonometriai ismeretek hiányában ennél részletesebb elemzés sajnos nem lehetséges, esetleg a  $30^\circ$ -os,  $45^\circ$ -os vagy  $60^\circ$ -os lejtő tárgyalható elemi geometriai módszerekkel is.

#### Gyorsuló liftben lévő testre ható nyomóerő

Az előző esetekben megnéztük, hogy a nyomóerő hogyan változik, ha függőleges komponensű külső erő hat vagy ha az alátámasztás nem vízszintes. Utolsó lépésként azt vizsgáljuk, hogy mi van akkor, ha a test az alátámasztó felülettel együtt függőlegesen gyorsul. Ez a fizikaórán általában tárgyalt „mit mutat a mérleg a liftben” probléma elemzése. Azt, hogy felfelé gyorsuló liftben a mérleg a nyugalmiánál nagyobb tömegnek megfelelő súlyt mér, könnyen ellenőrizhetjük kísérletileg. (Mivel iskolánkban lift nincs, ezért a jelenség videóra vételét fakultatív házi feladatnak szoktam kiadni, amit a diákok örömmel megcsinálnak extra kisötösért.) A videó elemzése hasznos és tanulságos, de itt is sokat segít a jelenség megértésében, valamint a szemléletes és kvantitatív magyarázatban a szimuláció.

A „lift” szimulációban egy liftet (keretet) két rakéta gyorsít fölfelé és a lift alján lévő testre ható erőket vizsgáljuk. Első lépésként érdemes azt megmutatni, hogy mi történik, ha kikapcsoljuk a gravitációt (ezért is hasznos a szimuláció, ahol ez egy kattintással megtehető). Ilyenkor a testre egyetlen erő hat, a lift által kifejtett nyomóerő, és ez fogja előidézni a test függőleges felfelé gyorsulását ( $F_{ny}=ma$ ). Ez azért fontos, mert így a diákok megértik: ismét a nyomóerő az, ami a helyzethez alkalmazkodva változik, és biztosítja azt, hogy a test a kerettel együtt mozogjon. Ezután visszakapcsolva a gravitációt megvizsgáljuk, hogy ekkor hogyan alakulnak a testre ható erők. A diákok jól rávezethetőek arra, hogy ilyenkor a nyomóerő úgy alakul, hogy a gravitációs erőt levonva belőle éppen biztosítsa a test gyorsításához szükséges erőt:  $F_{ny}-mg=ma$ , azaz  $F_{ny}=m(a+g)$ . Hasonlóan tárgyalható a lefelé gyorsuló eset is ( $a < g$ ), ahol  $F_{ny}=m(a-g)$ . Ezeket az eseteket a 4.23. ábra mutatja



4.23. ábra. Bal oldalon: felfelé gyorsuló lift  $g=0$  esetén. Középen: felfelé gyorsuló lift gravitációs térben. Jobb oldalon: lefelé gyorsuló lift gravitációs térben.

A „lift” szimuláció elemzése fontos a súly és a tömeg fogalmi tisztázásában. A tömeg a testre jellemző állandó adat, de a test súlya a körülményektől függően más és más lehet. A súly a nyomóerő ellenereje, így a súly változását a nyomóerő változása tökéletesen jól szemlélteti: vízszintes felületen lévő nyugvó test esetén  $mg$ , de függőleges felfelé gyorsulás esetén ennél több, lefelé gyorsulás esetén ennél kevesebb, szabadesés esetén pedig ( $a=g$ ) a súly éppen zérus, azaz ilyenkor súlytalanság állapotában van a test.

A nyomóerő viselkedése jelentős szerepet játszik a súrlódási erő esetében is, ezért a dinamika kritikus pontjainak tárgyalása ennek elemzésével folytatódik.

### 4.3.3. Súrlódás

A súrlódás témakörében felmerülő első probléma a tapadási súrlódással kapcsolatos, ami egy olyan erő, amely nulla és egy bizonyos maximális érték között változhat:

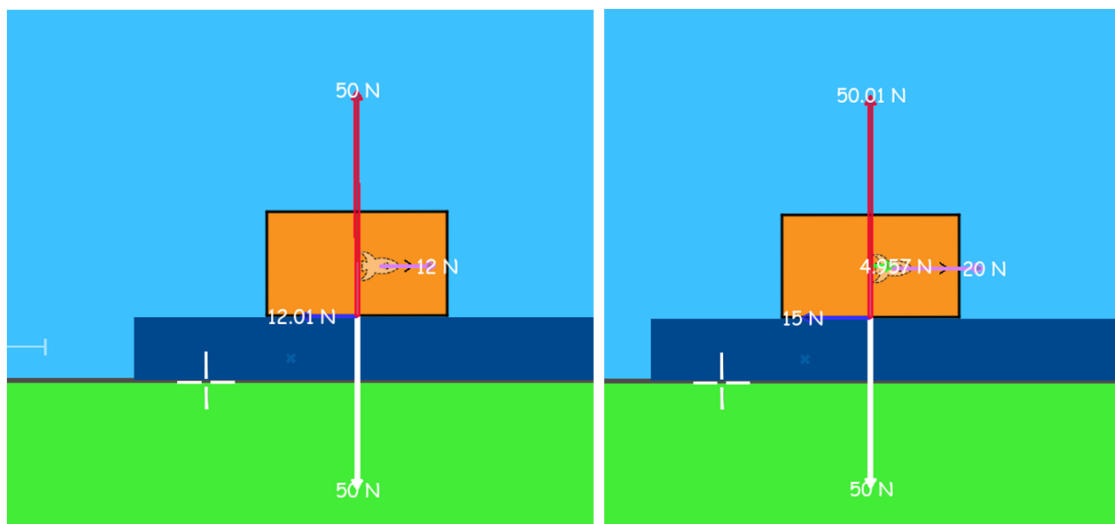
$$F_{\text{tapadási súrl.}} \leq \mu_0 \cdot F_{\text{ny.}}$$

A bevezetőben említett vázolt probléma tisztázásához fontos a diákokat szembesíteni a tévhiteikkel. Ebben az alábbi szimulációk elemzése segít.

#### Tapadási súrlódási erő vízszintes húzóerőnél

A „surlodas1” szimulációban egy  $m=5,097\text{kg}$ -os láda fekszik vízszintes felszínen, és a ráhelyezett rakéta vízszintes irányú, eredetileg  $7\text{N}$  nagyságú erőt fejt rá ki. A súrlódási együttható  $0,3$ , így a tapadási súrlódás maximális értéke  $15\text{N}$ .

A rakéta által kifejtett külső erőt változtassuk  $0$  és  $15\text{N}$  között, és figyeljük, hogyan változik a súrlódási erő, és megmozdul-e a test, majd állítsunk be  $15\text{N}$ -nél nagyobb értéket is! (Az erőket leginkább akkor lehet jól leolvasni, ha a szimulációt leállítjuk.) A 4.24. ábra  $12\text{N}$ -os és  $20\text{N}$ -os húzóerők esetét mutatja.



4.24. ábra. Tapadási súrlódás változása különböző vízszintes húzóerők esetén.

A bal oldali esetben a húzóerő  $12\text{N}$ , itt a súrlódási erő nem veszi fel a megengedett maximális értéket ( $15\text{N}$ ), hanem - a bevezetőben is tárgyalt módon - csak a húzóerővel tart egyensúlyt ( $12\text{N}$ ).

A jobb oldali 4.24. ábra jobb oldalán a ládára ható vízszintes,  $20\text{N}$  nagyságú húzóerő meghaladja a tapadási súrlódás maximális értékét, így ebben az esetben valóban  $15\text{N}$  nagyságú

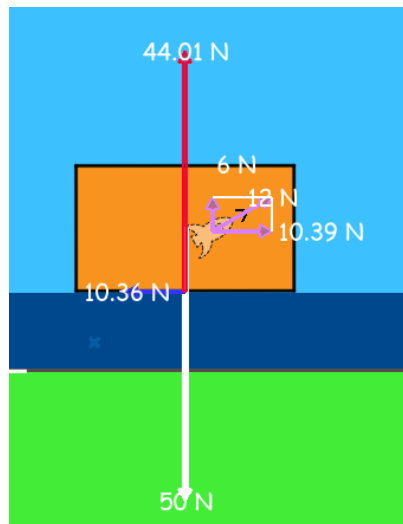


súrlódási erő hat. Ekkor a ládára hat egy eredő erő, amely a húzóerő irányába (jobbra) mutat és 5N nagyságú (az ábrán kis zöld nyíl jelzi), amelynek hatására a láda gyorsuló mozgásba jön.

Fontos megjegyezni, hogy a program nem tesz különbséget a tapadási és csúszási súrlódási együttható számértéke között, de ez a legtöbb esetben nem zavarja a tárgyalást.

#### Tapadási súrlódási erő ferde húzóerő esetén

Az eddig tanultakat ötvözhetjük egy test ferde erővel való húzásának vizsgálatával. A „surlodas2” szimulációban a beállított rakéta ferde, így nem vízszintes, hanem enyhén felfelé irányuló erőt fejt ki. A programmal kirajzoltattuk a testre ható erőket és a ferde erőt komponenseire bontottuk. A ládára ható erőket a rakéta egy adott beállításánál (12N, 30°) a 4.25. ábra mutatja.



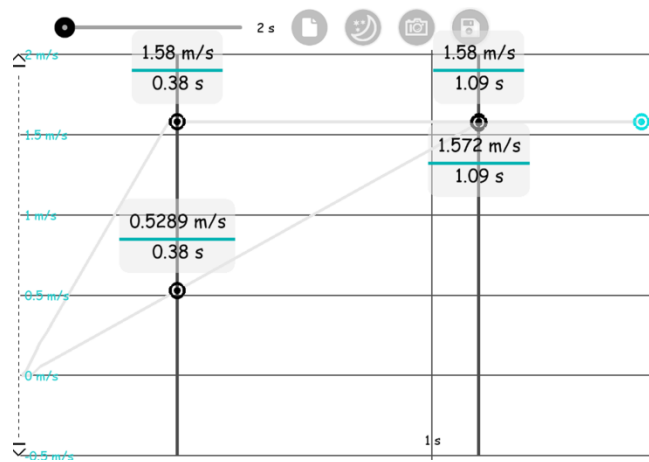
4.25. ábra. Ferdén húzott ládára ható erők elemzése.

A lila színnel jelölt húzóerőt vízszintes és függőleges komponensekre bontja a program. A függőleges komponens (6N felfelé) miatt a nyomóerő az eddigi 50N-ról 44N-ra csökken. Ezzel a maximális súrlódási erő értéke is változik az előző esethez képest,  $\mu_0 \cdot F_{ny} = 0,3 \cdot 44 = 13,2N$  lesz. A húzóerő vízszintes komponense 10,4N nagyságú, ezért a tapadási súrlódás még ellensúlyozni tudja, nagysága ugyanúgy 10,4N (közelítő számítások miatt apró eltérések előfordulhatnak, ezért célszerű legfeljebb 3 értékes jegyre kerekíteni az adatokat) .

#### A súrlódás mint gyorsító erő

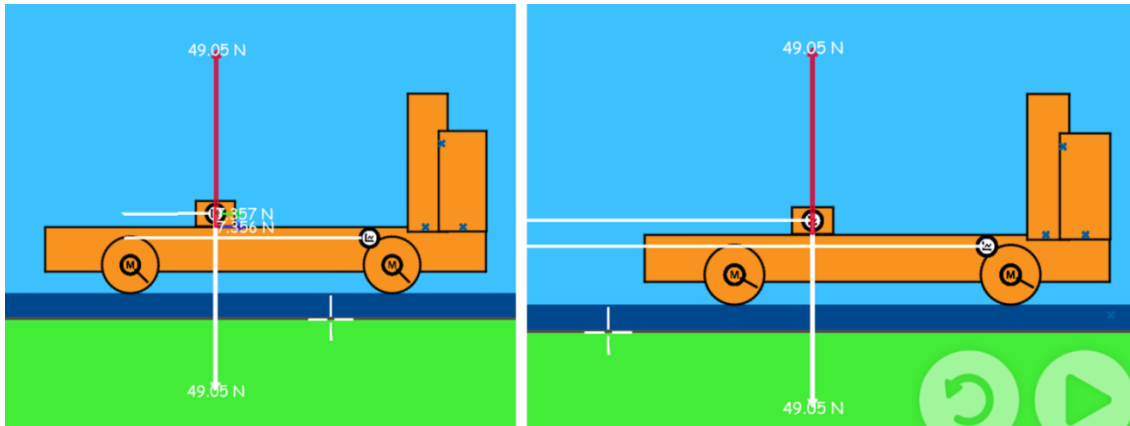
Rengeteg hasznos és tanulságos szimuláció mutatható a súrlódás gyorsító hatásával kapcsolatban: ilyen például az autó indulása vagy éppen az autó kerekeinek kipörgése kis súrlódási együttható esetén. Ezeket a szimulációkat a hely hiánya miatt itt nem részletezem, helyette egy érdekesebb, a tehetséggondozásban is hasznos, szemléletformáló szimulációt mutatok be: a gyorsulva induló teherautó rakfelületén megcsúszó láda esetét.

