

Nemlineáris jelenségek tanítása a középiskolában

Doktori értekezés

Meszéna Tamás

Témavezető: Dr. Tél Tamás
emeritusz professzor

Fizika Doktori Iskola
Vezető: Dr. Gubicza Jenő egyetemi tanár

Fizika Tanítása Doktori Program
Vezető: Dr. Nguyen Quang Chinh egyetemi tanár



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2021

Tartalomjegyzék

1.	Előszó.....	5
2.	Lépcsőn pattogó labda	7
2.1.	Bevezetés.....	7
2.2.	Tapasztalatok.....	7
2.3.	Pontszerű labda lépcsőn pattogásának vizsgálata valós labdákra jellemző ütközési együtthatóval.....	9
2.4.	A modell.....	9
2.5.	Dimenziótlan alak	11
2.6.	Egyszerű periodikus pattogás	12
2.7.	Kettes ciklusok	15
2.8.	Mozgás tetszőleges k értékekkel kis energiaveszteség esetén	16
2.9.	Összegzés.....	18
3.	Pontszerű labda pattogása lépcsőn nagy energiaveszteség (kis ütközési együttható) esetén.....	19
3.1.	Bevezetés és tanítási tapasztalatok.....	19
3.2.	Többszörös pattogások egyetlen lépcsőn	20
3.3.	A csúszásba történő átmenet.....	21
3.4.	Együtt létező mozgások kis k értékekkel	22
3.5.	Összegzés	24
4.	A kváziperiodikus mozgás fogalma, tanításának szükségessége, és annak tapasztalatai középiskolában ...	26
4.1.	Bevezetés.....	26
4.2.	Tanítási tapasztalatok.....	27
4.3.	Kváziperiodikus mozgás – tanítási kísérlet	28
4.4.	A teszt és kiértékelése	30
4.5.	Eredmények bemutatása.....	31
4.6.	Elemzés.....	36
4.7.	A kváziperiodikus mozgás egyedi vonása: Trajektóriák a fázistérben.....	39
4.8.	Összegzés.....	41
5.	A káosz fogalmának, jelenségeinek bemutatása középiskolás szinten egyetlen tanítási órában.....	43
5.1.	Bevezetés	43
5.2.	Fraktálok.....	45
5.3.	Káosz.....	49
5.4.	Összegzés	53
6.	Egyszerű periodikus és kaotikus mozgások összehasonlítása, szimulálása	55
6.1.	Bevezetés	55
6.2.	Káosz szimulálása a középiskolában.....	57

6.3. A Dynamics Solver program	60
6.4. Időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga kaotikus attraktorának keresése	62
6.5. Nem kaotikus esetek vizsgálata	66
6.6. Összegzés	67
7. Az ön hasonlóság tulajdonsága kapcsolatot teremt a hologram és a káosz között	69
7.1. Bevezetés	69
7.2. Tanítási tapasztalatok	70
7.3. A részek viszonya az egészhez a káosz-jelenségeknél	70
7.4. Hologram	72
7.5. Összegzés	74
8. Záró gondolatok	76
9. Köszönetnyilvánítás	77
10. Summary	78
11. Összefoglalás	79
12. Irodalomjegyzék	80
13. Függelék	83
14. ADATLAP	84

„A káosz megfejtésre váró rend.”
(José Saramago: Az embermás)

1. Előszó

A fizika csodálatosan széles körben tárgyalja az egész, körülöttünk lévő világot, a legapróbb alkotórészekről a leghatalmasabb méretekig, ezért joggal tekintünk úgy rá, mint az alapvető természettudomány. Megkérdőjelezhetetlen a helye a közoktatásban, mégis sok baj van vele. Kutatások sora, és az iskolában dolgozó tanárok tapasztalata alapján a leginkább elutasított tantárgy a diákok körében (a kémiával együtt) [1]. Ez a helyzet nem jó. Nem jó sem az oktatáskutatók, oktatás irányítók, tanárok számára, sem a diákok, vagy a társadalom számára sem, hiszen nem sikerül azt a tudást átadni a felnövekvő generációk részére, amire szükségük van a világ megértéséhez, a világban való tájékozódásban, a modern technika vívmányainak alkalmazásában. Ezért folyamatosan aktuális a kérdés: mit, mennyit, milyen mélységben, és hogyan tanítsunk fizikát. Ennek vizsgálata messze túlmutat a jelen dolgozat keretein, de nagy biztonsággal merem állítani, hogy a modern fizika eredményei nagyobb szerepet fognak kapni a közeljövő fizika oktatásában.

A kaotikus, vagy általában, a nemlineáris jelenségek vizsgálata az utóbbi évtizedekben fejlődött ki, és érte el a fizika minden területét. Nemcsak a fizika számos, egymástól távol álló területére ért el, hanem gyorsan utat talált a hétköznapiakba is.

Az általam ismert első említése Steven Spielberg: Jurassic Park című filmjében történik (1993), ahol a főszereplő foglalkozása káoszkutató (akármit is jelentsen ez). A 2005-ben megjelent Káosz című filmben többször, hosszan idéznek James Gleick: Káosz című könyvéből, a bankrablók vezetőjét Lorenznek hívják, és a nyomozás kritikus pontján a továbblépéshez az ötletet a káoszelmélettel való párhuzam adja. A 2007-ben megjelent William Paul Young: A Viskó című regényében egy szurreális helyszínen fraktál növények virágoskertje egy ember lelkét jeleníti meg.

Csak néhány példa a számtalanból, ami azt mutatja, mennyire magával ragadja a művészek és az egyszerű emberek képzeletét is a káosz. Luigi Pirandello a káosz fiának nevezte magát, szülőháza és múzeuma a szicíliai Agrigentóban „Káosz palota” néven ismert. Tapasztalatom szerint a diákok közül is sokan ismerik azt a mondatot, hogy „Kezdetben volt a káosz.”, de eddig egyetlen diákkal találkoztam, aki tudta, honnan származik ez a mondás. Általában a Bibliára tippelnek, vagy nincs erre vonatkozó ötletük. A Biblia valami hasonló

leírással kezdődik, de a káosz szó nem szerepel benne, ezt több nyelven, több fordításban ellenőriztem. A görög mitológia kezdődik a káosszal, ennek viszont nincs kanonizált leírása, ezért érthető a mondat eredetével kapcsolatos bizonytalanság.

Fizikusként a káosszal foglalkozva talán kissé szomorúan állapíthatnánk meg, hogy a téma iránti lelkesedés pontosan abból a félreértésből ered, ami ellen a káoszról tanítva hadakozni szoktunk. A káoszon ugyanis a hétköznapi szóhasználatban rendetlenséget, összevisszaságot, rendezetlenséget értenek, míg a fizikában éppen egy bonyolult rend megjelölésére használják.

Én úgy gondolom, mégis zseniális az elnevezés, még ha erősen félrevezető is. Miért kellene lemondani arról a lelkesedésről, ami ezzel a szinte mágikus szóval elérhető, amikor modern fizikáról akarunk beszélni. Nem lenne ilyen problémánk, ha nemlineáris jelenségeknek hívnánk a témakört. Nagyon határozott tapasztalatom azonban, hogy a káosz szóval elért pozitív beállítódás nem fordul át csalódásba, amikor a kaotikus mozgás részleteiről kezdek beszélni, hanem inkább még fokozódik például a kaotikus attraktorok esztétikai szépsége következtében.

2. Lépcsőn pattogó labda

2.1. Bevezetés

Szeretném minél egyszerűbb példákon keresztül megismertetni a kaotikus mozgást, illetve annak egyes jellemzőit a diákokkal. Egy osztrák gimnáziumi tankönyvben [2] olvasható, több, közismerten kaotikus jelenséggel együtt említve, hogy a labda lépcsőn történő pattogása kaotikus (1. ábra).

1.4 Wie berechenbar ist die Welt?

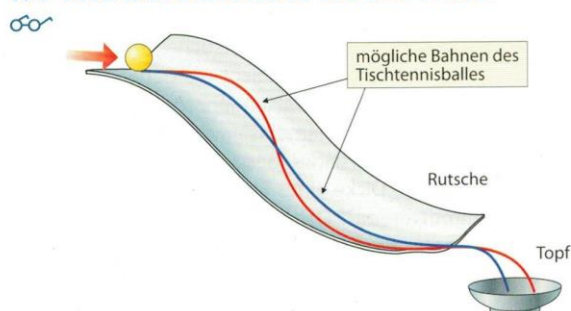


Abb. 12.1 Ein Tischtennisball rollt über eine Kinderrutsche und fällt in einen Topf.

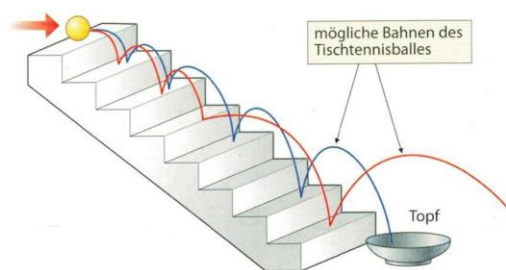


Abb. 12.2 Ein Tischtennisball kollert über eine Stiege, fällt „zufällig“ auf eine Stiegenkante und springt dabei weit weg. Der Ball schlägt schließlich „irgendwo“ auf den Boden auf.

1. ábra. „Mennyire kiszámítható a világ?” A baloldali ábra azt a tapasztalatot mutatja, hogy a csúszdán leguruló labda mozgásában lehetnek kis eltérések, de a végeredmény nem nagyon különbözik. A jobboldali ábrán, a lépcsőn pattogásnál azonban a labda egyszer csak a lépcső élére pattanhat, ami teljesen megváltoztatja a mozgást, vagyis a lépcső geometriájából következik az előrejelezhetetlenség. Az ábrán a labda méretéből következik, hogy előbb-utóbb a lépcső élére pattan, azonban pontszerű labdánál is hasonló jelenséget várhatunk a derékszögű törések miatt.

Ausztriában a közoktatásban jelent meg ez a példa, ezért a legegyszerűbb feltételek mellett vizsgáltuk meg részletesen a pontszerű labda derékszögű lépcsőn történő pattogását [3], [4]. Káoszt kerestünk, de azt nem találtunk. Ellenben tipikus mozgásnak ebben a rendszerben a kváziperiodikus mozgás adódott.

Ez adta az ötletet, hogy a kváziperiodikus mozgás tulajdonságaival részletesebben foglalkozzunk a középiskolásokkal.

A következőkben először felsorolom a tanítás során szerzett tapasztalatokat, majd részletesen megvizsgálom magát a mozgást.

2.2. Tapasztalatok

Első ránézésre rendkívül egyszerű a probléma, amit megvizsgálunk: végtelen hosszú, derékszögű lépcsőkön, a légellenállás figyelembe vétele nélkül lepattogó pontszerű labda

mozgása. A mozgás vizsgálatáról készült egy tanórás bemutató tananyag a diákok részére, ami elegendő feladatot ad még egy-két tanórára is, ha erre lehetőség adódik.

Pattogás közben az ütközés során a labda mechanikai energiát veszít, amit egy k ütközési együtthatóval veszünk figyelembe. A lépcsőn egyre lejjebb jutva a gravitációs energia pótolja az energiaveszteséget. Tapasztalatom szerint, a nem tökéletesen rugalmas ütközéssel lépcsőn lepattogó labda energiaviszonyainak végiggondolása magasabb szinten segít megérteni a diákok számára az energia megmaradását és átalakulását.

A mozgás elemei, a ferde hajítás törvénye szerint, és a rugalmatlan ütközés szabályai szerint megadhatók. A levezetéseket, az órán tanultak alapján, irányítással a diákok önállóan is el tudják végezni.

Meglepő, hogy ennek ellenére a teljes mozgás nem írható le egyszerű képlettel, mert az egyenleteket nemlineárisak. Ezek számítógép segítségével, numerikusan viszonylag egyszerűen megoldhatók, és érdekes eredményre vezetnek.

A paraméterek értékeinek túlnyomó többségében kváziperiodikus, saját magát kis eltéréssel ismétlő, mozgás áll be. A mozgás a kezdőfeltételekre nem érzékeny, az ütközési veszteségek következtében „elfelejti” a kezdőállapotát. A diákok ennek kapcsán szemléletes képet kapnak arról, mi az attraktor, esetünkben ráadásul kváziperiodikus attraktor.

Meglepő, hogy az egyszerűbb, periodikus mozgások csak jól meghatározott esetekben, könnyen kiszámolható ütközési együttható értékeknél valósulhatnak meg. A minden egyes lépcsőn, minden második, harmadik, stb. lépcsőn egyszer pattanó, tiszta periodikus mozgásokhoz tartozó ütközési együttható értékek számegyenesen történő ábrázolása ráadásul a hidrogén atom energiaszintjeit juttathatja eszünkbe. Újszerű, szemléletformáló felfedezés a diákok számára a mechanikában megjelenő diszkrét spektrum.

A mozgás vizsgálatára olyan online elérhető szimulációs programot készítettünk (<https://crnl.hu/lepcso>), amely nemcsak az első néhány pattanást rajzolja ki, hanem tetszőlegesen sok pattanásnak kiszámolja a jellemző értékeit, mint a pattanás helye és a visszapattanás sebessége, illetve az átugrott lépcsőfokok száma. A program a jellemzőkből előállítható fázistereket is ábrázolja. A program használata közben a paramétereket a diákok változtatni tudják. Használatának a diákok közötti népszerűségét mutatja, hogy az elmúlt négy évben több mint 2200 alkalommal léptek be a felületre.

Káoszra utaló jellemzőket a mozgás vizsgálatakor nem találtunk, azonban a mozgás összetettsége, és a kváziperiodikus mozgás határozott jelenléte megérteti a diákokkal, hogy egy mozgás úgy is lehet összetett, ha nem kaotikus.

Ennek a mozgásnak a vizsgálata megjelent a Fizikai Szemlében [3], és az European Journal of Physics folyóiratban [4]. Az előbbiben a jelenség leírása mellett az érdeklődő olvasó feladatokat is talál, amelyek megoldása nagyban segíti az egész gondolatmenet elmélyítését. A feladatok megoldása megtalálható a kérdéssel foglalkozó honlapunkon [5].

2.3. Pontszerű labda lépcsőn pattogásának vizsgálata valós labdákra jellemző ütközési együtthatóval

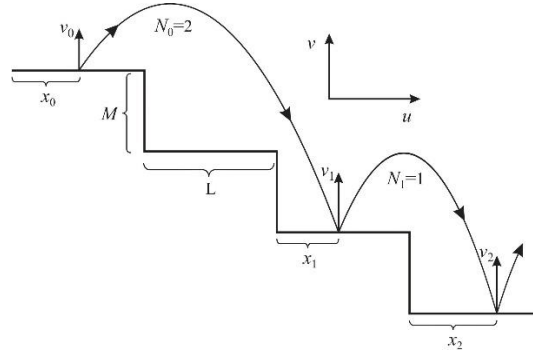
Az osztrák gimnáziumi tankönyvben [2] említett lépcsőn pattogó labda mozgása esetén a szerzők elvileg nem gondolhattak a gumilabdára, melyben a pattogások között rugalmas hullámok is terjednek, hiszen az térben is lejátszódó, magas szabadsági fokú dinamika lenne. Alacsony dimenziójú leírást tekintve válasszuk a legegyszerűbbet, a pontszerű labdát feltételező (tehát a labda forgását elhanyagoló) modellt! Feltesszük, hogy a labda egy hosszú lépcsősoron rugalmasan pattog, a mozgás során az ütközési együttható értéke $k < 1$ állandó. A lépcsőt sima vízszintes és függőleges felületekből összetettnek tekintve, egy billiárd-problémát definiáltunk, mely szemben a szokásos billiárdokkal (pl. stadion billiárd [6]) gravitációs erőterben értelmezett. Ezért az ütközési energiaveszteség mellett energianövekedés is felléphet a magasság csökkenése következtében. Első ránézésre nehéz eldönteni, hogy lehet-e kaotikus a mozgás: a sima vízszintes felület a káosz ellen szól (hiszen síktükörként, vagyis nem szóróként viselkedne fénnel való megvilágítás esetén), a lépcső élei, a fokok végén lévő pontszerű törések viszont esetleg mellette. Vizsgáljuk meg ezért a mozgást alaposabban, egyszerű (középiskolai szintű) levezetéseket és szimulációkat használva.

2.4. A modell

Legyen az egyes lépcsőfokok hossza L , magasságuk M , és a lépcső lejtson balról jobbra (2. ábra). Mivel az ütközési együttható 1-nél kisebb, a labda beesési sebességének függőleges v komponense $k < 1$ -szeresére változik minden ütközéskor. Az $u > 0$ vízszintes komponens időben végig állandó marad.

A tájékozódás kedvéért megadjuk tömör golyók ütközési együtthatóját: azonos anyagú golyóval ütközve [7] szerint: üveg, elefántcsont 0,9; acél 0,7; ólom 0,2; saját méréseink alapján pedig: tömör gumi 0,8; fa golyó 0,3, illetve néhány labda tipikus ütközési együtthatója kőlapról visszapattanva: ping-pong labda 0,8; focilabda 0,7; teniszlabda 0,7; felfújt gumilabda 0,4.

Célunk az, hogy kapcsolatot találjunk az n -edik és az $n + 1$ -edik ütközés hely- és sebességadatai között. Az egyszerűség kedvéért helyezzük koordináta-rendszerünket minden ütközéskor annak a lépcsőfoknak a bal szélére, melyen az ütközés történik. (Ez azt jelenti, hogy az ütközés x koordinátáját mindig visszatoljuk a $(0;L]$ intervallumba.)



2. ábra. Az L hosszúságú és M magasságú fokokkal rendelkező lépcsőn pattogó labda pályája és jellemző adatai: az n -edik ütközés helye x_n , a visszapattanás utáni függőleges sebesség v_n , a vízszintes állandó sebesség u , és az n -edik ütközés után átugrott lépcsőfokok száma N_n .

Legyen az n -edik ütközés koordinátája x_n , s a visszapattanás utáni függőleges sebesség v_n . A labdának a visszapattanás óta eltelt t idővel kifejezett magassága a lépcső felszínétől mérve

$$y(t) = v_n t - \frac{g}{2} t^2,$$

miközben az origótól mért vízszintes távolsága

$$x(t) = x_n + ut.$$

A következő ütközésig eltelt Δt_n idő meghatározásához célszerű feltenni, hogy ismert, hány lépcsőfokkal lejjebb pattan legközelebb a labda. (Persze most még nem tudjuk ezt a számot, de később látni fogjuk, hogyan határozható meg.) Legyen ez az N_n egész szám, mely fontos változó lesz a továbbiakban. A repülési idő kiszámításához felhasználjuk, hogy a következő, $n + 1$ -edik ütközéskor a labda az $y = -MN_n$ magasságban elhelyezkedő lépcsővel találkozik, azaz

$$v_n \Delta t_n - \frac{g}{2} (\Delta t_n)^2 = -MN_n,$$

amiből

$$\Delta t_n = \frac{\sqrt{v_n^2 + 2gMN_n} + v_n}{g}.$$

A becsapódás

$$v_n - g\Delta t_n = -\sqrt{v_n^2 + 2gMN_n}$$

függőleges sebességgel történik. A visszapattanási sebesség e sebesség ellentettjének k -szorososa, így közvetlenül az $n + 1$ -edik ütközés után a függőleges sebesség

$$v_{n+1} = k\sqrt{v_n^2 + 2gMN_n}. \quad (1)$$

Vízszintes irányban ekkor a labda az origótól $x_n + u\Delta t_n$ távolságra van, jobbra. N_n nem más, mint az a szám, mely megadja, hogy ebben a távolságban hányszor van meg az L lépcsőhossz. Δt_n -t behelyettesítve,

$$N_n = \left\lceil \frac{x_n + \frac{u}{g}(v_n + \sqrt{v_n^2 + 2gMN_n})}{L} \right\rceil, \quad (2)$$

ahol a szögletes zárójel az egész részt jelöli. Ha a (2) egyenletnek több megoldása is lenne, akkor közülük a legkisebb N_n -re van szükségünk. A keresett N_n kifejezhető tehát az n -edik ütközés adataival és a paraméterekkel.

A lépcsőfokra helyezett koordináta-rendszerben az ütközés utáni x_{n+1} koordináta a vízszintes elmozdulás és az LN_n különbsége, azaz

$$x_{n+1} = x_n + \frac{u}{g}(v_n + \sqrt{v_n^2 + 2gMN_n}) - LN_n. \quad (3)$$

Az (1)-(3) rendszer egyfajta mozgásegyenletet, leképezést alkot¹, megadja a következő ütközés x_{n+1} hely- és v_{n+1} sebességkoordináta értékét az előző x_n , v_n ismeretében, az N_n mennyiség kiszámításának közbeiktatásával.²

2.5. Dimenziótlan alak

Érdeemes felismerni, hogy a mozgásegyenletek írhatók egyszerűbb alakban is, olyanokban, amelyek nem függenek már pl. külön-külön a lépcső hosszától és magasságától, csak a meredekség abszolútértékének $m = M/L$ értékétől. Ezt akkor kapjuk, ha (3)-at átrendezzük olyan alakba, L -el osztva, mely a helyet a lépcsőhosszhoz viszonyítva adja meg, s ezzel egyidejűleg a sebességet is a konstans $u > 0$ vízszintes sebességhez viszonyítva adjuk meg, vagyis mindenütt v_n/u - t szerepeltetjük:

$$\frac{x_{n+1}}{L} = \frac{x_n}{L} + \frac{u^2}{gL} \left(\frac{v_n}{u} + \sqrt{\left(\frac{v_n}{u}\right)^2 + \frac{2gL}{u^2} mN_n} \right) - N_n. \quad (4)$$

Vegyük észre, hogy itt m -en kívül már csakis egy paraméter, a gL/u^2 kombináció jelenik meg, melyet nevezzünk ezentúl hosszparaméter-nek, s jelöljük H -val. Ha hasonlóan elemezzük a másik két egyenletet, azokban sem találkozunk újabb paraméterekkel.

¹ Vegyük észre, hogy a leképezés segítségével a ferde hajtás parabolaívének kiszámítása nélkül, közvetlenül kapjuk meg a becspódási adatokat.

² Mivel x_{n+1} definíció szerint 0 és L közé esik, x_{n+1}/L egész része nulla, s L -el való osztás után (3) egész részét véve visszkapjuk (2)-t. Ez azt jelenti, hogy N_n megkapható úgy is, hogy (3)-ban addig írunk egész számokat N_n helyébe, amíg L -nél kisebb, de pozitív megoldást nem találunk x_{n+1} - re.

Hasznos ezért a $v/u \rightarrow v$, $x/L \rightarrow x$ helyettesítéssel definiált dimenziótlan változókra, vagyis az u egységében mért v függőleges sebességre és a L egységében mért x helykoordinátára áttérve felírni az egyenleteket. Ebben a jelölésben

$$v_{n+1} = k\sqrt{v_n^2 + 2mHN_n}, \quad (5)$$

$$N_n = \left[x_n + \frac{1}{H} \left(v_n + \sqrt{v_n^2 + 2mHN_n} \right) \right], \quad (6)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{H} \left(v_n + \sqrt{v_n^2 + 2mHN_n} \right) - N_n. \quad (7)$$

Jól látjuk, hogy a mozgás összesen három adattól, a

$$k, \quad m \equiv \frac{M}{L}, \quad H \equiv \frac{Lg}{u^2}$$

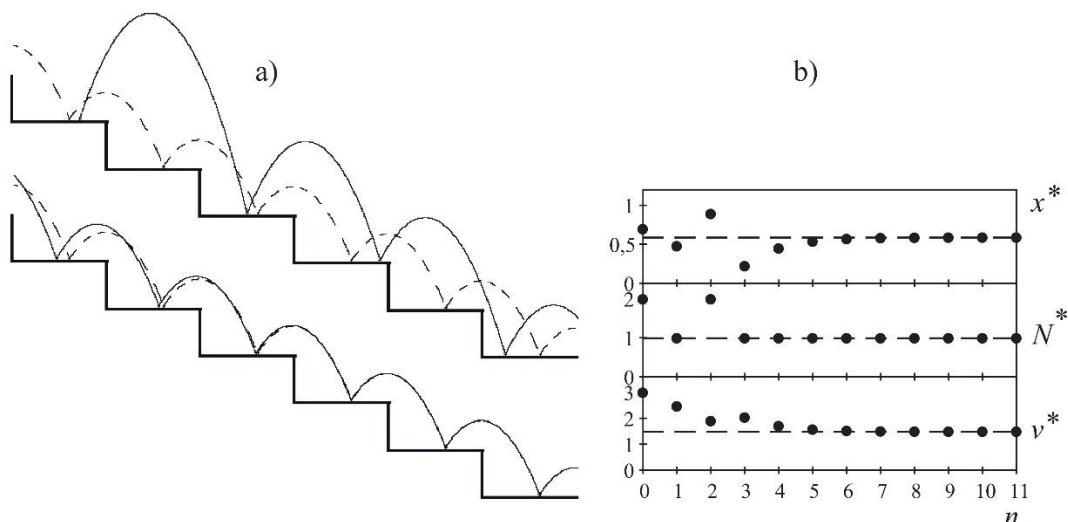
kombinációktól függ, vagyis a k ütközési együtthatótól, az m meredekségtől és az H hosszparamétertől (míg az eredeti (1)-(3) alakban még 5 paraméter, k , M , L , u és g szerepelt). Hosszú lépcsőfokokról a továbbiakban akkor beszélünk, ha a H hosszparaméter elegendően nagy, pontosabban, ha $H > 2m$.

Az épületekben előforduló lépcsőfokok kb. kétszer olyan hosszúak mint szélesek, ezért az $m = 1/2$ meredekséget fogjuk használni. Az ütközési együtthatót széles tartományban változtatjuk, s a jobb áttekinthetőség kedvéért, a sebességhez képest hosszú lépcsőfokokat vizsgálunk a $H \in [2,8]$ intervallumból.³ Alapesetnek a $H = 4$ választást vesszük, amikor $H/2m = 4$, vagyis vízszintesen indulva az első ütközés a lépcsőhossz felénél történik.

2.6. Egyszerű periodikus pattogás

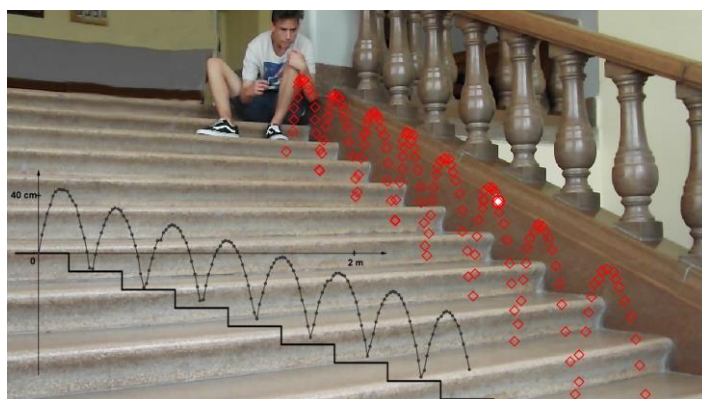
A nem túl kis ütközési együtthatójú esetekben, azaz ha a labda nem kezd el csúszni valamelyik lépcsőfokon (részleteket a csúszásról lásd majd a 3.3. fejezetben), akkor mindig azt tapasztaljuk, hogy előbb-utóbb egy állandósult mozgást felvéve pattog lefelé. Ezen mozgás alatt teljesül az, hogy az ütközések miatt elvesztett energiát a gravitációs tér éppen kompenzálja, a mozgás függőleges átlagsebessége állandó. Az ütközési veszteség egyfajta disszipáció, aminek következtében a rendszer elfelejti kezdőállapotát. A kezdőfeltételek széles osztályából tehát ugyanaz az állandósult mozgás alakul ki végül, vagyis egy bizonyos mozgásállapot felé vonzódnak a labdák, amit így nevezhetünk attraktornak is.

³ Az említett H tartomány meghatározásának nem matematikai okai vannak, hanem megítélésünk szerint kb. ezen paraméterek jellemzők a valós lépcsőkön lepattogó nem nagy vízszintes sebességű valós labdákra. A szóban forgó paramétertartományon belül kvalitatíve azonos mozgásformákat találtunk.



3. ábra. Pattogás $k = 0,6$ ütközési együtthatóval ($m = 0,5$, $H = 4$). a) Az $x_0 = 0,7$, $v_0 = 3$ kezdőfeltétellel indított pálya (a folytonos görbe, az alsó lépcsősoron a felsőről lelépő mozgások folytatódnak) és b) a pattogások adatainak x_n , v_n , N_n sorozata. Mindkettő ábrán a szaggatott görbe az attraktor pályája, és a szaggatott vízszintes vonalak az attraktorhoz tartozó fixpontértékeket mutatják, melyeket rövid transziensek után elér a rendszer. Az ezzel az ütközési együtthatóval zajló pattogások kivétel nélkül mind a periodikus egylépcsőnyi ugrálás attraktorához tartanak, melyre (8), (9) szerint $v^* = 1,5$ és $N^* = 1$. Az x^* függ a kezdőfeltételtől, esetünkben $x^* = 0,592$.

A 3. ábrán bemutatott mozgás körülbelül az ötödik pattanástól kezdve ismétlődik. Itt a legegyszerűbb attraktort, a periodikus ugrálás attraktorát ismerhetjük fel. A b) betétábra mutatja, hogy az x_n , v_n , N_n sorozatok maguk is konstans értékhez, fixpontokhoz tartanak. Ez a mozgás kísérletileg is megvalósítható (4. ábra).



4. ábra. Egyszerű periodikus pattogás lépcsőn. A pingpong labda minden lépcsőfokon egyszer pattan. A mozgás nyomkövetését, és ez alapján a grafikon megrajzolását az emelt szintű fizika érettségien is használt Tracker videoelemző program segítségével oldottuk meg. A labda pályáján parallaxis korrekciót végeztünk.

Annak érdekében, hogy az érdeklődő olvasók interaktív módon is megismerkedhessenek a jelenséggel, a <https://crnl.hu/lepcso> oldalon elérhetővé, kipróbálhatóvá

és letölthetővé tettünk néhány programot, melyek különböző paraméterekkel és kezdőfeltételekkel rajzolják ki a labda mozgását a lépcsőn.⁴

A mozgásegyenletből következik, hogy a sebesség és a lépésszám fixpontértékei

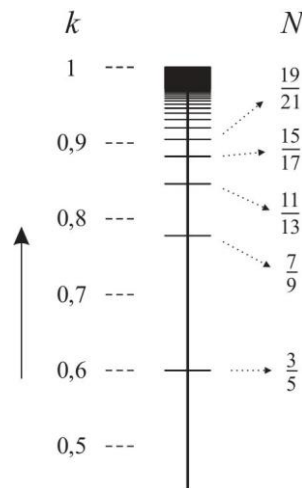
$$v^* = 2m \frac{k}{1-k}, \quad (8)$$

$$N^* = \frac{2m}{H} \frac{1+k}{1-k}. \quad (9)$$

Külön megfontolást igényel, hogy N^* definíció szerint csak egész szám lehet. Érdekes ezért úgy eljárni, hogy felvesszük N^* értékét, mint az N egész számot, és keressük a megfelelő ütközési együtthatóértékeket. A (9) egyenletből az következik, hogy csak az alábbi diszkrét k értékek jöhetnek szóba:

$$k_N = \frac{\frac{NH}{2m} - 1}{\frac{NH}{2m} + 1}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Ezt az ütközési együtthatók spektrumának nevezhetjük, hiszen periodikus pattogás csak kivételes k értékeknél történhet, hasonlóan ahhoz, hogy a hidrogénatom energiaszintjei is csak diszkrét értékek lehetnek [8], [9]. A $H = 4$ választással például az egy lépcsőt átugró periodikus megoldáshoz $k_1 = 3/5 = 0,6$, a két lépcsőt átugróhoz $k_2 = 7/9 = 0,77$ tartozik.⁵ Az 5. ábra alapesetünk ütközési együttható-spektrumát mutatja grafikusán.



5. ábra. A periodikus ugrásokhoz tartozó k_N spektrum grafikus ábrázolása (10) alapján $m = 0,5$, $H = 4$ esetén. N növelésével a k_N értékek egymást egyre sűrűbben követve szigorúan monoton növekednek.

Érdekes következmény: ahhoz, hogy $N = 1$ mint fixpont megvalósulhasson, teljesülnie kell annak, hogy $k_1 > 0$, azaz $H > 2m$. A legegyszerűbb egylépcsőnyi periodikus pattogás tehát

⁴ Mindegyik program JavaScriptben íródott (a forráskód is elérhető), tetszőleges böngészővel futtatható.

⁵ Az ütközési paraméterek lehetséges értékei kizárólag az $NH/2m$ aránytól függenek, s a (10) kifejezésből látszik, hogy minél hosszabb a lépcsőfok, minél nagyobb $NH/2m$, annál nagyobb k_N esetén tud csak megvalósulni az N lépcsőnyi periodikus pattogás.

csak elegendően hosszú lépcsőfokok esetén fordulhat elő. „Rövidebb” lépcsőhossz esetén ugyanis az egy idő után beálló pattogás során az attraktoron a labda mindig átugrik néhány lépcsőfokot. Ugyanakkor nagy H esetén már az egyszeres pattogás is csak nagy ütközési együttthatókkal valósulhat meg.

Az 5. ábráról látszik, hogy a spektrum nagy N értékekre (a hidrogénatom spektrumához hasonlóan) besűrűsödik, miközben a k értékek közelítenek 1-hez. Könnyen igazolhatjuk, hogy ebben a tartományban jó közelítéssel:

$$k_N = 1 - \frac{4m}{H} \frac{1}{N}, \quad N \gg 1. \quad (11)$$

A 3. ábránál a $k_1 = 0,6$ eset kapcsán már említett azon tulajdonság, hogy x^* nem egyértelmű (tehát függ a kezdőfeltételtől), minden k_N értékre igaz. Ennek oka rögtön világossá válik, ha ismét a 3. ábra a) képére tekintünk, s észrevesszük: az attraktorhoz tartozó mozgás fontos jellemzője nem más, mint a hosszú idő utáni pattogások parabolaívei. Egy adott parabolaívhez pedig meghatározott N és ν érték (N^* és ν^*) tartozik, ellenben x^* már különböző lehet.⁶

2.7. Kettes ciklusok

Állandósult mozgásként előfordulhat az is, hogy a pattogás csak minden második ütközés után ismétlődik. Ez azt jelenti, hogy az első és a második ütközés között N lépcsőt, a következő ütközésig K lépcsőt repül át a labda, és azután ez ismétlődik szigorúan (N, K pozitív egész számok).

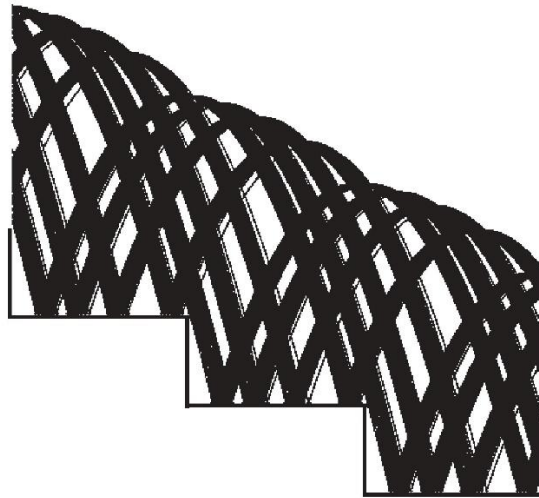
Érdekes, hogy az ilyen kettes ciklusok is csak kivételes, az N és K számok által meghatározott k értékeknél következhetnek be. Az ezekhez a számokhoz tartozó $k_{N,K}$ ütközési együtttható egyértelműen meghatározható. Közülük a legkisebb a $k_{1,2}$ érték (alapesetünkben: $k_{1,2} = 0,715$), amely a két legegyszerűbb periodikus pattogás k_1 és k_2 ütközési együttthatója közé esik.

