

**Doktori értekezés**

**Nemlineáris jelenségek vizsgálata diákköri-szakköri munkában**

**Jaloveczki József**

**Témavezető: Dr. Tél Tamás egyetemi tanár**

**ELTE TTK Fizika Doktori Iskola  
Vezető: Dr. Palla László**

**Fizika Tanítása Doktori Program  
Vezető: Dr. Tél Tamás**



**Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar**

**2014**

## Tartalomjegyzék

Bevezetés.....	4
I.rész: Kísérletek és mérési módszerek.....	17
1. Nemlineáris jelenségek mérése potenciométeres szögméréssel.....	19
1.1 Méréseink vízszintesen rezgetett felfüggesztésű inga mozgásának vizsgálatára.....	19
2. Kaotikus mozgások vizsgálata web kamerás számítógépes mérőrendszer alkalmazásával.....	30
2.1 Méréseink kettős fonálinga mozgásának vizsgálatára.....	30
2.2 Rezgő lemezen pattogó labda mozgásának vizsgálata.....	37
3. Nemlineáris mozgások számítógépes vizsgálata Wiifiz rendszerrel végzett mérésekkel.....	43
3.1 Méréseink három vonzócentrumos mágneses ingával.....	43
3.2 Méréseink négy vonzócentrumos mágneses ingával.....	49
3.3 A mágnesek közötti kölcsönhatás mérése.....	52
II. rész: Számítógépes szimulálás és összevetés.....	56
4. Nemlineáris és kaotikus jelenségek numerikus szimulálása.....	58
4.1 Bevezetés.....	58
4.2. Euler-módszer.....	59
4.3. Fizika példák a kétféle Euler-módszerre .....	63
4.4. A negyedrendű Runge – Kutta-módszer.....	69
5. Számítógépes szimuláció és kísérlet összevetése.....	75
5.1. A kettősinga mozgásegyenletének numerikus megoldása, a mérési eredmények és a szimuláció összevetése .....	75
5.2. A vízszintesen rezgetett felfüggesztésű inga mozgásegyenletének numerikus megoldása, a mérési eredmények és a szimuláció összevetése.....	79
5.3. A három vonzócentrum fölött mozgó mágnesinga mozgásegyenletének numerikus megoldása, a mérési eredmények és a szimuláció összevetése.....	83
III.rész: Tehetség gondozás.....	88
6. Fizika népszerűsítése, a kisdíjakok érdeklődésének felkeltése (Fizika - show).....	90

6.1. A Fizika - show rövid története.....	91
6.2. A Fizika - show lebonyolítása, a kísérletezők.....	92
6.3. A kísérletekről általában.....	93
6.4. Diákjaink saját fejlesztésű kísérletei.....	99
6.5. Néhány kevésbé ismert sikeres kísérletünk.....	101
6.6. A látogatók.....	107
6.7. A „show” hatásai.....	108
Összefoglalás.....	111
A Függelék.....	114
B Függelék.....	116
C Függelék .....	119
D Függelék.....	121
E Függelék.....	128
Köszönetnyilvánítás.....	134
Publikációs jegyzék.....	135
Summary.....	136

## Bevezetés

„Az ismert dolgok végesek, az ismeretlenek végtelenek; szellemünk egy kis szigetcskén áll a megmagyarázhatatlan dolgok végtelen óceánjának közepén. Valamennyi generációnak az a dolga, hogy meghódítson még egy kis szigetet.”

Thomas H. Huxley

Fizikát tanítani szükséges, mindenki számára kötelező. Önálló gondolkodásra és ítéletalkotásra sarkall, fegyelmezett gondolkodást kíván, ugyanakkor megmutatja az ember határait. Tömeges viszonylatban nagyfokú az érdektelenség a fizika (és általában a természettudományok) iránt. Az anyagi sikeréhség már a tanulókorban mákonyos vonzerővel hat, hiszen a pusztán sikeres embert, a sikert morális címkével látták el. Mindenütt jelen van, elterjedt a média által válogatás nélkül ránk zúduló áltudomány. Fel kell lépni ezekkel az áltudományos megközelítésekkel szemben (jó példa a BME által évente rendezett szkeptikus konferencia).