A „teherautó” szimulációban egy teherautó gyorsul, miközben a raklapján lévő 5 kg tömegű láda megcsúszik (de nem esik le). A szimuláció paramétereit úgy állítottam be, hogy a teherautó kerekeinél nagyobb legyen a súrlódási együttható (0,4), mint a raklapján (0,15), így el tudtam érni, hogy a teherautó gyorsulása elég nagy legyen ahhoz, hogy a raklapon lévő láda megcsússzon. A teherautó utazósebességét a kerekeket meghajtó motornál lehet beállítani a fordulatszám megadásával (100 fordulat percenként, ami a kerék adataiból adódóan  $1,58 \frac{m}{s}$  utazósebességet jelent). A teherautó addig gyorsul, amíg eléri a megadott utazósebességet, utána egyenletesen halad tovább. A diákok jelentős részében az a tévképzet él, hogy a láda csak addig csúszik, amíg a teherautó gyorsul. Ez gyorsan cáfolható a láda és a teherautó sebesség-idő grafikonjával (4.26. ábra).



4.26. ábra. „Teherautó” szimuláció, a teherautó és a láda sebesség-idő grafikonja. A láda azután is gyorsul, hogy a teherautó elérte a végsebességét és egyenletesen mozog.

Az ábrán a ferdébb egyenessel kezdődő grafikon a teherautó sebesség-idő grafikonja, és megállapítható belőle, hogy a teherautó 0,38s alatt érte el az utazósebességét. A láda grafikonjának meredeksége kisebb, mint a teherautóé (azaz a láda gyorsulása kisebb, ezért csúszik meg a rakfelületen hátrafelé), és az is jól látszik, hogy a teherautó utazósebességének elérése után a láda tovább gyorsul, és csak akkor fog együtt mozogni a teherautóval, amikor ő is eléri az  $1,58 \frac{m}{s}$  utazósebességet. A láda gyorsításáért felelős erő könnyen megtalálható, ha kirajzoltatjuk a ládára ható erőket a láda gyorsítási szakaszában és akkor is, amikor már elérte az utazósebességet (4.27. ábra).



4.27. ábra. A ládára ható erők gyorsulás közben és egyenletes sebességnél.

A ládára mindvégig hat a gravitációs és a vele egyensúlyt tartó nyomóerő (nincs függőleges gyorsulás), és a láda gyorsítási szakaszában hat még a súrlódási erő is (kék), ami láthatóan a ládát előre gyorsító erő (hiszen egyenlő a zöld színű eredő erővel). A grafikonok elemzésével is könnyen belátható, hogy a ládát a súrlódási erő gyorsítja. A láda gyorsulása a 4.26. ábra alapján

$$a = \frac{1,58}{1,09} = 1,46 \frac{m}{s^2}, \text{ ami valóban a súrlódás miatti } a = \mu g = 0,15 \cdot 9,81 = 1,47 \frac{m}{s^2} \text{ gyorsulással egyenlő.}$$

Hasonlóan tanulságos kiszámolni a láda hátracsúszásának mértékét a v-t grafikonok alatti területek különbségéből, majd a számolt eredményeket a nyomvonalak hosszának különbségével ellenőrizni.

Ez a szimuláció jól mutatja, hogy a súrlódás nem csak fékező, hanem gyorsító erő is lehet, valamint látványosan cáfolja a megcsúszó ládával kapcsolatos tévhiteket és lehetőséget ad a probléma kvantitatív elemzésére.

#### 4.3.4. Az egyenletes körmozgás dinamikája

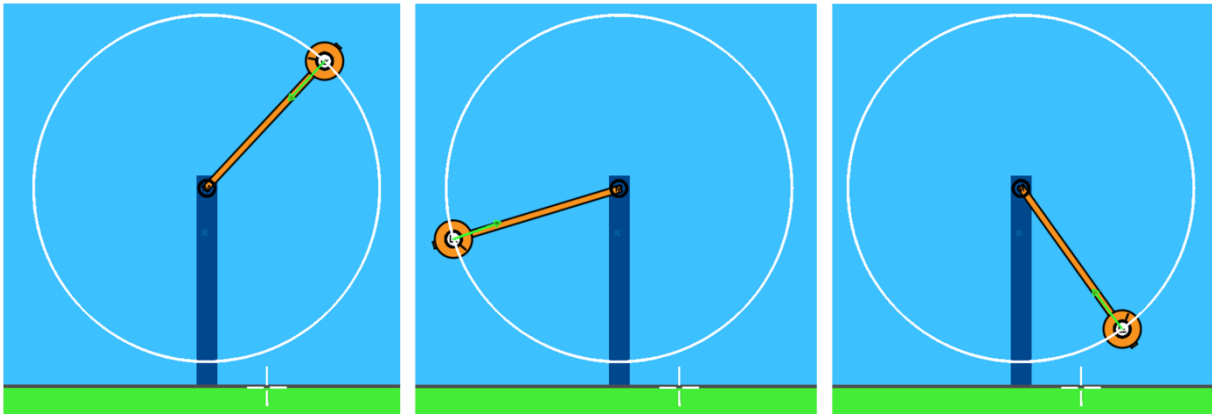
Az egyenletes körmozgás dinamikájának tanítása a gimnázium első évének egyik legnehezebb feladata a fizikatanár számára. A bevezetőben vázolt problémák kiküszöbölésére ismét lehetőséget nyújt a FIZIKA program. Az első szimulációt azért állítottam össze, hogy egy konkrét példán keresztül megmutassam: az egyenletes körmozgás során van eredő erő, ami a mindig a középpont felé mutat. A szimuláció azt is megmutatja, hogy ez az eredő erő nem egy magától fellépő rejtelmes erőhatás, hanem a már eddig is ismert erők alakulnak úgy, hogy az általuk létrehozott eredő erő a fenti tulajdonságú legyen.

A második itt bemutatott szimuláció a tehetséggondozásban alkalmazható. Ebben egy középiskolában versenyfeladat szintű kérdés megoldását ellenőrizzük: megnézzük, hogy hol válik el egy hengeren csúszásmentesen lecsúszó golyó pályája a henger felületétől.

#### Az első szimuláció leírása

Az „egyenleteskormozgas1” szimulációban egy motor egyenletes szögsebességgel forgat egy rudat, melynek végére egy kör alakú test van rögzítve. A test tömegét nagyra választottam ( $m=18\text{ kg}$ ), hogy a rá ható erők is kellően nagyok, azaz jól megfigyelhetőek legyenek.

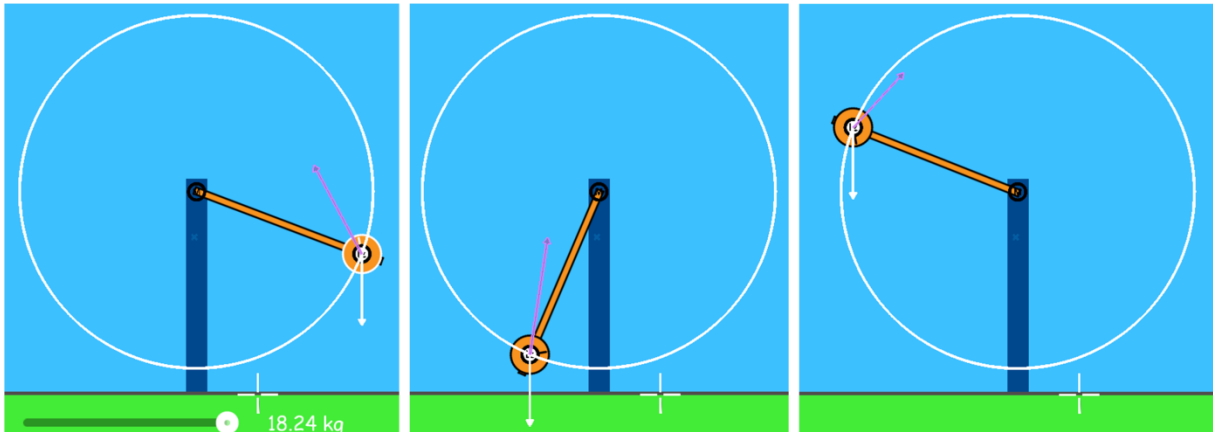
A szimuláció elindításakor 3-4 másodpercet várni kell, míg a kezdeti bizonytalanságok után valóban beáll az egyenletes körmozgás. A szimuláció alapbeállításban csak a testre ható eredő erőt rajzolja ki zöld színnel. Mozgás közben is, de a szimulációt megállítva pontosabban is megfigyelhető, hogy az eredő erő végig a kör középpontja felé mutat. (4.28. ábra)



4.28. ábra. Egyenletes körmozgást végző korongra ható eredő erő kirajzolása az „egyenleteskormozgas1” szimulációval.

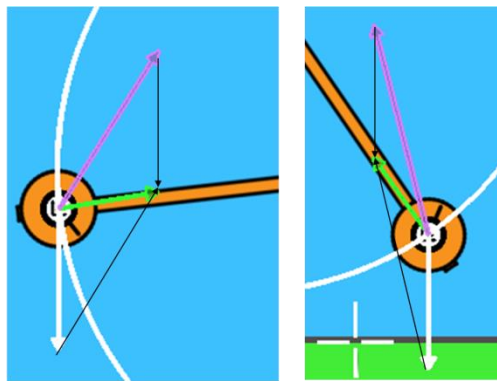
Miután az eredő erőt megvizsgáltuk, tegyük fel a diákoknak a kérdést: milyen erők hatnak a testre? (Vagy: Hány erő hat a testre?) Tapasztalatom szerint a gravitációs erő eszébe jut a diákoknak, de arra a kérdésre, hogy mi hat még a testre, leginkább az eredő erő vagy centripetális erő választ kapjuk. Ezen téves elgondolás tisztázását segíti, hogy a programmal ábrázoltathatjuk a testre ható összes erőt (4.29. ábra). (Az eredő erő megjelenítését ki-, a gravitációs és egyéb erőket pedig bekapcsoljuk.)

Amikor a szimulációt újból elindítjuk, látszik, hogy a testre két erő hat: a fehér színnel jelölt gravitációs erő és a lila színnel ábrázolt, a rúd és test közötti rögzítés által kifejtett erő (4.29. ábra). Érdeemes megfigyelni, hogy a gravitációs erő (várakozásunknak megfelelően) végig lefelé hat, és állandó nagyságú, a rögzítés által kifejtett erő azonban folyamatosan változik a mozgás során.



4.29. ábra. Egyenletes körmozgást végző korongra ható erők. A gravitációs erőt fehér, a rögzítés által kifejtett erőt lila színnel ábrázolja a program.

Ebből megállapítható, hogy a testre összesen két erő hat, azaz nincs semmiféle titokzatos, körmozgásoknál fellépő erő, csupán az eddig is ismert erők fognak úgy alakulni, hogy az eredőjük a kör középpontja felé mutasson. Ennek bemutatásaként rajzoltassuk ki most az erőket és az eredő erőt egyszerre. Mozgás közben is megfigyelhető, de különböző helyzetekben megállítva a szimulációt aprólékosan elemezhető, hogy az eredő erő valóban a gravitációs és a rögzítés által kifejtett erők eredője. Egy-egy pillanatképet Word-dokumentumba illesztve nyilak rajzolásával ez igazolható is (4.30. ábra).



4.30. ábra. Annak igazolása, hogy az egyenletes körmozgás eredőerejét a már általunk ismert erők hozzák létre.

Ezzel a szimulációval tehát demonstrálható, hogy az egyenletes körmozgás eredőereje a kör középpontja felé mutat és létrejöttéért a diákok által már korábbról ismert erők felelősek. Így eloszlatható az a tévképzet, hogy a centripetális erő (a centrifugális analógiájára) egy minden körmozgásnál automatikusan fellépő erő. Diákjaim a szimuláció elemzése után sokkal könnyebben megértették, tanári vezetéssel maguktól kitalálták, hogy egy hintázó gyerek esetén hogyan számolható ki a függőleges pozícióban való áthaladáskor ható kötél-erő, illetve hogy miért „liftezik” a gyomrunk, amikor autóval bukkanón hajtunk át. Bár a szimuláció (jelenlegi állapotában) nem

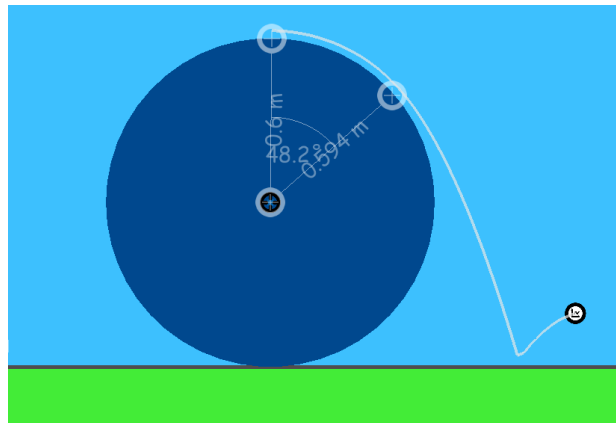
alkalmas ez utóbbi két szituáció elemzésére, a fenti egyszerű példa szemléletformáló hatásán keresztül megkönnyíti ezek tárgyalását is.

#### A második szimuláció leírása

A FIZIKA szimulációs program arra is használható, hogy elméleti számolások eredményét ellenőrizzük vele. Körmozgáshoz kapcsolódóan egy ilyen, tehetségfelfedezésben használható feladat annak kiszámolása, hogy egy hengeren súrlódásmentesen lecsúszó, pontszerűnek tekinthető test hol hagyja el a henger felületét. Az eredeti példa és megoldása megtalálható a közismert Dér-Radnai-Soós példatárban [4.7].