⁶ A pattogó labda abból ugyanis semmit sem "vesz észre", ha az "attraktoríve" alatt a lépcsőt jobbra-balra tologatjuk, hiszen továbbra is ugyanakkora egymás utáni magasságkülönbségekkel rendelkező vízszintes felületeken fog pattogni. A lépcsővel más "kapcsolata" pedig nincs. Persze csak addig tologathatjuk, ameddig az ív és a lépcső geometriája azt megengedi. Könnyen belátható, hogy periodikus attraktoroknál a lépcsőfokok bal oldalának egy része geometriai okokból "holt terület" lesz, viszont a fennmaradó rész összes x értéke már lehet x^* .

2.8. Mozgás tetszőleges k értékekkel kis energiaveszteség esetén

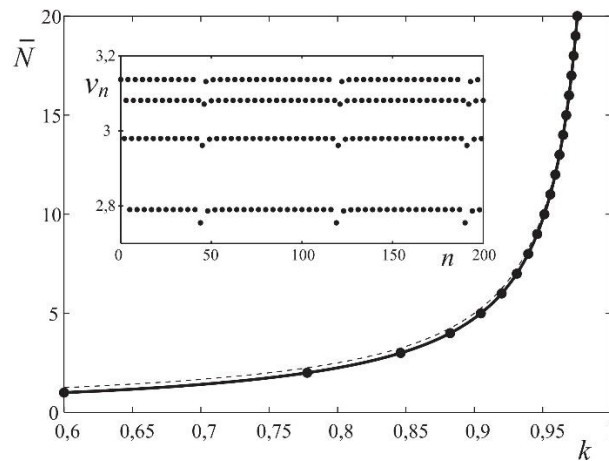
Tetszőleges ütközési együttható esetén, vagyis amikor k nem az egyes vagy a kettes ciklusnak megfelelő nagyságú, hanem valamilyen köztes értékű, akkor hosszútávon mindig kváziperiodikus mozgás jön létre (6. ábra). Az elnevezés abból adódik, hogy a pattogás nem pontosan periodikus, csak ahhoz hasonló.

A lényeg megértéséhez induljunk ki a k_1 ütközési együtthatójú mozgásból. Ilyenkor hosszútávon létrejön egy egyszerű periodikus mozgás: a labda minden lépcsőfokon pattan egyet, méghozzá ugyanazon a helyen, ugyanazon sebességgel. Ha k értékét kissé megnöveljük, akkor a kisebb energiaveszteség miatt a labda nagyobbakat fog ugrani, s az $N = 1$ pattogások közé vegyülni fog némi $N = 2$ is. Ha tovább növeljük k értékét, akkor az $N = 2$ ugrások száma $N = 1$ -hez képest egészen addig fog monoton módon nőni, míg végül csak $N = 2$ marad. Ezzel éppen k_2 -höz érkezünk el. Van egy köztes állapot (de nem k_1 és k_2 számtani közepe!), ahol $N = 1$ és $N = 2$ darabszáma megegyezik, ráadásul felváltva követik egymást. Az ehhez tartozó ütközési együttható éppen $k_{1,2}$ -nek felel meg.



6. ábra. $k = 0,75$ ütközési együtthatóval zajló mozgás pályája a tranziensek lecsengése után (egyéb paraméterek megegyeznek a 3. ábrán bemutatottal). (Az első 500 pattanás kivárását követően 1500 pattanás ideig rajzoltuk ki az pályáikat.) A pályáik a 3. lépcső elhagyása után a nulladik fölött ugyanabban a magasságban lépnek be a képbe újra és újra. Bármely kezdőfeltételből is indítjuk a mozgást, az ábrán látható kváziperiodikus mozgás, attraktor, jön létre hosszú távon. Az ütközési együttható esetünkben $k_{1,2} < k < k_2$, tehát az $N = 1$, $K = 2$ kettes ciklus és az $N = 2$ egyes ciklus közé esik. Ennek megfelelően a hosszú távú kváziperiodikus mozgásban egy, illetve két lépcsőfokot ugrik át egyszerre, méghozzá úgy, hogy átlagosan az utóbbi ugrásból van több. A numerikus vizsgálat szerint az átvugrott lépcsők számának hosszú időre vett átlaga $\bar{N} = 1,747$. Az attraktorra jellemző v_n sebesség-idősor a következő ábra betétjében látható.

A fentebb említettek, illetve numerikus vizsgálatok alapján az alábbi megállapítások tehetők. A kettes ciklusos attraktorok közül csak a $K = N + 1$ típusúak valósulnak meg, azaz nem lehet a kettes ciklus hosszabb íve kettő vagy több egységgel hosszabb, mint a rövidebb. Hármast vagy hosszabb ciklusokat a nagy ütközési együtthatók $k \geq k_1$ tartományában egyáltalán nem találunk. Minden $k_N < k < k_{N+1}$ ütközési együttható esetén (ahol $N \geq 1$) olyan kváziperiodikus mozgás jön létre, amelynek alapperiódusai N és $N + 1$ ugrásokból állnak. k növelésével nő az $N + 1$ hosszúságú ugrások száma N -éhez képest. Az egész folyamat jól jellemezhető az attraktoron tapasztalható \bar{N} számmal, mely megadja, hogy két ütközés között átlagosan hány lépcsőt ugrott át a labda. Ezt röviden átlagos ugrásszámnak nevezzük, s numerikusan határozzuk meg. A 7. ábra $\bar{N}(k)$ sima, monoton növekedését mutatja a k ütközési paraméter függvényében.



7. ábra. Az attraktorra jellemző átlagos \bar{N} ugrásszám k függvényében, numerikus szimulálás alapján a nagy ütközési együttható ($k \geq k_1$) tartományban ($m = 0,5$, $H = 4$). Jól láthat, hogy k növekedésével \bar{N} monoton nő. Az N hosszúságú egyes ciklusokhoz tartozó k_N , N értékpárokat diszkrét pontokkal jelöltük. A szaggatott vonal a nagy k -ra érvényes $\bar{N} = (2(1 - k))^{-1}$ közelítő összefüggést illusztrálja (mely meglepően jó közelítésnek bizonyul az egész tartományban). Az N , $N + 1$ kettes ciklusokban természetesen $\bar{N}(k_{N,N+1}) = (N + (N + 1))/2 = N + 1/2$, s ezek is a görbére eső pontokat adnak, de a jobb áttekinthetőség kedvéért ezeket nem ábrázoltuk. A betét a 6. ábra, $k = 0,75$, attraktorához tartozó v_n sebesség-idősor mutatja. Jól látszik, hogy a mozgás négy lépésenként majdnem ismétlődik, de a pontos ismétlődést az időnként bekövetkező "kitüremkedések" megakadályozzák.

Vegyük észre, hogy az N hosszúságú egyes ciklusok ütközési együtthatóinál N egyben az átlagos ugrásszám, $\bar{N}(k_N) = N$. Ha $N \gg 1$, azaz 1-hez közeli k_N ütközési együtthatók esetén az értékek besűrűsödnek, s (11) megfordítása szerint $\bar{N} = \frac{4m}{H} \frac{1}{1-k}$, tehát 1-hez igen közeli ütközési együtthatók esetén az átlagos ugrásszám $(1 - k)^{-1}$ -el arányosan nő.

2.9. Összegzés

A jelenség látszólagos egyszerűsége alapján nem gondoltuk volna, hogy már ezekben az egyszerűbb esetekben is ilyen összetett mozgásformákkal szembesülünk. A leírás nagy része rendkívül logikusan és szemléletesen nyomon követhető, a részletes számításoktól eltekintve is. A következő részben a pattogó labda bonyolultabb mozgásformáival találkozunk.

Ennek a fejezetnek az anyaga adja az 1. tézispont háttérét.

3. Pontszerű labda pattogása lépcsőn nagy energiaveszteség (kis ütközési együttható) esetén

3.1. Bevezetés és tanítási tapasztalatok

Ennek a tartománynak a vizsgálata a nemlineáris jelenségekre jellemző további fogalmak (pl. magasabb rendű ciklusok, együttlétező attraktorok, vonzási tartományok) megértését segíti a diákokban.

Ha az ütközési együttható értéke a minden lépcsőfokon történő egyszeres pattogásra jellemző érték alá csökken, akkor a mozgás során előfordul, hogy a labda egy lépcsőfokon kétszer pattan. Ha tovább csökken az ütközési együttható, akkor találunk olyan tisztán periodikus mozgást, amikor az egy lépcső átugrása, és az ugyanazon a lépcsőn történő pattanás váltakozva fordul elő. Az ilyen mozgást nevezzük kettes ciklusnak.

Tovább csökkentve ezt az értéket eljutunk olyan mozgásokhoz, amikor egy lépcsőfokon kétszer, háromszor, stb. pattan a labda. Ennek a mozgásnak a megismerésével megértik a diákok, hogy magasabb rendű ciklusok is lehetnek attraktorok.

Kis ütközési együtthatók esetén a pattogó labda mozgásában új jelenségek figyelhetők meg. A függőleges sebességkomponens olyan gyorsan csökkenhet, hogy végtelen sok pattanás után sem ér a labda az adott lépcsőfok szélére (letapad a mozgás), miközben a labda vízszintes sebességkomponense végig állandó, vagyis véges idő alatt eljut a lépcsőfok végére. Ez nem más, mint a csúszás.

Sikerült megértetnem a diákokkal, hogy a csúszás is egyfajta attraktornak tekinthető, mivel ha egy lépcsőfokon végtelen sokszor pattan a labda, vagyis csúszás alakult ki, akkor a mozgás további részében már lépcsőfokokat átívelő mozgás nem jöhet létre. Ezt úgy mondhatjuk, hogy a labda a csúszási attraktorra érkezett.

Létezik egy olyan ütközési együttható intervallum, amelyen belül a letapadó és a végtelen lépcsőn tisztán lepattogó mozgások váltakozva jelennek meg, ami azért érdekes, mert logikusnak tűnt volna, hogy ha egy adott ütközési együtthatónál megszűnik a lepattogás a lépcsőkön, akkor az ennél kisebb ütközési együtthatóknál még inkább ugyanezt a helyzetet találjuk.

Ebből megértik a diákok, hogy kétféle attraktor is jellemezhet egy mozgást. Ilyenkor a pattogás kváziperiodikus attraktora mellett megjelenik a hosszan tartó csúszás attraktora is, a kettő együtt létezik.

Ez úgy lehetséges, hogy ezekben az esetekben a lépcsőfokon történő első pattanás helye és a függőleges kezdősebesség értéke határozza meg, hogy a kétféle attraktor közül melyik jellemzi majd a mozgást. A két attraktor vonzási tartományai sávós szerkezetet mutatnak a kezdősebesség és az első pattanás helye által definiált síkban.

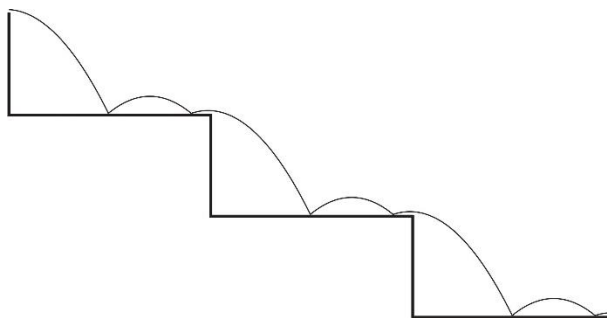
A folyamat követésével új lehetőséget nyújtok a diákok részére a vonzási tartomány fogalmának megértésére (olyan esetben, amikor a káosz hiánya miatt a határ nem fraktál jellegű).

Végül található olyan ütközési együttható, ami alatt a hosszú távú pattogó mozgások teljesen eltűnnek, és bármilyen kezdőfeltétel esetén csúszó mozgás alakul ki. Ebből megtanulják, hogy az erős súrlódási veszteség a mozgás túleszűréséhez vezet.

3.2. Többszörös pattogások egyetlen lépcsőn

A kis ütközési együtthatók tartományában, $k < k_1$ -re új mozgásformák jelenhetnek meg. A kettes ciklusok keresése során nem engedjük meg, hogy N_n zérus lehessen. Kis ütközési együtthatóknál ennek viszont már lehet értelme, s azt jelenti, hogy egyetlen lépcsőfokon kétszer is pattan a labda. Az az eset, amikor a kettes ciklus úgy valósul meg, hogy a labda átugrik a következő lépcsőfokra, azon pattan még egyet, s a mozgás innét ismétlődik (8. ábra), annál az ütközési együtthatónál tapasztalható, melyet az $N = 1, K = 0$ vagy $N = 0, K = 1$ indexek jellemeznek. Ez a $k_{1,0} = k_{0,1}$ ütközési együttható alapesetünkben $k_{1,0} = 0,405$ -nek bizonyul, jóval k_1 alatti érték. Mivel itt két lépés után kerül a labda egy lépcsőfokkal odébb, az átlagos ugrásszám $1/2$: $\bar{N}(k_{1,0}) = 0,5$.

Ennél kisebb ütközési együtthatókra az is megtörténhet, hogy egyetlen lépcsőn háromszor vagy többször pattan a labda, majd utána ugrik le a szomszédos lépcsőre, ahol mindez ismétlődik. Ha j pattanás történik egy lépcsőn (ahol j tetszőleges természetes szám), s a labda utána lép át a szomszédosra, akkor a mozgás $j+1$ ütközés után ismétlődő $j+1$ -es ciklus. Az átlagos lépésszám itt $1/(j + 1)$. Az ehhez tartozó (növekvő j -vel egyre csökkenő értékű) ütközési együtthatók a fentiekhez hasonlóan meghatározhatók.



8. ábra. Kétszeres pattogás egyetlen lejtőn. A $k_{1,0} = 0,405$ ütközési együtthatóval történő mozgás pályája a tranziensek lecsengése után (egyéb paraméterek megegyeznek a 3. ábrán bemutatottal). Tetszőleges kezdőfeltétellel indított pattogások egy olyan periodikus attraktorhoz, kettes ciklushoz tartanak, ahol átugrás előtt minden lépcsőfokon kettőt pattan a labda.

3.3. A csúszásba történő átmenet

Elegendően kis ütközési együttható, azaz nagy pattogási energiaveszteség esetén előfordulhat, hogy a labdát egyetlen lépcsőfokon belüli végtelen sok pattanás után is még ugyanazon a lépcsőfokon találjuk. Végtelen sok ütközés után a labda már nem emelkedik a lépcső síkja fölé, s mivel a vízszintes irányú sebessége állandó, ezért az ilyen mozgást a valós időben csúszásként értelmezzük. Ennek kapcsán észre kell vennünk, hogy a pattogásokra alapuló (5)-(7) leképezési egyenletek kiegészítésre szorulnak a valódi időben történő csúszással. (Ha a (5)-(7) leképezési egyenletekkel haladunk előre, akkor a labda végtelen sok pattanás után megállni látszik. A valós idő és az n -ben mért iterációs idő ilyenkor teljesen szétválik, az előbbi az utóbbiban gyakorlatilag megáll. Ha egyetlen lépcsőn végtelen sok ugrás történhet, akkor az iterálás szimulálásával leállhatunk, mondván, hogy a labda a csúszási attraktorra érkezett.

Ha egy adott lépcsőfokra érkezés utáni elpattanás függőleges sebessége v_i , akkor a teljes elmozdulás a lépcsőn történő végtelen sok pattogás után

$$\Delta x = \frac{2v_i}{H} \frac{1}{1-k} . \quad (12)$$

Amennyiben a labda az x_i helyen érkezik meg az előző lépcsőfokról az általunk megfigyelt lépcsőfokra, akkor annak a feltétele, hogy csúszás alakuljon ki, az, hogy végtelen sok pattanás után is még a lépcsőfok egységnyi koordinátájú végpontja előtt legyen, vagyis $x_i + \Delta x < 1$. A (12) összefüggést behelyettesítve és átrendezve

$$v_i < \frac{H}{2}(1-k)(1-x_i). \quad (13)$$

Az, hogy ez az egyenlőtlenség teljesül-e egy adott k értékre, azon múlik, hogy hova esik be a labda az adott lépcsőfokon, azaz mekkora az x_i indulási koordináta, és mekkora ott az

elpattanás v_i indulási sebessége. Szimulálásunkban akkor mondjuk azt, hogy egy mozgás elérte a csúszási attraktort, ha valamelyik lépcsőfokra érkeve az ottani x_i és v_i között fennáll a (13) egyenlőtlenség.⁷

Az a kritikus k_c ütközési paraméterérték, amelynél már bármely kezdőfeltételből induló mozgás, némi tranziens után, átmegy csúszásba, a numerikus tapasztalat szerint a következőkből határozható meg. Mivel a vízszintes sebességkomponens minden ütközésben megmarad, az előző lépcsőfok végén egységnyi (dimenziótlan) vízszintes sebességgel haladó labda ferde hajtási íve olyan x_i helyen érjen a következő lépcsőre, hogy azzal, és a hozzá tartozó v_i ütközés utáni függőleges sebességgel végtelen sok pattogás után éppen a lépcső szélére kerüljön, vagyis (13) egyenlőségként teljesüljön. Így azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{2m}{H} \frac{1+k_c}{1-k_c}} = 1. \quad (14)$$

A (14) egyenletet átrendezve, az explicit eredmény

$$k_c = \frac{\sqrt{\frac{H}{2m}-1}}{\sqrt{\frac{H}{2m}+1}}. \quad (15)$$

A $H = 4$ választással $k_c = 1/3 = 0,33$. Ennél kisebb ütközési együtthatókra ugyancsak igaz, hogy bármilyen kezdőfeltétel esetén csúszó mozgás alakul ki, a hosszútávú pattogó megoldások teljesen eltűnnek.

3.4. Együtt létező mozgások kis k értékekkel

Az egyes peridusú attraktorhoz tartozó k_1 érték alatt lefelé haladva továbbra is igaz, hogy egyetlen attraktor létezik, vagyis akármilyen kezdeti feltétellel indulunk, egy idő után minden mozgás egyforma jellegűvé válik. Az attraktor rendszerint kváziperiodikus, s a numerikusan meghatározott átlagos \bar{N} ugrásszám csökken a k csökkentésével (lásd 9. ábra). Létezik egy k érték, amely alatt ez a tulajdonság megszűnik abban az értelemben, hogy a hosszantartó pattogás mellett megjelenik a csúszás lehetősége: a pattogás kváziperiodikus attraktora és a csúszás egyszerre létezik. Ez az érték alapesetünkben numerikusan $k = 0,382$. Abban az esetben, ha nem létezik folyamatosan lépcsőfokról-lépcsőfokra pattanó mozgás (mert mindegyik kezdőfeltételnél hosszútávon előbb-utóbb csúszás történik), akkor \bar{N} függvényértéket nullának vesszük, hiszen ez a függvény azt adja meg, hogy hány lépcsőnyi az

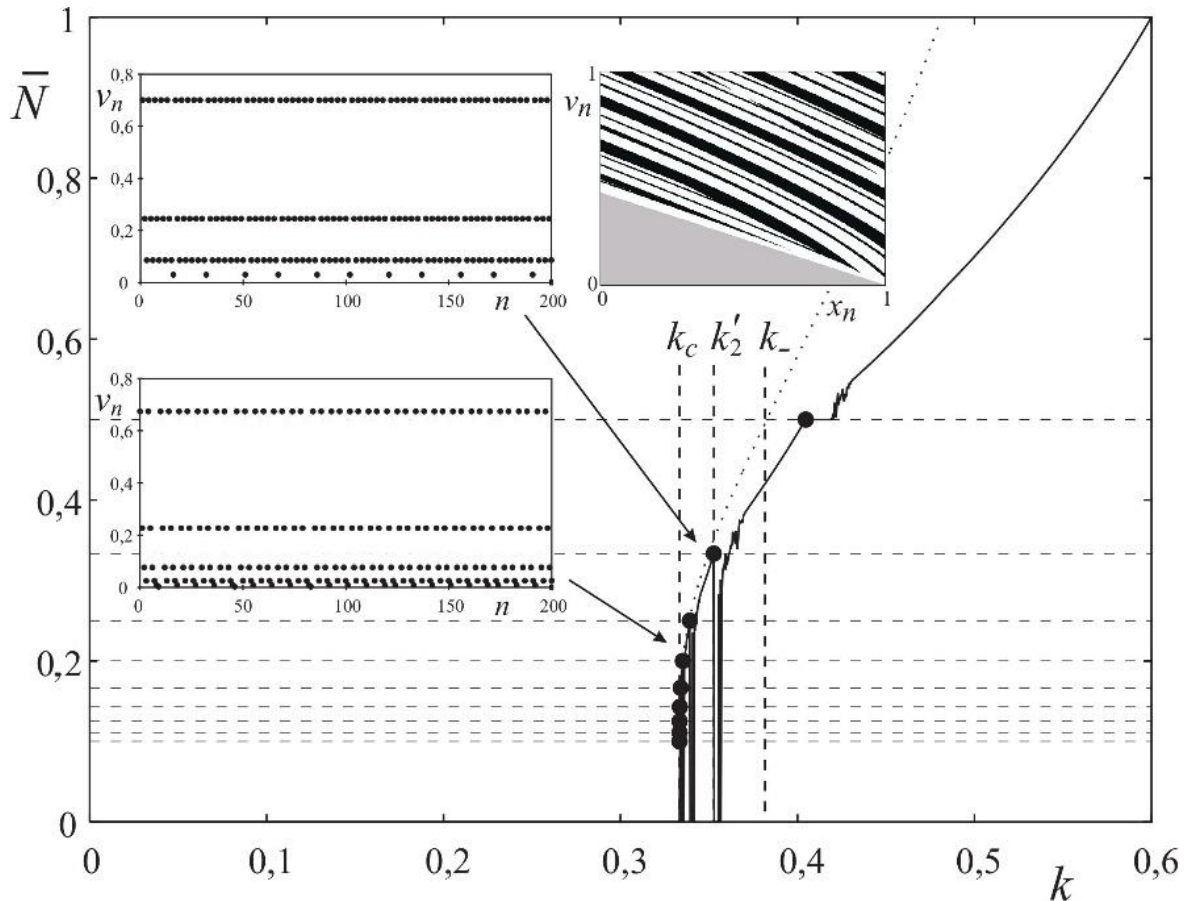
⁷ Ha az adott lépcsőfokra érkező labda pattanásakor a csúszási feltétel (13) egyenlőtlensége teljesül, akkor szintén teljesül a lépcsőfokon végbemenő további (végtelen számú) pattanások mindegyikén is.

elmozdulás két ütközés között, de ebben az esetben az elmozdulás még végtelen sok ütközés után sincs egy lépcsőnyi sem.

Együtt létező attraktorok, tehát $k < k_c$ esetén felmerül, hogy milyen a vonzási tartományuk. Ez úgy határozható meg, hogy a kezdőfeltételek x_0, v_0 síkján más színnel jelöljük azokat a pontokat, melyek az egyik vagy másik attraktorhoz tartanak. A 9. ábra "csíkos" betétábrája a pattogó mozgás és a csúszás vonzási tartományát mutatja alapesetünk $k = 0,35$ értékénél fehér illetve fekete színnel ábrázolva. A szürke háromszög a (13) egyenlőtlenségnek megfelelő tartomány, az ilyen kezdőfeltétellel induló mozgások rögtön csúszási mozgások.⁸

A k_c -nél kisebb ütközési paraméterek esetén a nullától különböző \bar{N} értékeket a pattogó mozgások attraktorára határoztuk meg. Az átlagos ugrásszám változó, de összességében elmondható, hogy tendenciájában csökkenő k csökkenésével. Meglepő módon azonban még jóval k_c elérése előtt, rövid intervallumokban teljesen eltűnnek a hosszú távon pattogó mozgások lehetőségei, vagyis a pattogó mozgás attraktora ilyenkor nem létezik. Egy ilyen intervallumon belül azonban, ha tovább csökkentjük k -t, akkor az intervallum végéhez érve, hirtelen újra megjelenik a pattogó mozgás, még hozzá \bar{N} egy lokális csúcsával. Ezek az \bar{N} értékek egész számok reciprokai, s az állandósult mozgás ezekben a kivételes pontokban periodikus: egy $N = 1$ -es lépés után j alkalommal pattan a labda ugyanazon a lépcsőn, vagyis $N = 0$ valósul meg j -szer egymás után. Az ennek megfelelő ütközési paramétert k_j' -vel jelöljük. Ilyenkor az átlagos ugrásszám természetesen $\bar{N}(k_j') = 1/(j + 1)$. A legnagyobb ilyen intervallum $k_2' = 0,3527$ és $k = 0,3555$ között létezik, s a többi hasonló egyre kisebb hosszal ismétlődik k_c -felé haladva. A 9. ábrán ez a halmozódás is megfigyelhető.

⁸ Fontos megjegyezni, hogy az 5. ábrán numerikusan mért \bar{N} ugrásszámnál, mivel egy k értékhez egy attraktor (egyfajta hosszútávú mozgás) tartozott, tetszőleges kezdőfeltétel mellett mérhettünk. Esetünkben azonban már meg kell válogatni a kezdőfeltételt, még hozzá úgy, hogy továbbra is pattogó mozgáson mérjünk átlagot (azon belül persze már mindegy melyiken, mert csak egyféle van egy adott k mellett most is).



9. ábra. Az attraktorra jellemző átlagos \bar{N} ugrásszám k függvényében, numerikus szimulálás alapján a kis ütközési együttható ($k \leq k_1$) tartományban ($m = 1/2$, $H = 4$). A vízszintes szaggatott vonalak az $\bar{N} = 1/2, 1/3, \dots, 1/10$ értékeknek felelnek meg, a fekete pontok pedig a k_j^0 ütközési együtthatóhoz tartozó $j+1$ periódusú attraktor adatait jelölik. Függőleges szaggatott vonallal a k_- helyét is bejelöltük. A pontozott görbe az $\bar{N}(k)$ függvény k_c környékén érvényes alakját adja meg. A két egymás alatt lévő betét a kváziperiodikus attraktor v_n idősorát mutatja a $k = 0,35$ (mely kissé balra esik a $k_2' = 0,353$ ponttól) és a $k = 0,337$ ütközési együtthatóknál. Előbbi mellett a hozzá tartozó pattogási és a csúszási attraktorok vonzási tartományai láthatóak. A betétekhez tartozó $\bar{N} = 0,298$ és $\bar{N} = 0,194$ értékeket nyílal jelöltük.

A $k < k_c$ tartományban csakis a csúszási attraktor létezik. Alulról k_c -hez érve azonban "hirtelen" jelennek meg a lepattanó mozgások, méghozzá úgy, hogy az $\bar{N}(k)$ görbe, illetve a közelítő görbe, nagyon meredeken indul. A pattogó mozgás előbukkanása k_c -nél tehát a fázisátalakulásokra emlékeztető átbillenéssel jelenik meg, amit a dinamikai rendszerek nyelvén bifurkációnak nevezünk.

3.5. Összegzés

Vizsgálatunk célja, hogy megtudjuk, a lépcsőn pattogó labda pattogása, ill. annak legegyszerűbb modellje szerinti mozgása kaotikus-e. Összetett viselkedésre érdekes módon a kis k , vagyis a nagy disszipációs veszteség tartományában bukkantunk. A (5)-(7) dinamika

nyilván nemlineáris, erre utal a k_c -nél megfigyelt bifurkáció is, meg az együtt létező attraktorok megjelenése. A vonzási határok azonban szemmel láthatóan simák (lásd 7. ábra betétje), a káoszra fraktálszerkezet lenne jellemző. Maga az $\bar{N}(k)$ függvény $k < k_1$ -re néhol nem sima, és ugrásokat is mutat. Megvizsgáltuk azonban azt is, hogy a közeli kezdőfeltételekből induló és hosszan pattogó mozgást végző mozgáspárok valamelyik koordinátakülönbsége hogyan változik időben. A káoszra jellemző gyors széttartás helyett mindenütt közeledést találtunk. Így levonhatjuk azt a következtetést, hogy ebben a modellben a mozgás nem kaotikus. Ugyanakkor a jelenség összetettségére utal, hogy számos mennyiségre nem találtunk (elemi módszerekkel) képlettel leírható összefüggéseket, így például az \bar{N} átlagos ugrásszám függvényre, melyet csak numerikusan tudtunk meghatározni. Ez az összetettség tulajdonképpen előrevetíti, hogy a mozgás már kis módosítás esetén is kaotikussá válhat. Ha a lépcsők éles sarka helyett lekerekített átmeneteket vennénk, a körívek jelenléte a problémát szóró biliárddá tenné, s abban eléggé nagy görbületi sugarak esetén már kiterjedt, robusztus káoszt várhatunk. Ezt a feltevésünket egy frissen megjelent cikk részletesen igazolta. [10]

Ennek a fejezetnek az anyaga adja a 2. tézispont háttérét.

4. A kváziperiodikus mozgás fogalma, tanításának szükségessége, és annak tapasztalatai középiskolában

4.1. Bevezetés

A témaválasztást az indokolja, hogy a középiskolás fizika tananyagban a legújabb, 2020-ban bevezetett NAT szerint is [11] a haladó és a periodikus mozgások mellett rendezetlen mozgásról (Brown-mozgás) is hallanak a diákok, de a közbülső lehetőségek közül a kváziperiodikus mozgás nem kerül elő.

A középiskolában a matematikai ismeretek hiánya, illetve időhiány miatt csak a legegyszerűbb mozgásokkal foglalkozunk, és azokat is számos egyszerűsítő feltétel mellett tárgyaljuk (pontoszerű test, súrlódás, légellenállás elhanyagolása, ideális pálya, homogén erőtér, stb). Ennek az a következménye, hogy egyrészt csökken a jelenségek érdekessége, másrészt elveszítjük a valósággal a szoros kapcsolatot. A diákok már nem érzik azt, hogy a környezetükben lévő világot ismernék meg.

Minden olyan lehetőséget ki kell használnunk, amikor ezeken a helyzeteken túl tudunk lépni, és közelebb tudunk kerülni a valódi jelenségekhez. Általános tapasztalatom, hogy ilyenkor hirtelen megugrik az érdeklődés, kinyílnak a szemek.

A helyzet persze nem egyszerű, hiszen a jelen gyakorlat az oktatásban azért alakult ki, mert a fizikai jelenségek vizsgálata még ezen egyszerűsítő feltételek mellett is annyira összetett, hogy komoly nehézséget, sokszor leküzdhetetlen akadályt jelent a diákok számára. Amikor pedig közeledni szeretnénk a valósághoz, akkor ezek a nehézségek megsokszorozódnak.

Nagyon izgalmas megkeresni azokat a témákat és tárgyalási módokat, amelyek esetén úgy sikerül tárgyalni valamilyen új jelenséget, hogy az még befogadható legyen a diákok többsége számára.

Ilyen területnek gondolom a szabályos, illetve nem szabályos mozgások vizsgálatát. Nagyon érdekes szembesülni azzal, hogy a szabályos és szabálytalan mozgások között még több fokozatot érdemes megkülönböztetnünk.

4.2. Tanítási tapasztalatok

Megmutattam, hogy a kváziperiodikus mozgásnak, ennek, a káosznál sokkal egyszerűbb, de mégis bonyolult mozgásnak az ismerete hasznosan egészíti ki a mechanika tanítását, és lehetőséget teremt eddig nem tanított, vagy csak részben megértett jelenségek (mint pl. a kúpinga, a Merkúr-pályája elfordulása, a Foucault-inga) mélyebb megértésére.

2019 novembere és 2020 februárja között három csoportban 52 diák részére mondtam el egy rövid, a tesztekkel együtt egy tanórás, a kváziperiodikus mozgás fogalmának megismertetése céljából elkészített tananyagot (lásd: Függelék).

Az oktatás során először az ismert mozgások révén (merőleges rezgések összetétele, Foucault-inga) mutatom meg, mennyiben hasonlítanak ezek a periodikus mozgásokhoz, és miért különböznek mégis tőlük. Ezután pedig a lépcsőn pattogó labda mozgásának részletes vizsgálatával teszem érthetővé a kváziperiodikus mozgás fogalmát. Ennek a témakörnek a tanítása a fentiek értelmében hiánypótló a középiskolában.

A diákok előzetes ismeretét, és a hallottak megértését a tanítás elején és végén felvett tesztek segítségével mértem. A tesztek eredményét elemeztem, ennek segítségével az alkalmazott tesztet több lépcsőben módosítottam, fejlesztettem. A végső értékelésben csak a teszt jelenlegi formájának használatával elvégzett oktatási programok eredménye szerepel.

A tesztek eredménye mutatja, hogy a tananyag alapján a diákok valóban eljutnak a kváziperiodikus mozgás lényegének megértéséhez. Átlagosan az eredmények több, mint duplájára emelkedtek, 20,4%-ról 42,8%-ra.

4.3. Kváziperiodikus mozgás – tanítási kísérlet

A kváziperiodikus mozgás megismertetésére egy tanórányi anyagot dolgoztam ki a diákok részére. Rendkívül nehéz volt egyetlen órába sűríteni a mondandót, mégis megtettem egy elméleti és egy gyakorlati okból. Az elmúlt évek során én sokat foglalkoztam a kváziperiodikus mozgásokkal, és hosszan tudnék erről beszélni a diákoknak, de a fizika tantárgyra a jelen óratervekben rendelkezésre álló kereteket figyelembe véve teljesen irreális, hogy lényegesen hosszabb időt lehessen foglalkozni ezzel a jelenséggel. Ezért az alapoktatásban nem lenne használható egy ilyen hosszabb, a valós lehetőségektől elrugaszkodott program.

Másrészt kétségtelen, nagy könnyebbséget jelentett, hogy amikor alkalmat kerestem a program kipróbálására, akkor az iskolai oktatásban rendszeresen adódó elmaradó órák közül válogathattam, amik pedig egy órányi alkalmat jelentettek. Bizony nem lett volna egyszerű a több, egymás utáni változat kipróbálására újra és újra fogékony hallgatóságot találni, ha ez több órányi időtartamot igényel.

A kváziperiodikus mozgás fogalmának megismertetését a PER (Physics Education Research) módszert alkalmazásával terveztem meg, és kiviteleztem [12], [13]. A módszert nemzetközi szakdidaktikai publikációkból ismertem, de részletesen akkor tudtam elsajátítani, amikor 2017 szeptemberében a kváziperiodikus mozgást bemutató prezentációmmal előadóként részt vettem Udinében az olasz fizikatanárok éves továbbképzésén. Az itt hallott előadások, és a továbbképzéshez szervesen kapcsolódó gyakorlatok tökéletesen bemutatták, mit jelent a PER a gyakorlatban. Ezek a tapasztalatok alapján készítettem ezt a tanítási programot, aminek fő elemeit 2019-ben az Eötvös év alkalmából Budapesten rendezett GIREP-ICPE-EPEC konferencián elmondtam.

A tanítás közben megfigyeltem a módszer működését az oktatás hatékonyságának fejlesztésére, és eredményének vizsgálatára. Ennek megfelelően az oktatásban alkalmaztam analógiákat (tökéletesen rugalmas pattogás, különféle ütközések), kerestem szemléletes példákat (Foucault-inga, Merkúr perihélium körülfordulása), és foglalkoztattam a diákokat ténylegesen, manuálisan (labda pattogása lépcsőn), illetve számítógépes szimuláción keresztül is (Geogebra animáció, lépcsőn pattogás program).