A fizika fogalmakat alkot. Ezeket az empiria segítségével összeköti, végül azokat egzakt módon kodifikálja a matematika segítségével. A természettudományban az emberi zsenialitás a fogalomalkotásban jelentkezik, ami egyben a valóság panorámájának éles és drasztikus lehatárolása; a véges, de világos analízisért fel kell áldozni a teljességet, ami így csak illúzió. A tanításban nem kívánatos sem az infantilis játékoság és egyszerűsítés, sem a darabos, krakéler humor. A fizika tanításakor rá kell mutatnunk, hogy adott helyzetnek vagy problémának sok megközelítése lehetséges, de csak néhányal kell foglalkozni. [1].

Milyen tudomány a fizika? A választ ismernie kell (ene) minden középiskolásnak és fizikatanárnak abból kiindulva, hogy a természettudós elsősorban arra válaszolhat, *milyen* a világ, s nem arra, miért éppen ilyen.

A Galilei munkásságával kialakult modern természettudományos megismerés a *jelenségek* felismerésével kezdődik. Ennek érdekében a jelenséget először közvetlen tapasztalatból, vagy műszeres eszközzel, méréssel *megfigyeljük*. A megfigyelt jelenség értelmezésére *fogalmakat* vezetünk be. Amikor csak lehet, a lényegtelen körülmények elválasztása érdekében *kísérleteket* végzünk. A kísérletek azonos feltételek mellett többször ismételhetők, bárki által ellenőrizhetők, s mindez a pontosabb megértést szolgálja. Ezután *kapcsolatokat* keresünk a fogalmak között. A mennyiségi fogalmak között a kapcsolat *matematikai jellegű*. E feltételezett kapcsolatok megtalálása újabb megfigyelésekkel, kísérletekkel történhet. A fogalmak között először hipotetikus kapcsolatok fogalmazódnak meg. A versengő hipotézisek közül kiesik az, amely következetesen ellentmond a

megfigyeléseknek, kísérletnek. A végül érvényben maradó, letisztult kapcsolatokat *természeti törvényeknek* nevezzük [2].

Az utóbbi évtizedekben (hazánkban is) jelentősen csökkent a természettudományos és műszaki pályák iránti érdeklődés. Ez jellemző a fizika tantárgy iránti érdeklődésre is. Az okok természetesen összetettek, egy nemzetközi bizottság néhány megállapítása Csermely Péter biokémikus professzor összefoglalása alapján [3]:

„A természettudományok oktatása nem kellőképpen szolgálja és tartja fenn a természet iránti kisgyermekkorú kíváncsiságot. Túlteng a memoriter megközelítés, a modern társadalom változó és komplex problémáinak megoldására felkészítő problémamegoldó és szemléletadó (tudáshálózat építő, tanulni megtanító) megközelítés sokszor elő sem kerül;

Igen sok helyen hiányzik a kísérletes megközelítés, nem terjedtek el ennek modern és olcsó megoldásai; hiányzik a team-munka. Az oktatás megújítására rendkívül sok kiváló kezdeményezés született és a természettudományos tárgyak oktatásában kiváló tanáregyenységek dolgoznak - sajnos nagyon sok esetben ezek az elképzelések elszigeteltek maradtak és a kiváló gyakorlati megvalósítás formái még a tagállamokon belül sem terjednek el, EU-szinten történő integrációjuk szinte teljesen hiányzik.”

Az elmúlt évtizedek változást hoztak a természettudományok középiskolai helyzetében, például az ismeretek elképesztő mértékű és iramú bővülésével. Igen sok esetben, a napi életben azok a tudományos ismeretek és alkalmazásaik kerülnek elő, amelyek a legújabb tudományos eredményekkel kapcsolatosak. Ezek sokszor csak közvetetten illeszkednek a hagyományos tananyagban szereplő ismeretekhez. Így a napi gyakorlat, igények és az oktatott anyag egymástól sok esetben egyre jobban elszakadnak.

Bekerült az életünkbe az internet, az okos telefon, amely a tanulók egyre szélesebb köreinek szinte minden tudományos kérdésben bőséges információforrást ad. Egyre kevésbé az információk fellelése okoz problémát, sokkal inkább értékelésük és érvényességük megítélése a kulcskérdés. Ez is a tudáshálózat, a szemlélet-adás, és a problémamegoldó gondolkodás szükségességét húzza alá.

A média térhódítása (vizuális kultúra, interaktív módszerek, stb.) egyre "unalmasabbá" és nem "pörgővé" teszik a hagyományos tanári módszereket.

Tanáraink jelentős része az oktatási rendszer minden változása, és a társadalmi környezet minden kedvezőtlen hatása (az iskolára hárított pl. családi feladatok elburjánzása, tekintélyvesztés, fizetések, stb.) ellenére "kitart", és emberfeletti erővel hihetetlen teljesítményt nyújt EU-szinten mérve is. Ugyanakkor a tanári gárda fokozatosan

differenciálódik, tanáraink egy része elfásul, kiég, igénytelenné és feladatának színvonalas ellátásra alkalmatlanná válik.