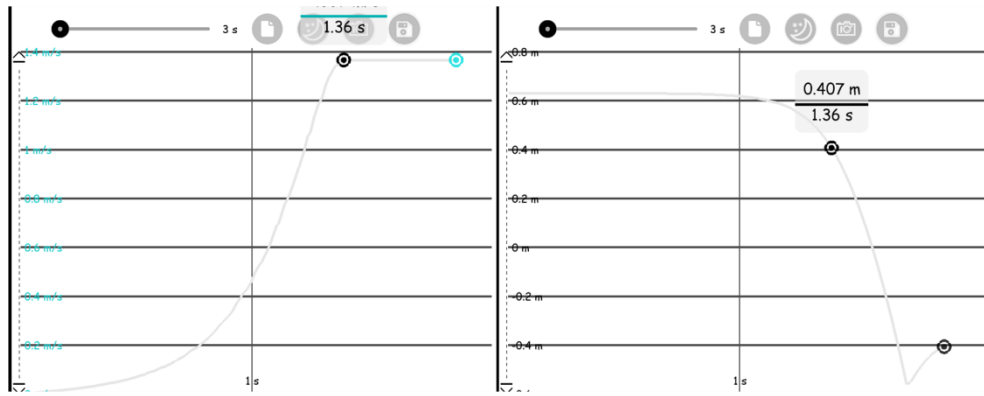
Az itt nem részletezett elméleti számolásban azt kapjuk, hogy a test akkor hagyja el a hengert, amikor pillanatnyi helyzetéhez húzott sugár a függőlegessel  $48,2^\circ$ -ot zár be ( $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ ). Ezt próbáltuk meg ellenőrizni a szimuláció segítségével.

A szimulációban egy 0,6m sugarú hengeren csúszik le egy pontszerűnek tekinthető golyó. A súrlódási együtthatót 0-ra állítottuk és kirajzoltattuk a test pályájának nyomvonalát (4.31. ábra).



4.31. ábra. Hengeren súrlódásmentesen lecsúszó golyó pályája.

Az ábrán látszik, hogy a test valahol a kiszámolt szög körül hagyja el a hengert, de ha pontosabb ellenőrzést szeretnénk, érdemes a test grafikonjainak elemzésével kiszámolni a pályaelhagyás helyét. (Hogy ez egyszerűbb legyen, célszerű az origót a henger közepére állítani.) Már az sem egyszerű kérdés a diákok számára, hogy a golyó mozgásának melyik grafikonjából tudjuk legjobban meghatározni a keresett helyet. A henger elhagyásának pillanata legjobban az  $v_x$ -t grafikonon látszik, utána pedig a  $x$ -t vagy  $y$ -t grafikonból már le tudjuk olvasni az egyik helykoordinátát, amelynek segítségével kiszámolhatjuk az ellenőrizni kívánt szöget (4.32. ábra).



4.32. ábra. Hengeren lecsúszó golyó  $v_x$ -t (bal) és  $y$ -t (jobb) grafikonjai.

A bal oldali grafikonon látszik, hogy a golyó  $x$  irányú sebessége egy idő után állandó lesz. Ez akkor van, amikor már nem érintkezik a hengerrel. Így a vízszintes szakasz kezdetének időkoordinátájából megtudjuk a pályaelhagyás időpontját ( $t=1,36$ s). Ezután az  $y$ -t grafikonról leolvashatjuk, hogy milyen magasan volt a test a henger középpontjához képest a pálya elhagyásának pillanatában ( $y=0,407$ m). Ebből az elhagyás helyéhez húzott sugár függőlegessel bezárt szöge már számolható:

$$\cos \alpha = \frac{0,407}{0,6} = 0,678, \quad (4.10)$$

amelyből  $\alpha = 47,3^\circ$ .

Ez az érték 2%-os hibán belül van az elméleti úton számolt értékhez képest, az a szimulációs ellenőrzés az elméleti számolást alátámasztja.

#### 4.3.5. Összefoglalás

A fent bemutatott szimulációk jól mutatják, hogy a dinamika tanításának vannak olyan kritikus pontjai, amelyekben a FIZIKA program lehetőséget ad a gyakorlásra, elősegíti a megértést, segít eloszlatni a tévképzeteket és a tehetséggondozás területén is jól használható.

#### Hivatkozások

- [4.1] <http://intellisense.education>
- [4.2] <http://www.algodoo.com>
- [4.3] <https://phet.colorado.edu/en/simulations>
- [4.4] [https://drive.google.com/open?id=0B4QD79mdT\\_S4T2pNUTVsY0tjajQ](https://drive.google.com/open?id=0B4QD79mdT_S4T2pNUTVsY0tjajQ)
- [4.5] T-L Toh: A survey on the teaching of relative velocity and pupils' learning difficulties, in: Asia-Pacific Forum on Science Learning and Teaching 7(2); Article8;2006
- [4.6] [https://drive.google.com/open?id=0B4QD79mdT\\_S4bFVyY3NxSzdWNTQ](https://drive.google.com/open?id=0B4QD79mdT_S4bFVyY3NxSzdWNTQ)

[4.7] Dér J., Radnai Gy., Soós K.: Fizikai Feladatok I., Holnap kiadó, Bp., 2006, p48

#### **A 4. fejezet alapjául szolgáló publikációk:**

- 1.) Zs. Szigetlaki, T. Tóthné Juhász: Computer-aided measurement and simulation using LabCamera and Fizika software in physics education in: TPI-15 Conference Proceedings ed.: A. Király, T. Tél, Budapest, pp243-248, 2016.
- 2.) Tóthné Juhász T., Juhasz A., Szigetlaki Z.: A simulation based method for teaching reference frames in secondary schools, Universal Journal of Educational Research 5(12), pp2241-2250, 2017
- 3.) Tóthné Juhász T., Juhász A.: Teaching critical points in dynamics using simulations (összeállítás alatt)



## 5. A FIZIKA program alkalmazásának eredményességét vizsgáló oktatási kísérletek

Az előző fejezetben bemutatott FIZIKA programmal való munka során meggyőződésünké vált, hogy a kinematika tanításában jelentős módszertani többletet adhat a FIZIKA szimulációk használata.

A középiskolában a kilencedik évfolyamon tanítjuk az egyszerű mozgások kinematikáját. (Egy évtizede még ugyanezt a tananyagot a gimnázium 10. évfolyamán és a jelenleginél magasabb heti óraszámokban tanítottuk.) A téma előbbre hozása és az óraszám csökkenése lényegesen megnehezítette a diákok számára a tudásanyag elsajátítását. Ez főleg azokon a területeken érezhető, ahol a témakör jelentős absztrakciót kíván, ilyen tipikus terület a grafikus szemlélet kialakítása, a mozgás grafikonjai közötti kapcsolat megtanítása. A kísérletünk tervezésekor abból a feltevésekből indultunk ki, hogy

- 1) A témakör idő előtti tanítását eredményesebbé teheti, ha a fokozottan vizuális beállítottságú fiatalok számítógép segítségével is kísérletezhetnek.
- 2) A program használata segíti a tanult fogalmak tartalmi megértését és a kreatív fizikai problémamegoldást.
- 3) A szimulációs program segít a grafikus szemlélet kialakításában. A mozgások absztrakt leírását adó grafikus ábrázolások lényegi megértése nagyon hasznos a problémamegoldás szempontjából, ezért az, hogy a program segítségével néhány kattintás után megjeleníthetjük egy adott mozgás hely-idő, sebesség-idő vagy gyorsulás-idő grafikonját, segít abban, hogy a diákok több mozgásgrafikont láthassanak, mint a hagyományos módszerekkel folyó oktatásban. A grafikonok közötti gyors váltás elősegíti a grafikonok közötti kapcsolat begyakorlását, az ezzel kapcsolatos összefüggések megértését.
- 4) Grafikus módszerekkel bizonyos feladatok megoldása egyszerűbbé válhat, és sok olyan probléma is megoldható, ami a kilencedik évfolyamon a matematikai ismeretek hiánya miatt a korábban megszokott módon nem lenne lehetséges (pl. mozgó vonatkoztatási rendszerből megoldott feladatok). Így a program a tehetséggondozás területén is jól használható.

Ezen feltevések igazolására 2014-ben egy kisebb, tájékoztató jellegű oktatási kísérletet szerveztünk, mely várakozásunkon felüli pozitív eredményt hozott. Eredményeink ellenőrzésére 2015-2016-ban egy újabb, több diák és egymástól jelentősen különböző középiskolák (vezető gimnáziumuk és szakközépiskolák) bevonásával végzett oktatási kísérletet szerveztünk, melynek eredményei megerősítették a korábbi tapasztalatokat.

## 5.1. A 2014-2015-ös oktatási kísérlet megszervezése, lebonyolítása

Az első oktatási kísérletet, amellyel a FIZIKA program hatékonyságát és az általunk felállított hipotéziseket kívántuk tesztelni, 2014 őszén szerveztük meg 5 iskola részvételével. Minden egyes iskolából két kilencedik évfolyamos csoport vett részt a kísérletben: egy kísérleti és egy referenciacsoport. A kísérleti csoport esetén (összesen 80 fő) a tanár az órákon frontálisan, és a diákok egyéni foglalkoztatásában (pl. házi feladat, fakultatív feladat) egyaránt hangsúlyosan használta a mozgás-szimulációs programot, amelyhez előre megírt szimulációkat és feladatlapokat kapott. Természetesen ez nem kizárólagos módszerként történt, a hagyományos módszereket („élő” kísérletek, tanári magyarázat, problémamegoldás, számonkérés, stb.) a szaktanár belátása szerint szintén alkalmazta. A referenciacsoportban tanuló diákok (összesen 83 fő) nem foglalkoztak a programmal, csak hagyományos módon tanultak.

A kísérletben az ország különböző pontjain (többek között Budapest, Eger, Szombathely) található iskolák vettek részt, amelyek különböző profillal (volt köztük vezető egyetemi gyakorlóiskola és művészeti szakközépiskola is), és ezért nagyon különböző gyerekanyaggal rendelkeztek. A kísérleti és a referencia-csoportokat igyekeztünk úgy kiválasztani, hogy lehetőleg egyforma képességűek legyenek és mindkettőben ugyanaz a tanár tanítson (ez utóbbit csak részben sikerült megvalósítani), mivel azt szerettük volna, ha a kísérlet kimenetelét nem a tanár személye, hanem valóban a számítógépes program használata befolyásolná.

A FIZIKA mozgás-szimulációs program iskolai alkalmazásának hatékonyságát a kinematika fejezet kísérleti illetve hagyományos feldolgozása után témazáró dolgozattal vizsgáltuk. (A kísérletben résztvevő összes diák ugyanazt a dolgot írta meg.) A dolgozat összeállítása és kiértékelése az én feladatom volt a munkacsoporton belül. A témazáró dolgot az általános tantervi követelményeknek megfelelően állítottam össze, nem szerepeltek benne a program használatával közvetlenül összefüggő feladatok. Ezzel azt kívántam biztosítani, hogy a kísérleti és a referenciacsoport záró dolgozatainak eredménye összehasonlítható legyen, hiszen a dolgozat csak a tantervi követelményekben szereplő fizikai tudásanyagot és kompetenciákat kérte számon.

## 5.2. Témazáró dolgozat eredményeinek elemzése (2014-2015)

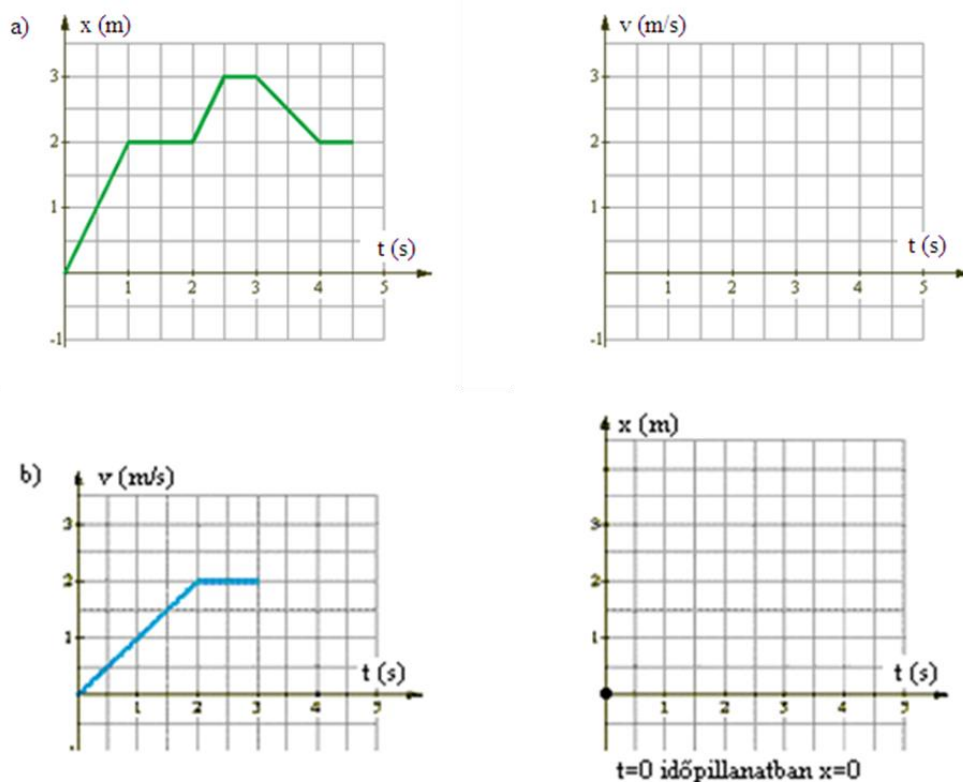
A témazáró dolgozatot - amely 7 feladatból állt - igyekeztem úgy összeállítani, hogy legyenek benne könnyebb, közepesen nehéz, és kifejezetten újszerű, nehéznek számító feladatok is. A dolgozathoz itt csak 2 feladatot és az azokra kapott eredményeket ismertetem, de a teljes témazáró dolgozat megtalálható a B függelékben.