A foglalkozást egy hat kérdésből álló teszttel kezdtem, amelynek segítségével mérhető, dokumentálható módon vizsgáltam a diákok kezdeti ismereteit abban a témában, amellyel foglalkozni akartam.

A tesztben rákérdeztem olyan szokásos tévképzetekre, amelyek gyakran megfigyelhetők a diákok körében. A teszt kitöltésére 5-6 percet fordíthattak a diákok, ami elég kevés volt, de az volt a tapasztalatom, hogy a csekély előismeretek miatt a több idő sem hozott sokkal jobb eredményt.

Az óra végén ugyanezt a tesztet kapták meg ismét a diákok, és válaszolhattak újra ugyanazokra a kérdésekre, immár a hallott ismereteket felidézve.

A tanítás során használt tesztet több lépésben fejlesztettem, alakítottam. Az első változatban még tíz kérdés, és számolási feladatok is szerepeltek. Az idő rövideje és az előismeretek hiánya alakította folyamatos kipróbálások után a tesztet a mai formájára.

Ennek a tesztnek legalább öt változatát használtam különböző csoportoknak, értékeltem ki az eredményeket, majd változtattam a feltett kérdéseken. Természetesen a különböző tesztekkel felmért tudás állapotát nem tudtam egymással összehasonlítani, ezért a végső értékelésbe csak az utolsó változat használatával elért eredmények kerültek.

4.4. A teszt és kiértékelése

Az alábbiakban bemutatom a tesztkérdéseket, melyeket a diákok a tanítási kísérlet előtt és után megválasztottak. A kérdések végén zárójelben szerepel a pontozás.

1. Lehet egy mozgás hosszan periodikus, ha a súrlódás és a légellenállás elhanyagolhatóan kicsi?
 - A) Nem, minden mozgás csak rövidtávon lehet periodikus. (0 pont)
 - B) Igen, ha nincs veszteség, a mozgás periodikus marad. (1 pont)

2. Ha egy körmozgást az $x - v$ síkon, a periódusidő többszöröseinek megfelelő időpillanatokban egy-egy ponttal ábrázolunk, akkor milyen ábrát kapunk?
 - A) Kört. (0 pont)
 - B) Egyetlen pontot. (2 pont)
 - C) Zárt görbét. (1 pont)

3. Egy ingaóra periódusideje, véletlen hatásoktól függően (például légmozgás), lehet picit rövidebb vagy hosszabb. Mit kapunk, ha az inga mozgását az $x - v$ síkon, az átlagos lengési idő többszöröseinek megfelelő időpontokban egy-egy ponttal ábrázoljuk?
 - A) Kis kiterjedésű foltot (ponthalmaszt). (2 pont)
 - B) Egy pontot. (1 pont)
 - C) Egy körívet. (0 pont)

4. A Merkúr közel ellipszis alakú pályán kering a Nap körül, de ennek az ellipszisnek a nagytengelye nagyon lassan, adott irányba körfordul. Milyen ábrát kapunk az $x - v$ síkon, ha a keringés átlagos periódusa többszöröseinek megfelelő pillanatokban pontokkal ábrázoljuk a Merkúr mozgását?
 - A) Körívet. (0 pont)
 - B) Zárt görbét. (2 pont)
 - C) Egy pontot. (1 pont)

5. Az összetett mozgásokban, ahol lehetséges periodikus és nem tisztán periodikus mozgás is, melyik fordul elő gyakrabban?
 - A) Az adott mozgástól függ. (1 pont)
 - B) A periodikus mozgások a ritka kivételek a bonyolultabb mozgások között. (2 pont)
 - C) A mozgások általában periodikusak, a többi a kivétel. (0 pont)

6. Említs néhány mozgást, melyeket nevezhetünk első közelítésben periodikusnak, és pontosabban vizsgálva nemperiodikusnak is! Indokold meg válaszaidat!

..... (1 pont)

A nem teljesen pontosan periodikus mozgások közül milyen alapon nevezhetjük az egyiket majdnem periodikusnak, míg a másikat zajos-periodikus mozgásnak? A 3. 4. kérdés mozgásai közül melyiket neveznéd majdnem periodikusnak, ill. zajos-periodikusnak?

..... (1 pont)

4.5. Eredmények bemutatása

Az egyes csoportok eredményét először külön mutatom be, mivel a természettudományos tantárgyakhoz való viszonyulása a csoportoknak jelentősen különbözött.

Minden csoportnál először egy táblázatban megmutatom a diákok eredményét az előzetes (Pre) és a foglalkozás végén írt teszt esetében (Post).

Ezt követően a szemléletesebb áttekintés kedvéért a diákok eredményét oszlopdiagrammokon is ábrázolom.

Külön oszlopdiagrammon mutatom be az egyes kérdésekre adott válaszok átlagos pontszámát.

Első csoport: 2019. 11. 20. 11 fő

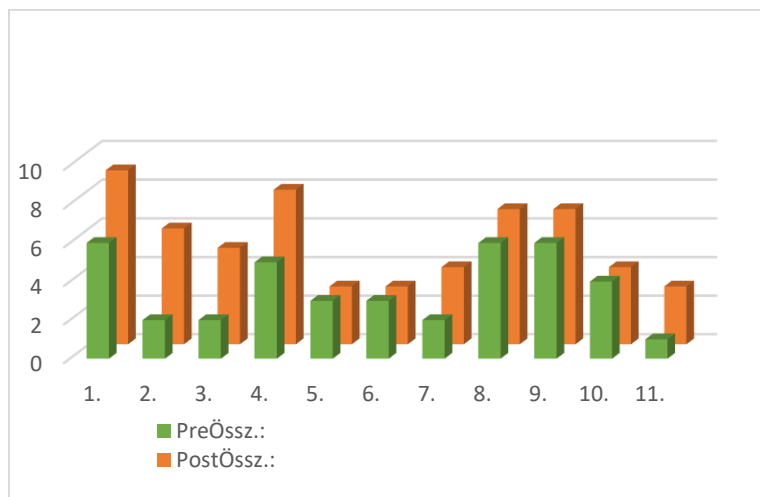
Az első csoportot egy fizika fakultáció nagyon vegyes összetételű diákjai alkották. Megfigyelhető, hogy többen már a Pre teszten egész jó eredményt érnek el, amin már csak mérsékeltén tudnak javítani. Néhányan gyenge kezdeti eredmény után, érdeklődve követik a témát, és elfogadható eredményt érnek el a Post teszten, néhányan pedig érdektelenek a téma iránt, ami az egyaránt gyenge kezdeti és végeredményben ölt testet.

A 11 diáknak a Pre és Post teszteken a hat kérdésre adott válaszaikra kapott pontszámait a következő táblázatok tartalmazzák:

	Kérdések	Diákok											Összes	Átlag
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.		
Pre	1.	1	1	1	1	0	1	0	0	2	0	1	8	0,73
	2.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0,18
	3.	1	1	0	2	0	0	0	2	2	1	0	9	0,82
	4.	1	0	1	2	1	2	2	2	0	2	0	13	1,18
	5.	2	0	0	0	2	0	0	2	2	0	0	8	0,73
	6.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
	Össz.:	6	2	2	5	3	3	2	6	6	4	1	40	3,64

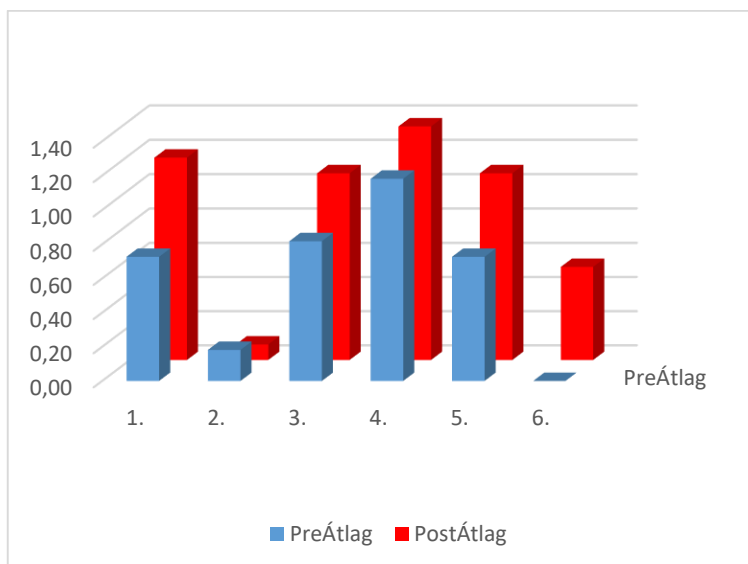
	Kérdések	Diákok											Összes	Átlag
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.		
Post	1.	1	1	2	2	1	0	1	1	2	1	1	13	1,18
	2.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,09
	3.	2	0	0	2	0	2	2	0	2	2	0	12	1,09
	4.	2	2	2	1	0	1	1	2	1	1	2	15	1,36
	5.	2	2	0	2	2	0	0	2	2	0	0	12	1,09
	6.	1	1	1	1	0	0	0	2	0	0	0	6	0,55
	Össz.:	9	6	5	8	3	3	4	7	7	4	3	59	5,36

A következő grafikon az egyes diákok által a Pre teszten (első oszlop), illetve a Post teszten (hátsó oszlop) elért pontokat ábrázolja (10. ábra). Jól látható, hogy jelentős a pontszámnövekedés a diákok kétharmadánál.



10. ábra. Az első csoport 11 diákjának eredménye a Pre és Post teszten.

A következő grafikonok az egyes kérdésekre kapott átlagos pontszámokat hasonlítják össze a Pre és a Post tesztben (11. ábra).



11. ábra. Az első csoport diákjai által az egyes kérdésekre kapott átlagos pontszámok a Pre és Post tesztben

A kérdésekre kapott átlagos pontszámokat a három csoport után elemzem.

Második csoport: 2019. 11. 27. 24 fő

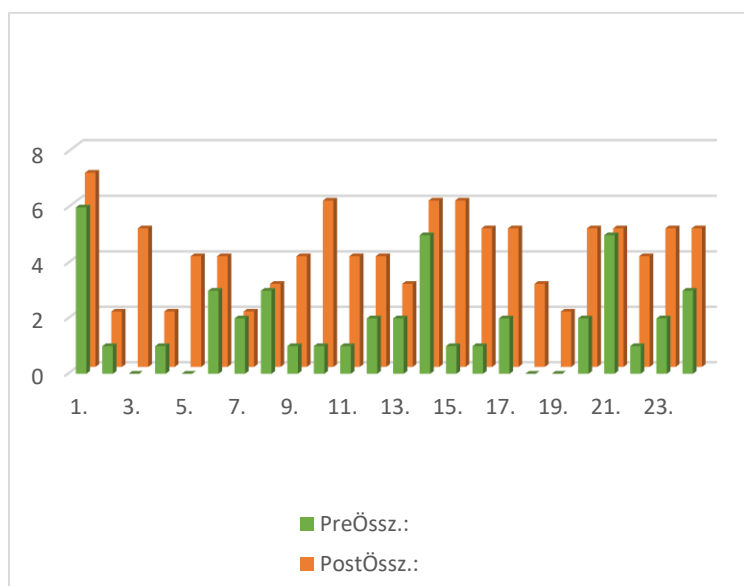
A második csoportot egy humán beállítottságú osztály alkotta, ahol mindössze néhány, fizika iránt érdeklődő, fizika fakultációra járó diák volt, a túlnyomó többség annak örült, hogy utolsó évre végképp megszabadult a fizikától. Az első két csoport diákjai lényegében nem ismertek engem, csak távolról láttak, mint az iskolában dolgozó tanár.

A 24 diáknak a Pre és Post teszteken a hat kérdésre adott válaszaikra kapott pontszámait a következő táblázatok tartalmazzák:

	Diákok																								Összes	Átlag	
	Kérdések	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.			24.
Pre	1.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	2	2	1	2	1	15	0,63	
	2.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0,08	
	3.	2	0	0	0	0	0	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	8	0,33
	4.	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	12	0,50
	5.	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0,25
	6.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0,08
	Össz.:	6	1	0	1	0	3	2	3	1	1	1	2	2	5	1	1	2	0	0	2	5	1	2	3	45	1,88

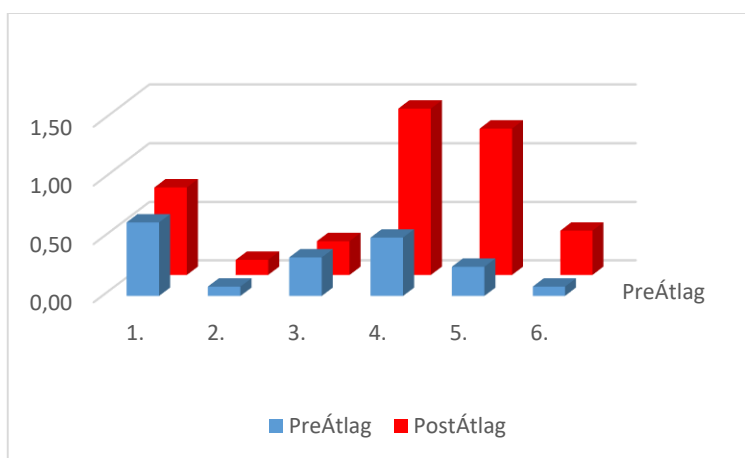
	Diákok																								Összes	Átlag	
	Kérdések	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.			24.
Post	1.	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	18	0,75	
	2.	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0,13	
	3.	0	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0,29
	4.	1	2	2	2	1	1	1	1	1	2	2	0	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2	34	1,42
	5.	2	0	0	0	0	2	0	0	2	2	2	2	0	2	2	2	2	0	0	2	2	2	2	2	30	1,25
	6.	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	9	0,38
	Össz.:	7	2	5	2	4	4	2	3	4	6	4	4	3	6	6	5	5	3	2	5	5	4	5	5	101	4,21

A következő grafikon az egyes diákok által a Pre teszten (első oszlop), illetve a Post teszten (hátsó oszlop) elért pontokat ábrázolja. Örömteli, hogy mindössze négy diáknál nincs érdemi pontszámnövekedés, a többieknél jól látható, hogy jelentős a javulás a Post teszt eredményeiben (12. ábra).



12. ábra. A második csoport 24 diákjának eredménye a Pre és Post teszten.

A következő grafikonok az egyes kérdésekre kapott átlagos pontszámokat hasonlítják össze a Pre és a Post tesztben (13. ábra).



13. ábra. A második csoport diákjai által az egyes kérdésekre kapott átlagos pontszámok a Pre és Post tesztben

Harmadik csoport: 2020. 02. 05. 17 fő

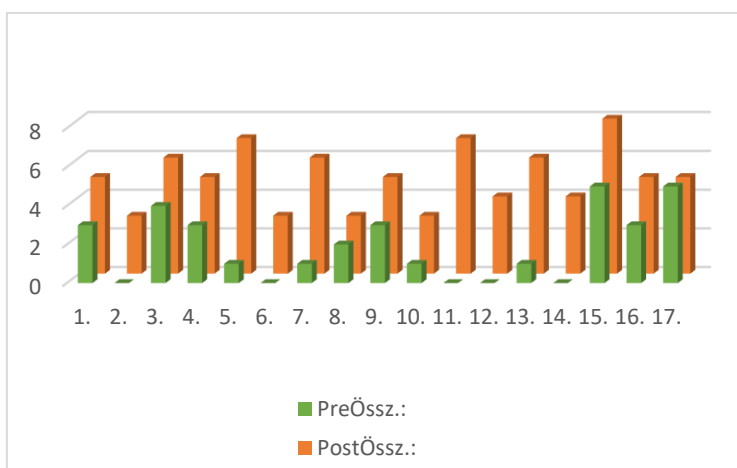
A harmadik csoportot matematika-informatika tagozatos diákokból állt. Bár őket sem tanítottam, de az osztály másik felét igen, illetve helyettesíttem is náluk korábban, tehát a személyes kapcsolat erősebb volt, mint az előző két csoportnál. Ennek tulajdonítom, hogy nem fedezhető fel érdektelenség az eredményekben. Egyetlen diák nem javít az eredményén, de ő már a Pre teszten egész jól teljesített. Sokan pedig nagyon határozott fejlődést mutatnak.

A 17 diáknak a Pre és Post teszteken a hat kérdésre adott válaszaikra kapott pontszámait a következő táblázatok tartalmazzák:

	Diákok																	Összes	Átlag	
	Kérdések	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.			17.
Pre	1.	1	0	2	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	12	0,71
	2.	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0,12
	3.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0,12
	4.	2	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2	2	0	10	0,59
	5.	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	6	0,35
	6.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
	Össz.:	3	0	4	3	1	0	1	2	3	1	0	0	1	0	5	3	5	32	1,88

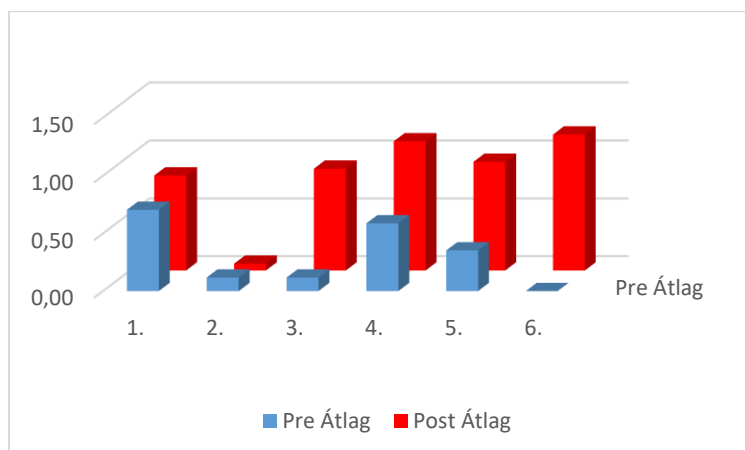
	Diákok																	Összes	Átlag	
	Kérdések	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.			17.
Post	1.	2	1	2	0	2	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	14	0,82
	2.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0,06
	3.	0	0	0	0	2	0	2	0	2	2	2	2	2	0	0	0	1	15	0,88
	4.	0	2	2	0	1	1	1	2	2	0	0	1	2	1	2	2	0	19	1,12
	5.	0	0	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	2	2	0	2	16	0,94
	6.	3	0	0	3	0	0	0	1	0	0	4	0	0	0	4	3	2	20	1,18
	Össz.:	5	3	6	5	7	3	6	3	5	3	7	4	6	4	8	5	5	85	5,00

A következő grafikon az egyes diákok által a pre teszten (első oszlop), illetve a post teszten (hátsó oszlop) elért pontokat ábrázolja. Ebben az esetben is jól látható, hogy jelentős a pontszámnövekedés a legtöbb diáknál (14. ábra).



14. ábra. A harmadik csoport 17 diákjának eredménye a Pre és Post teszten.

A következő grafikonok az egyes kérdésekre kapott átlagos pontszámokat hasonlítják össze a pre és a post tesztben (15. ábra).



15. ábra. A harmadik csoport diákjai által az egyes kérdésekre kapott átlagos pontszámok a Pre és Post tesztben

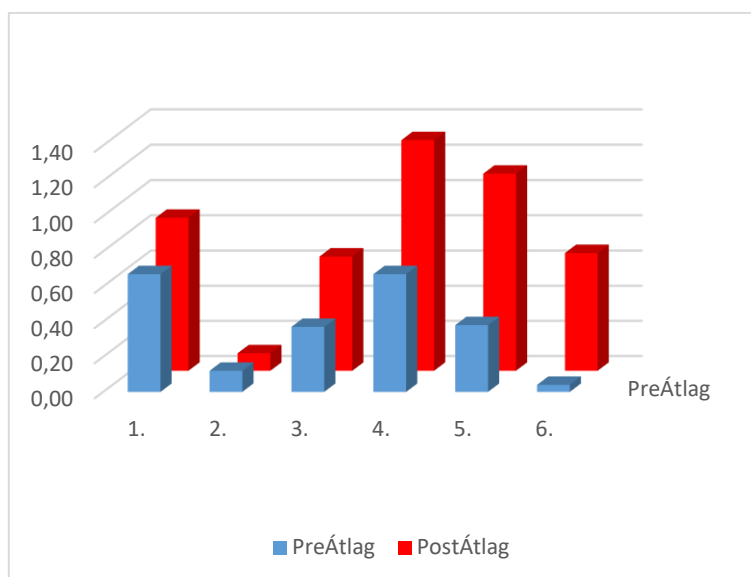
4.6. Elemzés

Az elemzés szempontjából legjobban használható eredmény az összes, 52 diák eredményének átlagos pontszámai kérdésenként ábrázolva. Ezért készítettem egy összefoglaló táblázatot, és ennek eredménye alapján egy ilyen grafikont.

Az átlagértékek táblázata:

Kérdések	PreÁtlag	PostÁtlag
1.	0,67	0,87
2.	0,12	0,10
3.	0,37	0,65
4.	0,67	1,31
5.	0,38	1,12
6.	0,04	0,67

A táblázatban szereplő értékek grafikonon ábrázolva (16. ábra):



16. ábra. Az 52 diák átlagos eredménye kérdésenként.

Jól látható, hogy az 1. kérdésnél mérsékelten nő, a 2. kérdésnél még csökken is az érték, míg a maradék négy kérdésnél jelentősen nőnek a pontszámok. Vagyis a diákok által elért pontszámnövekedés az utolsó négy kérdésből származik.

Az első kérdés esetén a diákok előzetes ismereteik alapján sikeresen próbálkoznak a válasszal. Változó eredménnyel ugyan, de eséllyel válaszolják meg a feltett kérdést már az előzetes tesztben. Ez valószínűleg azért van így, mert a periodikus mozgásról, illetve a mozgást befolyásoló tényezőkről bőven vannak ismereteik. Ehhez képest azonban nem javul jelentősen az eredményük a foglalkozás végére sem. Ez azért lehet így, mert a hangsúly valóban nem a periodikus mozgásokon van, hanem minden említésnél, egy új, és valljuk be, érdekesebb másik mozgás mellett jelennek meg, így a figyelem gyorsan elterelődik róluk.

A második kérdésnél ezzel szemben azt látjuk, hogy a kezdeti és végső teszt egyaránt minimális eredményt mutat. Ez logikusan magyarázható azzal, hogy a fázissík fogalmával itt találkoztak először, és nemcsak kezdetben hiányzott a válaszhoz szükséges ismeret, hanem a foglalkozás végére sem sikerült jobban megérteni.

Ezek az eredmények alapján egyértelmű, hogy mindkét kérdéssel többet kell foglalkozni a téma felvezetése során. Az első kérdésnél is szükséges az egyszerű problémát még egyértelműbbé tenni a többség számára. Egy-két érdekes periodikus mozgás kapcsán jól megvilágítható, hogy hosszú távon milyen feltételek mellett, milyen közelítésben lehet periodikusnak tekinteni egy mozgást.

A második kérdésnél viszont jelentősen lassabban, részletesebben kell bemutatni a fázisteret, mert ez még a legjobb diákoknak sem volt egyértelmű. Nem lehet figyelmen kívül

hagyni azt a tényt, hogy a diákok között sokan voltak, akiknek a fizika tanulással kapcsolatos emlékeik a lehető legrosszabbak. Arra emlékezhetnek, hogy keservesen igyekeztek megtanulni valamit abból, amit soha nem értettek meg igazából. Meglepő módon ezek közé tartozhatnak a mozgásokat jellemző grafikonok is. Aki már az út – idő, vagy hely – idő (mi a különbség?), sebesség idő grafikonokkal is nehezen birkózott meg, biztosan nem érti meg, mit jelent egy hely – sebesség grafikon. Nagy sikerélményt jelenthet, ha fél évvel a fizika tanulás befejezése után (jellemzően ilyen diákok vettek részt a programban) sikerül valami olyat megértetni, ami eddig nem volt világos, és talán a fizikához való utólagos hozzáállást is pozitívan befolyásolja.

A tanítás során az analógiák használata rendkívül hatékonynak bizonyult. A tökéletesen rugalmas pattogás mindenki számára jól elképzelhető, ismert mozgás. Ebből kiindulva vizsgáltuk meg a nem tökéletesen rugalmas pattogást vízszintes talajon, illetve lépcsőn. A pattogás közben a mozgást jellemző energiák szemléletesek, jól érthetők. Nehézséget jelent ugyanakkor az, hogy az alap oktatásban csak a tökéletesen rugalmas, és a tökéletesen rugalmatlan ütközés szerepel. Ennek ellenére ez a jelenség annyira hétköznapi és egyszerű, hogy jól érthető volt.

Fontos volt rámutatni a meglévő hamis feltételezésekre, illetve ezeknek a jelenségeknek a helyes szemléletére. Általánosan megjelent az az elképzelés, hogy a lépcsőn lefelé pattogva a labda minden határon túl növekvő ívekkel és sebességgel fog mozogni. Ez a gondolat a tökéletesen rugalmas ütközésből származik, hiszen ezt ismerik jobban. Érzékelhető volt az élmény, amikor felfedezték, hogyan tudja az ütközési energiaveszteség ellensúlyozni a gravitációs energia növekedését.

Kváziperiodikus mozgásra már ismert, szemléletes példaként hivatkoztam a merőleges rezgések összetételekor megismert Lissajous-görbékre, a Foucault-ingára, és a Merkúr pálya perihélium körülfordulásra. Ezek közül legsikeresebbnek a Foucault-ingát éreztem. Valójában az a helyzet, hogy mindhárom téma olyan, ami elvileg szerepel a tanulmányokban, de ha a csoporttal lassú a haladás, esetleg már jelentős a lemaradás, akkor pontosan ezek a kiegészítő ismeretek hullanak ki legnagyobb valószínűséggel. Ezért egyáltalán nem lehetett építeni korábbi ismeretekre ezekben az esetekben. A Foucault-ingát néhány évente a kollégium lépcsőházában mi is felszereljük. Egy 15 m-es drótkötélen 15 kg-os régi, erre a célra gyártott ingatest leng, sajnos tökéletlen felfüggesztéssel, de még így is vonzza a figyelmet. (Különösen, amikor a kollégium vezetője alpinista technikával felszereli az ingát.) Erről van tehát a legtöbb információjuk.

A Lissajous-görbékkel kapcsolatban azt tapasztaltam, hogy csak a fakultációra járóknak vannak ezzel kapcsolatos emlékeik. A többiek a rendelkezésre álló idő alatt nem tudják

mélységében megérteni a jelenséget, bár az egyszerű Geogebra szimuláció nagyon szép ábrákat varázsol elénk, de ezek jelentése nem lesz világos. Talán ez a rész hagyható el leginkább a programból azért, hogy a többi pontra több idő, nagyobb figyelem juthasson.

A Merkúr mozgása már a korai földrajz órákon is előkerülhet. A fizika tananyagban belül az általános relativitáselmélet egyik kísérleti bizonyítékaként is említjük, ha nem esik áldozatul az időhiánynak. Mindenesre ez is olyan egyszerű (mint jelenség) és szemléletes is, hogy jól magyarázza a kváziperiodicitást.

A lépcsőn pattogó labda mozgását szimuláló program működését néhány példa, néhány paraméter érték mellett mutatom meg a diákoknak. Mivel a program egyszerre egy felhasználót szolgál ki, nem is alkalmas arra, hogy egy csoport egyszerre kezdjen kísérletezni, próbálkozni vele. Azonban egy-egy diák, a többiek előtt, megpróbálkozhat különböző értékek bevitelével, és az eredmény értelmezésével. Azt tapasztaltam, hogy sikerült az érdeklődést annyira felkelteni, hogy később otthon, egyedül visszatérjenek, és „játszanak” egy kicsit a programmal.

4.7. A kváziperiodikus mozgás egyedi vonása: Trajektóriák a fázistérben

A tanítási tapasztalatok alapján részletesebben érdemes foglalkozni a különböző fajta mozgásokhoz tartozó fázistérbeli pályákkal.

Gondoljuk meg, ha tisztán periodikus mozgást vizsgálunk, akkor, ha periódusidőnként nézünk rá a rendszerre, és ábrázoljuk a pillanatnyi hely és sebesség értékeket a hely-sebesség fázissíkon, akkor mindig egyetlen pontot kapunk. A mozgás periodikussága ugyanis éppen azt jelenti, hogy periódusidőnként ugyanazok az értékek térnek vissza a mozgás jellemzőiben.

Ezzel szemben, kváziperiodikus mozgás esetén a fázistérben a mozgást egy zárt görbe ábrázolja. Gondoljuk ezt végig egy olyan viszonylag egyszerű esetben, amikor a test ω_1 és ω_2 körfrekvenciával végez egymásra merőleges rezgéseket. Ekkor az x - v_x síkban a test helyzetét a következő egyenletek írják le:

$$x = A \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$v_x = -A\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi).$$

Ha erre a rezgésre az ω_2 körfrekvenciájú második rezgés periódusaiban nézünk rá, vagyis:

$$t = n2\pi \frac{1}{\omega_2}, \text{ ahol } n \in N,$$

akkor

$$x = A \cos\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} 2\pi n + \varphi\right)$$

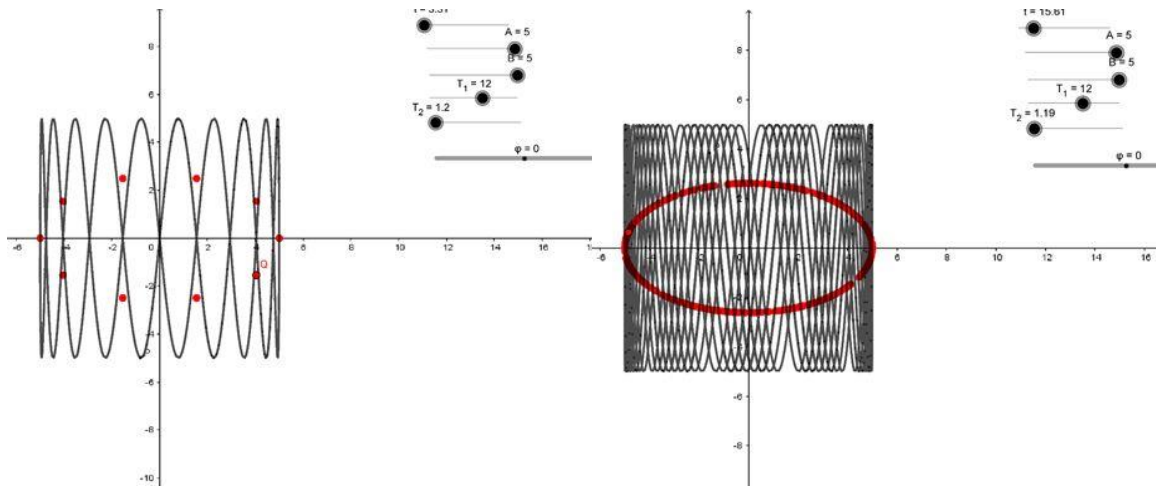
$$v_x = -A\omega_1 \sin\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} 2\pi n + \varphi\right)$$

ahonnan

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_x}{A\omega_1}\right)^2 = 1$$

ami egy ellipszis egyenlete.

Ilyen rezgések összetételekor a frekvenciák arányától függően kapunk egyszerűbb, vagy bonyolultabb pályát, ezek a Lissajous-görbék. Figyeljünk fel arra, hogy a fázistérben akkor is ellipszist kapunk, amikor a Lissajous-görbe bonyolult, vagyis a frekvenciák aránya nem fejezhető ki kis egész számokkal, vagy akár irracionális. Ekkor a mozgást ábrázoló grafikon egyszerűbb a fázistérben, mint a mozgás pályája a valós térben (17. ábra).



17. ábra. A fenti ábrákon racionális frekvencia arányokhoz tartozó zárt Lissajous-görbéket látunk, illetve piros pontokkal a fázistereket ábrázoltam. A baloldali görbe esetén a periódusidők aránya 10:1, a jobboldali ábránál pedig 101:10.

Ha a frekvenciák aránya racionális, akkor ez az ellipszis diszkrét pontokból áll, nem folytonos. A mozgás ezért mindenképpen periodikus lesz, hiszen néhány periódus után újra ugyanazok a fázistérbeli pontok ismétlődnek, ami azt jelenti, hogy a mozgást végző test ismét ugyanabba az állapotba került, mint korábban.

Ezzel szemben, ha a frekvenciák aránya irracionális, akkor marad az ellipszis a fázistérben, de a pontok soha nem fognak ismétlődni, az ellipszist végtelen sok pont rajzolja ki, ez egy igazi kváziperiodikus mozgás.

Mindezt részletesen végigtanulmányoztuk a diákokkal egy egyszerű Geogebra szimulálásban, melyet a Függelék 4. oldalán bemutatok. A Függelék a kváziperiodikus mozgáshoz tartozó tanítási anyag prezentációjának összes diáját tartalmazza.

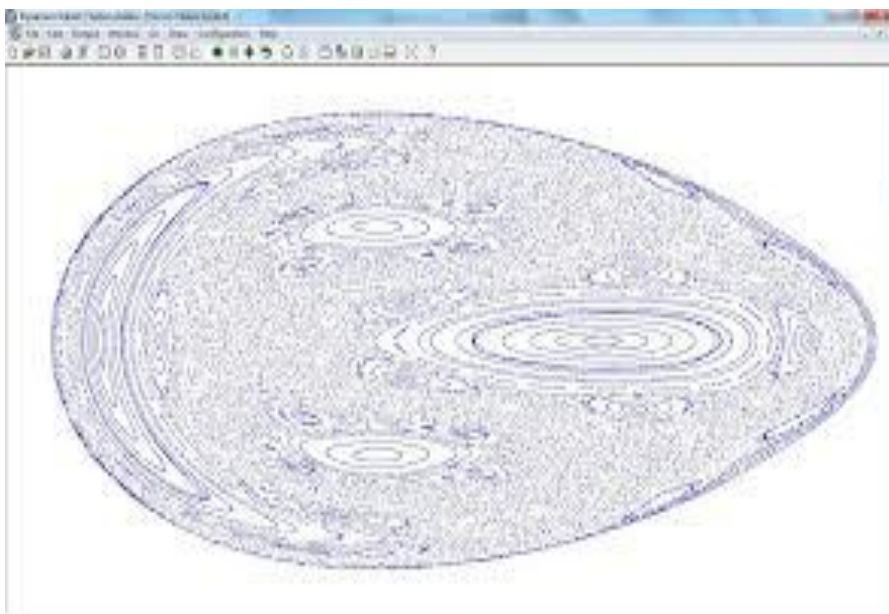
Érdeemes még megemlíteni, hogy ha egy periodikus mozgást kis, véletlenszerű hatások befolyásolnak folyamatosan, és ezeket is figyelembe vesszük, akkor a fázistérben a mozgást ábrázoló az egyetlen pont helyett egy kis elmosódott foltot kapunk, ami jól megkülönböztethető a kváziperiodikus mozgástól.

4.8. Összegzés

A foglalkozás eredményeképpen a diákok megtanulták árnyaltabban látni a periodikus és nem periodikus mozgásokat. Megtanulták, hogy a periodikus mozgások a ritka kivételek a lehetséges mozgások között. Megismertek példákat a kváziperiodikus mozgásokra, és ha nem is sikerült mélységében megérteni a fázissík jelentését, láttak példa mozgásokat fázistérben ábrázolva.

Részletesen végiggondoltak egy egyszerűnek látszó, mégis összetett mozgást, melynek vizsgálata során felfedezték, hogyan alakulhat ki a kezdőfeltételektől függően egyes esetekben periodikus mozgás, miközben a paraméterek széles tartományában mindig kváziperiodikus mozgás adódik.

A kváziperiodikus mozgásra visszatérhetünk a káosz megismerése után, amikor felfedezzük, hogy konzervatív kaotikus rendszerekben a kaotikus tartományok mellett általában találunk kváziperiodikus mozgásokat is, és ezeket éppen a zárt görbékről ismerhetjük fel a fázistérben (18. ábra).