A fent említett nemzetközi szakértői bizottság a következő lépéseket látja alapvetően fontosnak:

„A természettudományos tárgyak (ideértve a matematikát is) oktatásának színvonala Európa egész jövőjének egyik kulcsfontosságú kérdése.

A jelenlegi helyzet javításának kulcsfontosságú helye az iskola és kulcspontja a tanáregyéniség. A pedagógiai módszerek megújítása szükséges, amelyben a kérdéseken és problémamegoldáson alapuló párbeszédés tanítási formának, valamint a tagállamokban kifejlesztett és bevált pedagógiai újításoknak az eddigiekhez képest nagyobb hangsúlyt kell kapniuk.

A természettudományos tárgyak oktatásának megújításába a helyi közösség minden érintett tagját (tanárok, diákok, szülők, tudósok, mérnökök és szervezeteik, pl. iskolák, tanár és szülői szervezetek, egyetemek, tudományos intézetek, tudományos múzeumok, cégek és a fenntartók) be kell vonni. E folyamatban az iskolán belüli és kívüli oktatási módszereket ötvözni kell.”

Példaként említem, hogy szerencsére jó kapcsolatok alakultak ki intézményünk és a bajai Csillagvizsgáló munkatársai között. Ez sokat segít a tehetséggondozásban (csillagászati tábor), de a diákok természettudományos érdeklődésének felkeltését is hasznosan szolgálja (népszerűsítő előadások, filmvetítések).

Az ilyen együttműködés kialakítása mindkét fél részéről a fizikaoktatás iránt elkötelezett tanárokat, tudósokat és intézményvezetést igényel.

„A tehetségfogalom igen sokat gazdagodott az elmúlt évtizedekben. Ma már egyre jobban felismerjük, hogy mindenki tehetséges, a nagy kérdés tehát annak felfedezése, hogy az adott diák éppen miben az. Ez az iskolától a pedagógiai módszerek és helyzetek sokkalta nagyobb diverzitását, sokszínűségét követeli meg, hogy a legváltozatosabb tehetségforma is megnyilvánulhasson. Az önbecsülés felkeltése bármely területen kiválóan szolgálja a többi területen esetleg megmutatkozó lemaradások megoldását is. Olyan rendszert kell kidolgozni, amely a diákok tényleges teljesítményén és motivációján alapul, és egy piramis-szerű elrendezésben egyre többet és többet teljesítő diákokat szakmailag indokolható, átlátható és ellenőrizhető módon egyre több lehetőséghez juttatja. Megtapasztalhatják, hogy a tanárokkal együtt lehet dolgozni huzamosabb ideig egy bizonyos cél érdekében, intergenerációs kapcsolatokat kiépíteni a munka, az együtt dolgozás során, ami szinte elképzelhetetlen egy

olyan teljesen kiegyensúlyozatlan szituációban, amelyben a tanár felett, a diák meg retteg. Az élet nem tudástartalmak felhalmozásáról szól, hanem projektekről” [4].

Mindezek valóra váltásához a természettudományos tanárképzésben is átalakítások szükségesek. A jelen oktatási rendszer egyszerre követeli meg a fizikatanártól a lojalitást, pontosságot, állandó önművelést, gyerekek szeretetét, a tehetségek felkutatását és gondozását.

Akárhogy is nézzük, sokak számára az évtizedes neveltetés, továbbképzés, önfejlesztés nem tarthat lépést a dinamikusan fejlődő információtechnológiával. Rendkívül becsülendő példa, hogy idős és középkorú kollégák próbálnak lépést tartani a diákok információs ismereteivel. Ez sajnos sokszor az informatika tanároknak se sikerül.

Nyilván a középút jó, a fixpontok kijelölésével. De ma, a 21. században már joggal várható el egy fizikatanártól (legyen ő idős vagy fiatal), hogy tantárgyában naprakész információkkal rendelkezzen, tapasztalt legyen a világhálón keresésben, alkalmazások letöltésében, gyakorlatában közösségi oldalakon is rutinos legyen.