### A témazáró 3. feladata

Az alábbi feladatban adott egy-egy mozgás valamely grafikonja.

- *A megadott grafikon segítségével rajzold be az előre elkészített koordinátarendszerbe a tengelyen megjelölt másik mozgás-jellemző mennyiség időfüggését!*

Figyelj arra, hogy a grafikont méretarányosan készítsd el! (5-5 p)



5.1. ábra. A témazáró 3. feladatának ábrái.

#### A 3. feladat célja:

A feladatban a mozgást jellemző grafikonok közötti váltás képességét szerettem volna ellenőrizni azzal a nehezítéssel, hogy most nem kiválasztani kellett a megfelelő átváltott grafikont az általunk előre megrajzoltak közül (mint egy korábbi, könnyebb feladatban), hanem a diákoknak maguknak kellett megrajzolniuk méretarányosan a kérdéses grafikont.

Az a) részben  $x-t$  grafikon alapján kellett  $v-t$  grafikont rajzolni, az eredeti grafikon meredekségéből kiszámolva a sebesség számértékét. A feladat b) részben a fordított irányban kértem a megfeleltetést: a sebesség – idő grafikon két szakaszára vonatkozóan ki kellett számítani a megtett utat, mint a sebesség-görbe alatti területet, majd ezt kellett ábrázolni.

A kérdésekkel azt a feltételezésünket szerettem volna ellenőrizni, hogy a szimulációs programot használó diákokban, akik feltételezhetően többször oldottak meg önállóan hasonló feladatokat (így több lehetőséget kaptak a gyakorlásra), jobban rögzülhetett a módszer. Különösen a feladat b) része volt érdekes, hiszen tapasztalatom szerint a visszafelé gondolkodás mindig nehézséget okoz a középiskola kilencedik osztályában az átlagos képességű diákoknak.

Elért eredmények:

5.1. táblázat. A témazáró 3. feladatának eredményei

3. feladat	A iskola		B iskola		C iskola		D iskola		E iskola	
	kís.	ref.	kís.	ref.	kís.	ref.	kís.	ref.	kís.	ref.
%-os eredmény	93%	58%	49%	38%	74%	37%	79%	45%	18%	5%

Az eredmények egyértelműen igazolták feltételezéseinket. A különbség mindenhol jelentős volt a kísérleti csoport javára. A részeredmények elemzésekor az is egyértelművé vált, hogy különösen a feladat b) részében volt nagyobb különbség a csoportok közt. Ez érthető, hiszen a sebesség fogalmának értelmezése közvetlenül kötődik az út/idő hányadoshoz, illetve az elmozdulás–idő grafikon meredekségéhez. A sebesség időfüggéséből visszaszámolni az út–idő függvényre sokkal nehezebb, nyugodtan mondhatjuk, hogy grafikus ábrázolási gyakorlat híján szinte lehetetlen.

A százalékos eredményeket az 5 csoportra összesítve a következő átlagot kaptuk:

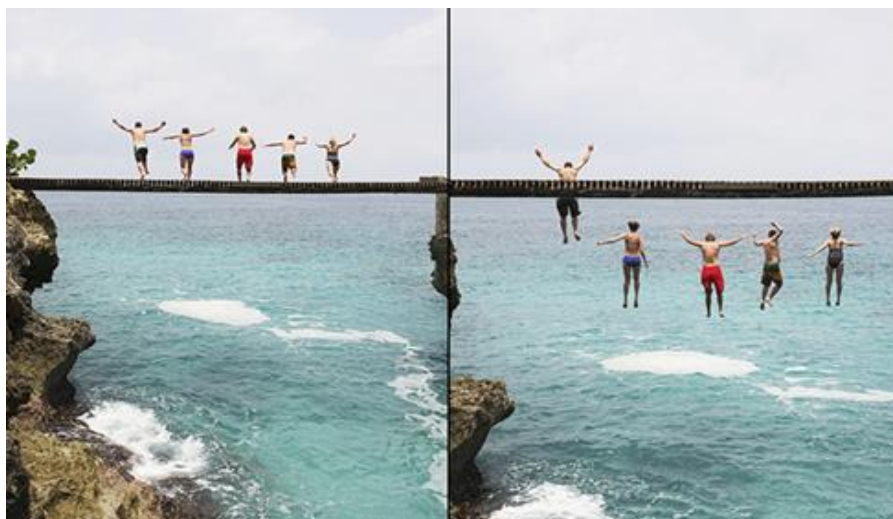
Kísérleti csoportok: 63%

Referenciacsoportok: 37%

**A témazáró 6. feladata**

A képen öt fiatal látható, amint leugranak egy hídról (függőleges kezdősebesség nélkül). A balról második lány testmagassága 1,7 méter.

- Végezz a képen méréseket vonalzóval, majd számold ki, hogy
  - a második kép készítése előtt mennyivel ugrott le a balról második lány
  - mennyivel később ugrott le a bal szélső ember, mint az a) pontbeli lány. (12 p)



5.2. ábra. A témazáró 6. feladatában elemzendő kép.

A 6. feladat célja:

A feladatban, az iskolai gyakorlatban szokatlan módon, egy fényképfelvétel elemzése alapján kellett megválaszolni a feltett kérdéseket. A szabadeséssel kapcsolatos számítások elvégzéséhez a fotón vonalzóval kellett a diákoknak méréseket végezni, majd a kapott értékeket egy, a fotón szintén lemérhető megadott adat segítségével lehetett visszaszámolni valós adatokká. Ezt a feladatot azért tettem be a témazáró dolgozatba, mert kíváncsi voltam, hogy a kísérlet során a szimulációs kísérletek eredményeihez kapcsolódó problémamegoldás, amely a hagyományos feladatmegoldástól sokban különbözik, jelentett-e segítséget, biztatást a diákok önálló kreatív gondolkodásához, gyakorlatias leleményességéhez.

A feladat újszerűsége miatt számítottam rá, hogy a diákok egy része hozzá sem tud kezdeni az adatgyűjtéshez, hiszen olyan feladatokhoz vannak szokva, ahol a feladat által megadott adatokkal a számítások azonnal elvégezhetőek. Reméltem ugyanakkor, hogy azok a diákok, akik a hagyományos feladatok mellett újszerű, interaktív számítógépes szimulációkhoz kapcsolt feladatokkal is többször találkoztak, ahol a feladat megoldásához aktívan cselekedniük is kellett (szimulációs kísérleteket futtatni, számítógépes grafikonokat értelmezni, adatokat leolvasni) nagyobb bátorsággal kezdenek neki egy számukra szokatlan, újszerű feladatnak is.

Elért eredmények:

5.2. táblázat. A témazáró 6. feladatának eredményei

6. feladat	A iskola		B iskola		C iskola		D iskola		E iskola	
	kís.	ref.	kís.	ref.	kís.	ref.	kís.	ref.	kís.	ref.
%-os eredmény	55%	43%	54%	32%	48%	29%	78%	38%	54%	31%

A táblázat %-os eredményei mutatják, hogy a feladat valóban nehéznek bizonyult a diákok számára. Az eredmények egyértelműen igazolták, hogy a kísérleti csoport diákjai nagyobb kreativitást mutattak, nem ijedtek meg a szokatlan feladattól. (A kísérleti csoportok esetén jóval kevesebb 0 pontos eredmény született, azaz szinte mindenki hozzákezdett a feladathoz, és eljutott a méretarány megállapításáig, és a távolságok meghatározásáig. A kísérleti csoportokban ezen felül a maximális pontszámot szerzett diákok is közel kétszer annyian voltak, mint a referenciacsoportokban.)

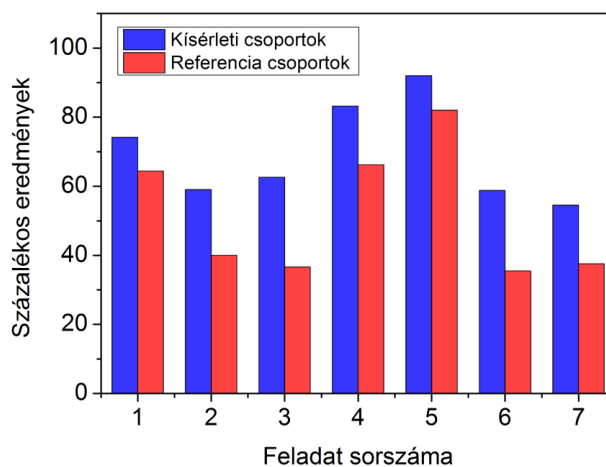
A százalékos eredményeket az 5 csoportra összesítve a következő átlagot kaptuk:

Kísérleti csoportok: 59%

Referenciacsoportok: 36%

**Összesítés:**

A következő hisztogram (5.3. ábra) feladatonként mutatja az elért összesített eredményeket. Az ábrán a „százalékos eredmény”-en az átlagpontszám és a feladatra kapható összpontszám hányadosát értjük, százalékban kifejezve.



5.3. ábra. A témazáró dolgozat százalékos eredményei feladatonként a 2014-2015-ös oktatási kísérletben.

Az egyes feladatok részletes elemzése után arra jutottunk, hogy a könnyebb feladatok esetén (pl. 1. és 5.) nehéz nagy különbséget kimutatni a kísérleti csoport diákjai javára, azonban a közepesen nehéz feladatok esetén már jelentősebb a különbség. Ez azt jelzi, hogy a minimumkövetelmények szempontjából a program látszólag nem sok többletet ad, azt a tanárok segédeszközök nélkül is megtanítják, viszont jelentős szerepe lehet a programnak a közepesen nehéz témák tanításakor. A komoly absztrakciós szintet és lényeglátást kívánó nehéz feladatok a tehetséges diákoknak szánt kihívások. Az adottságokat a szimulációval támogatott oktatásban sem lehet pótolni, de a meglévő képességeket hatékonyan lehet fejleszteni. Ezt bizonyítja, hogy a dolgozat nehéz feladatainak megoldása során a kísérleti csoportokban egyértelműen több maximális pontszámú megoldás volt, mint a referenciacsoportban. A szimuláció használata tehát az átlagos diákok fejlesztésében bizonyult a leghatékonyabbnak, de ugyanakkor a tehetséggondozásban is alkalmazhatónak tűnt.

A szimulációs program használatának egyértelmű előnye, hogy a diákok rengeteg grafikont láttak, elemeztek, így hozzászóltak ahhoz, hogy újszerű feladatokat is meg tudnak oldani, ezért nem ijedtek meg, ha egy hagyományostól eltérő feladattal találkoztak.

Természetesen a viszonylag kis számú iskolát és kevés diákot átfogó kísérletünk eredményét csak tájékozdó érvényűnek tekintettük, és a tanároktól kapott visszajelzések alapján igyekeztünk módosítani, finomítani az oktatási kísérletet a következő tanévben való megismétlés előtt.

### **5.3. A 2015-2016-os oktatási kísérlet lebonyolítása és eredménye**

A második FIZIKA programra alapuló oktatási kísérletre elsősorban az ELTE „fizika tanítása” PhD-kurzus hallgatói közt kerestünk lelkes, gyakorló középiskolai tanárokat, de más érdeklődők is voltak, akik jelentkezését szintén elfogadtuk. Igyekeztünk nagyobb mintát biztosítani, mint az előző évi tájékozdó jellegű kísérletben, így a kísérleti csoportok összesen 247, a referencia csoportok pedig 262 diákot foglaltak magukban.

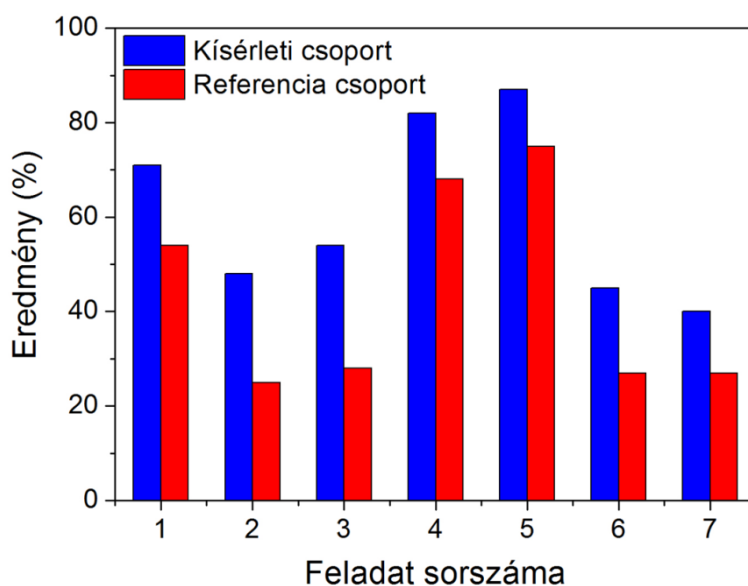
Az előző évhez képest előrelépés volt, hogy a jelentkező tanároknak egy egész napos technikai és módszertani ismertetőt, bemutatót tartottunk, ahol számos példán keresztül képet kaphattak az új módszer alkalmazásáról, és ki is próbálhatták azokat. Itt minden résztvevő a saját számítógépével (laptopjával) dolgozott, ami azért volt hasznos, mert így segítséget kaptak a program feltöltésében és az esetlegesen felmerülő technikai problémák elhárításában is.