18. ábra. A Hénon-Heiles modell Poincaré térképe Dynamics Solver programmal elkészítve [14]. Konzervatív rendszerben nem létezik kaotikus attraktor. A fázistérben megjelenő zárt görbék mutatják, hogy bizonyos kezdőfeltételek esetén kváziperiodikus mozgások jönnek létre (a pontozott tartományok jelzik a káoszt).

A tanítási folyamat során a figyelmet arra irányítottam, hogy mit tudnak a diákok az adott kérdésről, illetve milyen beállítódással rendelkeznek az adott téma iránt. Egyszerre próbáltam növelni a tudást, és javítani a hozzáállást. Ez azt jelenti, hogy a téma felvezetésénél nagyon figyeltem arra, hogy amit elvileg már tudhattak, tudniuk kellett volna, azt vajon tényleg tanulták-e, illetve, legalább nagy vonalakban, emlékeznek-e rá. A legtöbb esetben az volt a tapasztalat, hogy akár tanulták, akár nem, nem emlékeztek sokra. Ennek megfelelően kellett részletesebben, vagy kevésbé részletesen magyaráznom az egyes elemeket. Ezt a magyarázatot viszont olyan módon sikerült megtennem, ami minden esetben megragadta legalább a többség figyelmét. Volt, amikor spontán tapsal fejezték ki érzésüket az óra végén, ami nem bevett gyakorlat az iskolában. Úgy érzem a taps azt is kifejezte, hogy a gondosan összeállított, gazdag, tartalmas ismeretanyagban, a lelkes előadásban a megbecsülésüket érezték.

Ennek a fejezetnek az anyaga adja a 3. tézispont háttérét.

5. A káosz fogalmának, jelenségeinek bemutatása középiskolás szinten egyetlen tanítási órában

5.1. Bevezetés

A káoszjelenségek oktatása nem szerepel a középiskolai tananyagban. Több európai ország tankönyveit megvizsgálva is csak néhány említést találtam [2], [15], [16], [17]. A magyar nyelvű publikációk főleg a káosz szakköri vagy tagozatos csoportban történő tanításával foglalkoznak [18], [19], [20], [21], [22], [14], [23], [24], [25].

2003-ban Szatmári-Bajkó Ildikó az Eötvös Loránd Tudományegyetem Elmélet Fizika Tanszéke által kifejlesztett program segítségével készített a káoszt középiskolában bemutató oktatási programot [26], [27], [28], [29]. 2008-ban és 2009-ben Jaloveczki József publikált cikket mozgásegyenletek numerikus megoldásáról középiskolás diákokkal [30], [31].

Megmutattam, hogy egy tanítása órán belül is van lehetőség a káosz lényeges elemeinek megértetésére a közoktatásban [32].

Két alapvető kérdést gondoltam végig: miért és hogyan tanítsuk ezt a témakört a közoktatásban.

A miért kérdésre rövid, meggyőző válasz adható:

- mert fontos, az elmúlt évtizedek egyik meghatározó, és meglepően sok területet érintő fizikai eredménye,
- mert érdekes és jól szolgálja a fizika tanítás szintézisét. Azt tapasztaltam, hogy a 11-12. évfolyamon a diákok jól fogadták a korábbi témáknál összetettebb tartalmakat.

A hogyan kérdése sokkal összetettebb.

A kaotikus mozgások vizsgálata nem nélkülözheti a fraktál fogalmának megismerését. Ezt érdemes egy önálló részben bemutatni, hiszen egy önálló nagy témakört foglal magában. Tapasztalatom szerint kiváló bevezetőként szolgál a káoszhoz. Olyan ismeretlen, különleges és magával ragadó, hogy nagyszerűen megalapozza a figyelmet a következőkhöz.

Ezután rendszerezni kell a korábban tanult mozgásfajtákat a szabályosság, periodicitás szempontjából. Világossá kell tenni, hogy az iskolában tárgyalt mozgások egyszerű alapesetek, amelyek több megszorító feltétel esetén valósulhatnak meg. A valóságban azonban ezek a feltételek tökéletesen soha nem teljesülnek, csak legfeljebb az eltérés az adott leírás szempontjából elhanyagolható.

Elkészítettem egy tananyagot, ami egy tanításióra keretében mutatja be a kaotikus mozgás alapvető jellemzőit.

A káosz alapfogalmait szemléletes példák segítségével tárgyalom. Periodikus-e egy ingaóra mozgása, a Föld forgása, illetve keringése. Ezek alapján mennyire jelezhetők előre ezek a mozgások? Bemutatom, hogy a környezetünkben számos olyan jelenséggel találkozunk, amelyek közös jellemzője, hogy nem periodikus (nem is kváziperiodikus), nem jelezhető előre és bonyolult geometriájú. Új megközelítés a diákok számára, hogy a korábban egyszerűen periodikusnak gondolt mozgásokon elgondolkodjanak, valóban periodikusak-e? Milyen pontosság esetén tekinthetők periodikusnak?

Az a tapasztalatom, hogy nagy élmény a diákokkal felfedeztetni, hogy a tökéletesen szabályos és a teljesen szabálytalan, vagyis zajos mozgás között több lépcső (kváziperiodikus, kaotikus) található. Olyan ez a felismerés, mint amikor arról hall valaki először, hogy a véges és végtelen mennyiségek felosztása is tovább finomítható, mivel végtelenből több, egymástól jól elkülöníthető fokozat van.

Úgy találtam, hogy aki elgondolkodik, és véleményt formál ilyen kérdésekről, annál általában az figyelhető meg, hogy a mechanikus szemléletű determinizmus mélyen gyökerezik gondolkozásunkban. Nem könnyű elfogadni, hogy az egészen kicsiny kezdeti pontatlanságok néha, a nem is túl távoli jövőben, teljes határozatlanságot eredményezhetnek.

Hasonlóan erős meggyőződésünk, és ezt a diákok is észrevétlenül átveszik, hogy egyszerű rendszerek egyszerű egyenletekkel, bonyolult rendszerek bonyolult egyenletekkel írhatók le. A káoszban az a meglepő, hogy egyszerű egyenletekkel leírható rendszereknek fedezzük fel a bonyolult viselkedését.

Megmutattam, hogy az általam használt tananyaggal az említett téves beidegződések feloldhatók, helyes irányba terelhetők.

Jelentősen bővíti a diákok szemléletét, amikor megértik, miért érdemes ezeknél a mozgásoknál az út-idő és sebesség-idő függvények helyett fázistérben ábrázolni a mozgást.

A leírt megfontolásokkal először kísérlem meg körülhatárolni azokat a tartalmakat, (nem periodikus, előrejelezhetetlen, fraktál geometriájú mozgás, fázistér, attraktor), amelyeket érdemes a káoszjelenségek középiskolai tanításakor az alapképzés részének tekinteni.

5.2. Fraktálok

A fraktálok olyan geometriai objektumok, melyek önmagukban is lenyűgözőek. Alapvető tulajdonságaik bemutatása után az önhasonlóságukkal foglalkozunk, ami a természetben megfigyelhető fraktálszerű alakzatoknál is jól felismerhető. A kaotikus mozgások leírásában lényeges szerepe van a fraktáloknak. Rácsodálkozhatunk, hogy a mozgásoknak fraktállal ábrázolható bonyolultsága már az egyszerű Newton-törvényekben is „benne van”, abból következik.

Első hallásra egyszerűnek tűnő kérdés: milyen hosszú Nagy-Britannia partvidéke? (A kérdést Mandelbrot tárgyalta részletesen 1967-es cikkében [33].) Már a felületes vizsgálódás is meggyőzhet minket arról, hogy a válasz nem is olyan egyértelmű. Ha különböző hosszúságú rudakkal (mérőegységgel) próbáljuk megmérni, lényegesen különböző eredményeket kapunk (19. ábra). Tetszőleges hosszúságú mérőrudat használva csak közelítő értéket kapunk.

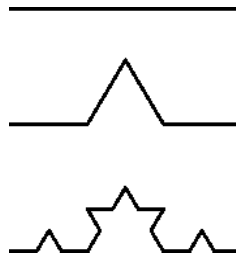


19. ábra. Nagy-Britannia partvidékének hossza [34].

Talán még meglepőbb, hogy hasonló eredményre jutunk, ha Magyarország államhatárának hosszát szeretnénk megtudni. Az érték bizonytalanságára utaló hivatkozás nélkül találunk különböző adatokat: 2171 km [35], 2215 km, [36], [37], 2246 km [38].

Az eljárás nem ismeretlen, mivel a kör területét is töröttvonallal közelítjük. A lényeges különbség az, hogy ott egy véges értéket kapunk meg egyre pontosabban. Ebben az esetben is azt tapasztaljuk, hogy a terület értéke nő, ha a mérőegység csökken, de nem konvergál egy értékhez. Meglepő, hogy pontos érték a területre itt nem létezik.

Az erősen töredezett vonalak vizsgálata több mint száz éves. Az egyik legismertebb a Koch-görbe (20. ábra). Ezt úgy szerkeszthetjük meg, hogy kiindulunk egy szakaszból, a középső harmadát elhagyjuk, és egyenlő oldalú háromszöget építünk rá. Az így keletkező négy szakaszra ugyanezt az eljárást ismétljük, és ezt folytatjuk az egyre nagyobb számú, egyre rövidebb szakaszokkal vég nélkül.



20. ábra. Koch-görbe szerkesztésének első három lépése.

Az így keletkező geometriai alakzat (a szerkesztést végtelenszer ismételve), annak ellenére lesz végtelen hosszúságú, hogy a területet nem tölti ki teljesen. Tehát ez „több” mint egy vonal, de „kevesebb” mint a sík. Fraktálnak nevezzük.

A fraktálok a dimenzió fogalmát kitágították. Korábban egyszerűen a vonalak dimenzióját egynek, a síkbeli alakzatokét kettőnek tekintettük. A Koch-görbe dimenziója a kerület növekedésének ütemeként értelmezhető: ha a törött vonalat az adott lépésben felépítő szakasz hossza ε , a teljes Koch-görbe hossza L , a következő összefüggés adódik:

$$\varepsilon = 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \dots \quad L = 1; \frac{4}{3}; \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2; \dots \quad (1)$$

Általában $L \approx \varepsilon^{(1-D)}$ lesz. Ha ε értéke csökken, D értékét tekinthetjük a fraktáldimenzióknak. A Koch-görbe esetén D értékére a következő módon határozható meg:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{3^n}, \quad L_n = 4^n \frac{1}{3^n} = 4^n \varepsilon_n = \varepsilon_n^{n \frac{\ln 4}{\ln \varepsilon_n}} \varepsilon_n = \varepsilon_n^{\frac{n \ln 4}{n \ln \frac{1}{3}} + 1} = \varepsilon_n^{1 - \frac{\ln 4}{\ln 3}} = \varepsilon_n^{1-D}.$$

Mivel: $L_n \approx \varepsilon_n^{(1-D)}$

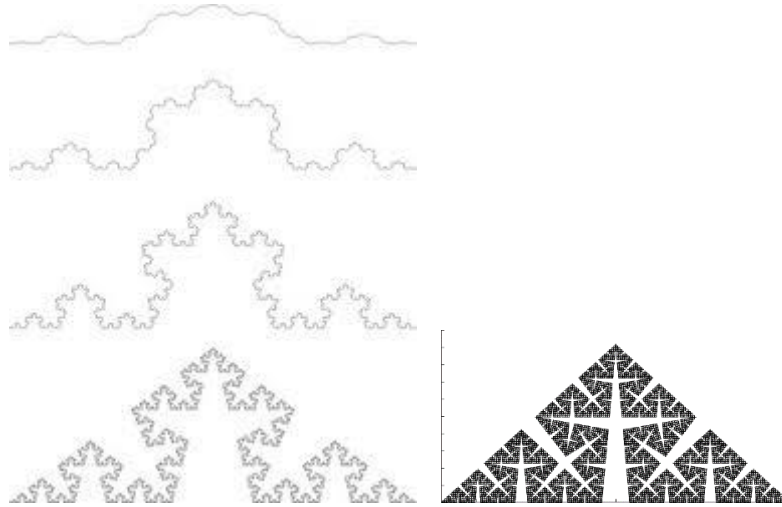
$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,262$$

A szokásos nemfraktál görbékre $D = 1$. A fraktáldimenzióra adódó tört értékek jelentik az egyik legnagyobb újdonságot a diákok számára. Bár az értékek kiszámítása tisztán középiskolai ismeretekkel elvégezhető, részletes végiggondolásuk több időt igényel, külön alkalommal érdemes foglalkozni vele.

Anglia déli partvidékének fraktáldimenziója: 1,31, a norvég fjordok fraktáldimenziója 1,52. A fraktáldimenzió szemléletesen a töredezettséget méri. Minél nagyobb D értéke, annál töredezettebb a görbe ($1 \leq D \leq 2$).

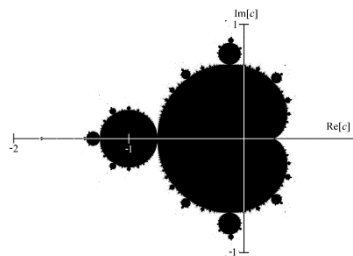
A Koch-görbe képzési szabályát kicsit meg is változtathatjuk: nem az eredeti szakasz 1/3 részét tartjuk meg mindkét oldalon, hanem az r -szeresét, ahol $0,25 < r < 0,5$. Ezután középre egyenlőszárú háromszöget építünk úgy, hogy négy, egyenlő hosszú szakaszból álló töröttvonalat kapjunk. Ha r értéke 0,25-höz van közel a keletkező fraktál alig különbözik az eredeti szakasztól, ha ellenben 0,5-höz közelít, akkor elkezd kiöltöni az egész háromszög

területét. Így a Koch-görbét különböző paraméterekkel vizsgálva a fraktáldimenzió 1 és 2 közötti tetszőleges értéket felvehet (21. ábra).



21. ábra. A Koch-görbe dimenziója különböző paraméterekkel rendre:
 $r = 0,26$; $r = 0,3$; $r = 0,35$; $r = 0,4$; $r = 0,49$
 $D = 1,029$; $D = 1,151$; $D = 1,321$; $D = 1,513$; $D = 1,943$ [6].

A fraktálok egyik legjellemzőbb tulajdonsága az önhasonlóság, ami azt jelenti, hogy a fraktál egy részlete, a mértéktől eltekintve, lényegében azonos szerkezetű az eredetivel. A fraktálok rendkívül bonyolultak, kifejezetten szépek lehetnek, és sokféle alakban jelenhetnek meg.



22. ábra. Mandelbrot halmaz [39].

A fraktálokat leíró képletek egészen egyszerűek is lehetnek, mint pl. a Mandelbrot halmaz esetén: $z' = z^2 + c$ (z és c komplex számok). A Mandelbrot halmaz azokból a komplex számokból áll, melyekre a fenti sorozat nem tart a végtelenbe (22. ábra).

Az önhasonlóság a matematikában pontos geometriai hasonlóságot is jelenthet (mint például a Koch-görbe esetén). Ha a jelenséggel a természetben találkozunk, akkor az önhasonlóság csak a szerkezetet tekintve, és csak néhány nagyságrenden keresztül érvényes. Az egyik legjobb példa a Hold kráterekkel borított felszíne, mely 8 nagyságrenden keresztül önhasonló (23. ábra).



23. ábra. Kráterek a Hold felszínén [40].

A növények körében sok példával találkozhatunk fraktálszerű formára (24. ábra).



24. ábra. “Fraktál növények”: pagoda-karfiol és karfiol, illetve brokkoli és páfrány önhasonlósága. Itt azonban az önhasonlóság csak egy-két nagyságrenden keresztül (legfeljebb tízszeres nagyításban) érvényes.

Az eddig bemutatott fraktálok bármilyen érdekesek és szépek, nem jelennek meg a kaotikus mozgások ábrázolásában. Ott ugyanis általában az úgynevezett szálas fraktálokkal találkozunk. Nézzünk erre is példát: ez a Cantor-szálak néven ismert alakzat.

Cantor-szálakhoz úgy juthatunk, ha egy egységnyi négyzetből elhagyunk a közepén egy sávot, oly módon, hogy a két oldalon egyforma, r szélességű sávok maradjanak. Ezután ugyanezt az eljárást ismételjük a megmaradt sávokra úgy, hogy r^2 , majd r^3 , és így tovább, szélességű sávok maradjanak (25. ábra).



25. ábra. A Cantor-szálak szerkesztésének első négy lépése $r = 0,4$ paraméterrel [6].

A Cantor-szálak dimenziójára ebben az esetben a következő adódik: az n . lépésben 2^n darab $\varepsilon = r^n$ szélességű sávot kapunk, amit $1/\varepsilon$ darab ε oldalú négyzettel tudunk lefedni. Mivel a fraktáldimenzió általános definíciójában az epszilón méretű lefedő dobozok száma $N(\varepsilon)$ jelenik meg, amire: $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}$

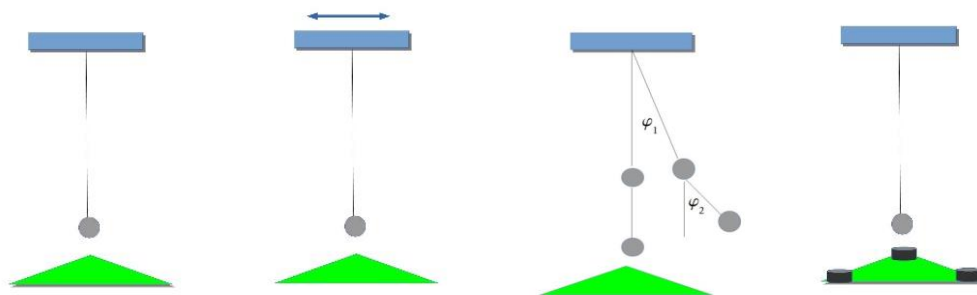
$$N(\varepsilon) = 2^n \frac{1}{\varepsilon} = 2^n \frac{1}{r^n} = \varepsilon^{n \frac{\ln 2}{\ln r}} = \varepsilon^{n \frac{\ln 2}{\ln r}} = \varepsilon^{\frac{\ln 2}{\ln r}}^{-1}$$

$$D = 1 + \frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{r}} = 1 + \frac{\ln 2}{\ln 2,5} = 1,756$$

Cantor-szálakat aszimmetrikus módon is készíthetünk, ha az egységnégyzetből a két oldalon nem egyforma szélességű sávokat tartunk meg. A kaotikus attraktor szerkezete általában enyhén aszimmetrikus Cantor-szálaknak felel meg. A kaotikus attraktorról kapcsolatban kizárólag a Cantor-szál típusú fraktál forma jelenik meg.

5.3. Káosz

Káosznak a fizikában, a hétköznapi szóhasználatától lényegesen különböző módon, az egyszerű rendszerek bonyolult viselkedését nevezzük [6]. A kaotikus mozgás a szabályos, periodikus és a véletlenszerű mozgásoktól is egyértelműen különbözik. A kaotikus mozgás jellemzője, hogy szabálytalan, előrejelezhetetlen, érzékeny a kezdőfeltételekre és bonyolult geometriájú. Számos egyszerű mechanikai rendszer kis módosítással kaotikus viselkedést mutathat. A középiskolában tárgyalt mozgások, például a rugóhoz rögzített test harmonikus rezgése, a harmonikus kényszerrezgés vagy a matematikai inga lengése egyszerű. Ha a rugó nemlineáris (a rugóerő nem pontosan arányos a kitéréssel) és periodikusan mozgatjuk a rögzítési pontot (gerjesztett anharmonikus oszcillátor), vagy a lengő ingatest közelébe mágneseket helyezünk, akkor olyan mozgásokat kapunk, amelyek lényegesen bonyolultabbak az előzőeknél (26. ábra). Azonban a mozgásegyenleteket ezekben az esetekben is pontosan ismerjük, melyek alig bonyolultabbak az eredeti, nem kaotikus rendszer egyenleteinél. Bár ezeknek az egyenleteknek nem létezik egzakt megoldása, és az egész eljárás túlmutat a középiskolai anyagon (differenciál egyenletek numerikus megoldása), segédprogramok alkalmazásával bemutathatjuk az eredményt.

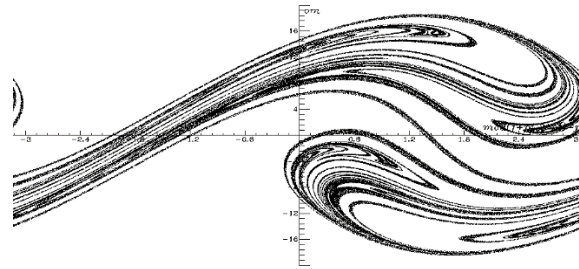


26. ábra. Példák periodikus és kaotikus mozgásokra: matematikai inga, rezgetett inga, kettős inga és mágneses inga.

Kaotikus mozgás leírásakor nem hely-idő vagy sebesség-idő függvényt használunk, mivel azok áttekinthetetlenül bonyolultak lennének, hanem fázisteret alkalmazunk: a mozgás hely és sebesség értékeit ábrázoljuk. Leképezésnek nevezzük, ha ezt az ábrázolást bizonyos időközönként vesszük (tehát nem folytonosan), diszkrét pontokkal. Ilyen esetben a mozgás ábrázolásához mintát veszünk a mozgás jellemzőiből. Gerjesztett mozgásoknál jellemzően a gerjesztési periódusnak megfelelő időnként vesszük ezeket a mintákat. A mozgást jellemző kép ilyenkor pontok sokaságából áll össze. Egy egyenletes körmozgás vagy harmonikus rezgőmozgás képe így ábrázolva egyetlen pont lenne, hiszen periodikusan mintát véve belőlük, mindig ugyanazt a hely és sebesség értékeket kapnánk. A kaotikus mozgásnál, ezzel szemben, soha nem kapjuk ugyanazokat az értékeket. Éppen az a csodálatos egy ilyen mozgásban, hogy a kaotikus mozgást jellemző ábra egy jellegzetes, jól felismerhető, általában bonyolult geometriai szerkezettel rendelkezik. Súrlódásos esetben az egyre sokasodó pontok kirajzolják az úgynevezett kaotikus attraktort.

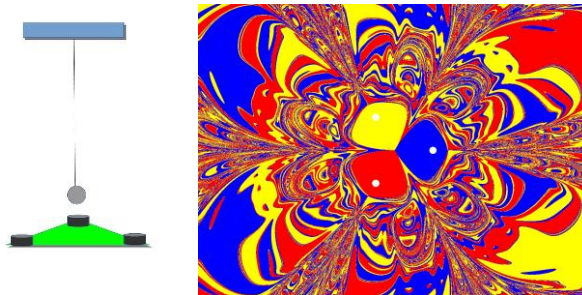
Mint említettük már, a testek mozgását a kaotikus esetekben is egyértelműen meghatározzák Newton-törvényei. A fraktáltság benne van már Newton II. törvényében. A kaotikus mozgások vizsgálata bebizonyította: nem igaz a hallgatólagosan elfogadott általános elv, miszerint egyszerű törvényből egyszerű mozgás következik, bonyolult mozgást pedig bonyolult összefüggés határozhat meg. Itt azt látjuk, hogy egyszerű törvényből következik bonyolult mozgás.

Kaotikus mozgás ábrázolásánál gyakran különösen összetett és szép fraktálokat kapunk (27. ábra).



27. ábra. A rezgetett inga kaotikus attraktora.

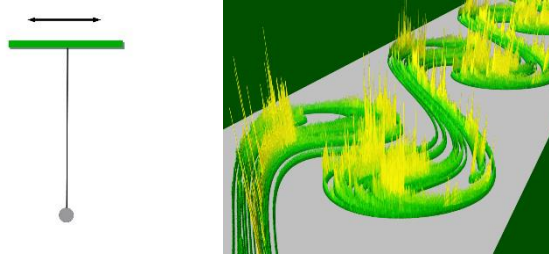
A mágneses inga esetében például ábrázolhatjuk azt, hogy különböző pontokból indítva az ingát, a légellenállást figyelembe véve, végül melyik mágnes közelében állapodik meg. Ha az egyes mágnesekhez vezető kiindulási pontokat különböző színekkel jelöljük, a következő ábrát kapjuk (28. ábra):



28. ábra. A mágneses inga és vonzási tartományai [6]. A fehér pontok jelölik a mágnesek helyét. Meglepő és izgalmas, hogy a mágnesekhez vezető bizonyos kiindulási területek milyen bonyolult szerkezetet mutatnak: a finom rajzoltos helyeken egészen közeli pontokból indulva is máshol áll meg az inga.

A kaotikus mozgás másik fontos jellemzője az előrejelezhetetlenség. A valóságban a kiindulási értékeket soha nem ismerjük matematikai pontossággal. Ha tökéletesen pontos lenne a kezdő érték, tetszőleges pontossággal meghatározhatnánk a későbbi értéket is, ugyanis a kaotikus mozgás determinisztikus. A mozgás, ahogy az előző példánál is láttuk, azonban rendkívül érzékeny lehet a legkisebb különbségekre is. Minden újabb időegységre történő előrejelzés a kezdeti feltételek újabb tizedesjegynyi pontosságát igényli. Mivel közelítőleg ismert kezdeti értékekből indulunk ki, hosszabb időtartam esetén nem tudunk pontos választ adni a mozgásállapot jellemzőinek (hely, sebesség) pontos értékeire.

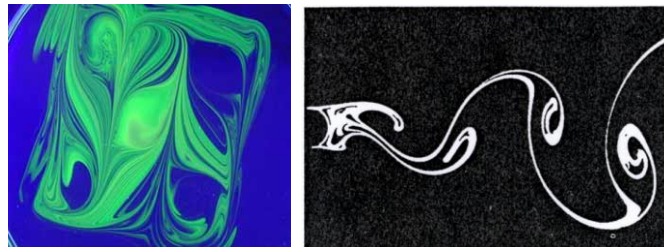
A mozgás hosszabb távon előrejelezhetetlen, hiszen nem tudjuk megmondani, hogy egy adott t időpillanatban hol, és mekkora sebességgel lesz a test, viszont van lehetőség valószínűségi megközelítésre. Ilyenkor azt ábrázoljuk, hogy a kaotikus attraktor egyes részeire milyen gyakran, azaz milyen valószínűséggel tér vissza a mozgás. Ez a valószínűség azonban már tetszőleges pontossággal meghatározható.



29. ábra. Valószínűségi eloszlás a rezgetett inga ábrázolásakor [6].

A eloszlás tetszetős fraktál szerkezete komoly fizikai jelentést hordoz: a mozgás hosszú távú valószínűségi előrejelezhetőségét fejezi ki (29. ábra).

Különböző anyagok keveredése közben is szép fraktálszerű alakzatok jöhetnek létre. Ez is a káosz speciális esete, érvényesek rá a káoszt jellemző tulajdonságok. A jelenség külön érdekessége, hogy az általában fázistérben megjelenő fraktál itt a valós térben válik láthatóvá [28].



30. ábra. Festékek keveredése, fényképfelvétel egy henger felületéről leoldódó festék mintázatáról a Kármán-féle örvényútban [41].

A festékek keveredésének módja tetszőleges anyagok keveredésére is érvényes, így modellezni lehet vele a szennyeződések terjedését akár a légkörben, akár a vizekben (30. ábra). Az előzőek alapján a szennyeződések terjedését sem egyszerű előre jelezni, ami fokozott veszélyt jelenthet.

5.4. Összegzés

Az előző pontokban leírt tartalom nem fér bele egy tanítási órába. Az eddigi nyolc alkalommal, amikor ezt egy-egy diák csoportnak egy tanítási órában elmondtam, kisebb eltérésektől eltekintve, a következő időbeosztást alakítottam ki.

Bevezetés: 1 perc

(Miről lesz szó? Érdeklődés felkeltése, tisztázzuk, hogy ebből nem lesz dolgozat, elég csak figyelni.)

Fraktálok: 20 perc

(Határok hosszának kérdése. Megnézzük Nagy-Britannia határainak mérését ábrázoló sematikus rajzot, majd pár szót ejtünk Belgium-Franciaország, Portugália-Spanyolország közös határaitól, Magyarország határának hosszáról. (5 perc),

Koch-görbe fogalma, szerkesztésének első néhány lépése ábrával, $r = 1/3$ és $0,25 < r < 0,5$ esetek, Cantor-halmaz és Cantor-szál (7 perc),

Fraktál dimenzió a Koch-görbére $r = 1/3$ és más r értékekre, Cantor-szálak fraktáldimenziója: csak eredmények (3 perc),

Önhasonlóság a Koch-görbénél, illetve a természetben: Hold, növények képekkel (5 perc))

Káosz: 24 perc

Fogalma, egyszerű mechanikai rendszerek képekkel, amik kaotikusak (7 perc),

Kaotikus mozgás leírása, tulajdonságok: nem periodikus, előrejelezhetetlen, érzékeny a kezdőfeltételekre, bonyolult geometriájú, ábrázolása fázistérben (10 perc),

Attraktor fogalma ábrával, valószínűségi ábrázolás (7 perc).

Tapasztalatom alapján a diákok érdeklődve figyelik az elhangzottakat, azonban erről a témáról nem készült előzetes felmérés, illetve az előadás végén, az elhangzottak megértését mérő teszt. Joggal feltételezhető, hogy túl sok az információ ahhoz, hogy ebből mélyebb megértés alakulhasson ki. Inkább figyelemfelkeltésre jó, a jelenség felvillantására, de többször előfordult, hogy az igazán érdeklődő diákok utána külön irodalmat kértek (és kaptak), illetve később visszakérdeztek azokra a részekre, ami nem volt világos. Tulajdonképpen az is öröm, hogy féltett könyveimet nem volt könnyű visszaszerezni néhány alkalommal, így utána az iskolai könyvtár állományát igyekeztem bővíteni ebben a témakörben, és így oda tudtam irányítani a diákokat.

Ha igaz, hogy a XX. századi fizika három kiemelkedő eredménye, a relativitáselmélet, a kvantummechanika és a káosz fizikája [42], akkor indokolt, az előbbi kettő után, a káoszt is megismertetni valamilyen módon a középiskolásokkal. Saját tapasztalatom alapján állíthatom: a diákok széles körének érdeklődése mindig akkor erősödik fel fizikai jelenségek iránt, amikor olyan témáról beszélünk, amelynek részletes tárgyalására semmiféle lehetőségünk nincs. Mégis megéri az erőfeszítést, hogy fizikai tartalmát tekintve igaz, a diákok számára érthető, szemléletformáló mondatokat fogalmazzunk meg ezekről a kérdésekről, mert ez megalapozhatja a tárgyunk iránti mélyebb érdeklődést. Még pedagógiai szempontból is indokolt a káosz tanítása az iskolában, hiszen megtalálható benne az esztétikai-érzelmi kötődés lehetősége, alkalmat ad néhány alapvető filozófiai fogalomra való reflektálásra, mint a determináció és az előrejelezhetőség, illetve lehetőséget nyújt a számítógép kreatív alkalmazására az oktatásban [43]. A fizika szempontjából pedig ezzel elérhetjük, hogy nem kizárólag a speciálist, a kivételt tanítjuk, amit az egyszerű, periodikus mozgások képviselnek, hanem az általánost, a „valódit” is.

Ennek a fejezetnek az anyaga adja a 4. tézispont háttérét.

6. Egyszerű periodikus és kaotikus mozgások összehasonlítása, szimulálása

6.1. Bevezetés

Amikor a diákok hallottak a kaotikus mozgásról, akkor mindig vannak néhányan, akik szívesen foglalkoznak kicsit mélyebben ennek a mozgásnak a vizsgálatával. A részükre készített bemutató anyagban hangsúlyt fektetek arra is, hogy amint az előző fejezetben is láttuk, a matematikai inga tisztán periodikus mozgása többféle, kis változtatással is könnyen kaotikussá tehető. Bemutatom, hogy érdemes összehasonlítani a törzsanyagban tanult periodikus mozgás jellemzőit a módosított inga mozgását jellemző mennyiségekkel, s ehhez jól használható a számítógépes szimulálás [44].

Igazolom, hogy a kaotikus mozgásokra új példaként érdemes az időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga mozgását tekinteni. Ezen, és a nemlineáris oszcillátor példáján mutatom be a diákoknak a kaotikus mozgás leírásában használt fogalmakat, a mozgás vizsgálatát lehetővé tévő módszereket és programokat.

A veszteségek miatt csillapodó ingamozgás fenntartása például mechanikus gerjesztéssel oldható meg. A szinuszos időfüggés egyszerű alapesetnek tekinthető, ami a középiskolásoktól sem idegen, hiszen a harmonikus rezgőmozgásnál találkoztak vele. A gerjesztést ebben az esetben a felfüggesztésre ható forgatónyomaték formájában vesszük figyelembe.

A részletes vizsgálatokhoz számítógépes programokat használok. Fokozottan találkozunk a hiányzó matematikai ismeretek általánosan ismert problémájával (differenciálszámítás, differenciálegyenletek). Ezt szemléletes példákkal, analógiákkal hidalom át. Végiggondoljuk, hogyan lehetett a GPS és a rádiózás előtti korban a rendszeresen feljegyzett sebesség nagyság és irány értékekből egy hajó útvonalát megrajzolni a térképen, ha ismerték a kiindulási pontot.

Tapasztalatom szerint a mozgás jellemzőinek feltérképezésére jól használható a Dynamics Solver program [45], ami ingyenesen letölthető és kiválóan használható differenciálegyenletek numerikus megoldására [19]. A program használata elképzelhető a differenciálegyenletek elméletének részletes tárgyalása nélkül. Alkalmazása, működése megérthető, korábban a tananyagban már tárgyalt mozgások szimulálásán keresztül.

A számítógépes szimulációval illusztrálom a diákok számára, hogy különböző feltételek estén milyen mozgás jön létre. Kiindulásként valósághoz közeli paraméterértékeket igyekeztem választani. A diákok érdeklődéssel fogadták, amikor a paraméterértékeket változtattam.

A vizsgálat nagy nehézsége az, hogy nem tudjuk, a paraméterértékek mekkora változtatása módosítja jelentősen a létrejövő mozgás jellegét. Megtanulják, hogy a realitásérzék és a szorgalmas munka vezet eredményre.

Az időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga mozgásának leírása ebben a formában publikációkban nem szerepel. A sok hasonló (rezgetett, kettős, mágneses) módosított inga mozgásának vizsgálata a tanításban nagyon hasznos, mert ezek mindegyike kaotikus, de részleteiben mégis különböznek, így kiváló gyakorlási lehetőséget jelentenek.

Sikerült tipikusnak mondható, szépen, határozottan kirajzolódó kaotikus attraktort találni viszonylag széles paramétertartományban. Az attraktor a sűrűlődséget jellemző paramétertől erősen függ, annak változásával jelentősen módosul az alakja.

Megmutattam, hogy a paraméterek változtatásával találhatók nem kaotikus tartományok is, melyek kapcsán a diákok rádöbbennek arra, hogy a kaotikus mozgás mennyivel bonyolultabb a periodikusnál, s arra is, hogy egy kaotikus rendszer több arculatot is mutatni képes komplex rendszer.

A középiskolában történő káoszelmélet tanításnak egy új vonatkozását is szeretném megemlíteni. A fizika tantárgy megközelítésének, és ezen keresztül a világlátásunknak egy lényeges eleme nagy mértékben gazdagodik ez által.