Hasonló bemutatókat (tananyagkövető rendszerben) a kísérlet időtartamára körülbelül havonta terveztünk, de időközben be kellett látnunk, hogy a tanárok leterheltsége sajnos nem teszi

lehetővé ezt a plusz időáldozatot. Így ezek a rendszeres, központilag szervezett konzultációk elmaradtak és csupán az egyes tanárok által alkalmilag felvetett, konkrét technikai vagy tartalmi kérdésekre szorító internetes konzultáció, segítségnyújtás maradt.

A résztvevő tanároknak felhívtuk a figyelmét arra, hogy a kísérleti oktatást nem minden más módszer kizárásával képzeljük el, hanem a már bevált korábbi módszerek hangsúlyos kiegészítéseként. Az iskolai munkához a tanárok részletes írásbeli szakmódszertani segédanyagokat, valamint előre elkészített szimulációkat kaptak. A tanári szakanyagokhoz mellékelünk a diákok számára készített, akár házi feladatként is használható, elektronikus feladatlapokat is, erre mintapéldát a C Függelék tartalmaz.

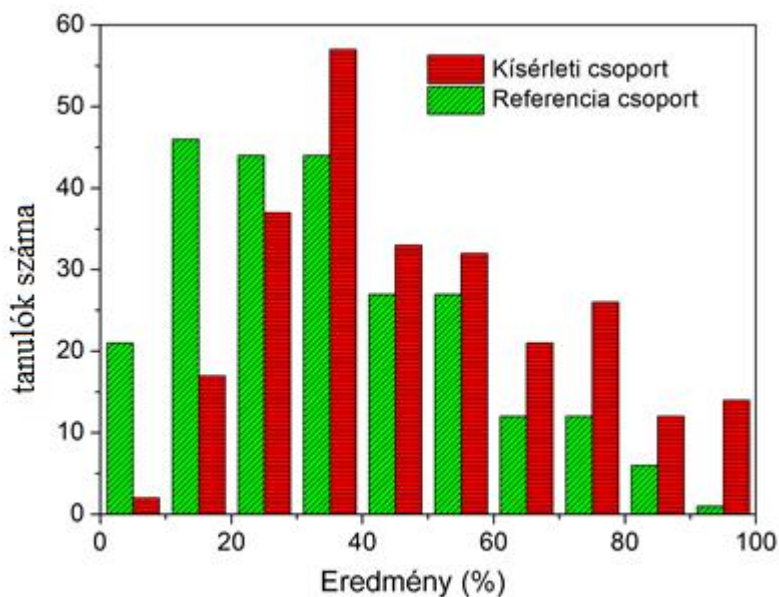
A témazáró dolgozat eredményei nagyon hasonlóak voltak az előző évi oktatási kísérletéhez, a feladatokban elért százalékos eredményeket az 5.4. ábra mutatja:



5.4. ábra. A témazáró dolgozat százalékos eredményei feladatonként a 2015-2016-os oktatási kísérletben.

Az előző évihez képest nagyobb minta lehetővé tette, hogy ebben az évben az összpontszám eloszlását is megvizsgálhassuk. Az elérhető százalékos eredményt tízes intervallumokra osztottuk (0-10%; 10%-20%,...) majd minden egyes intervallum esetén megnéztük, hogy hány diák ért el az adott kategóriához tartozó eredményt, így az 5.5. ábrán látható eloszlást kaptuk.





5.5. ábra. A témazáró dolgozat eredményeinek eloszlása a 2015-2016-os kísérletben.

Látható, hogy a kísérleti és a referenciacsoportok eredményei eltolódtak egymáshoz képest, azaz jól megfigyelhető különbség van a két csoport teljesítménye között. A nagyobb mintán végzett kísérlet ismét megerősítette a program használatával kapcsolatos hipotéziseinket.

Természetesen minden kísérlet újabb kérdéseket vet fel, amelyek alapján a következő mérést szeretnénk még jobban pontosítani annak érdekében, hogy a kísérletben valóban azt mérjük, amit eredetileg is szeretnénk. Ebben az évben merült föl bennünk az a kérdés, hogy vajon mennyire egyenlő a referencia és a kísérleti csoportok alapképessége, azaz mennyiben befolyásolja a kísérlet sikerességét az, hogy a tanár hajlamos ösztönösen a jobb képességű csoportját kiválasztani egy olyan feladatra, ami újszerű, és számára is kihívást jelent. Ezt a hibalehetőséget a következő kísérletben egy bemeneti mérés segítségével kívánjuk kiküszöbölni.

#### 5.4. Jelenleg futó és a jövőben tervezett oktatási kísérletek

Jelenleg kutatócsoportunk a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Program pályázatának keretében vizsgálja tovább a FIZIKA szimuláció fizikatanításban való alkalmazásának hasznosságát.

A 2017-2018-as tanévben egy nagymintás oktatási kísérletet szerveztünk, amelyben 13 iskola vett részt (265 diák a kísérleti, 291 diák a referenciacsoportokban), a korábbiakkal megegyező feltételekkel (iskolánként 2 hasonló csoport, azonos tanár). Az oktatási kísérlet témája most a dinamika volt, így bemeneti mérésenként a csoportok kinematika témazáróját tudtuk alapul venni, ezzel

is próbálva figyelembe venni a kísérleti és a referenciacsoportok között esetlegesen fennálló eredeti teljesítménykülönbséget.

A tanárok számára összeállított segédanyagban rengeteg útmutatást és javaslatot adtunk az egyes témakörökben alkalmazható szimulációkkal és azok használatával kapcsolatban. Mivel úgy tapasztaltuk, hogy a tanárok ideje szűkös, ezért ismét előre elkészített szimulációkat biztosítottunk a számukra, amelyekhez elektronikus feladatlapok is kapcsolódtak.

A kísérlet záró méréseként két különböző dolgozatot is megírtunk a diákokkal: egy általunk összeállított témazárót, amely a magyar oktatásban hagyományos dolgozatokhoz hasonló, és egy nemzetközileg elismert, úgynevezett Hestenes-tesztet [5.1], amely azt vizsgálja, hogy mennyire sikerült a diákoknak áttérnie az arisztotelészi szemléletről a newtoni szemléletre.

A tesztek eredménye jelenleg is feldolgozás alatt van, és bár a dinamika témakörének tanítása nem olyan egységes, mint a kinematikáé, reméljük, hogy így is sikerül meggyőző eltérést kimutatni a csoportok teljesítménye között.

Jövőbeni kutatási terveink között szerepel, hogy az egyes anyagrészek átfogó feldolgozása helyett olyan, úgynevezett „kritikus pontokat” keressünk a mechanika témakörében, ahol a program használata jelentős segítséget adhat a fogalmak jobb megértésére, a tudás elmélyítésére. Ilyen kritikus pontok a 4. fejezetben már ismertetett vonatkoztatási rendszerek vagy a körmozgás dinamikája. Jelenleg ezeknek a kritikus témaköröknek azonosítása és feldolgozása folyik, és 2019-ben ezek hatékonyságára tervezünk oktatási kísérletet szervezni.

## **Hivatkozások:**

[5.1] D. Hestenes, M. Wells és G. Swackhammer, „Force concept inventory”, *The physics teacher*, (1992)

## **Az 5. fejezet alapjául szolgáló publikációk:**

1.) T. Tóthné Juhász: A computer simulation based teaching experiment, in: *TPI-15 Conference Proceedings* ed.: A. Király, T. Tél, Budapest, pp249-254, 2016.

2.) T. Radnai, T. Tóthné Juhász, A. Juhász, P. Jenei: Educational experiments with motion simulation programs: can gamification be effective in teaching? in: *MPTL-2017 Conference Proceedings* (Megjelenés alatt)

## Összegzés

Doktori munkám során azt vizsgáltam, hogy a számítógépes kísérletek hogyan alkalmazhatóak a középiskolai fizikaoktatásban. Rengeteg kutatás folyik jelenleg is e területen, ehhez csatlakozva én olyan kísérleteket dolgoztam ki, amelyek a fizikatanárok széles köréhez szólnak, azaz nem igényelnek programozói ismereteket. Törekedtem arra is, hogy az általam használt programok ingyenesen letölthetőek és könnyen kezelhetőek, tehát mindenki számára hozzáférhetőek legyenek.

A számítógépes kísérletek, szimulációk megalkotásánál mindig az vezérelt, hogy segítségükkel megoldást találjak egy-egy témakör tanítási nehézségeire. Az Audacity programmal a hangtan, a LabCamera programmal az elektromosság, a FIZIKA programmal pedig a mechanika témakörében dolgoztam ki olyan kísérleteket, amelyek átsegítik a diákokat a fogalmi nehézségeken, a tipikus buktatókon. Kísérleteimen keresztül megmutattam, hogy a programok széles spektrumon alkalmazhatóak: az átlagos, középszintű fizikát tanuló diák számára éppúgy hasznosak, mint a tehetséggondozásban részt vevőknek. A második fejezetben - a kerettanterv szerinti tananyagtól kicsit eltávolodva - a modern fizika egy népszerű témaköre, a káoszelmélet középiskolai tárgyalására mutattam egy lehetséges módszert, szakköri feldolgozáson belül.

Munkám során egyes kvalitatív, hagyományosan csupán demonstrációs célra használható kísérleteket sikerült újragondolni és a számítógépes programok segítségével mérőkísérletté átalakítani. Tapasztalatom szerint a mérőkísérleteknek a középiskolai tehetséggondozásban szemléletformáló szerepe van. A Fizika szimulációs program segítségével pedig szimulációsorozatokat dolgoztam ki, amelyek segítenek a mechanika egyes kritikus pontjainak részletesebb és alaposabb megértésében.

A doktori értekezés első négy fejezetében a kísérleteket ismertettem – néhol a hely hiánya miatt csak a legfontosabbakat kiemelve. A leírt kísérletek mindegyikét órán, szakkörön önálló vagy csoportmunkában diákjaimmal elvégeztem. Egyes kísérleteket projektmunkában valósítottunk meg.

Diákjaim visszajelzése és saját tapasztalataim azt támasztották alá, hogy a kísérletek széles körben használhatók a középiskolai oktatásban.

A mechanikai szimulációk eredményességét több iskolára kiterjesztett, széles körben szervezett oktatási kísérlet keretében vizsgáltuk.

Munkám az értekezés megírásával nem zárul le. Az ELTE-MTA Tantárgy-Pedagógiai Kutatócsoport tagjaként szeretném azt tovább folytatni.

## Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Dr. Juhász Andrásnak, témavezetőmnek, hogy a kezdetekkor ismeretlenül is elvállalt tanítványának, és végigvezetett egy olyan munkán, amit egyedül a magam erejéből és kitartásából nem tudtam volna végigcsinálni. Köszönöm a sok biztatást, a közös munkát, a rengeteg időt, amelyet cikkeim és disszertációm aprólékos átnézésével töltött és köszönöm jobbító szándékú tanácsait is.

Köszönöm Dr. Tél Tamásnak, hogy a doktori iskola vezetőjeként féltő szeretettel követte végig a munkámat, a megfelelő időben érkező biztatásai kulcsfontosságúak voltak abban, hogy ez a disszertáció elkészüljön.

Mindkettőjüknek köszönöm, hogy a Fizika Tanítása Doktori Iskola programjának létrehozásával és a rengeteg bele fektetett energiával lehetővé tették, hogy a tanárok számára is megnyíljon egy élvezetes, kutatómunkával teli doktori program lehetősége.

Köszönöm Dr. Jenei Péternek az oktatási kísérletek szervezését, az ezekben végzett közös munkát, segítőkészségét és nyitottságát.

Köszönöm Szigetlaky Zsoltnak, hogy az általuk kidolgozott FIZIKA és LabCam programokat a kezdetektől fogva a tanárok igényeihez igazította, és hogy a fizikatanároknak szabad hozzáférést adott biztosított ezekhez a szoftverekhez.

Köszönettel tartozom Gócz Évának és Radnai Tamásnak a közös cikkek megírásáért.

Köszönöm a Karinthy Frigyes Gimnázium vezetőségének, hogy a doktori programban való részvételemet anyagilag és minden egyéb tekintetben támogatták. Külön köszönöm két kollégámnak, Gróf Andreának és Tasnádi Anikónak, hogy ezt az utat együtt járhattuk végig, az ő biztatásuk nélkül neki sem fogtam volna az egésznek.