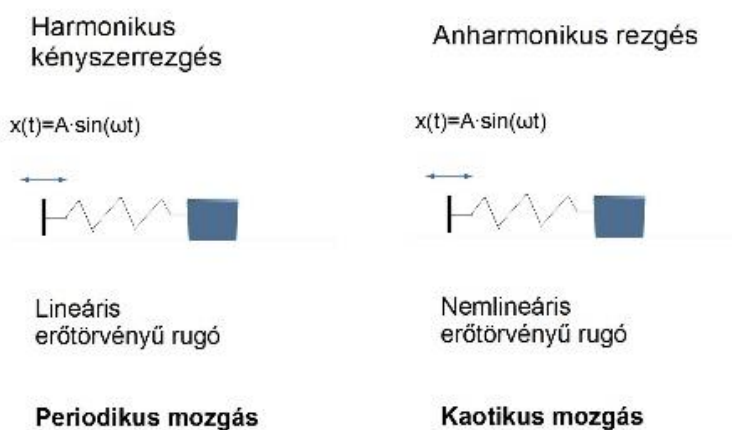
Gondoljuk meg, hogy a XIX. század végén általánosan elfogadott nézet volt, hogy a fizika tudományának kidolgozása a végéhez közeledik. Ezért tanácsolta egy tanára a pályaválasztás előtt álló fiatal Max Plancknak, hogy a fizika helyett válasszon olyan területet, ahol még van lehetősége további kutatásra [46]. Planck nem hallgatott rá, és pár évvel később már senki sem gondolta, hogy nincs érdekes újdonság felfedezésére lehetőség a fizikában. Azóta a fizikusok nem gondolják úgy, hogy a világ leírása valamikor is tökéletesen ismert lesz. Ezt még a nagy egyesített elmélet kutatói sem állítják.

Mélyen emberi hozzáállásunkat mutatja, hogy mégis újra és újra beleesünk ugyanabba a hibába. A XX. század végén nem sokan vártak új, alapvető felfedezésre a klasszikus fizika területén. A káoszelmélet azonban éppen ilyen.

6.2. Káosz szimulálása a középiskolában

Életünk számos területén találkozunk kaotikus jelenségekkel: meteorológia, környezetszennyezés, szociológiai modellek, mechanika, elektromosság, populációdinamikai kutatás, neurológia, kémiai reakciók vizsgálata. A nagy teljesítményű számítógépek és a szimulációs módszerek fejlődése, elterjedése tette könnyen elérhetővé ezeknek a folyamatoknak a vizsgálatát. Ezeknek a mozgásoknak a vizsgálatára ebben a fejezetben a „Dynamics Solver” szabad felhasználású programot használom, ami tanári segítséggel középiskolai szinten is alkalmazható.

Vizsgáljuk meg részletesen a gerjesztett lineáris oszcillátor mozgását (31. ábra). Ha a rezgést végző test a Hook-törvény által leírható rugó hatására mozog, akkor a létrejövő mozgás szabályos, és egyszerűen leírható. Ellenben ha a rugó nemlineáris (és a valódi rugók soha sem tökéletesen lineárisak), a mozgás lényegesen bonyolultabbá válik, kaotikus viselkedést mutathat.



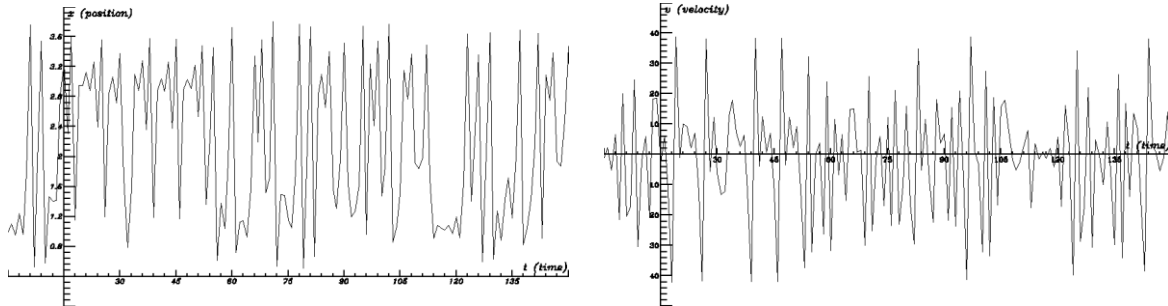
31. ábra. Gerjesztett lineáris és nemlineáris rezgőmozgás.

A kaotikus mozgás leírásának bemutatására használjuk a nemlineáris oszcillátor példáját. Ekkor a rezgő test egy olyan rugó hatása alatt mozog, amely nem követi a lineáris erőtvényt.

A szabályos mozgások leírásához általában a hely-idő, sebesség-idő és gyorsulás-idő függvényeket használjuk. Kaotikus mozgás esetén ezek a függvények annyira bonyolultak és szabálytalanok, hogy nem tudjuk a segítségükkel felismerni a mozgásokban rejlő szabályosságot (32. ábra). A káoszelmélet megszületése előtt ezeket a mozgásokat egyszerűen

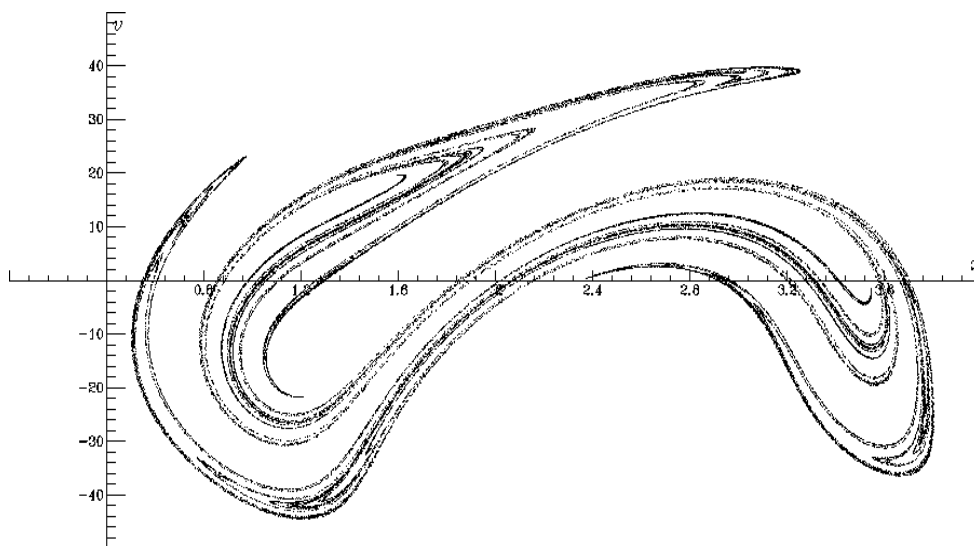
szabálytalannak tekintették. Valamilyen jobb ábrázolásra van szükségünk, ami lehetővé teszi a kaotikus mozgásban lévő rendezettség feltárását.

Az ábrán látható hely-idő és sebesség-idő grafikonok vizsgálatából semmilyen szabályosságot nem találunk az eredeti rezgés még felsejlő periódusain kívül.



32. ábra. A gerjesztett nemlineáris oszcillátor hely-idő és sebesség-idő grafikonja.

Az információkat sűríteni kell, és más módot kell találni az ábrázolásra. Az ilyen mozgások megfigyelésére a hely-sebesség grafikont, az úgynevezett fázisteret használjuk. A mozgást jellemző hely és sebesség értékeket az idő függvényében ábrázolva egy háromdimenziós görbét kapunk. Ezt a térgörbét egyenlő időközöként, például a gerjesztési periódusnak megfelelő időközökben elmetsszük a hely-sebesség síkkal párhuzamos síkokkal, és a keletkező metszéspontokat egy síkra vetítjük. Így kapjuk a stroboszkópikus leképezésnek nevezett ábrázolást (33. ábra).



33. ábra. Stroboszkópikus leképezés a gerjesztett nemlineáris oszcillátor fázisterében. Ez az ábrázolás a kaotikus mozgás különleges mintázatát adja.

Ebben az ábrázolásban egy periodikus mozgás képe egyetlen pont, mert a mozgás periódusának megfelelő időközönként rátekintve a rendszerre, mindig ugyanazt a hely és sebesség koordinátát találjuk. Az ábráról jól látható, hogy bár a kaotikus mozgás soha sem

ismétli önmagát, mégsem tekinthető teljesen szabálytalannak, nem olyan a képe, mint a zajnak. A periodikus mozgásnál sokkal összetettebb rendezettség mutatkozik meg.

A káoszt egyszerű rendszerek bonyolult időbeli viselkedéseként írhatjuk le [6]. Nagyon tanulságos felismerni az a tényt, hogy még a régóta ismert egyszerű mechanikai rendszerek is kaotikusak lehetnek.

A következő részben megmutatjuk, hogy, a diákokkal együttműködve, hogyan juthatunk el a fenti ábráig.

Az x tengelyen mozgó gerjesztett nemlineáris oszcillátor mozgásegyenlete:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \varepsilon x^3 - \alpha \dot{x} + A_0 \cos \omega t.$$

Itt az \ddot{x} az idő szerinti második deriváltja a helynek, ω_0 az oszcillátor frekvenciája, ε a nemlineáris rugó paramétere, \dot{x} a sebesség, α a súrlódást jellemző paraméter, A_0 és ω rendre a gerjesztés amplitúdója és frekvenciája.

A középiskolás diákok nem ismerik a differenciálegyeneteket, nagyon valószínűleg differenciálszámításról sem hallottak. Mégis megértethetjük az egyenlet jelentésének lényegét, de használjuk a diákok által megszokott sebesség (v) és gyorsulás (a) mennyiségeket az idő szerinti deriváltak helyett. Megfelelően választott mértékegységekkel a fenti egyenlet egyszerűbb alakba írható. Mérjük a távolságot a $L = \frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon}}$ egységekben, az időt a gerjesztés periódusidejének megfelelő egységben $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ekkor az egyenlet a következő alakú, és az együtthatókra a következő értékek adódnak:

$$a = -A^2 x - A^2 x^3 - Bv + C \cos(2\pi t).$$

$$A = \omega_0 T = \frac{2\pi\omega_0}{\omega}, \quad B = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\omega}, \quad C = \frac{A_0 T^2}{L} = \frac{A_0 4\pi^2 \sqrt{\varepsilon}}{\omega^2 \omega_0}.$$

Ekkor az előző egyenletben a , v és x mennyiségek a dimenziótlan gyorsulás, sebesség és hely lesznek.

Az A , B és C paraméterek rendre a rugó erejét, a súrlódást és a gerjesztés amplitúdóját jellemző számok. Ebben a képletben a négy tag jelentése balról jobbra: a lineáris és nemlineáris rugóerő, súrlódás és gerjesztés. Ezen a módon olyan átfogó képet adhatunk a bonyolult képletről, ami a részleteket ugyan nem magyarázza, de a további munkához elegendő.

A különböző dinamikai rendszerek leírásakor két, alapvetően különböző módszert használunk:

Ha ismerjük a testre ható erőt és a kezdőfeltételeket, akkor a mozgás pályáját leíró függvényt sok esetben pontosan meg tudjuk adni. Ilyenkor lényegében mindent ismerünk. Példák erre az egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás és a harmonikus rezgőmozgás.

$$a = \frac{F}{m} \text{ (konstans)} \rightarrow s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t$$

$$a = -\omega^2y \rightarrow y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Nemlineáris erő esetén a trajektóriát nem tudjuk zárt alakban megadni. A pályát lépésről-lépésre numerikusan lehet meghatározni. Ez a helyzet kaotikus mozgás esetén.

A numerikus megoldást kereshetjük, például, a Dynamics Solver programmal.

6.3. A Dynamics Solver program

A Dynamics Solver egy freeware szoftver, amit Juan M. Aguirregabiria fejlesztett ki Spanyolországban [45] differenciálegyenletek numerikus megoldására. A program az idézet helyről szabadon letölthető.

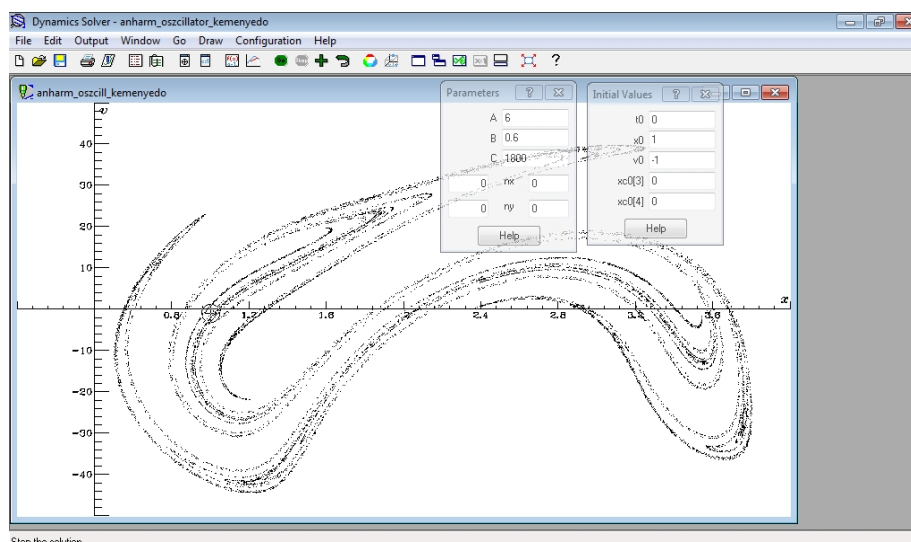
Bemenő adatként meg kell adnunk a differenciál egyenletek számát, a változók számát és jelölését, a megfelelő függvényeket, az egyenletek paramétereit, a kezdőfeltételeket, illetve az ábrázolás beállításait.

Másodrendű differenciálegyenletet elsőrendű differenciálegyenletek rendszereként kell megadnunk. A középiskolában használt jelölésekkel:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -A^2x - A^2x^3 - Bv + C \cos(2\pi t)$$

A Dynamics Solver program a következő ábrán látható képernyővel indul: itt tudjuk megadni a különböző paramétereket és kezdeti értékeket, és látjuk a számítás végeredményét is (34. ábra). Az előző ábrán bemutatott kaotikus attraktor az $A = 6$ $B = 0,6$ $C = 1800$ értékekkel adódott. A kezdőértékek: $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, $v_0 = -1$, és a szimuláció 1 000 000 dimenziótlan időegységig futott. A kaotikus attraktor mintázata független a kezdőértékektől.



34. ábra. A Dynamics Solver program induló képernyője. A jobb felső részben látható ablakokban adhatjuk meg a paraméterek értékét és a kezdeti értékeket. A nulla értékkel megjelenő sorok vizsgálatunk számára érdektelenek.

A program felhasználóbarát, könnyen érthető. Az egyetlen problémát a rengeteg választási lehetőség okozhatja.

Az előző két ábrán bemutatott grafikont az x - v fázistérben ábrázolt, a gerjesztés periódusidejének megfelelő pillanatokban készített mintaételek értékei adják. Az eredményül kapott összetett ábrát kaotikus attraktornak hívjuk. A vonalas szerkezet végtelenül összetett, fraktál.

Ha bevittük a szükséges differenciálegyenleteket, megcsináltuk a beállításokat, akkor nagyon egyszerű a különböző paraméter és kezdeti értékek hatását tesztelni. Ez lehet a diákok önálló kutatómunkája, ami esélyt ad érdemi eredmény elérésére.

Számos mozgást vizsgálhatunk a leírt eljárással. Először szimulálhatjuk az alap tananyagban szereplő mozgásokat. Ezekben az esetekben ismerjük a végeredményt, amit kapni kell. Ezzel ellenőrizhetjük az eljárást, illetve megtanulhatjuk a program használatát. Amikor már begyakorolták a szoftver használatát, akkor különböző kaotikus mozgásokat vizsgálhatnak vele.

A program használatát teljes csoportnak részletesen nem tanítottam. A téma iránt érdeklődő diákokkal foglalkoztunk vele. Biztosan ők sem értették meg pontosan az összes számítást, de a gondolatmenet lényegét, vagyis, hogy van egy mozgás, aminek a mozgásegyenlete bonyolultabb, mint amiket ők láttak, de a számítógép kis lépésekben kiszámítja a mozgás jellemzőit, és ezt kirajzolja nekünk, ezt megértették, és nagy lelkesedéssel próbálgatták különböző paraméterértékek mellett.

6.4. Időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga kaotikus attraktorának keresése

A következőkben tekintsük át azt a folyamatot, amelyben a Dynamics Solver program segítségével feltérképezhetjük egy ismeretlen mozgás jellemzőit. Nem sikerült még alkalmas és alkalmas csoportot találnom ennek az oktatási anyagnak a kipróbálásához, de elkészítettem egy menetrendet, amely alapján meg fogom próbálni diákokkal mindezt valóban végigcsinálni.

Az időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga mozgását úgy képzeljük el, hogy az inga felfüggesztési pontját az időben szinuszosan változó forgatónyomatékkal tekergetjük, és figyelembe vesszük a légellenállást is.

Az inga mozgásegyenlete a mozgást fenntartó gravitációs, légellenállást leíró és gerjesztési tagokból áll, φ a függőlegessel bezárt szög:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin(\varphi) - \alpha\dot{\varphi} + \frac{M}{\theta}\sin(\omega t) \quad (1)$$

A dimenziótlan mozgásegyenlet:

$$\ddot{\varphi} = -a\sin(\varphi) - b\dot{\varphi} + c\sin(2\pi t)$$

ahol:

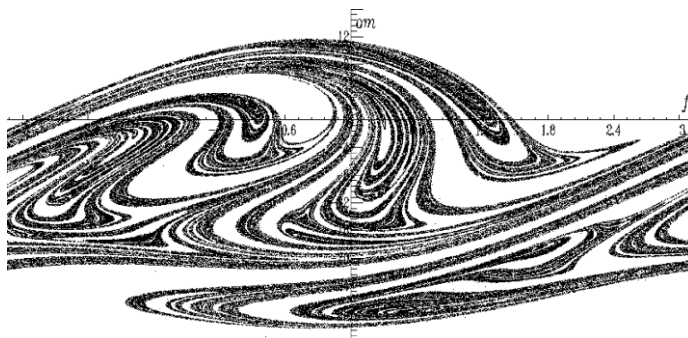
$$a = \frac{4\pi^2 g}{l\omega^2}, \quad b = \frac{2\pi\alpha}{\omega}, \quad c = \frac{4\pi^2 M}{\theta\omega^2}$$

Kezdőfeltételt a programban meg kell adni, például $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\omega_0 = 0$, ami a szélső helyzetnek felel meg, de látni fogjuk, hogy nincs jelentősége.

Amikor a mozgást a Dynamics Solver program segítségével vizsgáljuk, meg kell határoznunk a paraméterek értékeit. Kiindulási esetként úgy járhatunk el, hogy megpróbáljuk megbecsülni az adott jelenség esetén reális, valós értékeket. Ezek alapján kezdetben a $c/a \approx 1$; $0.01 < b < 0.1$ paraméterértékekkel kezdtem keresni attraktort. Az esetek többségében egy vagy több pontattraktor, illetve véletlenszerű mozgásra utaló rendezetlenség (mákszemek) jelentek meg a stroboszkópikus leképezésen. Ebben a rendezetlenségben elkezdődött kirajzolódni egy struktúra, ennek vizsgálata vezetett a nagyobb súrlódás irányába.

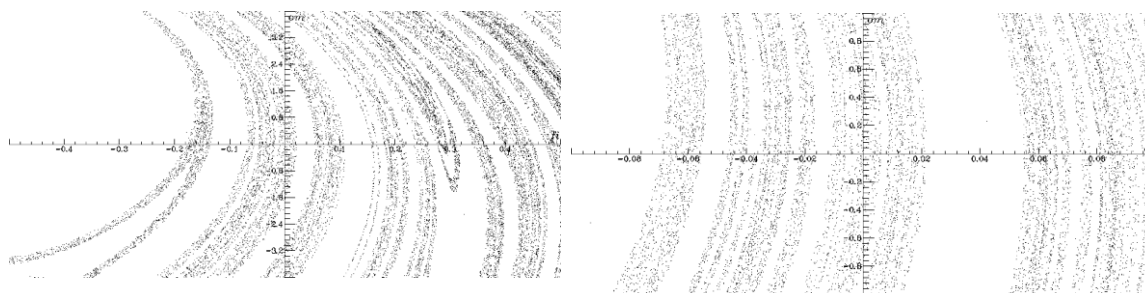
A megtalált fázistérbeli ábra kaotikus attraktornak látszott. Ezt ellenőrizni akartuk, ezért csináltunk nagyításokat az origó körüli területről. (Azért épp ott, mert az eredeti ábrán ott egy-egy sáv volt látható, és érdekesnek látszott, vajon felbomlik-e szálakra. Úgy találtuk, hogy igen.)

Az $a = 58.5$; $b = 0.25$; $c = 65$ esetet tekintettük alapnak (35. ábra). Azért ezt, mert itt alakultak át a sávok határozott vonalakká.



35. ábra. Időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga kaotikus attraktora $a=58.5$; $b=0.25$; $c=65$ paraméterekkel.

Az origó körüli nagyítások (36. ábra):



36. ábra. Időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga kaotikus attraktora $a=58.5$; $b=0.25$; $c=65$ paraméterekkel növekvő nagyításban az origó körül.

Megvizsgáltuk mennyire érzékeny az attraktor a kezdeti értékek és a paraméterértékek változására (37-42. ábra): A kezdeti értékektől gyakorlatilag független, ahogy ezt a súrlódásos eseteknél megszoktuk, hiszen az attraktor definiáló tulajdonsága, hogy minden mozgás ehhez az objektumhoz tart.

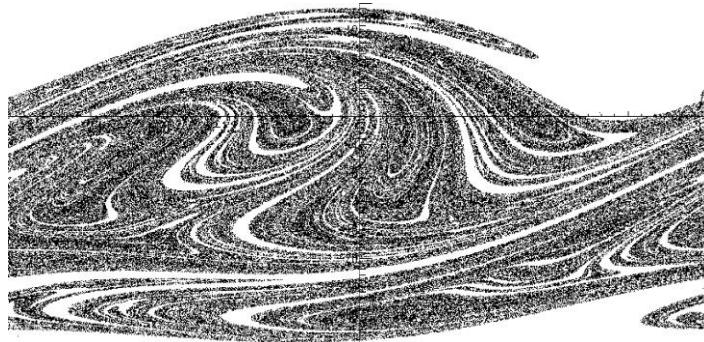
Lényegében hasonló marad az attraktor, kis alakváltozásokkal, a paraméterek következő intervallumaiban (egyenként változtattuk a paramétereket a kiindulási esethez képest):

$45 \leq a \leq 70$ Csak az „élessége” változik a képnek.

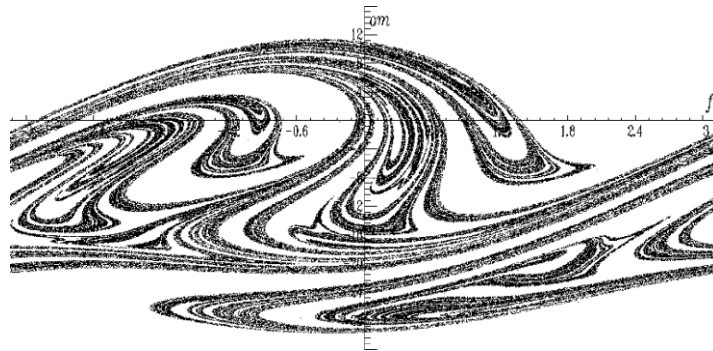
$0.1 \leq b \leq 1.04$ Erre a paraméterre érzékeny leginkább az ábra: mellékelem az egyes eseteket ebben az intervallumban.

$57 \leq c \leq 69$ A tizedekre csak az intervallum szélén érzékeny.

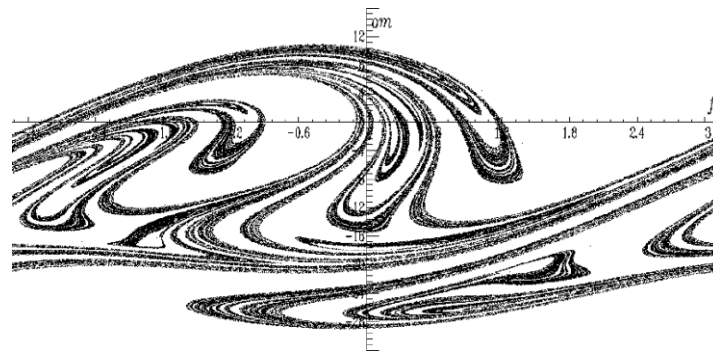
Az attraktor alakjának változása a súrlódás b dimenziótlan erőssége változása esetén:



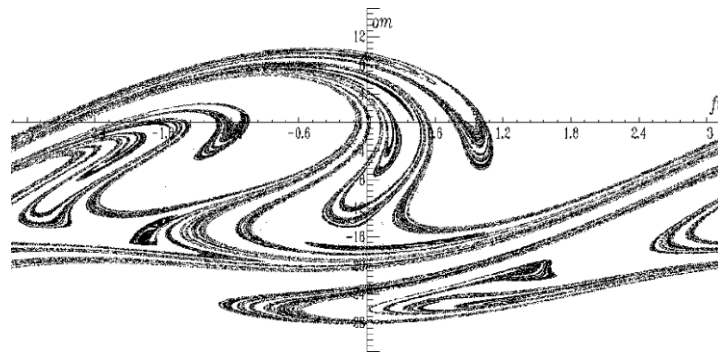
37. ábra. Időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga kaotikus attraktora $a=58.5$; $b=0.1$; $c=65$ paraméterekkel.



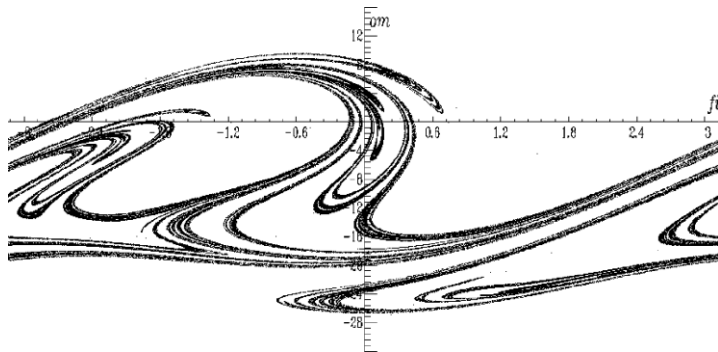
38. ábra. Időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga kaotikus attraktora $a=58.5$; $b=0.3$; $c=65$ paraméterekkel.



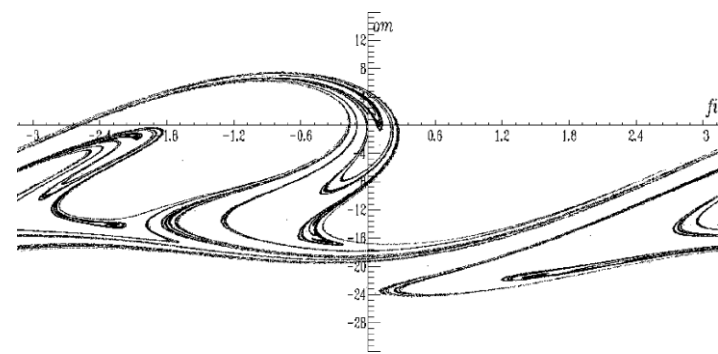
39. ábra. Időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga kaotikus attraktora $a=58.5$; $b=0.4$; $c=65$ paraméterekkel.



40. ábra. Időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga kaotikus attraktora $a=58.5$; $b=0.5$; $c=65$ paraméterekkel.



41. ábra. Időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga kaotikus attraktora $a=58.5$; $b=0.7$; $c=65$ paraméterekkel.



42. ábra. Időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga kaotikus attraktora $a=58.5$; $b=1$; $c=65$ paraméterekkel.

Vizsgáljuk meg, hogy egy tipikusan kaotikus esetben a jellemző dimenziótlan paraméterek milyen dimenziós paraméterértékeknek felelhetnek meg.

Az $a=58,5$; $b=0,3$, $c=65$ esetet vizsgálva:

$$a = 58,5 = \frac{4\pi^2 g}{l\omega^2}, \quad b = 0,3 = \frac{2\pi\alpha}{\omega}, \quad c = 65 = \frac{4\pi^2 M}{\Theta\omega^2}$$

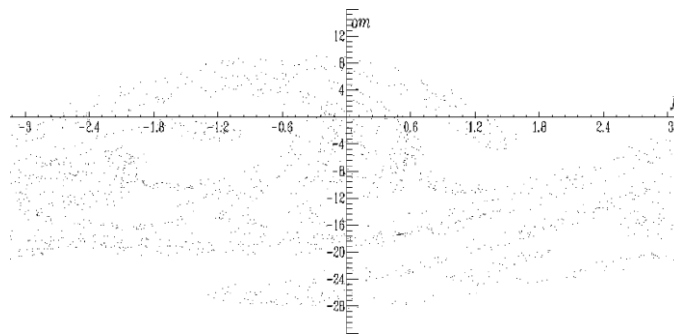
Innen, ha $l = 1 \text{ m}$, akkor az (1) egyenletben megjelenő dimenziós paraméterek értékei a következők lesznek: $\omega = 2,57 \frac{1}{\text{s}}$, $\alpha = 0,123 \frac{1}{\text{s}}$, $\frac{M}{\Theta} = 10,9 \frac{1}{\text{s}^2}$

Ezek kísérletben könnyen megvalósítható értékek.

6.5. Nem kaotikus esetek vizsgálata

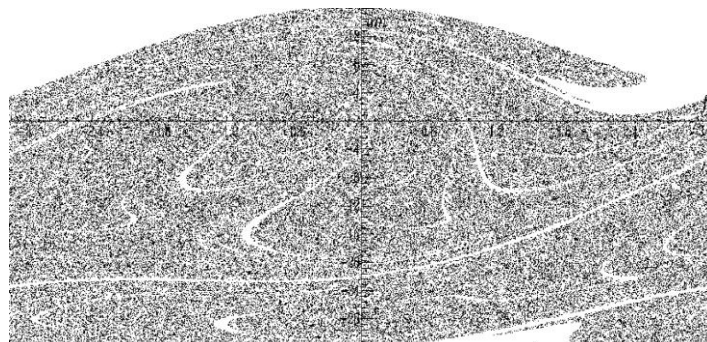
Összehasonlításképpen nézzünk meg néhány esetet olyan paraméterértékekkel, amikor nem kaotikus a mozgás (43-45. ábra):

Ha az a paraméter értéke a kaotikus tartomány alá csökken, akkor eltűnik a kaotikus attraktor, helyette pontok sokasága látható, ami szabálytalan mozgásra utal.



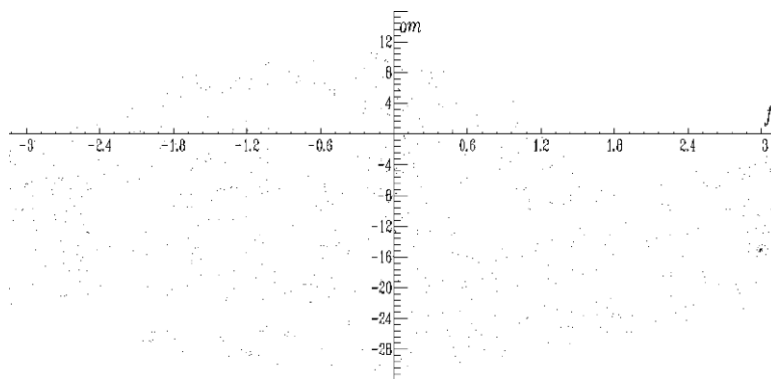
43. ábra. Időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga fázistere $a=44$; $b=0,3$; $c=65$ paraméterekkel.

Ha a súrlódás (b paraméter) csökken:



44. ábra. Időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga fázistere $a=58,5$; $b=0,03$; $c=65$ paraméterekkel.

Ha a c paraméter értéke túl nagy, vagyis a gerjesztés erősebb vagy gyorsabb, akkor ismét szóródott pontokat, rendezetlen mozgást látunk:



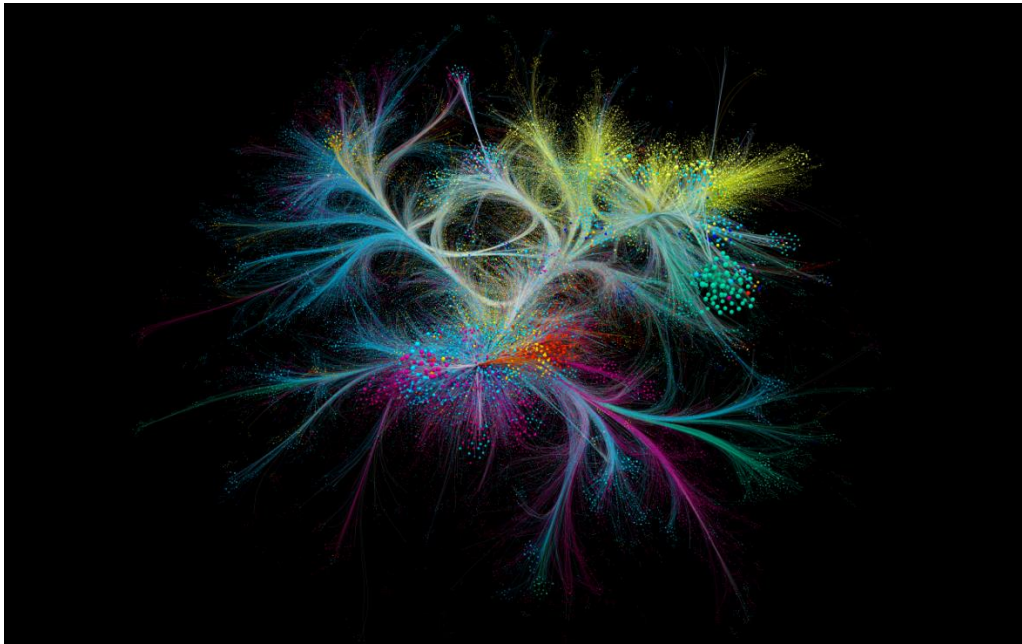
45. ábra. Időfüggő forgatónyomatékkal gerjesztett inga fázistere $a=58,5$; $b=0,3$; $c=69,5$ paraméterekkel.

A diákok találkoznak ezekkel az ábrákkal is, miközben a különböző paraméterértékeket próbálgatják, és nagy élmény számukra, amikor közösen értelmezzük a kapott képet.

6.6. Összegzés

Hasonló vizsgálatokat végezhetünk több egyszerű, kaotikus mozgás esetén. A kaotikus mozgást együtt megbeszéljük, esetleg videón megnézzük, a mozgásegyenleteket megadjuk a diákoknak, együtt beállítjuk a Dynamics Solver kezdőállapotát, és utána önállóan tudnak vizsgálni, felfedezni a mozgás jellegzetességeit.

Érdeemes a középiskolában az általános osztályokban is káoszjelenségeket tanítani a diákoknak, mert miközben betekintést nyernek egy közelmúltban kifejlődött területbe, az érdeklődésük jobban a tudomány felé fordulhat. Az informatika iránt meglévő pozitív beállítódást értelmes, tudományos alkalmazás irányába terelhetjük, valódi kreatív feladatot, munkát tudunk adni, és közben a tudományos munka művészi szépségére is rácsodálkozhatunk. Ezt az élményt átélhetjük az előző pontokban látott kaotikus attraktorok megtalálásakor is, de számomra is elemi erővel mutatkozott meg ez a jelenség, amikor 2020 októberében a Ludwig Múzeumban megnéztük a „BarabásiLab: Rejtett mintázatok/A hálózati gondolkodás nyelve” című kiállítást. Ezen a kiállításon tudományos kutatómunkák ábrái gyakorlatilag műalkotásként jelentek meg (46. ábra).



46. ábra. Barabási-Albert László ábrája a Nature magazinban 1900 óta megjelent 80000 cikk egymás közötti kapcsolairól. A színek a különböző tudományterületeket (a fizika a zöld), a pontok mérete pedig az idézettség számát jelenti. Két tanulmány akkor áll összeköttetésben, ha mindkettőt idézte egy másik tudományos publikáció. A hálózat a folyóirat multidiszciplinaritását mutatja.

A Dynamics Solver program alkalmas az érdeklődő diákokkal történő közös munkára. A használata egyszerű és jól hidalja át a középiskolai matematikai tananyagon túlmutató ismeretek hiányát. Lehetőséget ad önálló kutatómunkára, amely eredményre vezethet, és közben még esztétikai élményt is nyújt.

Ennek a fejezetnek az anyaga adja az 5. tézispont háttérét.

7. Az önhasonlóság tulajdonsága kapcsolatot teremt a hologram és a káosz között

7.1. Bevezetés

A hologramnak nem a legismertebb, de lényeges tulajdonsága, hogy egy részletéből az egész kép rekonstruálható, vagyis lényegében az összes információ benne van a hologram egy kis részében is. Egy kis részletből rekonstruált kép fényben szegényebb és életlenebb lehet, de mindig az egész alakzat rekonstruálható. Tapasztalatom szerint ez a tulajdonság érdekes párhuzamot kínál a káoszjelenségek leírásakor jellemzően megjelenő fraktálszerkezet önhasonlóságával.

Erről a témakörrel is összeállítottam egy egy tanításiórát igénylő anyagot, amit a fizikai optika fejezet után lehet beépíteni a tananyagba. [47]

A matematikai fraktálok (pl. Koch-görbe) egy részlete pontosan, geometriai értelemben hasonló egy kisebb részlethez, vagy az egész alakzathoz. Az önhasonlóság ebben az esetben pontos geometriai hasonlóság. A káosz jelenségek leírásakor kapott fraktálok, vagy fraktálszerű alakzatok általában nem pontos geometriai hasonlóságot tartalmaznak, hanem lényegében azonos jellegű szerkezetek figyelhetők meg bennük egyre kisebb mérettartományokban, vagyis rendelkeznek önhasonlósággal.

Az önhasonlóság fogalmának kétféle, kissé eltérő jelentését vizsgálom a két esetben, és ez az elemzett kapcsolat elgondolkoztató. A fraktálok önhasonlósága is értelmezhető úgy, hogy egy kisebb részletből rekonstruálható az egész.

Közben a kaotikus mozgásra éppen az jellemző, hogy az apró részletekből az egész mozgás újszerű, alapvető struktúrái tárulnak fel. A fraktál szerkezet ritkábban jelenik meg a valós térben (mint a mágneses inga esetén), általában a fázistérben találkozunk vele.

A kaotikus mozgás fraktálszerkezetei tehát az önhasonlóság mellett, éppen a nem teljesen pontos hasonlóság miatt, más információt is tartalmaznak, ami csak nagyobb mérettartományban mutatja meg magát.

Más oldalról viszont hiába tökéletes például a Koch-görbe önhasonlósága, a teljes görbében itt is felfedezhetünk többletet a részekhez képest, hiszen a fraktáldimenzió az egész görbe térkitöltését jellemzi.

7.2. Tanítási tapasztalatok

Meggyőződésem, hogy diákok érdeklődéssel fogadják, hogy újra és újra a rész és az egész kapcsolatának kérdésével találkozunk. A 2020-as új NAT tartalmazza a hologram fogalmát, bár részletes megismerésére biztosan nincs lehetőség. Amikor párhuzamba szeretném állítani a holográfiában és a káoszban található önhasonlóság jelenségét, akkor mindkét témakört röviden át kell tekinteni a diákokkal.

Ennek tervezett időbeosztása olyan osztályban, csoportban, ahol még nem volt szó a káoszról a következő:

1 perc - Bevezetés

10 perc – A hologram fogalma, előállítás, hétköznapi megjelenése

15 perc – A káosz fogalma, tulajdonságai, példák kaotikus mozgásra, fraktálok

18 perc – Önhasonlóság a hologramban és a kaotikus attraktoron

1 perc - Összefoglalás

Ezt a témát csoportnak, osztálynak még nem tanítottam, mesterpedagógusi programomban szerepel a következő évtől ennek a kipróbálása. Néhány érdeklődő diákkal beszélünk róla, a velük való konzultációk jelentik a program kidolgozásának az alapját.

Az önhasonlóság jelensége következtében megjelenő kapcsolatot a káosz és a hologram között még nem vizsgálták. Az eltérő jelenségekben megfigyelhető hasonló, közös vonás vizsgálata nemcsak mindkét jelenség jobb megértéséhez vezet közelebb, hanem segít a diákokban kialakítani azt az asszociációkra nyitott gondolkodást, amellyel érdemes vizsgálatunk tárgyához közelíteni.

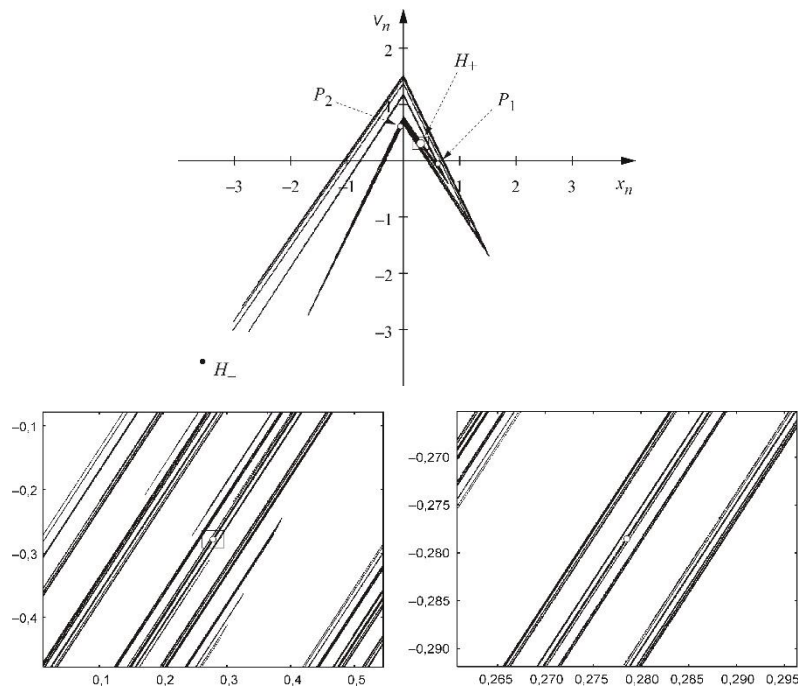
7.3. A részek viszonya az egészhez a káosz-jelenségeknél

A káosz tulajdonságainak bemutatása ebben az esetben is az előző fejezetben látottakhoz hasonlóan történik, de rövidítve, csak az alaptulajdonságokra (nem periodikus, előrejelezhetetlen, bonyolult geometriájú) koncentrálva. A kaotikus mozgásokat egy fraktál tulajdonsággal rendelkező ábra jellemez (például 33. ábra).

A kaotikus mozgás fázistérben történő ábrázolásakor a grafikon egy jellegzetes, jól felismerhető, általában bonyolult geometriai szerkezetre „húzódik rá”, vonzódik oda. Ezt nevezzük kaotikus attraktornak.

Az önhasonlóság azt jelenti, hogy az ábra tetszőleges, nagyobb, kisebb, vagy még kisebb részét választjuk ki, az adott rész szerkezete lényegében azonos.

A teljes attraktor ugyan gyakran különbözik saját maga egy kis részletétől. Amikor azonban az attraktor fonalas szerkezetét kezdjük vizsgálni, akkor, amint ezt már korábban említettem, egy asszimmetrikus Cantor-szál szerkezetre találunk, vagyis az egyre több részletet mutató nagyítások során a kapott szerkezet újra és újra ugyanolyan jellegű. Ez figyelhető meg a lökdösött oszcillátor fázisterében (47. ábra).

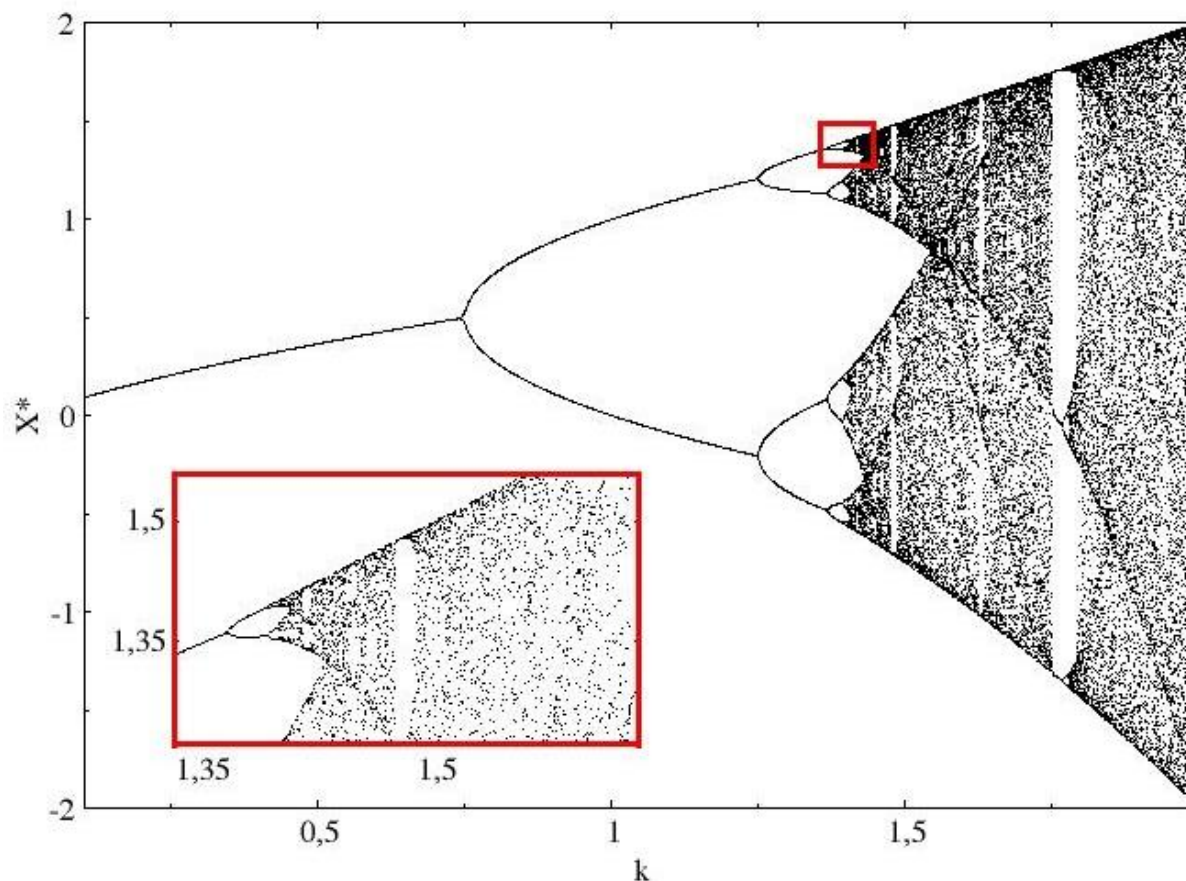


47. ábra. Önhasonlóság a háztető-amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor kaotikus attraktoránál. A nagyításokat a skála értékeken követhetjük. [6].

Az önhasonlóság nem jelent geometriai egybevágóságot vagy akár hasonlóságot, csak egyértelműen felismerhető hasonló szerkezeti felépítést.

Másik példaként tekintsük a bifurkációs diagramot.

Bifurkációnak nevezzük azt a jelenséget, amikor bizonyos stabil rendszerek egyes paramétereinek változásakor a stabil egyensúlyi helyzetek jellegzetes módon instabillá válnak. Helyettük új stabil állapotok, attraktorok jönnek létre. Az attraktorok átalakulását, sokszorozódását mutatja valamely paraméter változása esetén a bifurkációs diagram (48. ábra).



48. ábra Önhasonlóság bifurkációs diagramnál [48]. A betétábra a jelölt téglalap nagyítása.

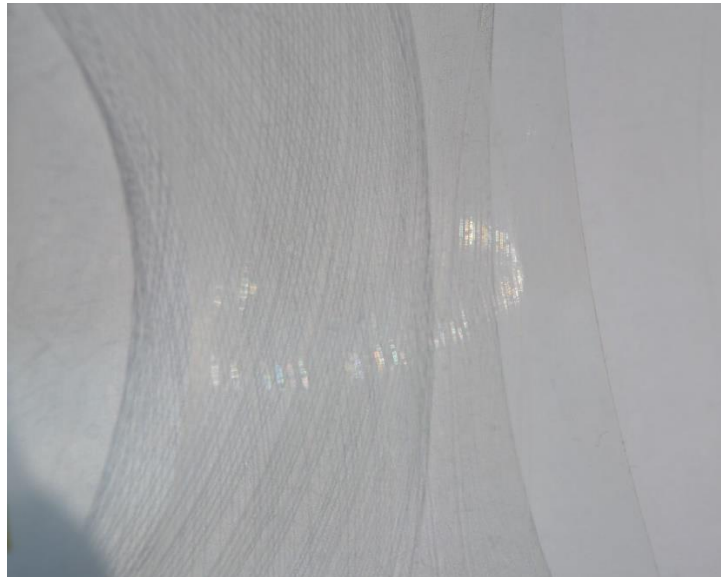
Ez a tulajdonság a rész és egész kapcsolatának egészen újszerű megjelenési formája. Mindegyik esetben azzal találkozunk, hogy a rész bizonyos értelemben nem kevesebb az egésznél, hanem valamilyen módon egyenértékű vele.

7.4. Hologram

A holográfia olyan képrögzítési eljárás, amikor a tárgyról visszaverődő fényhullám rögzítésekor, a tárgy térbeli kiterjedését, alakját tartalmazó információt is rögzítjük. A fényhullámban ez az információ a hullám fázisában található meg, ezért a fázist rögzítjük interferencia segítségével.

A hologramból az eredeti tárgy háromdimenziós képe rekonstruálható.

A hologram ránézésre nem hasonlít az eredeti tárgyra, csak vonalak kusza sokasága látszik. Valójában ez nem meglepő, hiszen interferencia képet rögzítünk. Első ránézésre nem könnyű elhinni, hogy ez az ábra a hagyományos fényképészetnél nem kevesebb, hanem több információt tartalmaz (49. ábra).



49. ábra. A diákokkal együtt készített karcolt hologramból egy kör képe rajzolódik ki napfényben. Megvilágítás nélkül, egyedül a karcolások alapján nem lehet megmondani, mit ábrázol a hologram.

A hologram minden részletéből a teljes tárgy rekonstruálható, hiszen az eredeti tárgy minden pontjából érkezik a hologram minden részére fénysugár. Ezért a tárgy alakját hordozó információ a hologram egy kis területén is megtalálható. Ha a hologram egy részét lefedjük, vagy a hologramot akár kettévágjuk, és csak egy részét használjuk a kép rekonstruálásához, akkor is az egész képet kapjuk vissza. (50. ábra).



50. ábra. A teljes hologramból illetve egy részéből is ugyanezt a képet tudnánk rekonstruálni. Gábor Dénes, a holográfia felfedezőjének holografikus arcképe [49].

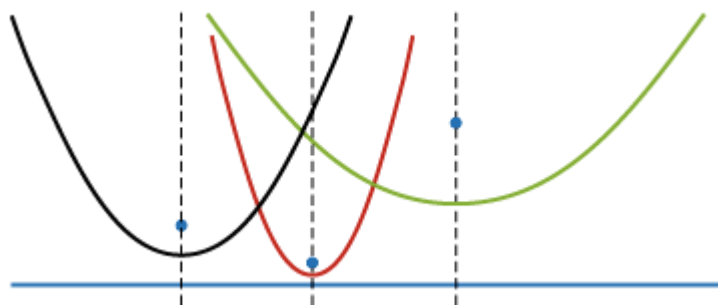
Itt is arról van szó, hogy az egész egy része lényegében egyenértékű az egészszel.

Ez az egyenértékűség azonban más jellegű, mint a kaotikus mozgásnál, mivel itt nem a szemmel (is) felismerhető hasonló szerkezetéről, hanem a tárolt információról, a rekonstruált képről van szó.

7.5. Összegzés

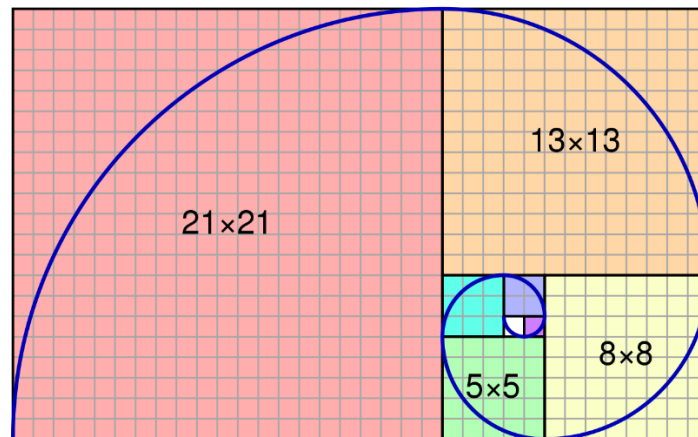
Az ön hasonlóság olyan fogalom, ami nagyon alkalmas és érdemes a részletesebb vizsgálatra. A diákok korábbi tanulmányaik során találkoznak már olyan jelenségekkel, amik segítik a fogalom elmélyítését.

Pár hónappal ezelőtt fordult elő velem, hogy amikor a másodfokú függvények ábrázolását tanultuk, és különböző függvénytranszformációkat alkalmazva ábrázoltunk egymástól eléggé különböző alakú parabolákat, az egyik diák egyszer csak elgondolkozva megszólalt: „Tulajdonképpen nem minden parabola egyforma?” Íme az ön hasonlóság a paraboláknál (51. ábra). Igaz, hogy a paraboláknál ez a tulajdonság valójában nem is ön hasonlóság, hanem az egyik átskálázott parabola válik hasonlóvá a másikhoz. Más szempontból viszont mégis hasonló jelenségről van szó, hiszen kivághatunk olyan íveket a különböző parabolákból, amelyek geometriai értelemben hasonlóak egymással.



51. ábra. Különböző (?) parabolák.

Az ön hasonlóságnak egy kicsit különböző formáját figyelhetjük meg a Fibonacci-spirál és az aranymetszés kapcsolatát bemutató ábrán (52. ábra).



52. ábra. Fibonacci-spirál és arany metszés [50].

Ezek a példák a gimnáziumi tanulmányok során természetes módon előkerülnek.

Az önhasonlóság fogalma képes több tantárgy több különböző témáját olyan módon összekapcsolni, ahogyan az minél többször kívánatos a természettudomány tanulása során.

Ennek a fejezetnek az anyaga adja a 6. tézispont háttérét.

8. Záró gondolatok

Meggyőződésem, hogy a nemlineáris- és káoszjelenségek tanítása középiskolai szinten a közeljövőben természetessé válik.

Ezt a folyamatot szeretném elősegíteni a szakdidaktika nemzetközileg elismert módszerének alkalmazásával (Physics Education Research) szondázva, hogy az új témakör alapfogalmai milyen módon taníthatók hatékonyan és eredményesen. Ezt a módszert eddig először csak a kváziperiodikus mozgás vizsgálatánál használtam, de a jövőben ugyanilyen módon szeretném a többi témát is feldolgozni.

Amikor a tankönyvszerzők elkezdik összegyűjteni azokat a tartalmakat, amelyek révén szeretnék megismertetni a diákokkal a káosz elméletét, akkor hasznos lesz minden olyan tapasztalat, ami ezeknek a fogalmaknak a befogadhatóságáról objektív mérési eredményt képes felmutatni.

A Szeged-Csanádi Egyházmegye Gelsey Vilmos Pedagógiai Intézete részéről egy új fizikatankönyv írására kaptam megbízást egy csapattal együtt. Az én feladatom a munkacsoport vezetése és a leckék felénél a törzsszöveg megírása volt. Ennek keretében írtam egy leckét a káoszról. Ez lenne a káoszelmélet első hazai megjelenése középiskolai fizika tankönyvben. A 9-10-11-es tankönyvek és munkafüzetek kéziratái elkészültek, de pillanatnyilag megállt a projekt.

A nemlineáris folyamatok jellemzői taníthatóságának vizsgálatát az elkövetkező években tovább folytatom, mivel ez részét képezi a 2020 januárjában indult, ötéves mesterpedagógus programomnak.

9. Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Dr. Gruiz Mártonnak, aki 2011-től 2017-ben bekövetkezett haláláig témavezetőm volt, a mindig pontos, részletes, egyértelmű útmutatásokat, a fáradhatatlan munkát, a legapróbb tökéletlenségeknek is felderítését, kijavítását, amivel nagyban segítette publikációim végleges formába öntését.

Köszönöm Páll Csaba kollégámnak a lépcsőn pattogó labda mozgásának szimulációjára írt programban, és számos más esetben nyújtott informatikai segítségét.

Köszönöm Nagy Péternek, hogy megismertetett a Dynamics Solver programmal, és sokszor segített, amikor a program használatában nehézségem volt.

Köszönöm Neubauer Noémi segítségét a lépcsőn pattogó labdáról szóló European Journal of Physics folyóiratban megjelent cikk fordításában.

Köszönöm Marisa Michellini és Daniele Buongiorno segítségét a Physics Education Research (PER) módszer alkalmazásában.

Végül, de első sorban szeretném megköszönni Dr. Tél Tamásnak, mostani témavezetőmnek, tíz éven keresztül nyújtott rengeteg segítségét. A maximális szakmai tudás és igényesség elvárását olyan kitartó, kedves, bátorító, lelkesítő módon közvetítette felém, ami mindig tovább tudott lendíteni, pozitív energiát adott a folytatáshoz. Ezenkívül nagyon értékes példát adott az igazi mester – tanítvány viszony kialakításában, amikor a mester a lehető legnagyobb segítséget adja a tanítvány fejlődéséhez.

10. Summary

Secondary school teaching of nonlinear phenomena

Mészéna Tamás

Supervisor: Dr. Tél Tamás professor emeritus

In this doctoral dissertation I am dealing with the teaching of quasi-periodic motion, and chaos phenomena. I was searching for topics that were well applicable for whenever there is an open opportunity to teach chaotic mechanics.

A dot-like ball bouncing down the stairs was thoroughly observed. Depending on the parameters, in vast majority of the cases, quasi-periodic motion was found.

Four, single lesson programs for secondary school classes, student groups were created in the topic of nonlinear phenomena.

My program about quasi-periodic motion was presented in three students groups, for 52 students. Before and after the lesson their knowledge was examined via questionnaires. The teaching was designed in the spirit of PER (Physics Education Research).

Features of the chaotic motion, and certain fractal properties were lectured in person on several occasions.

For in dept observation of different chaotic motions we, together with my students used the Dynamics Solver software.

In terms of self-similarity, I compared chaotic motions and holograms.

11. Összefoglalás

Nemlineáris jelenségek tanítása a középiskolában

Mészéna Tamás

Témavezető: Dr. Tél Tamás emeritusz professzor

A doktori értekezésben a kváziperiodikus mozgás, illetve káoszjelenségek középiskolai tanításával foglalkozom. Olyan témákat kerestem, amelyek jól felhasználhatók, ha a kaotikus mechanika oktatására lehetőség nyílik.

Részletesen megvizsgáltam pontszerű labda lépcsőn pattogó mozgását. A paramétereiktől függően az esetek túlnyomó többségében kváziperiodikus mozgást kaptam.

Kidolgoztam négy, egy-egy tanítási órás tananyagot középiskolás diákcsoportok, osztályok részére a nemlineáris jelenségek témakörében.

A kváziperiodikus mozgást három csoportban 52 diák részére megtanítottam. Ismereteiket a tanítás kezdetén és végén kérdőívvel vizsgáltam. A tanítást a PER (Physics Education Research) szellemében terveztem meg.

A kaotikus mozgás jellemzőit, bizonyos fraktál tulajdonságokat több csoportban tanítottam a diákoknak.

Különböző kaotikus mozgások részletes vizsgálatára a Dynamics Solver programot használtam a diákokkal együttműködve.

Az önhasonlóság szempontjából összehasonlítottam a kaotikus mozgásokat és a hologramot.

12. Irodalomjegyzék

- [1] B. Csapó, „A tantárgyakkal kapcsolatos attitűdök összefüggései,” *Magyar Pedagógia* 100/3, pp. 343-366, 2000.
- [2] Nussbaumer A and Nussbaumer P , Basiswissen, Physik-Compact 5, p 12, Vienna: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH, 2017.
- [3] Gruiz M, Meszéna T, Tél T, „Kaotikus vagy csak összetett? - Labdák pattogása lépcsőn,” *Fizikai Szemle*, pp. 128.-136., 2016/4.
- [4] M. Gruiz, T. Meszéna, T. Tél, „Chaotic or just complicated? Ball bouncing down the stairs,” *European Journal of Physics* 38 055003 (15), 2017.
- [5] „Lépcsőn pattogó labda,” [Online]. Available: <https://crnl.hu/lepcso/lepcso/index.php>.
- [6] Tél T., Gruiz M., Kaotikus Dinamika, Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.
- [7] Á. Budó, Kísérleti fizika I., Budapest: Tankönyvkiadó, 1989.
- [8] K. Nagy, Kvantummechanika, Budapest: Tankönyvkiadó, 1978.
- [9] Néda Z., Libál A., Kovács K., Elemi Kvantummechanika, Kolozsvár: Egyetemi Nyomda, 2006.
- [10] Ábel L Tóth and Tamás Tél, „Ball bouncing down rounded edge stairs: Chaotic but tricky,” *Eur. J. Phys.* 42 035004, 2021.
- [11] „Oktatási Hivatal,” [Online]. Available: https://www.oktatas.hu/koznevelés/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_gimn_9_12_evf.
- [12] Robert J. Beichner, „Per Central, An Introduction to Physics Education Research,” in Getting Started in PER, edited by C. Henderson and K. A. Harper (American Association of Physics Teachers, College Park, MD, 2009), Reviews in PER Vol. 2, [Online]. Available: <https://www.per-central.org/items/detail.cfm?ID=8806>. [Hozzáférés dátuma: 24 02 2021].
- [13] Burra G. Sidharth (Editor), Jesús Carnicer Murillo (Editor), Marisa Michelini (Editor), Carmen Perea (Editor) , Fundamental Physics and Physics Education Research, Springer, 2021.
- [14] P. Nagy, P. Tasnádi, „Dynamics Solver - egy hatékony eszköz a káosz kutatásában és tanításában, Matematikát, fizikát és informatikát oktatók (MAFIOK) 41. országos konferenciája, Konferenciakötet, szerk: Talata I. pp. 169.-178.,” in *Szent István Egyetem, Ybl Miklós Építéstudományi Kar*, Budapest, 2017.
- [15] P. Violino - O. Robutti, La Fisica e i suoi Modelli Volume 3, Bologna: Zanichelli, 1995.
- [16] J. Tellmann, B. Darvay, Z. Kovács, Fizika XI., Ábel Kiadó, 2006.
- [17] A. Caforio - A. Ferilli, Physica 2, Firenze: Le Monier, 1993.

- [18] Z. Csernovszky, „Az iránytű harmonikus rezgésétől kaotikus mozgásáig,” *Fizikai Szemle*, pp. 198.-204., 2017/6.
- [19] Z. Csernovszky, P. Nagy, P. Tasnádi, „Investigation of chaos in the absence of programming skill,” *Canadian Journal of Physics* 98/6 593.-605., 2020.
- [20] P. Nagy, P. Tasnádi, „Fraktálok világa - játékos tudomány,” *Gradus ISSN 2064-8014 (a Neumann János Egyetem online folyóirata) Vol 6, No 3*, 2019.
- [21] P. Nagy, P. Tasnádi, „Fizikai modellalkotás – gondolatok egy versenyfeladat kapcsán,” *Matematikát, fizikát és informatikát oktatók (MAFIOK) 43. országos konferenciája Konferenciakötet 2019*, pp. 87-98..
- [22] P. Nagy, P. Tasnádi, „Rugósinga dinamikai vizsgálata - egy fizika versenyfeladat kaotikus utóélete,” *Dunakavics (A Dunaújvárosi Egyetem online folyóirata) VII. évfolyam VIII. pp. 31-46*, 2019.
- [23] P. Nagy, P. Tasnádi, „Tálban guruló golyó kaotikus viselkedése,” *Gradus 3, No. 2*, pp. 120-136., 2016.
- [24] T. Tóthné Juhász, É. Gócz, „Káosz egy tálban,” *Fizikai Szemle 64/12*, pp. 421-425., 2014.
- [25] T. Stonawski, „A digitális technika sodrában: káosz a tálban, Természettudomány tanítása korszerűen és vonzóan, Konferenciakötet, pp.116-131.,” in *ELTE*, Budapest, 2011.
- [26] I. Szatmári-Bajkó, „Káosz, rend, látvány. A káosztudomány ismertetésének lehetősége IKT-eszközökkel a középiskolai oktatás keretében,” *Iskolakultúra 20/1 pp. 116-131*, 2010.
- [27] I. Szatmári-Bajkó, „Handicraft and aesthetic experience in teaching chaos physics, Teaching Physics Innovatively,” 2015 konferenciakötete p.15.
- [28] I. Szatmári-Bajkó, „Káoszt? - Azt! Káoszelmélet a középiskolában,” *Fizikai Szemle*, 2006/11 pp. 376-380..
- [29] I. Szatmári-Bajkó, „Káoszkísérletek a középiskolai fizika oktatásban, in: Fizikatanítás tartalmasan és érdekesen, Magyarul tanító fizikatanárok konferenciája, (317-324.o.) szerkesztők: Juhász A. Tél T.,” in *ELTE Fizika Tanítása Doktori Iskola*, Budapest, 2010.
- [30] E. Iván, J. Jaloveczki, „Fizikázzunk egyszerűen számítógéppel,” *Fizikai Szemle*, 2008/9 p. 311.
- [31] E. Iván, J. Jaloveczki, „Numerikus módszerek a diákköri munkában,” *Fizikatanítás tartalmasan és érdekesen, Konferenciakötet, ELTE Budapest, 2010*, pp. 303.-310..
- [32] T. Meszéna, „Fraktálok és káosz,” in *A fizika, matematika és művészet találkozása az oktatásban, kutatásban, Konferenciakötet*, Budapest, ELTE, 2013, pp. 153.-158..
- [33] B. Mandelbrot, „How long is the coast of Britain?,” *Science* 156, pp. 636-638., 1967.
- [34] [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/How_Long_Is_the_Coast_of_Britain%3F_Statistical_Self-Similarity_and_Fractional_Dimension. [Hozzáférés dátuma: 20 01 2021].

- [35] [Online]. Available: https://hu.wikipedia.org/wiki/Orsz%C3%A1gok_list%C3%A1ja_a_szomsz%C3%A9dos_orsz%C3%A1gok_k%C3%B6z%C3%B6tti_orsz%C3%A1ghat%C3%A1rok_hossz%C3%BAs%C3%A1ga_sz_erint. [Hozzáférés dátuma: 18 02 2021].
- [36] [Online]. Available: <http://lechnerkozpont.hu/cikk/allamhatar-es-hatarjelek>. [Hozzáférés dátuma: 18 02 2021].
- [37] [Online]. Available: <https://hu.wikipedia.org/wiki/Magyarorsz%C3%A1g>. [Hozzáférés dátuma: 18 02 2021].
- [38] [Online]. Available: <https://www.arcanum.hu/hu/online-kiadvanyok/TenyekKonyve-tenyek-konyve-1/regioik-1842E/magyarország-es-regioi-18440/magyarország-nehány-foldrajzi-adata-18441/>. [Hozzáférés dátuma: 18 02 2021].
- [39] [Online]. Available: https://people.inf.elte.hu/naksabi/fractals/mandelbrot-halmaz/download/NagyK_fract_mandelbrot.pdf. [Hozzáférés dátuma: 18 02 2021].
- [40] [Online]. Available: <https://www.csillagaszat.hu/tudastar/a-naprendszer-felepitese-kialakulasa/a-fold-es-a-hold/04-a-hold/>. [Hozzáférés dátuma: 18 02 2021].
- [41] T. Tél, „Káosz egy csésze kávéban,” *Természet Világa* 127, 386-390, 1996 szeptember.
- [42] J. Gleick, *Káosz - egy új tudomány születése*, Budapest: Göncöl Kiadó, 1999.
- [43] F. Csorba, „Új Tudomány: A káosz,” *Új Pedagógiai Szemle* 1215-1807 1788-2400 50 9 100-102, 2000/9.
- [44] T. Meszéna, „Chaos at High School,” in *ICPE-EPEC Proceedings pp. 533-540*, Prague, 2013.
- [45] J. M. Aquirregabiria. [Online]. Available: <http://tp.lc.ehu.es/jma/ds/ds.html>.
- [46] M. Planck, *Physikalische Abhandlungen und Vortrage*, Braunschweig: Fridrich Vieweg und Sohn, 1958.
- [47] T. Meszéna, „Rész és egész: a részek viszonya az egészhez a káoszjelenségekben és a hologramban,” in *Természettudomány tanítása korszerűen és vonzóan, Konferenciakötet, ELTE pp. 606.-310.*, Budapest,, 2011.
- [48] F. S. Caparrini, „Sistemas Colectivos,” [Online]. Available: <http://www.cs.us.es/~fsancho/?e=67>.
- [49] „Gábor Dénes,” 08 04 2021. [Online]. Available: <https://www.kozterkep.hu/>.
- [50] „Wikipedia,” [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number#/media/File:FibonacciSpiral.svg. [Hozzáférés dátuma: 08 04 2021].

13. Függelék

A kváziperiodikus mozgás bemutatásakor a tanítási órán használt prezentáció diái:

14. ADATLAP

a doktori értekezés nyilvánosságra hozatalához

I. A doktori értekezés adatai

A szerző neve: **Meszéna Tamás**

MTMT-azonosító: **10073481**

A doktori értekezés címe és alcíme: **Nemlineáris jelenségek tanítása a középiskolában**

DOI-azonosító⁴⁶: **10.15476/ELTE.2021.055**

A doktori iskola neve: **Fizika Doktori Iskola**

A doktori iskolán belüli doktori program neve: **Fizika Tanítása Doktori Program**

A témavezető neve és tudományos fokozata: **Dr Tél Tamás emeritusz professzor**

A témavezető munkahelye: **ELTE TTK Elméleti Fizika Tanszék, nyugdíjas**

II. Nyilatkozatok

1. A doktori értekezés szerzőjeként

a) hozzájárok, hogy a doktori fokozat megszerzését követően a doktori értekezésem és a tézisek nyilvánosságra kerüljenek az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban. Felhatalmazom a Természettudományi kar Dékáni Hivatal Doktori, Habilitációs és Nemzetközi Ügyek Csoportjának ügyintézőjét, hogy az értekezést és a téziseket feltöltse az ELTE Digitális Intézményi Tudástárba, és ennek során kitöltse a feltöltéshez szükséges nyilatkozatokat.

b) kérem, hogy a mellékelt kérelemben részletezett szabadalmi, illetőleg oltalmi bejelentés közzétételéig a doktori értekezést ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban;

c) kérem, hogy a nemzetbiztonsági okból minősített adatot tartalmazó doktori értekezést a minősítés (*dátum*)-ig tartó időtartama alatt ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban;

d) kérem, hogy a mű kiadására vonatkozó mellékelt kiadó szerződésre tekintettel a doktori értekezést a könyv megjelenéséig ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban, és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban csak a könyv bibliográfiai adatait tegyék közzé. Ha a könyv a fokozatszerzést követően egy évig nem jelenik meg, hozzájárulok, hogy a doktori értekezésem és a tézisek nyilvánosságra kerüljenek az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban.