Végezetül köszönöm a számomra legfontosabbaknak, a családomnak, hogy támogattak a hosszú évek során a tanulásban, a kutatásban. Köszönöm türelmüket és szeretetüket, amellyel elviselték, hogy nem mindig jutott rájuk annyi idő, amennyit szerettem volna.

## Summary

In my doctoral research I focused on the use of computer based experiments in secondary physics education. There are many current researches worldwide in this topic, so I tried to specialize in experiments that don't require programming skills, therefore are suitable for all physics teachers. My main aim was to create experiments that are accessible to anyone, therefore I used free software that are easy to handle.

In designing new experiments my goal was to find a possible solution to teaching difficulties arising in different topics. In case of the topics of sound waves, electricity and mechanics I used software Audacity, LabCamera and FIZIKA respectively to create experiments that help students avoid typical mistakes and deepen their understanding of difficult concepts. My experiments prove that these software can be used for a wide range of students: they are useful for teachings both standard and advanced level. As well as covering topics of classical physics, I also introduced a possible method for teaching basic concepts of chaos theory, a popular topic of modern physics not yet included in the national syllabus.

During my research I managed to redesign qualitative experiments (traditionally used for demonstration only) improving them to the level of quantitative investigations, which help students gain a better understanding of different concepts. The scope of my work was widened by creating sets of simulations using FIZIKA simulation software. These simulations help students explore and therefore understand better some critical subtopics of mechanics.

In the first four chapters of my dissertation the most important and successful of these new experiments were presented and analysed. All of these experiments were carried out by my students either on the lessons or during extracurricular activities, during which the students worked either in groups or individually. I also tried experiments in the frame of project-work, which I found very successful in inspiring students.

Feedbacks from my students and my own experience showed that these experiments can be used for all levels in secondary education.

The effectiveness of the use of simulations in the topic of mechanics was tested in an educational research with the participation of several schools from all over Hungary.

I will continue to carry on my research in the future as a member of the ELTE-MTA Content-Pedagogy Research Group.

## A Függelék: További FIZIKA szimulációk

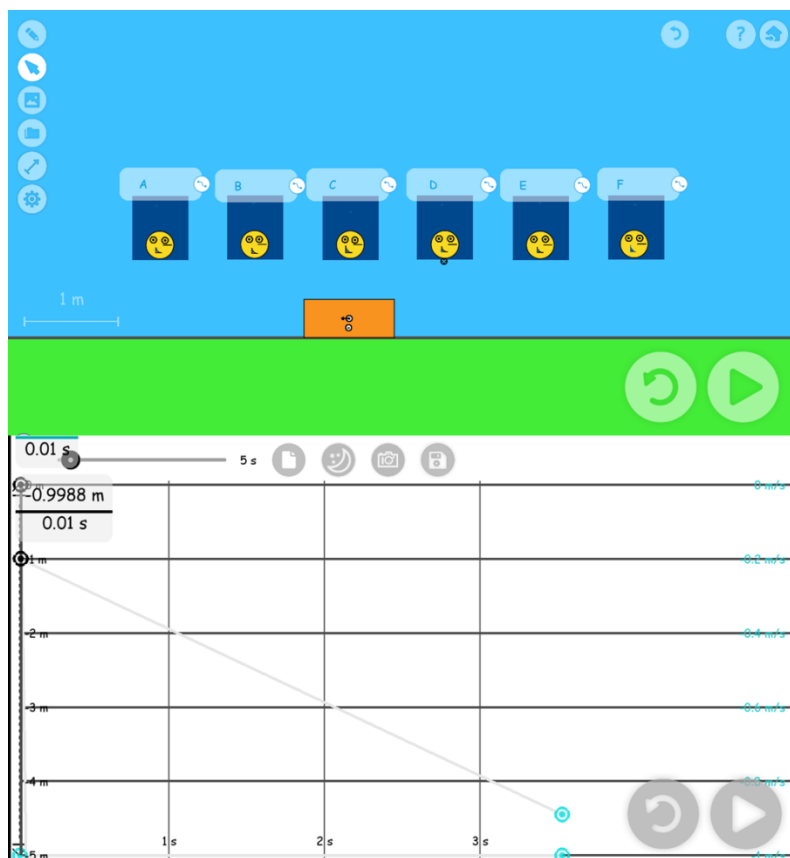
### A.1. A negatív előjelű sebesség

Ha sikerült elosztatnunk a diákoknak azt a gyakori tévképzetét, hogy a hely-idő grafikon mindig átmegy az origón, a következő lépésben a sebesség vektor jellegének kiemelésére érdemes összpontosítanunk.

Nagy csapdát rejt magában az a tény, hogy míg például az angol nyelvben külön szó van a sebesség nagyságára (speed), illetve magára a vektoriális sebességre (velocity), addig magyarul nincs rá megkülönböztető szavunk. Így könnyen összerosódik a diákokban a hétköznapi nyelvben használt sebesség kifejezés (amely általában a sebesség nagyságát jelenti, pl. az autók sebességmérőjében) és a fizikában definiált vektoriális sebesség fogalma.

Ezt tovább ronthatja az a tény, hogy az kinematika első fejezeteiben az egyenes vonalú egyenletes illetve egyenletesen gyorsuló mozgás tárgyalás során a legtöbb mozgást úgy ábrázoljuk, hogy pozitív irányban mozogjon a test, amivel elhomályosítjuk azt az egyszerű tényt, hogy a sebesség vektor, amit egyenes mentén való mozgás esetén előjeles skalár helyettesít.

Ennek a hibának a kiküszöbölésére érdemes bemutatni az „reframe2” szimulációt, amely az „reframe1”-hez képest csak annyival változik, hogy az autó sebességét ellentétes irányba vettük föl, azaz a képernyő bal oldala felé mozog. Természetesen hasonlóan részletes tárgyalásban is végigvehető, mint az előző pontban bemutatott „reframe1” (pl. általános iskolásokkal), azonban átlagos képességű és tehetségesebb középiskolás diákok esetén elég az autó hely-idő és sebesség-idő grafikonját megvizsgálni egy-két külső szemlélő szempontjából. A sebesség negatív előjele a sebesség-idő grafikonról közvetlenül leolvasható, de a hely-idő grafikon negatív meredekségéből is látható (4.11. ábra).

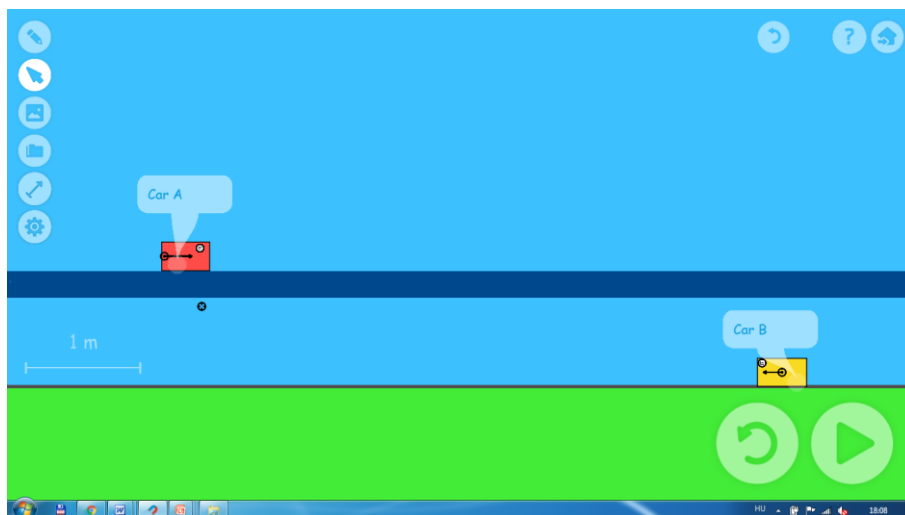


A.1. ábra. „reframe2” szimuláció. Az autó sebességvektora balra mutat (fent), ezért a sebesség előjele negatív, ami a grafikonokról (lent) közvetlenül is leolvasható.

A szimuláció bemutatása és közös megbeszélése nem vesz igénybe hosszú időt (kb. 10-15 perc részletes elemzéssel együtt), viszont fontos szerepe van abban, hogy a sebesség vektoriális jellegét tudatosítsa a diákokban, ami elengedhetetlen lépés az általános vektorfogalom kialakításához.

## A.2. Relatív sebesség egymással szemben mozgó autók esetén

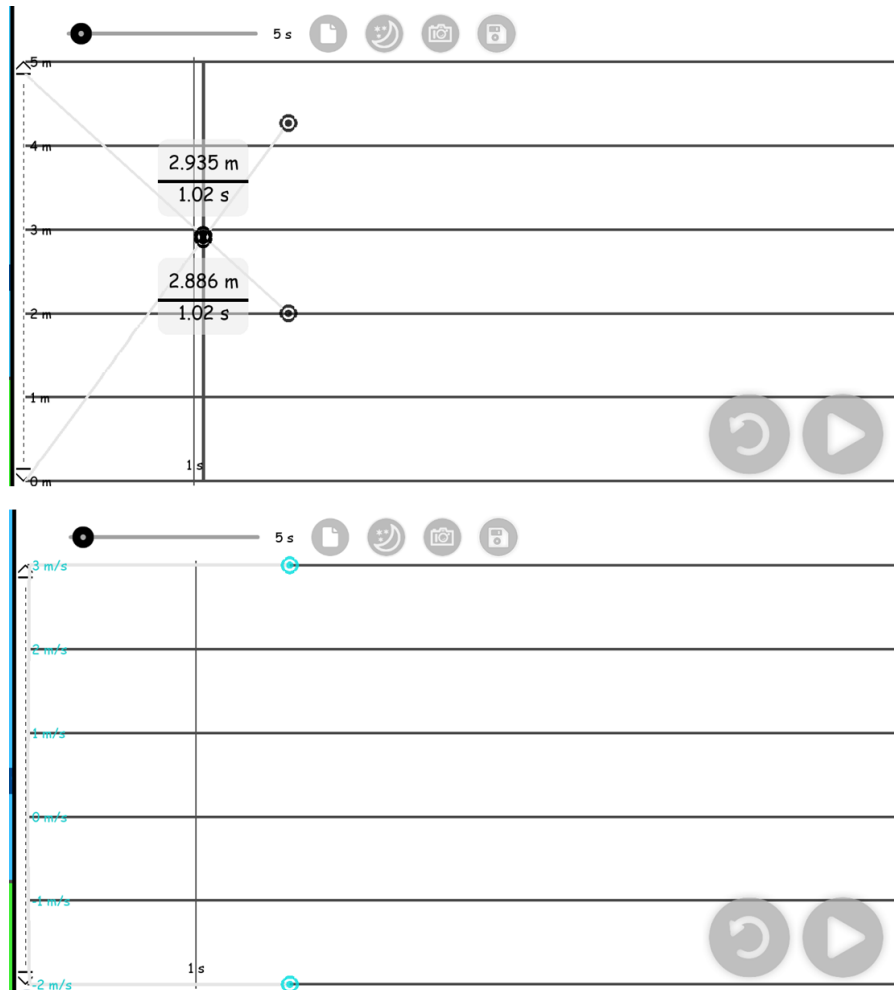
A „relspeed2” szimulációban szintén egyszerű téglatestek jelképezik az autókat, amik most egymással szemben mozognak egyenletes sebességgel. A szimuláció feldolgozása hasonló az előző esethez: a testek mozgásának grafikonjait először álló vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk, majd megnézzük, hogyan néz ki ugyanez a mozgás az egyik autóhoz rögzített vonatkoztatási rendszerből.



A.2. ábra. „Relspeed2” szimuláció kezdőképernyője. A két autó szemben halad egymással.

Az origó alapbeállításban a bal oldali autó (A) alá van rögzítve. Az autók sebessége rendre  $v_A = +3 \frac{m}{s}$  és  $v_B = -2 \frac{m}{s}$  (a sebesség negatív előjele azt mutatja, hogy a B jelű autó balra mozog), az autók közötti kezdeti távolság 5m. Ha a szimulációt elindítjuk, a program a testek hely-idő grafikonját rajzolja ki, de a virtuális szenzort sebességmérésre átállítva gyorsan kirajzoltathatóak a sebesség-idő grafikonok is:

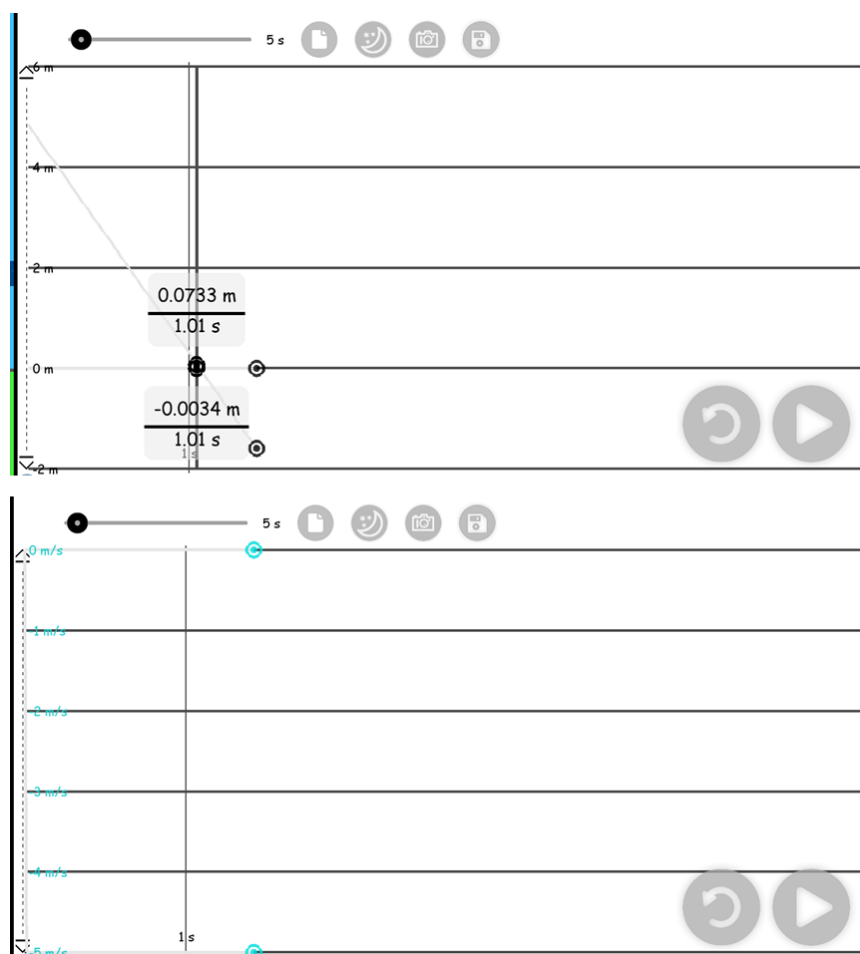




A.3. ábra. „Relspeed2” szimuláció. Az egymással szemben mozgó autók hely-idő (fent) és sebesség-idő (lent) grafikonjai nyugvó vonatkoztatási rendszerből.