2. A doktori értekezés szerzőjeként kijelentem, hogy

a) az ELTE Digitális Intézményi Tudástárba feltöltendő doktori értekezés és a tézisek saját eredeti, önálló szellemi munkám és legjobb tudomásom szerint nem sértem vele senki szerzői jogait;

b) a doktori értekezés és a tézisek nyomtatott változatai és az elektronikus adathordozón benyújtott tartalmak (szöveg és ábrák) mindenben megegyeznek.

3. A doktori értekezés szerzőjeként hozzájárulok a doktori értekezés és a tézisek szövegének plágiumkereső adatbázisba helyezéséhez és plágiumellenőrző vizsgálatok lefuttatásához.

Kelt: Pécs, 2021. 04. 12.



a doktori értekezés szerzőjének aláírása

Kváziperiodikus mozgás

Meszéna Tamás

Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma és Kollégiuma, Pécs

ELTE TTK Fizika Tanítása doktori program

Pécs, 2019. szeptember 18.



Pre Test

Teszt

- Lehet egy mozgás hosszan periodikus, ha a súrlódás és a légellenállás elhanyagolhatóan kicsi?
A) Nem, minden mozgás csak rövidtávon lehet periodikus.
B) Igen, ha nincs veszteség, a mozgás periodikus marad.
- Ha egy körmozgást az $x - v$ síkon, a periódusidő többszöröseinek megfelelő időpillanatokban egy-egy ponttal ábrázolunk, akkor milyen ábrát kapunk?
A) Kört.
B) Egyetlen pontot.
C) Zárt görbét.
- Egy ingaóra periódusideje, véletlen hatásoktól függően (például légmozgás), lehet picit rövidebb vagy hosszabb. Mit kapunk, ha az inga mozgását az $x - v$ síkon, az átlagos lengési idő többszöröseinek megfelelő időpontokban egy-egy ponttal ábrázoljuk?
A) Kis kiterjedésű foltot (ponthalmazt).
B) Egy pontot.
C) Egy körívet.
- A Merkúr közel ellipszis alakú pályán kering a Nap körül, de ennek az ellipszisnek a nagytengeleje nagyon lassan, adott irányba körbefordul. Milyen ábrát kapunk az $x - v$ síkon, ha a keringés átlagos periódusa többszöröseinek megfelelő pillanatokban pontokkal ábrázoljuk a Merkúr mozgását?
A) Körívet.
B) Zárt görbét.
C) Egy pontot.
- Az összetett mozgásokban, ahol lehetséges periodikus és nem tisztán periodikus mozgás is, melyik fordul elő gyakrabban?
A) Az adott mozgástól függ.
B) A periodikus mozgások a ritka kivételek a bonyolultabb mozgások között.
C) A mozgások általában periodikusak, a többi a kivétel.
- Említs néhány mozgást, melyeket nevezhetünk első közelítésben periodikusnak, és pontosabban vizsgálva nemperiodikusnak is! Indokold meg válaszaidat!
.....
A nem teljesen pontosan periodikus mozgások közül milyen alapon nevezhetjük az egyiket majdnem periodikusnak, míg a másikat zajos-periodikus mozgásnak? A 3. 4. kérdés mozgásai közül melyiket neveznéd majdnem periodikusnak, ill. zajos-periodikusnak?
.....

Merőleges rezgések összetétele

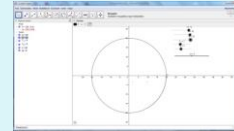
$$x = A \cdot \cos(\omega_1 t)$$

[Geogebra animáció](#)

1:1

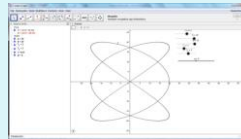
$$y = B \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi)$$

$$\text{Ha } A = B, \omega_1 = \omega_2, \varphi = 0$$



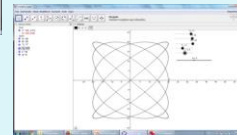
A mozgás pályája kör, az $x - y$ síkon T_1 periódussal ábrázolva egy pontot kapunk.

$$\text{Ha } A = B, \omega_1 \neq \omega_2, \varphi = 0$$



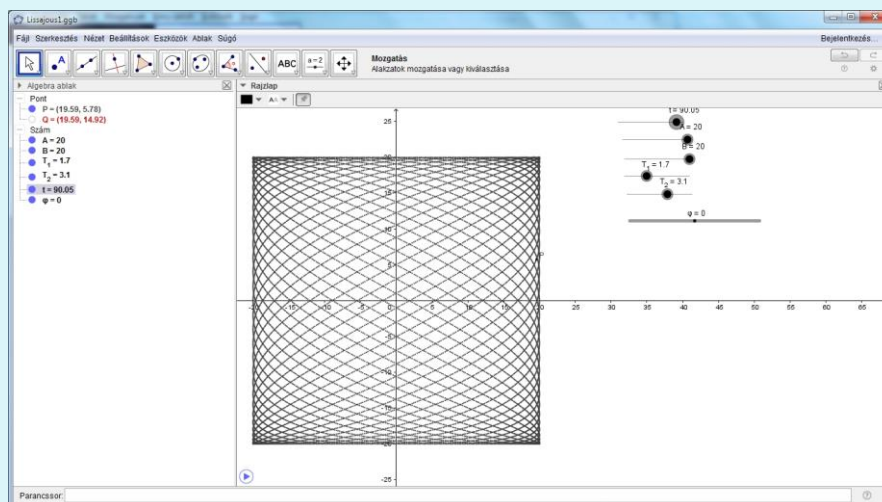
2:3

4:5



A pálya csak racionális T_1/T_2 aránynál záródik önmagába. Bonyolult, szép mintázatok is keletkezhetnek.

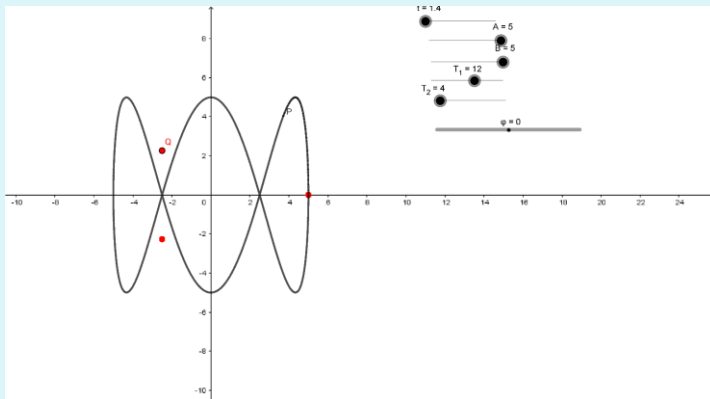
Merőleges rezgések összetétele



1,7:3,1

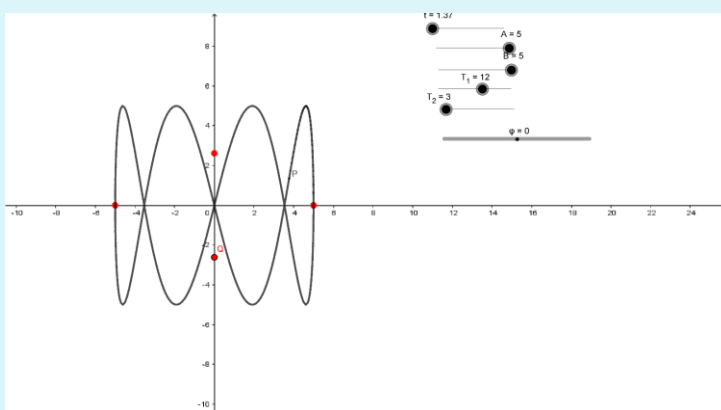
Merőleges rezgések összetételének fázistere

Ha $3T_2=T_1$
A piros pontok ábrázolják
a T_2 periódusonként ábrázolt
x-v pontokat



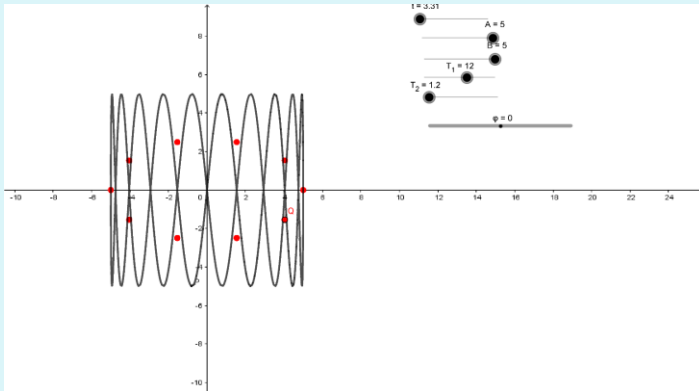
Merőleges rezgések összetételének fázistere

Ha $4T_2=T_1$
A piros pontok ábrázolják
a T_2 periódusonként ábrázolt
x-v pontokat



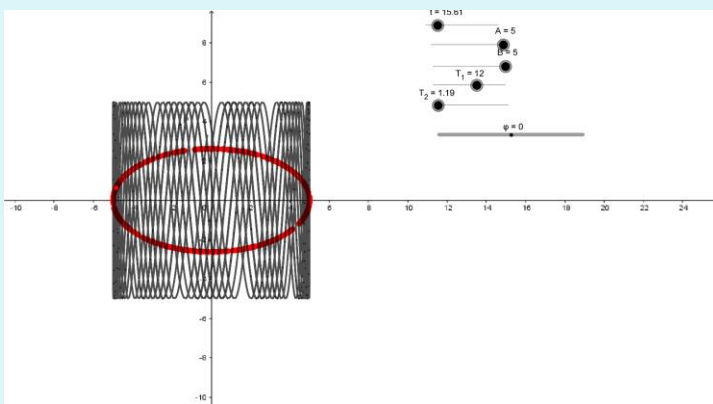
Merőleges rezgések összetételének fázistere

Ha $10T_2 = T_1$
A piros pontok ábrázolják
a T_2 periódusonként ábrázolt
x-v pontokat



Merőleges rezgések összetételének fázistere

Ha $10,1T_2 = T_1$
A piros pontok ábrázolják
a T_2 periódusonként ábrázolt
x-v pontokat



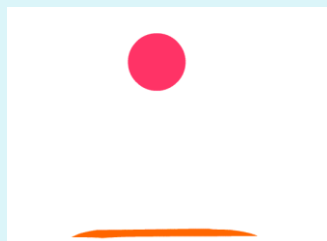
Egy egyszerű példa:

Periodikusan pattogó labda

Ha eltekintünk a veszteségektől, akkor egy függőlegesen pattogó labda mozgása periodikus, függőleges hajításként írható le.

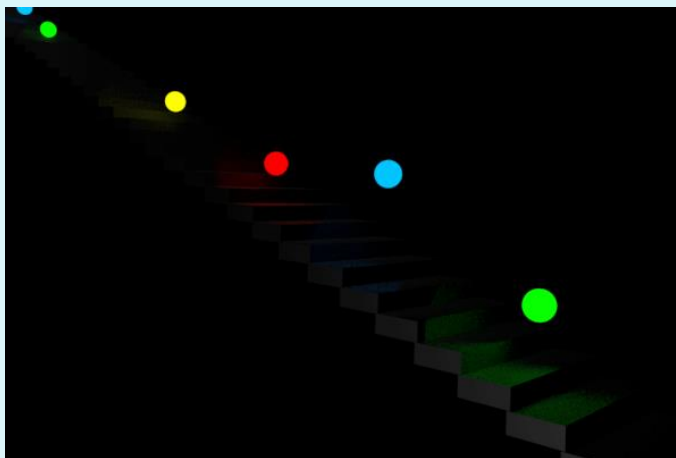
$$y = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

$$v = v_0 - gt$$



<https://imgur.com/t/simple/wjxNKRz> 2021. 04. 13.

Vizsgáljunk meg egy érdekes példát: mennyire bonyolult a lépcsőn pattogó labda mozgása?



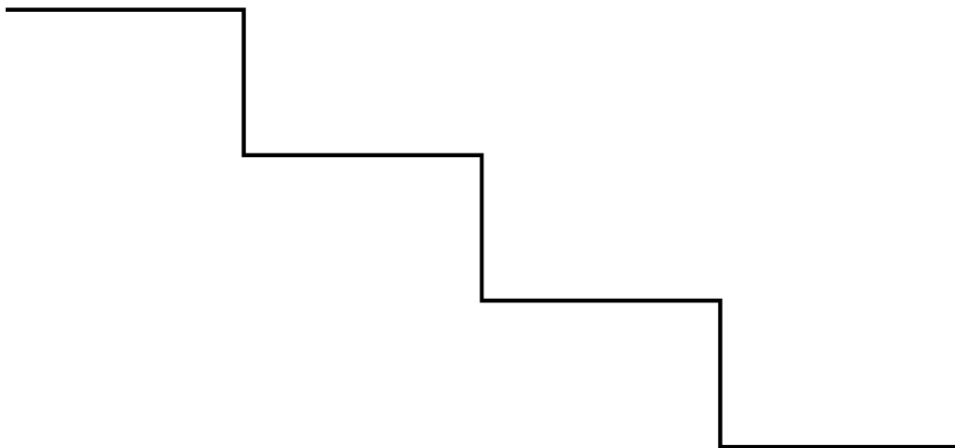
<https://imgur.com/gallery/6ckUvGz> letöltés: 2021. 04. 13.

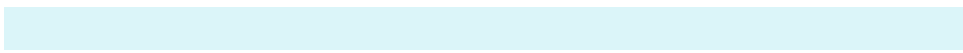
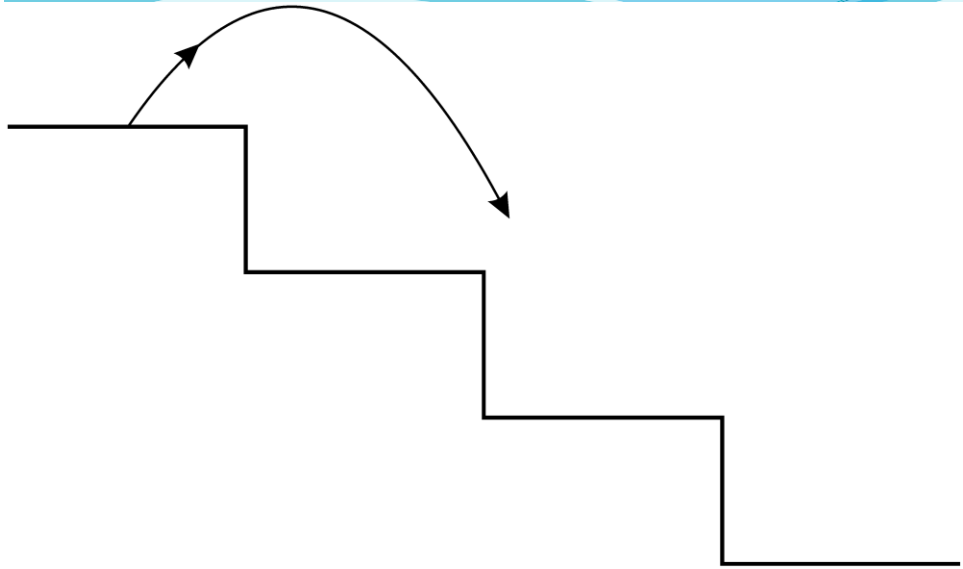
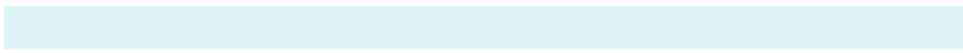
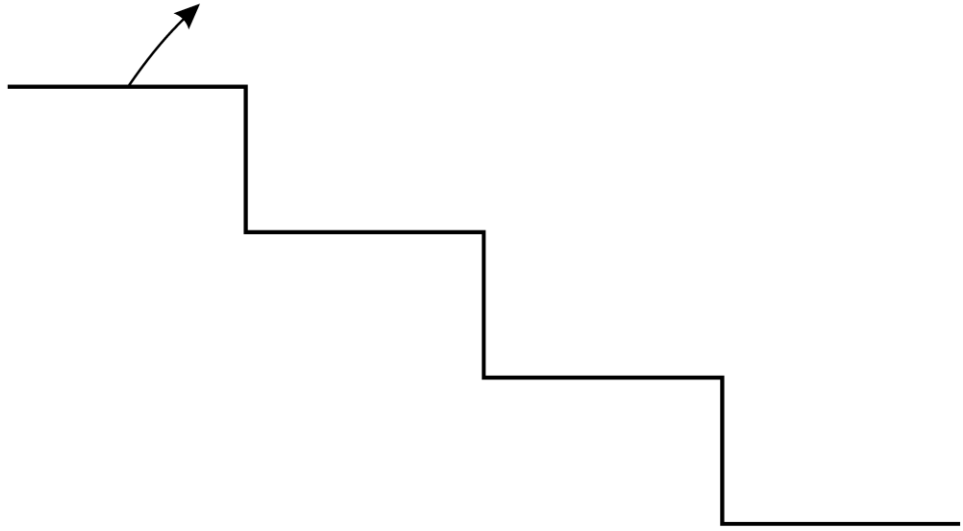
Modell:

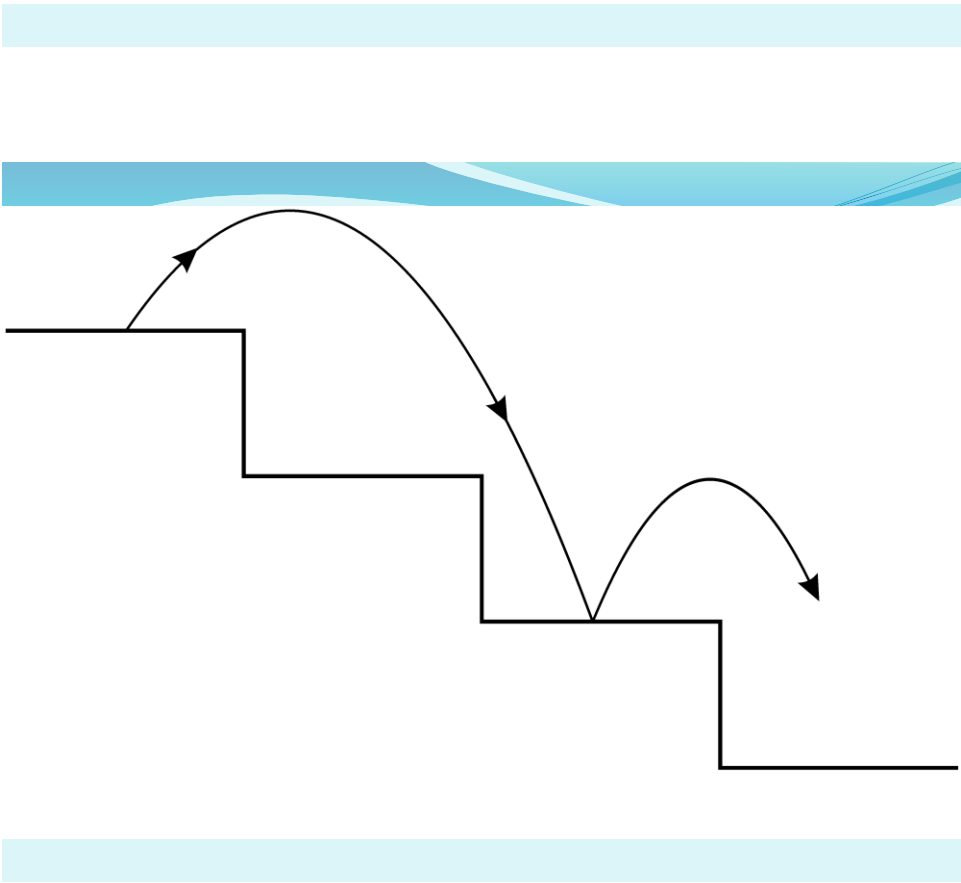
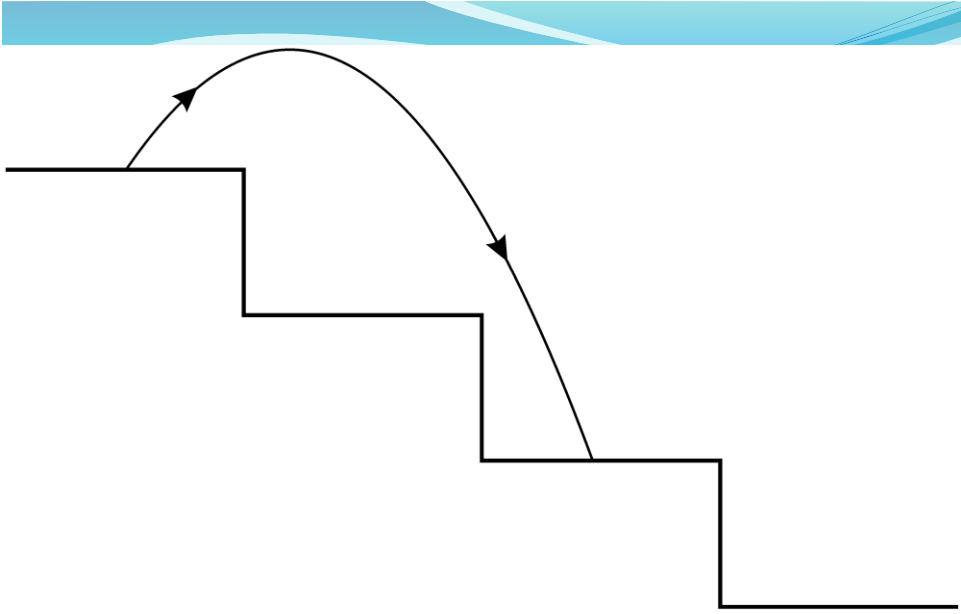
- Pontszerű labda
- A közegellenállástól eltekintünk
- A lépcső szögletes és végtelen hosszú

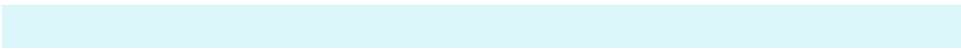
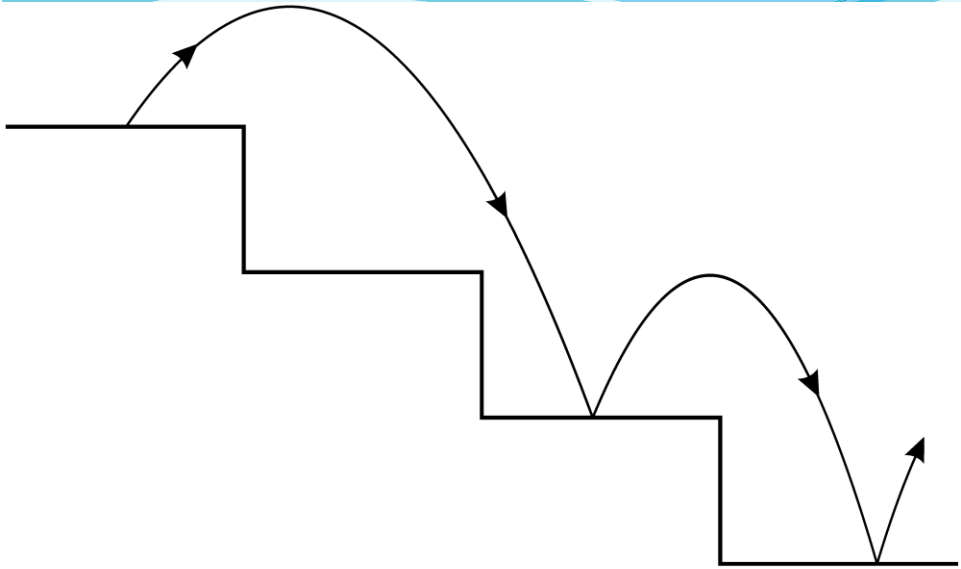
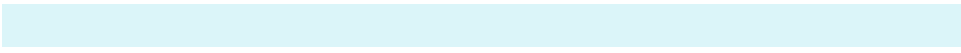
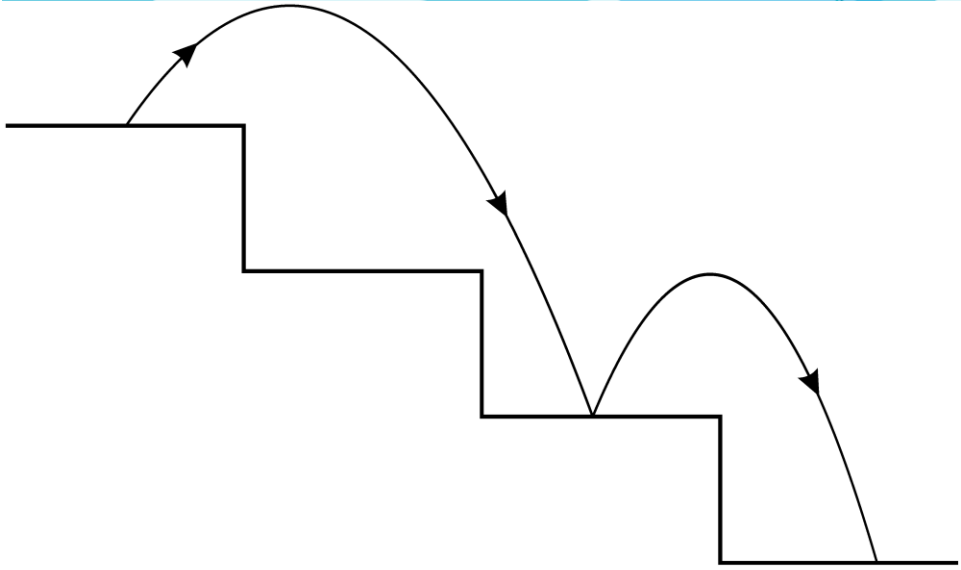
Ebben az esetben a mozgás:

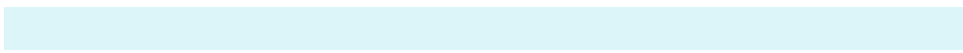
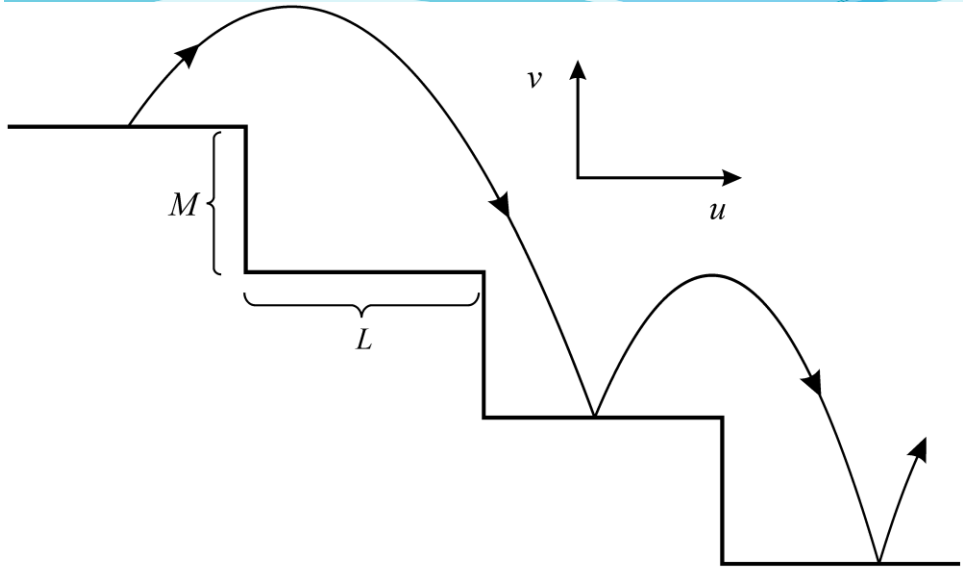
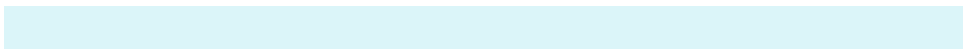
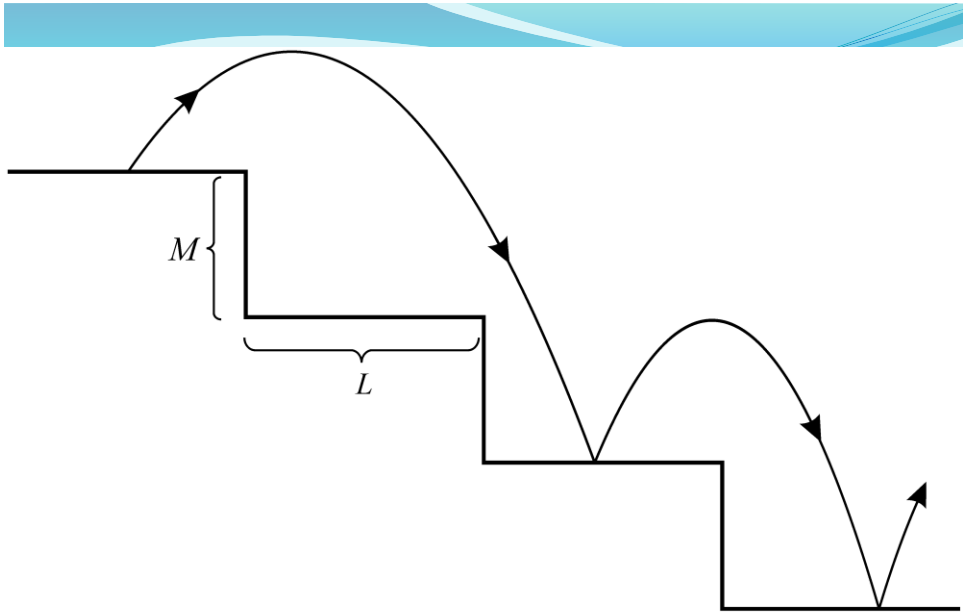
- Ferde hajítás
- A visszapattanásnál energiaveszteséggel számolunk

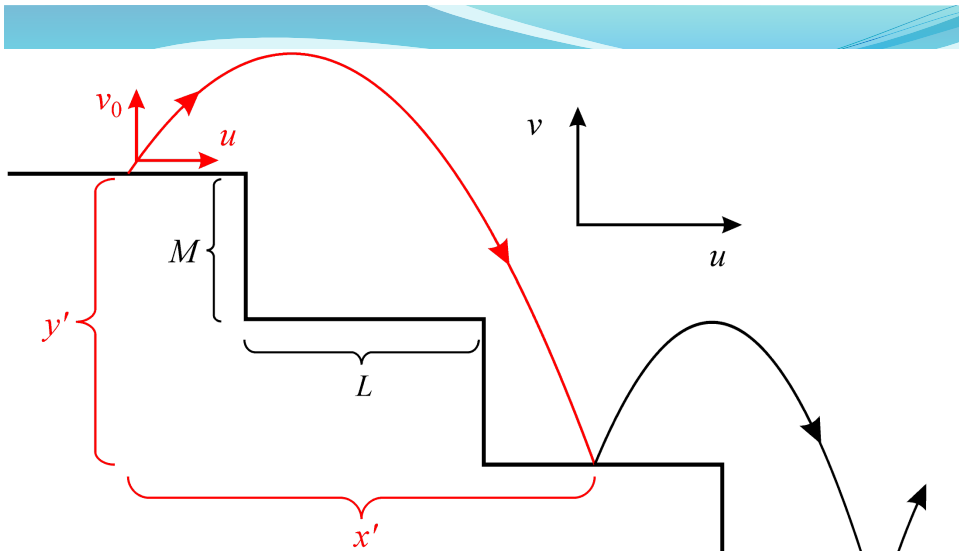




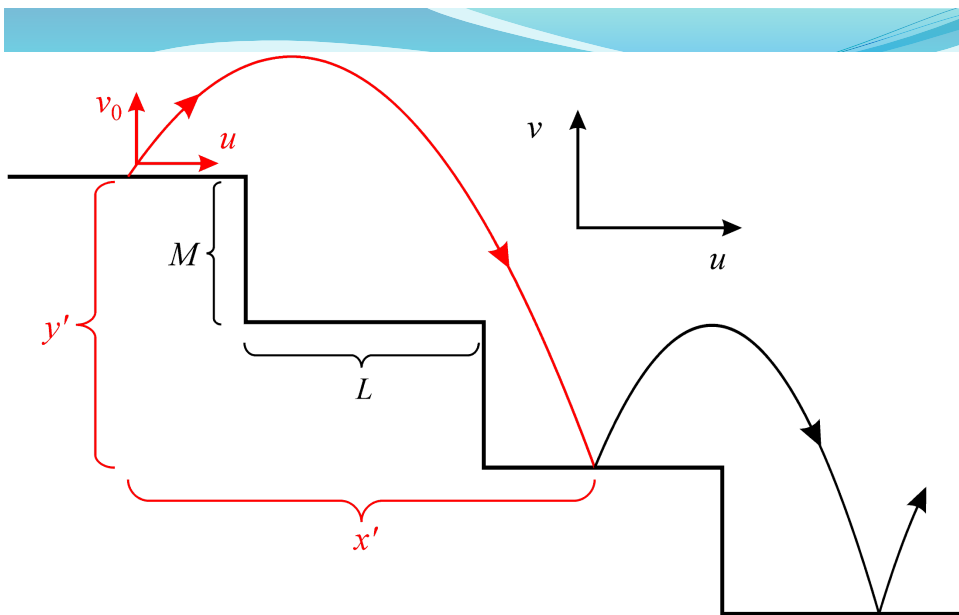




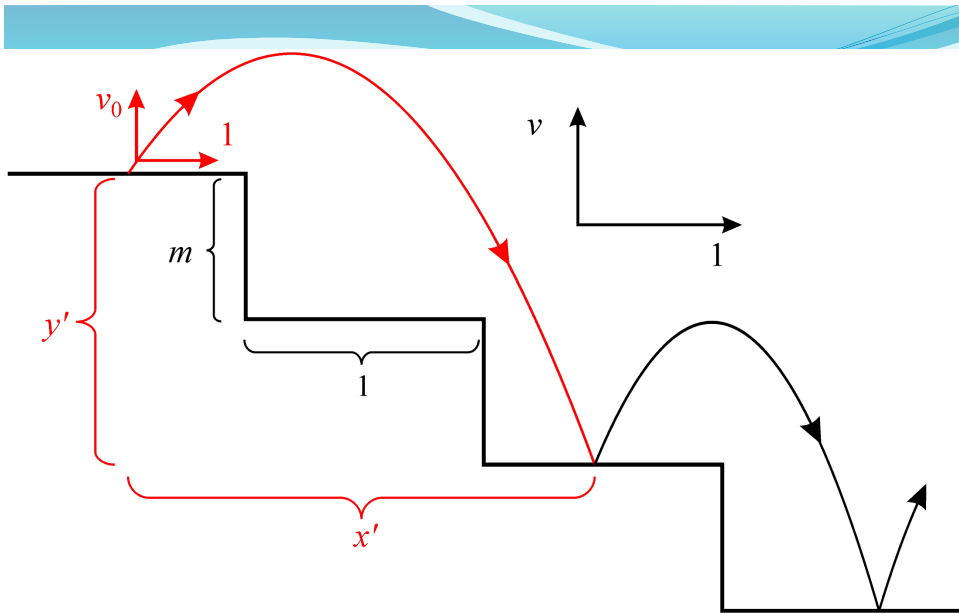




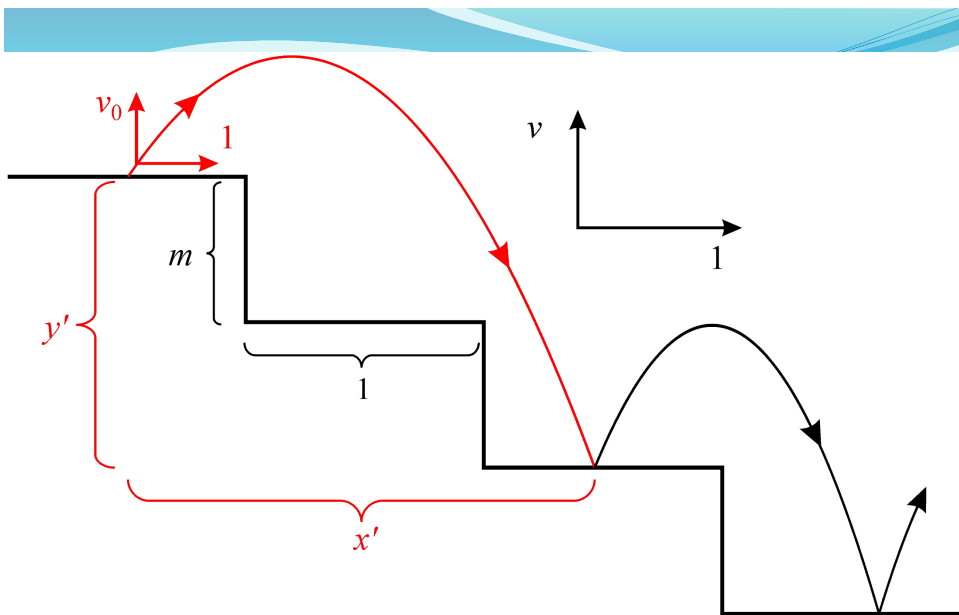
Ez egy egyszerű ferde hajítás!
 x' egyértelműen meghatározható y' és a
kezdeti sebesség (v_0, u) ismeretében!



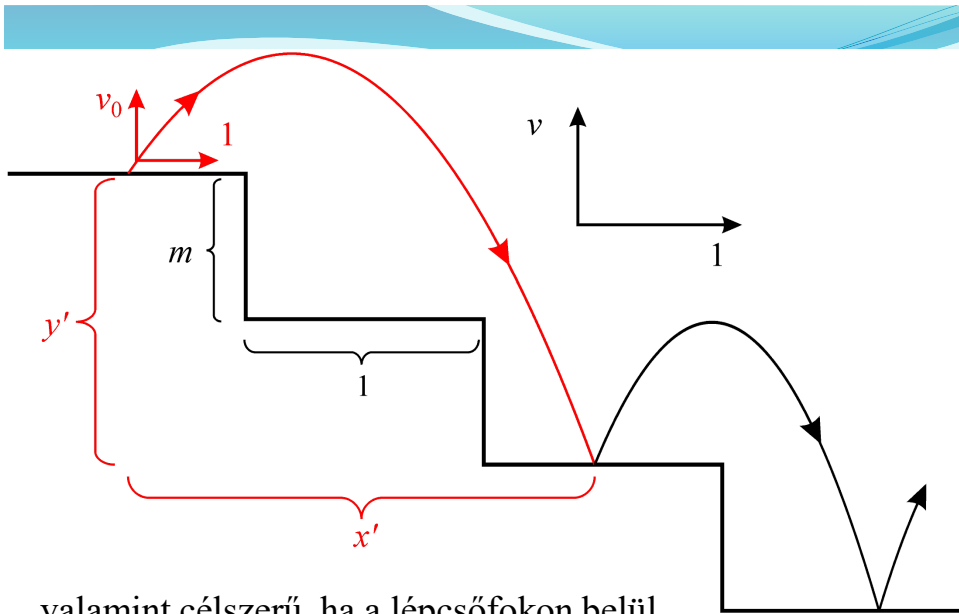
Az egyszerűség kedvéért az L és az u legyen 1!



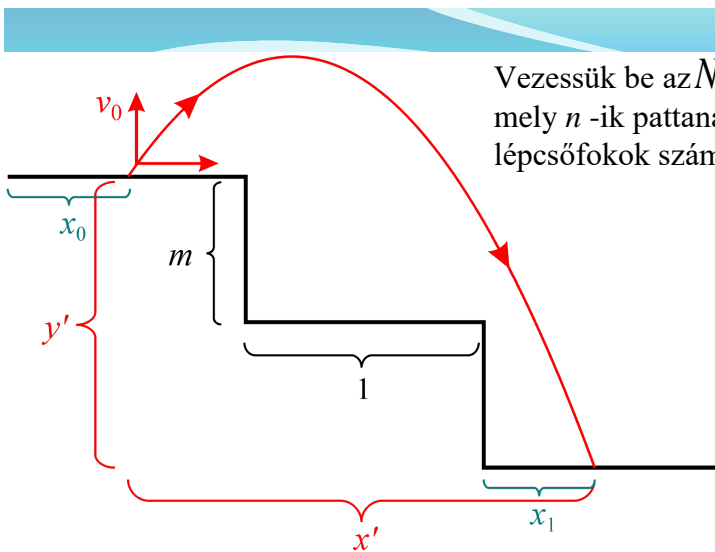
Az egyszerűség kedvéért az L és az u legyen 1!



Érdeemes n -nel indexelni az elpattanások helyét és sebességét,



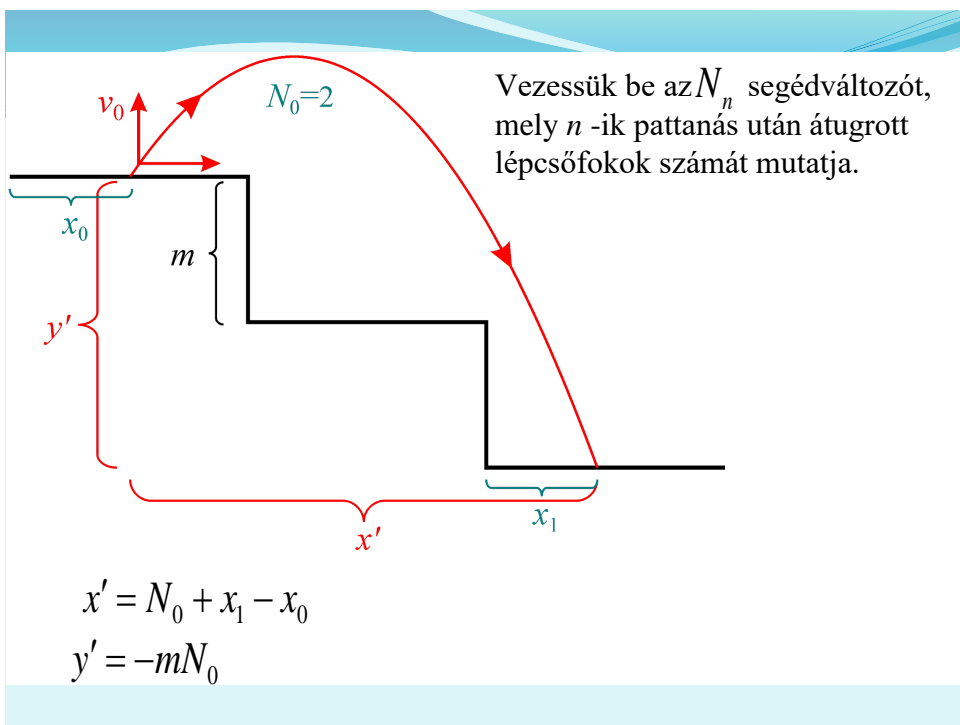
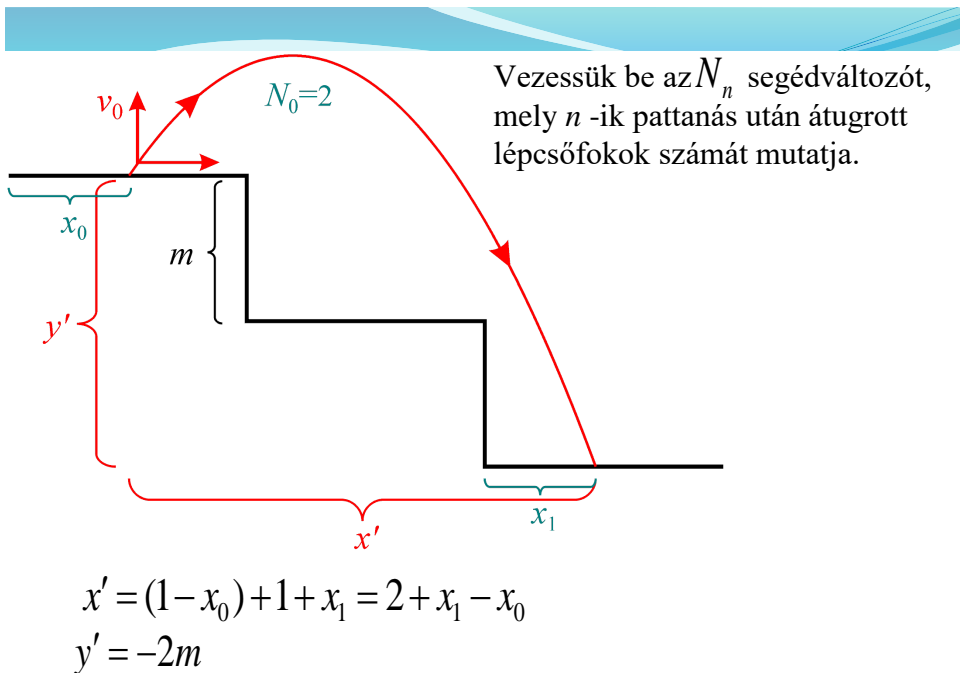
valamint célszerű, ha a lépcsőfokon belül mérjük fel x_n nagyságát:

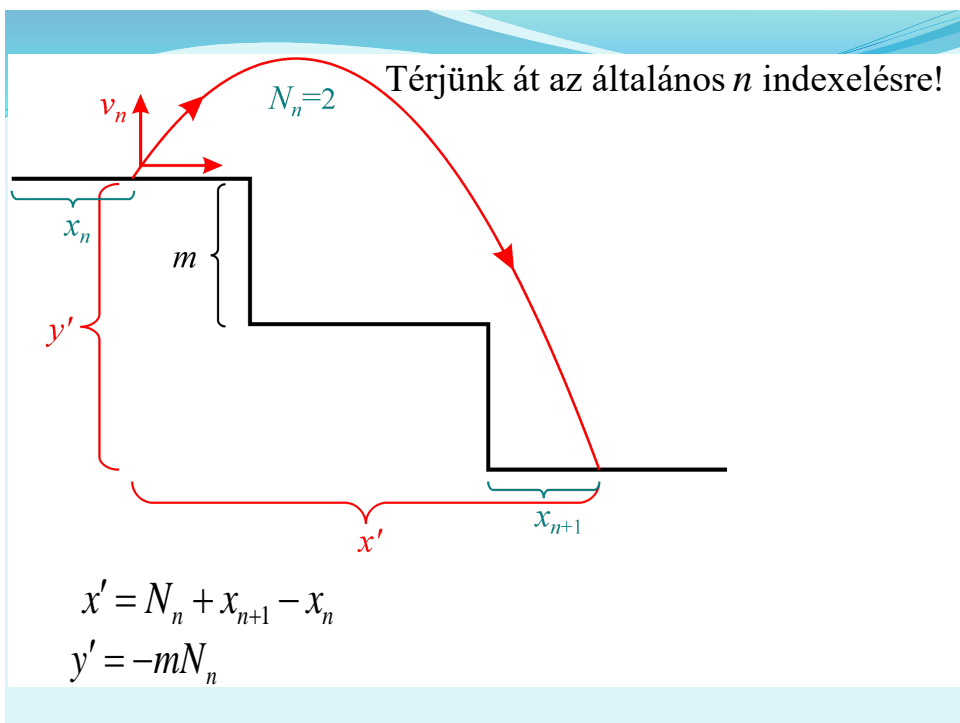
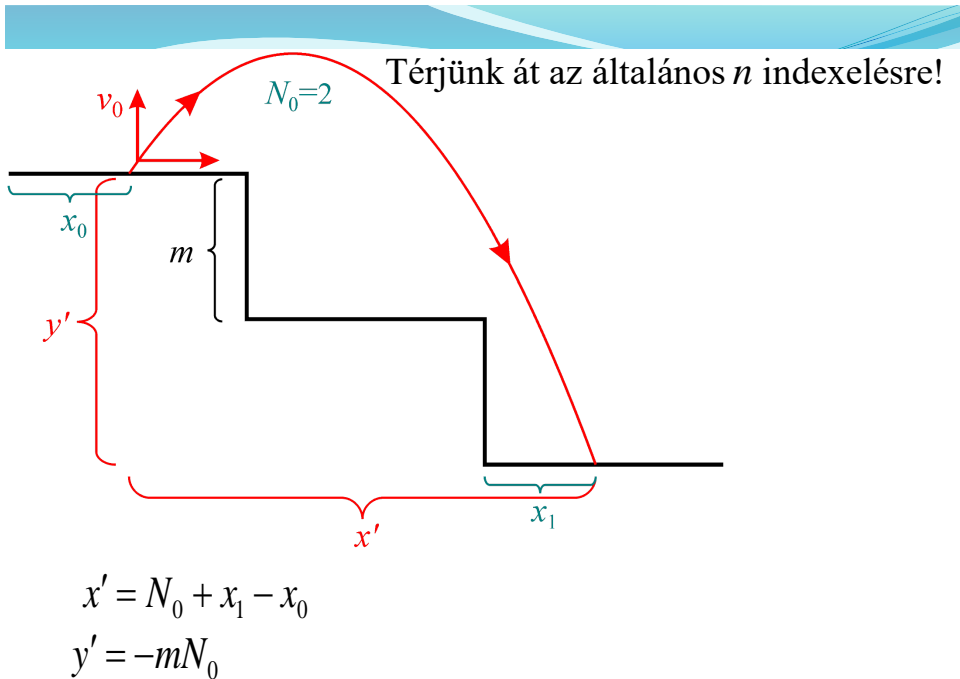


Vezessük be az N_n segédváltozót, mely n -ik pattanás után átugrott lépcsőfokok számát mutatja.

$$x' = (1 - x_0) + 1 + x_1 = 2 + x_1 - x_0$$

$$y' = -2m$$





Most már tényleg visszatérhetünk a ferde hajtás számolásához!

$$x' = N_n + x_{n+1} - x_n$$

$$y' = -mN_n$$

Most már tényleg visszatérhetünk a ferde hajtás számolásához!

$$x' = N_n + x_{n+1} - x_n = t_n (= ut_n)$$

$$y' = -mN_n = v_n t_n - \frac{g}{2} t_n^2 \longrightarrow t_n = \frac{\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n} + v_n}{g}$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n} + v_n}{g} - N_n$$

$$v_{n+1} = ?$$

A következő lépcsőfokon a becsapódási sebesség függőleges komponense:

$$v' = v_n - gt_n$$

Ide is behelyettesítjük a kapott t_n repülési időt:

$$v' = v_n - g \frac{\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n} + v_n}{g}$$

Ilyenkor, a visszapattanásnál keletkezik az energiavesztés. Itt lép fel a „súrlódás”!

A visszapattanás után a függőleges sebességkomponens arányosan csökken:

$$v_{n+1} = -kv', \text{ ahol } k \text{ ütközési szám és}$$

Behelyettesítve v' -t:

$$v_{n+1} = k\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n}$$

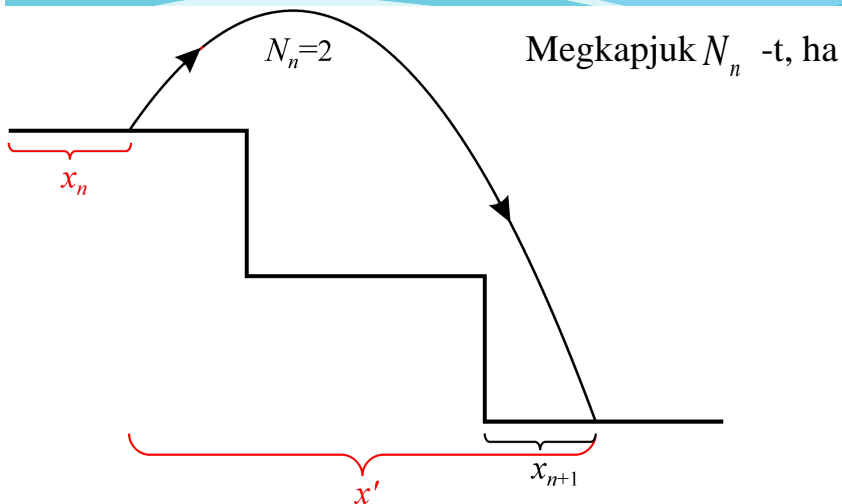
Az energiavesztés a helyzeti energia „fedez”...

Tehát:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n} + v_n}{g} - N_n$$

$$v_{n+1} = k\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n}$$

De mekkora az N_n ?



elosztjuk $x_n + x'$ -t a lépcsőfok hosszával és az egészrészt vesszük!

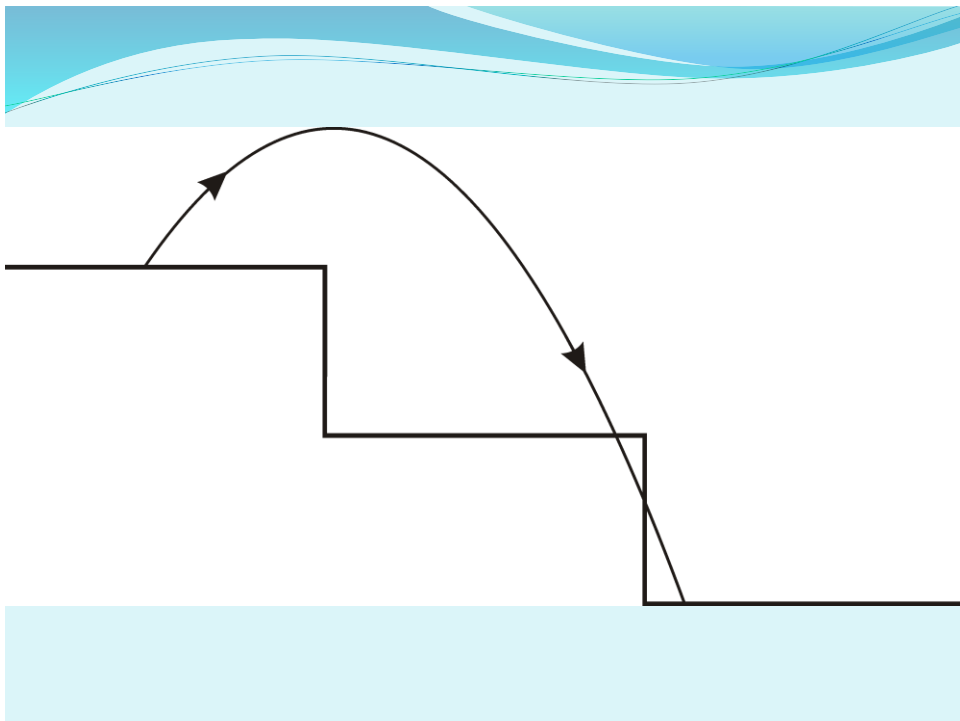
$$N_n = [x_n + x']$$

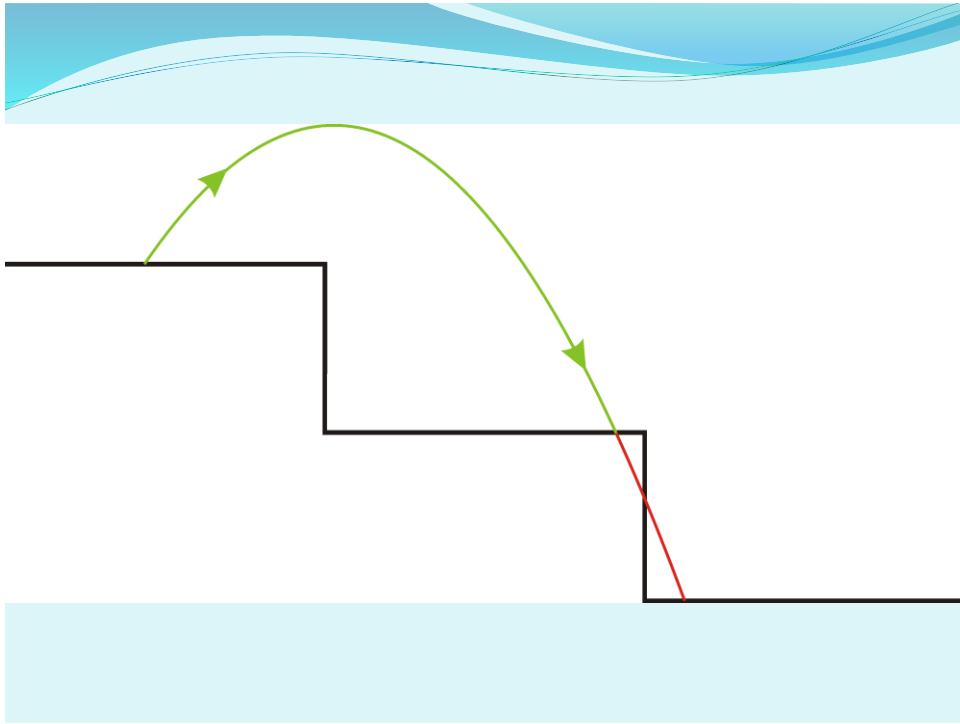
$$N_n = \left[x_n + \frac{\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n} + v_n}{g} \right]$$

Elemi matematikával sikerül felírni egy egyenletet N_n -re!

Igaz, nem egy szokványos, hiszen N_n -t nem kaptuk meg explicite.

Ha több megoldás is lehetséges, akkor a legkisebb lesz a valóságos.





Szedjük össze az egyenleteket!

$$N_n = \left[x_n + \frac{\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n} + v_n}{g} \right]$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n} + v_n}{g} - N_n$$

$$v_{n+1} = k\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n}$$

Két ismeretlen, x_n és v_n , egy segédváltozó és három egyenlet.

A megoldás egyértelműen meghatározható.

Szedjük össze az egyenleteket!

$$N_n = \left[x_n + \frac{\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n + v_n}}{g} \right]$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n + v_n}}{g} - N_n$$

$$v_{n+1} = k\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n}$$

És három paraméter, esetünkben k , m és g határozza meg a rendszer tulajdonságait.

Szedjük össze az egyenleteket!

$$N_n = \left[x_n + \frac{\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n + v_n}}{g} \right]$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n + v_n}}{g} - N_n$$

$$v_{n+1} = k\sqrt{v_n^2 + 2gmN_n}$$

Egy speciális „leképezésnek” is tekinthetjük, ahol:

$$(x_{n+1}, v_{n+1}) = \mathbf{f}(x_n, v_n)$$

$$(x_{n+1}, v_{n+1}) = \mathbf{f}(x_n, v_n)$$

Vegyük észre: a ferde hajítás parabolaívének kiszámítása nélkül kapjuk meg a becsapódási adatokat!

Ilyenkor hívjuk segítségül a számítógépet:

- különböző paraméterekkel,
- különböző kezdőfeltételekkel és
- különböző ábrázolásmódokban

elkezdjük a rendszer tulajdonságait feltérképezni.

Webes szimuláció lehetősége:

<http://crnl.hu/lepcso>

(Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma, Pécs)



<https://www.arch2o.com/stairway-to-infinity-david-mccracken/> letöltés: 2021. 04. 13

Letölthető átfogó cikk és feladatmegoldások ugyanitt:

Szerzők: Gruiz Márton, Meszéna Tamás és Tél Tamás

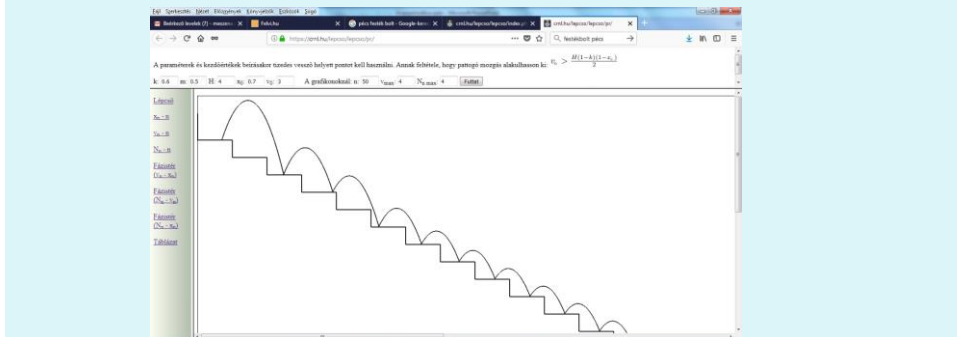
Csoportmunka:

Vizsgáljátok meg a szimulációs programmal a lépcsőn pattogó labda mozgását:

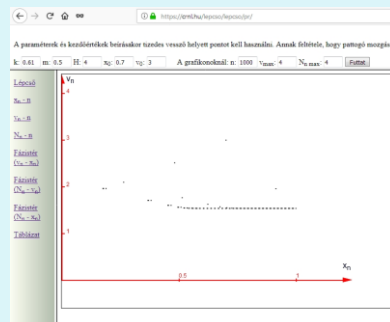
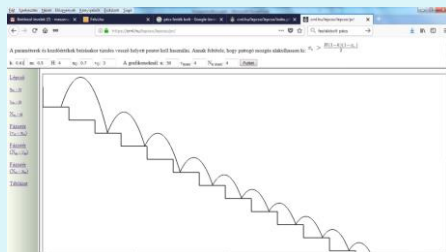
crnl.hu/lepcso

$k=0.6$ $m=0.5$ $H=4$ $x_0=0.7$ $v=3$ $n=1000$ esetben

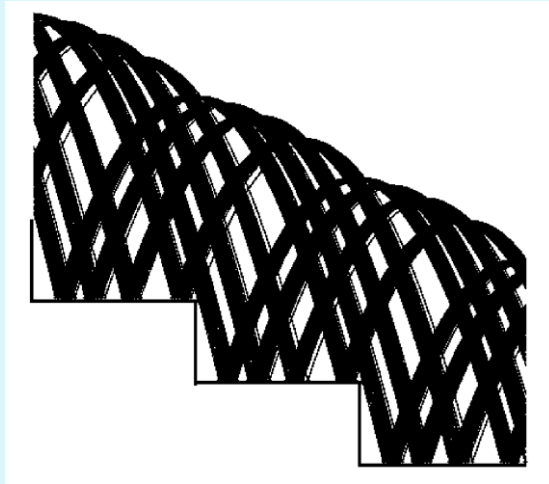
(periodikus mozgás, minden lépcsőn egyet pattan)



$k=0.61$ $m=0.5$ $H=4$ $x_0=0.7$ $v=3$ $n=1000$ esetben
(nem periodikus mozgás, de ...)



Tehát a szimulációban látott mozgásunk képe:



$$k = 0,75$$

$$m = 0,5$$

$$g = 4$$

A kváziperiodikus mozgás a **tipikus** pattogás lépcsőn.
És ennél a modellnél egyben ez a legbonyolultabb mozgás!

A videón látható mozgás tehát egy **kivételes** esetet mutat.

Számítások szerint a hosszútávon csak meghatározott k értékeknél alakulhat ki periodikus mozgás.

Esetünkben $k = 0,6$ -tal ütköző labda pattan minden lépcsőn egyet.



Itt is igaz: **bármilyen** kezdőfeltételből indítjuk a labdát,
mindig periodikusan fog pattogni előbb-utóbb.

Azonban más k esetén sohasem!

A lehetséges periodikus mozgások: minden lépcsőn pattan egyet, minden másodikon stb...

Tehát: $N_n = 1, N_n = 2, N_n = 3$ stb...

Elemi módszerekkel kiszámolható az ezekhez az esetekhez tartozó k értékek:

$$k_N = \frac{4N-1}{4N+1}$$

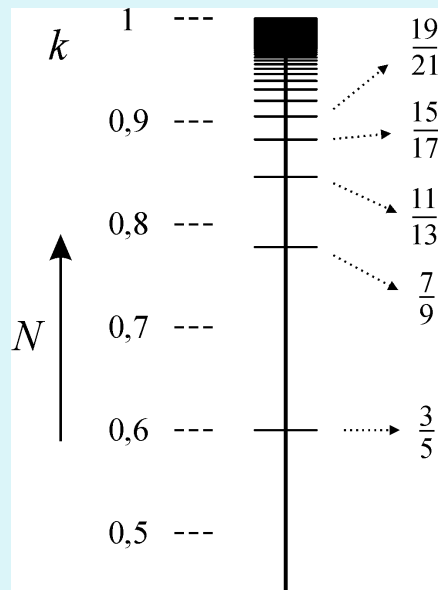
Például: $k_1 = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5} = 0,6$.

$$k_N = \frac{4N-1}{4N+1}$$

Ha N értéke nagy,
akkor közelítőleg: $k_N = 1 - \frac{1}{2N}$

Meglepő, de egy spektrumot kaptunk:

A hidrogénatom energiájához hasonló „kvantáltságot” találtunk!

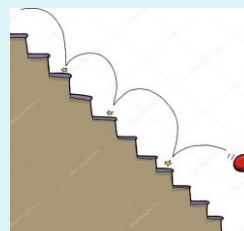
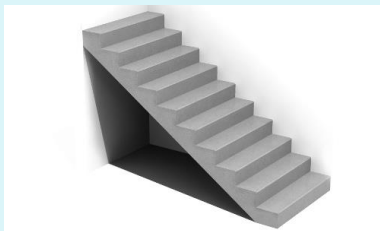


Összefoglalás:

- elemi módszerekkel meghatározható leképezés (mozgásegyenlet),
- a legegyszerűbb modellnél is bonyolult lesz a leképezés,
- a legbonyolultabb mozgás a kváziperodikus, mely egyben tipikus is,
- periodikus mozgás kivételesnek számít, s csak bizonyos k ütközési számoknál jöhet létre.

Mindez a valóságos lépcsőkre és labdákra vonatkozó paraméterekre igaz.

Nem eset szó pl. a kicsi k értékekről, a lekerekített lépcsőélekről, vagy a kiterjedt labdákról...

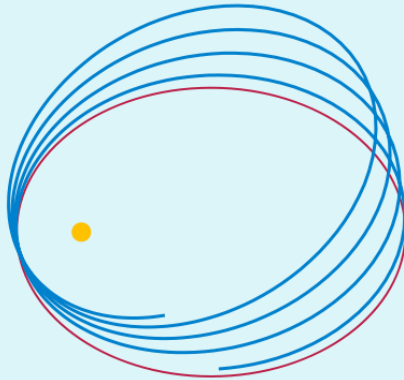


https://www.123rf.com/photo_27236139_stock-vector-bouncing-red-ball-falling-down-staircase-over-white-background.html 2021. 04. 13.

Kváziperiodikus mozgás:

Soha nem oda tér vissza, de majdnem...

Ismert példa a kváziperiodikus mozgásra:



A Merkúr bolygó perihélium precessziója.

Keringési periódus: 88 nap.

Precesszió:

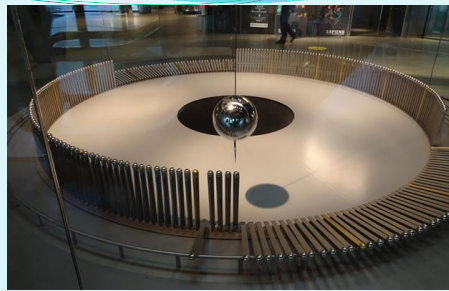
12 000 000 merkúri év

Forrás: https://en.wikipedia.org/wiki/Two-body_problem_in_general_relativity

Foucault-inga



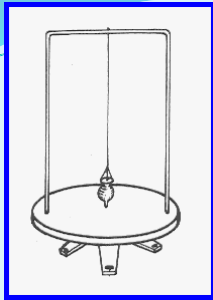
<https://hu.pinterest.com/pin/532761830890679237/> 2021. 04. 13.



<https://tudostenyek.blog.hu/2018/03/26/tenyleg-forog-a-fold-foucault-inga>
2021. 04. 13.



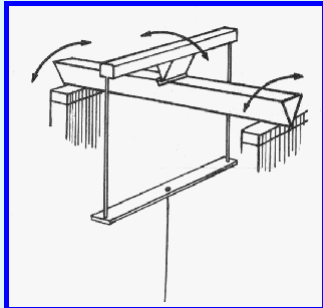
<https://www.friss.hu/hirek/nem-allt-meg-a-vilag--leng-a-foucault-inga-szombathelyen> 2021. 04. 13.



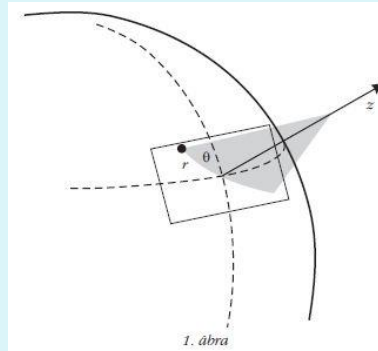
<http://www.vilaglex.hu/Lexikon/Html/FoucaultInga.htm> 2021. 04. 13.



http://bgk.uni-obuda.hu/sites/default/files/kari_oldal/csatolmany/foucault_inga.pdf 2021. 04. 13.



<http://metal.elte.hu/~phexp/doc/teh/gaszsz2.htm> 2021. 04. 13.



Teszt

Post Test

- Lehet-e egy mozgás hosszan periodikus, ha a súrlódás és a légellenállás elhanyagolhatóan kicsi?
 - Nem, minden mozgás csak rövidtávon lehet periodikus.
 - Igen, ha nincs veszteség, a mozgás periodikus marad.
- Ha egy körmozgást az $x - y$ síkon, a periódusidő többszöröseinek megfelelő időpillanatokban egy-egy ponttal ábrázolunk, akkor milyen ábrát kapunk?
 - Kört.
 - Egyetlen pontot.
 - Zárt görbét.
- Egy ingaóra periódusideje, véletlen hatásoktól függően (például légmozgás), lehet picit rövidebb vagy hosszabb. Mit kapunk, ha az inga mozgását az $x - y$ síkon, az átlagos lengési idő többszöröseinek megfelelő időpontokban egy-egy ponttal ábrázoljuk?
 - Kis kiterjedésű foltot (ponthalmazt).
 - Egy pontot.
 - Egy körívet.
- A Merkúr közel ellipszis alakú pályán kering a Nap körül, de ennek az ellipszisnek a nagytengelye nagyon lassan, adott irányba körforgul. Milyen ábrát kapunk az $x - y$ síkon, ha a keringés átlagos periódusa többszöröseinek megfelelő pillanatokban pontokkal ábrázoljuk a Merkúr mozgását?
 - Körívet.
 - Zárt görbét.
 - Egy pontot.
- Az összetett mozgásokban, ahol lehetséges periodikus és nem tisztán periodikus mozgás is, melyik fordul elő gyakrabban?
 - Az adott mozgástól függ.
 - A periodikus mozgások a ritka kivételek a bonyolultabb mozgások között.
 - A mozgások általában periodikusak, a többi a kivétel.
- Említs néhány mozgást, melyeket nevezhetünk első közelítésben periodikusnak, és pontosabban vizsgálva nemperiodikusnak is! Indokold meg válaszaidat!

.....
 A nem teljesen pontosan periodikus mozgások közül milyen alapon nevezhetjük az egyiket majdnem periodikusnak, míg a másikat zajos-periodikus mozgásnak? A 3. 4. kérdés mozgásai közül melyiket neveznéd majdnem periodikusnak, ill. zajos-periodikusnak?

Köszönöm a figyelmet!



<http://www.edc.ncl.ac.uk/highlight/rhnovember2006g02.php> 2021. 04. 13.