A grafikonról látható, hogy a testek az indulástól számított 1s múlva találkoznak. (Ezt a hely-idő grafikonok metszéspontjának időkoordinátájából olvashatjuk le.)

Ezután a szimulációt visszaállítjuk az eredeti helyzetbe, és az origót áthelyezzük a bal oldali autóra (A), így ezután az eseményeket az A autóhoz rögzített vonatkoztatási rendszerből szemléljük. Az így kapott grafikonokat az A.4. ábra mutatja:



A.4. ábra. „Relspeed2” szimuláció. Az egymással szemben mozgó autók hely-idő (fent) és sebesség-idő (lent) grafikonjai az A jelű autóhoz rögzített vonatkoztatási rendszerből.

A grafikonokon szépen látszik, hogy az A jelű autó a saját magához rögzített vonatkoztatási rendszerben végig az origóban marad, hely-idő és sebesség-idő grafikonja is konstans 0. A másik autóval való találkozás időpontja változatlanul 1s, azonban most a B autó sebessége látszólag

$$u_B = -5 \frac{m}{s}.$$

Ez természetesen megfelel annak az elvárásunknak, hogy egymással szemben mozgó autók esetén a relatív sebesség a sebességek nagyságának összege. Tehetségesebb diákok esetén ismét érdemes megvizsgálni az

$$\underline{u}_{test} = \underline{v}_{test} - \underline{v}_{rendszer}$$

vektoriális egyenlet érvényességét. Mivel nyugvó rendszerben az autók sebessége  $v_A = +3 \frac{m}{s}$

és  $v_B = -2 \frac{m}{s}$  volt, ezért ha A autóhoz rögzítjük a rendszert, akkor

$$u_B = v_B - v_A = -2\frac{m}{s} - 3\frac{m}{s} = -5\frac{m}{s}$$

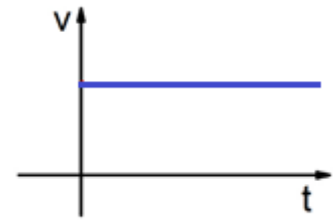
Hasonlóan tanulságos azt is megmutatni, hogy ha a B testhez rögzítjük a vonatkoztatási rendszert, akkor az A test relatív sebessége  $+5\frac{m}{s}$  lesz.

A vektoriális egyenlet általános érvényessége szemléletformáló jelentőségű: a relatív sebesség kiszámolása tulajdonképpen mindkét fenti esetben ugyanúgy történik. A sebességek vektor jellegét figyelembe véve kapjuk azt, hogy a relatív sebesség nagysága egyszer a sebességek nagyságának különbsége, egyszer pedig az összege lesz.

## B Függelék: Kinematika témazáró dolgozat

Az témazáró dolgozat megoldásait piros színnel jelöljük a megkülönböztetőség kedvéért.

1a. A következő grafikon egy egyenes vonalú mozgás sebesség – idő grafikonját mutatja.

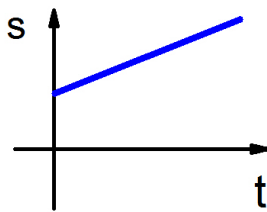


- Milyen mozgás grafikonját ismered fel benne? (1p)

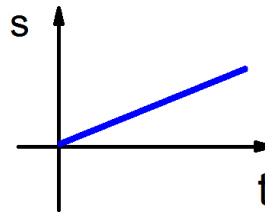
( A választ írd a kipontozott helyre!)

..... egyenes mozgás .....

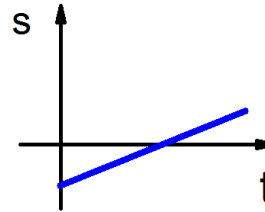
1b. Az alábbi grafikonok közül melyik lehet a fenti sebesség – idő grafikonnak megfelelő hely – idő grafikon? (2p)



A)



B)



C)

Az előző három közül bármelyik

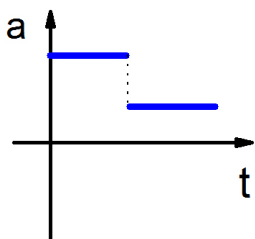
D)

( A jó válasz betűjelét írd a keretbe! )

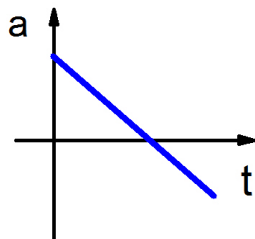
D

2. Egy autó egyenes sebességgel halad, majd hirtelen fékez, és egy lassabb, de szintén egyenes tempóban halad tovább.

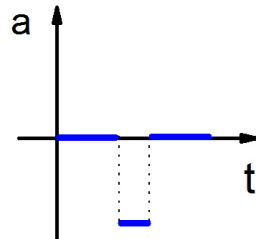
- Mely ábra mutatja legjobb közelítéssel a mozgás gyorsulás – idő grafikonját? (2p)



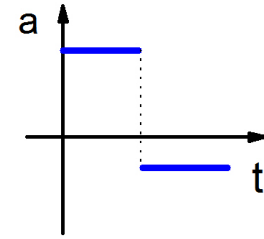
A)



B)



C)



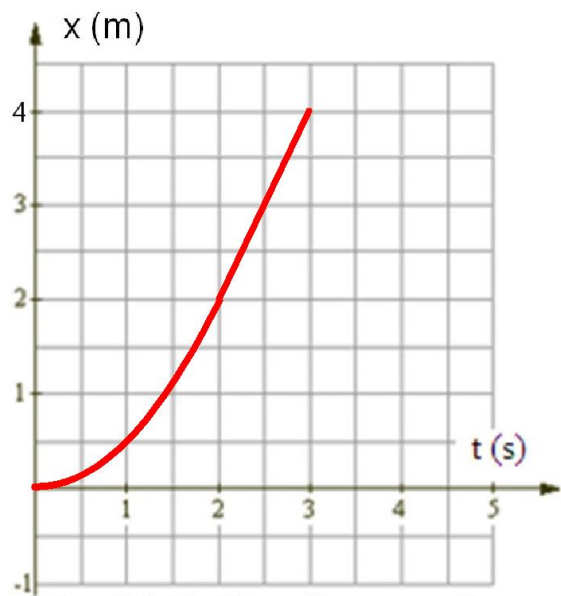
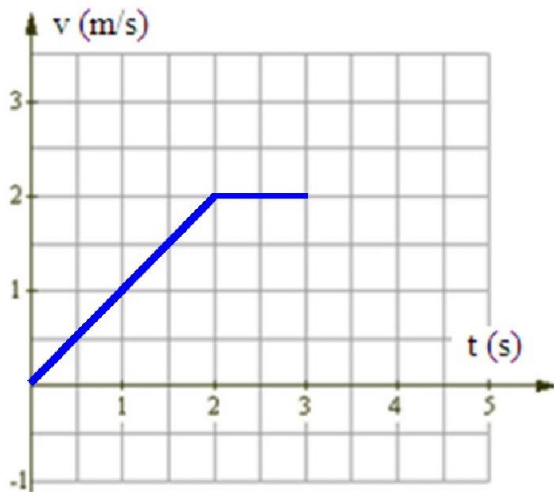
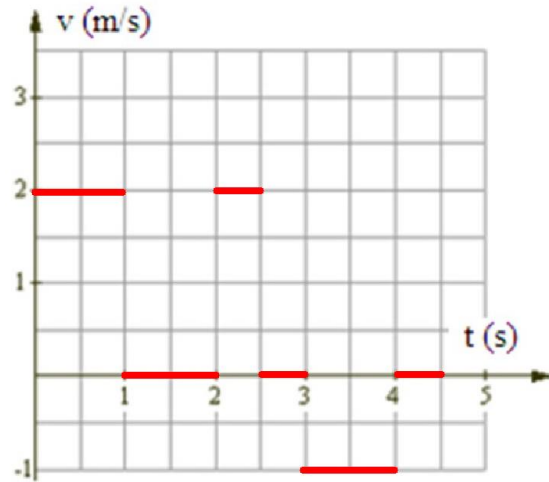
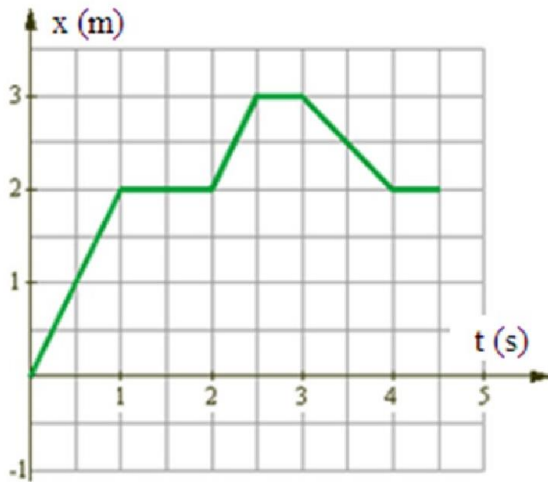
D)

( A jó válasz betűjelét írd a keretbe! )

C

3. Az alábbi feladatban adott egy-egy mozgás valamely grafikonja.

- A megadott grafikon segítségével rajzold be az előre elkészített koordináta-rendszerbe a tengelyen megjelölt másik mozgás-jellemző mennyiség időfüggését! (Figyelj arra, hogy a grafikont méretarányosan készítsd el!) (5-5 p) **A megoldás a jobb oldali grafikonokon látható piros színnel.**



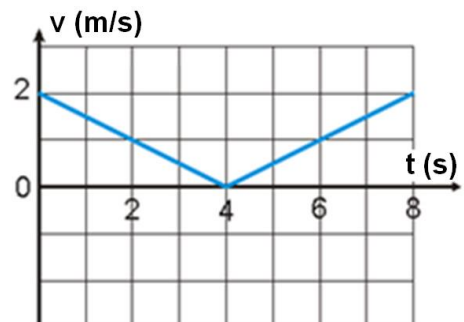
$t = 0$  időpillanatban  $x = 0$

4. Az alábbi ábra egy biciklis sebesség – idő grafikonját mutatja.

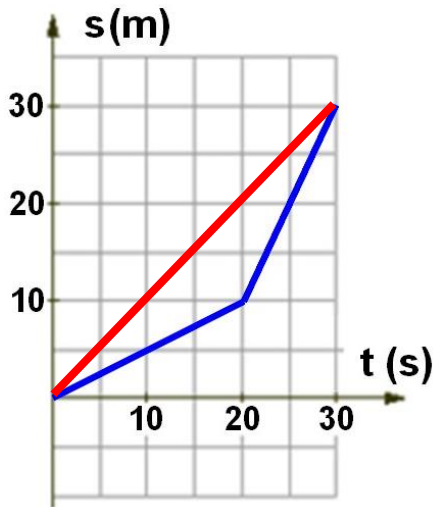
- Melyek igazak az alábbi állítások közül? (4p)

(Jelöld az állítás előtti négyzetbe tett x-szel!)

- A biciklis először előre, majd hátrafelé mozgott.
- A biciklis gyorsulása először negatív, majd pozitív volt.
- A biciklis átlagsebessége az első 8 másodpercben 1 m/s volt.
- A biciklis a 8. másodperc végére visszaért a kiindulási helyre.



5. Az ábra kék grafikonja egy gyalogos út-idő grafikonját mutatja.



a. Mekkora a gyalogos sebessége az első 20 másodpercben? (2p)

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10}{20} = 0,5 \frac{m}{s}$$

b. Mekkora a sebessége a mozgás második szakaszában? (2p)

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20}{10} = 2 \frac{m}{s}$$

c. Mekkora a gyalogos átlagsebessége az első 30 másodpercben? (3p)

$$v_{\text{átl}} = \frac{\sum \Delta s}{\sum \Delta t} = \frac{30}{30} = 1 \frac{m}{s}$$

d. Rajzold be az ábrába annak a mozgásnak a grafikonját, amely végig az átlagsebességgel történt volna! (2p) **Piros szakasz**

6. A képen öt fiatal látható, amint leugranak egy hídról (függőleges kezdősebesség nélkül). A balról második lány testmagassága 1,7 méter.

- Végezz a képen méréseket vonalzóval, majd számold ki, hogy

- a második kép készítése előtt mennyivel ugrott le a balról második lány.
- mennyivel később ugrott le a bal szélső ember, mint az a) kérdésbeli lány. (12 p)



- A balról második lány magassága a képen mérve: 1,6 cm.  
Az általa megtett út a képen mérve:  $s_1 = 2,3$  cm.  
Tehát a valóságban az esés magassága:

$$s_{1,v} = \frac{2,3\text{cm}}{1,6\text{cm}} \cdot 1,7\text{ m} = 2,44\text{ m}$$

Mivel a lány függőleges irányban szabadon esett:

$$s_{1,v} = \frac{g}{2} \cdot t_1^2,$$

így az esési ideje:

$$t_1 \approx 0,7\text{ s}$$

- b) A bal szélső ember által megtett út a képen mérve  $s_2 = 1,1\text{ cm}$ .  
Tehát a valóságban

$$s_{2,v} = \frac{1,1\text{ cm}}{1,6\text{ cm}} \cdot 1,7\text{ m} = 1,17\text{ m}$$

Mivel függőleges irányban szabadon esett:

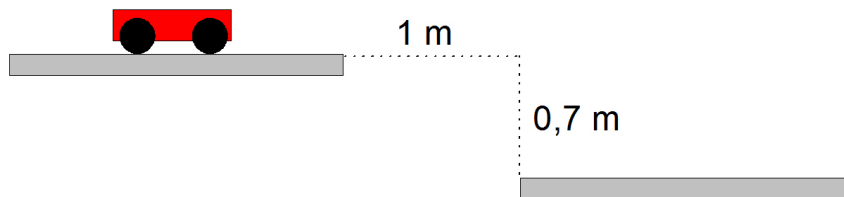
$$s_{2,v} = \frac{g}{2} \cdot t_2^2,$$

így az esési ideje:

$$t_2 \approx 0,48\text{ s}$$

Tehát az ugrások közötti időkülönbség:  $\Delta t \approx 0,22\text{ s}$

7. A gyerekek elhatározták, hogy a TV-ben látott autós üldözés legizgalmasabb jelenetét - amikor a főhős autójával átrepül egy szakadék felett - távirányítású autómodelljükkel is megismétlik. A modell maximális sebessége 3 m/s.



- a. Vajon elég-e ez a sebesség, ha a szakadék két partjának vízszintes távolsága 1 m, a szintkülönbség 0,7 m? (7p)

Az ugratás során a vízszintes irányú elmozdulás az  $x = v_x t$  összefüggéssel számítható, amiből a sebességet kifejezve kapjuk, hogy

$$v_x = \frac{x}{t},$$

ahol  $t$  az ugratás ideje. Mivel függőleges irányban nincs kezdősebesség, ezért a  $t$  idő meghatározható a szabadesés jól ismert  $y = g/2t^2$  képletéből, ahol  $y$  az esés magassága és  $g$  a nehézségi gyorsulás:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{1,4}{9,81}} = 0,38\text{ s}.$$

A kapott időt visszahelyettesítve az első egyenletbe, megkapjuk az átéréshez szükséges minimális sebességet:

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{1}{0,31} = 2,61\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A feladatban megadott 3 m/s sebesség tehát elegendő, hogy az autó „átrepüljön” a szakadék túloldalára

- b. Ha átér, mekkora eredő sebességgel csapódik a talajhoz? (6p)

Becsapódáskor a kocsi sebessége a vízszintes és a függőleges sebesség-komponens vektori összege, ahol:

$$v_x = 3 \frac{m}{s}, \quad v_y = gt = 3,73 \frac{m}{s}.$$

A becsapódó sebesség nagyságát a komponensek négyzetösszegéből vont négyzetgyök adja meg:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{3^2 + 3,73^2} = 4,79 \frac{m}{s}$$

- c. A kísérletről mellékelt vázlatrajzot egészítsd ki úgy, hogy berajzolod az autó-modell tömegközéppontjának pályagörbáját a „mutatvány” során! (3p) **Piros görbe**





## C Függelék: Digitális feladatlap minta

### ***Eltérő sebességgel, egymással szemben haladó kisautók (Egy példatári feladat szimulálása)***

*Feladat:*

Az iskolai folyosó két pontja, A és B, 7,5 m távolságra vannak. A két pontból egyszerre indítunk el két motorral hajtott játékautót. Az egyik autó 0,8 m/s sebességgel a másik 0,4 m/s sebességgel halad.

- ***Az indulás után mennyi idő múlva halad el egymás mellett a két kisautó?***
- ***Milyen távol van a találkozás helye a gyorsabb kocsi indulási helyétől?***

*A kijelölt keretben old meg a feladatot!*

(a megoldásnál vedd figyelembe, hogy a találkozásig a két autó által megtett utak összege épp a két indulási pont távolsága!)

$$v_A = 0,8 \text{ m/s}, \quad v_B = 0,4 \text{ m/s}, \quad \overline{AB} = 7,5 \text{ m}, \quad \text{a kisautók találkozási ideje: } t$$

$$\text{Az A pontból induló autó által a találkozásig megtett út:} \quad s_A = v_A t$$

$$\text{A B pontból induló autó által a találkozásig megtett út:} \quad s_B = v_B t$$

$$\text{A két kisautó útjának összege:} \quad s_A + s_B = \overline{AB}$$

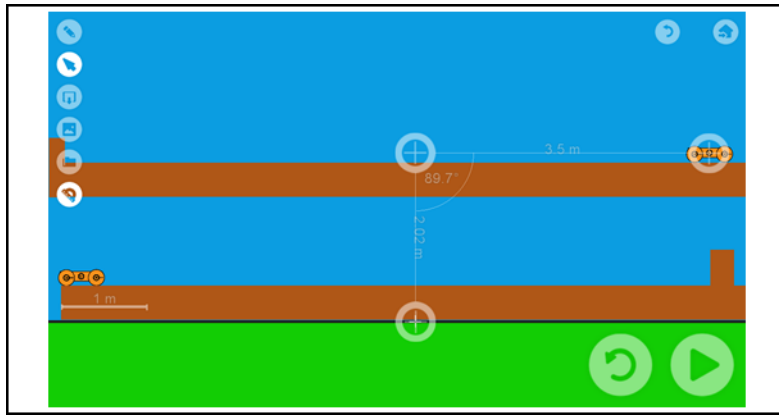
$$v_A t + v_B t = \overline{AB} \quad \longrightarrow \quad t = \frac{\overline{AB}}{v_A + v_B} = \frac{7,5}{0,8 + 0,4} = \mathbf{6,25 \text{ s}}$$

$$\text{A találkozás kért helye = a gyorsabb autó által megtett úttal:} \quad v_A t = \mathbf{5 \text{ m}}$$

#### **A 1201-3 szimuláció a fenti feladatot illusztrálja.**

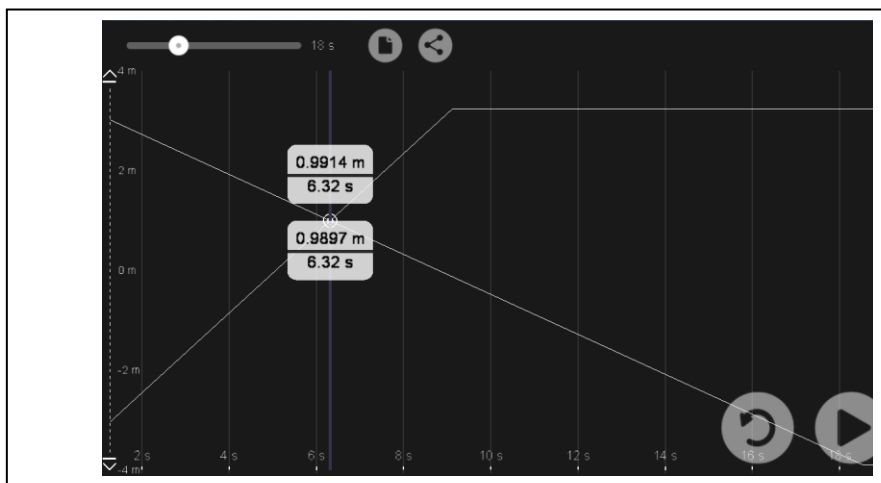
- ***A rendelkezésedre álló mérőeszközzel ellenőrizd a képernyőn a kiskocsik távolságát!***  
(Ezt úgy érdemes megtenni, hogy először leméred az egyik kocsin lévő szenzor és az origó vízszintes távolságát, majd ugyanezt megteszed a másik kocsi esetén is.)

*Az egyik mérést bemutató képernyőképet másold a keretbe!*



- *Indítsd el a szimulációt és csak akkor állítsd le, amikor a lassabb kocsi is elérte az ütközőt! Húzd be a képernyő jobb széléről a mozgásokat ábrázoló grafikon!*  
(A szimuláció alapbeállítása szerint a kocsikra helyezett szenzorok a vízszintes elmozdulásokat mérik, így a grafikonon is a két kocsi elmozdulás- idő grafikonja jelenik meg.)

- *A kurzorral állj rá két kocsi találkozási pontjára, a bal egér-gombot lenyomva, megjelennek a pont koordinátái. Másold le a képernyőt (PrintScr) és a képet illeszd be a keretbe!*



- *Mekkora a találkozási pont távolsága a gyorsabb kocsi indulási helyétől?*

A találkozási pont távolsága:  $0,99 + 4 = 4,99$  m

- *A grafikonról leolvasott út és idő adatok alapján ellenőrizd, hogy a kiskocsik sebessége megegyezik-e a feladatban szereplő játékautók sebességével! A számításokat írd a keretekbe!*  
(A grafikonról leolvasott út és idő adatok hányadosa a sebességet adja.)

A gyorsabb 'A' kocsi sebességének számítása a grafikonról leolvasott adatokkal:

$$v_A = \frac{4,99}{6,32} = 0,79 \text{ m/s}$$

A lassabb 'B' kocsi sebességének számítása a grafikonról leolvasott adatokkal:

$$v_B = -\frac{3,5 - 0,99}{6,32} = -0,4 \text{ m/s}$$

# ADATLAP

## a doktori értekezés nyilvánosságra hozatalához

### I. A doktori értekezés adatai

A szerző neve: Tóthné Juhász Tünde

MTMT-azonosító: 10059235

A doktori értekezés címe és alcíme: Számítógéppel segített kísérletek a középiskolában

DOI-azonosító: 10.15476/ELTE.2018.179

A doktori iskola neve: Fizika Doktori Iskola

A doktori iskolán belüli doktori program neve: Fizika Tanítása Program

A témavezető neve és tudományos fokozata: Dr. Juhász András ny. egyetemi docens, a fizikai tudomány kandidátusa

A témavezető munkahelye: ELTE TTK, Anyagfizikai tanszék

### II. Nyilatkozatok

1. A doktori értekezés szerzőjeként

a) hozzájárok, hogy a doktori fokozat megszerzését követően a doktori értekezésem és a tézisek nyilvánosságra kerüljenek az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban. Felhatalmazom a Természettudományi kar Dékáni Hivatali Doktori, Habilitációs és Nemzetközi Ügyek Csoportjának ügyintézőjét, hogy az értekezést és a téziseket feltöltse az ELTE Digitális Intézményi Tudástárba, és ennek során kitöltse a feltöltéshez szükséges nyilatkozatokat.

b) kérem, hogy a mellékelt kérelemben részletezett szabadalmi, illetőleg oltalmi bejelentés közzétételéig a doktori értekezést ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban;

c) kérem, hogy a nemzetbiztonsági okból minősített adatot tartalmazó doktori értekezést a minősítés (dátum)-ig tartó időtartama alatt ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban;

d) kérem, hogy a mű kiadására vonatkozó mellékelt kiadó szerződésre tekintettel a doktori értekezést a könyv megjelenéséig ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban, és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban csak a könyv bibliográfiai adatait tegyék közzé. Ha a könyv a fokozatszerzést követően egy évig nem jelenik meg, hozzájárlok, hogy a doktori értekezésem és a tézisek nyilvánosságra kerüljenek az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban.

2. A doktori értekezés szerzőjeként kijelentem, hogy

a) az ELTE Digitális Intézményi Tudástárba feltöltendő doktori értekezés és a tézisek saját eredeti, önálló szellemi munkám és legjobb tudásom szerint nem sértem vele senki szerzői jogait;

b) a doktori értekezés és a tézisek nyomtatott változatai és az elektronikus adathordozón benyújtott tartalmak (szöveg és ábrák) mindenben megegyeznek.

3. A doktori értekezés szerzőjeként hozzájárlok a doktori értekezés és a tézisek szövegének plágiumkereső adatbázisba helyezéséhez és plágiumellenőrző vizsgálatok lefuttatásához.

Kelt: Budapest, 2018. augusztus 29.



a doktori értekezés szerzőjének aláírása