Összefoglalva, a mai kor igényeinek leginkább megfelelő fizikatanár iránti elvárások (melyek kívánatosak más szakos tanárok esetében is):

„Nagy szükség lenne a szakmailag jól képzett és igényes, a tudásátadásban, tudásszervezésben a tanulókhöz igazodó modern módszertani kultúrával felvértezett, a pedagógiai helyzeteket tudatosan kezelő, a szakirodalmat kutató tanárookra. És ami még nagyon fontos: sugározzon a tanárról, hogy szereti szaktárgyát, szereti a tanítást és a gyerekeket. Kutatások igazolják, hogy szoros pozitív összefüggés van a tanárok motiváltsága és a tanulók tudásszintje, attitűdje között.” [5].

Doktori dolgozatomban annak a pedagógiai kutató-fejlesztő munkának tapasztalatairól és eredményeiről számolok be, amelyet a bajai Szent László Általános Művelődési Központ fizikatanáraként több mint tíz éve folyamatosan végzek a tanulók fizika iránti érdeklődésének felkeltése, illetve az érdeklődő diákok tehetséggondozása területén.

A bajai Szent László Általános Művelődési Központ általános iskolai és gimnáziumi tagozatán a kötelező órakereten túl szakköri foglalkozásokon, illetve a felsősök számára, szervezett önképzőkör keretei közt, biztosítjuk a nem is kevés érdeklődő tanuló szaktárgyi ismereteinek és fizikai szemléletének fejlődését. Az alsóbb évesek (7-10.évfolyam) heti kétórás *Fizikaszakkörének* elsődleges célja a fizika megszerettetése kísérleteken, jelenségeken keresztül. A kisdíjak motiválásában fontos tényező, hogy a legjobbak kísérleteikkel regionális vagy országos versenyeken vehetnek részt, illetve „szerepelhetnek” az iskola által évente szervezett, fizikát népszerűsítő kísérleti bemutatón. Ez utóbbin nem csak a diáktársak,

de a szülők, barátok, ismerősök, minden bajai és környékbeli érdeklődő részt vehet. (A rendezvény népszerűsége évről évre nő, így a részvétel egyre nagyobb motivációt jelent a „szereplőknek”.) A szakkörön eredményes, versenyeken bizonyított diákok többsége a 10. évfolyamtól a *Mandelbrot Tudományos Diákkör* keretei közt végezhet az iskolai tananyagon lényegesen túlmutató kutatómunkát. (Ebbe az önképzőkörbe a szakköri munkától függetlenül is jelentkezhetnek érdeklődő felsőbb éves diákok (10-13.évfolyam) akár más iskolákból is.) Az iskolánkban 1999 őszén megalakult tudományos diákkör szoros kapcsolatban áll a Kutató Diákok Országos Szövetségével. A diákkörben az iskolai fizikatananyagban nem szereplő nemlineáris jelenségek vizsgálatára összpontosítunk, ezen belül a fraktálok és a kaotikus jelenségek kísérleti vizsgálata és az eredmények számítógépes modellezése áll a középpontban. A foglalkozásokon (heti egy alkalom, 4 óra) a matematika és az informatika hatékony felhasználásával számítógépes méréseket és szimulációkat készítenek a diákok. A munka csoportmunkában folyik, tanári vezetéssel, de a diákok nagyfokú önállóságával.

Doktori munkámban célul tűztem ki olyan működő program kidolgozását, mely a számomra adott városi körülmények közt alkalmas a tehetséges általános és középiskolás diákok fizika iránti érdeklődésének felkeltésére és a diákok motiválására, a modern fizika egyes fejezeteinek emelt szintű tanulására, megalapozva ezzel tanítványaim későbbi műszaki-természettudományos pályaválasztását is.

Az általánosan elterjedt középiskolai gyakorlatban a szakköri foglalkozások tematikája alig terjed túl a középiskolás törzsanyagon. Középiskolában már alig van kísérletező munkán alapuló szakkör, legtöbbször a kicsit nehezebb feladatok megoldása tölti ki a szakköri foglalkozások idejét. Kétségtelenül igaz, hogy a feladatmegoldás a fizikai gondolkodás iskolája/próbája. A kiemelkedő tehetségű, „versenyző szintű” diákok legjobbjait az igazán nehéz feladatok kihívása valóban motiválja, nem alkalmas azonban az átlagosan tehetséges diák érdeklődésének felkeltésére és aktivitásának folyamatos fenntartására. Tapasztalataim szerint az átlagosan tehetséges középiskolás számára a steril feladatmegoldásnál sokkal vonzóbb, ha a modern fizika egy-egy olyan témakörébe vezetjük be, ahol maga is dolgozhat, eredményekre juthat. Ilyen területként kínálkozik a középiskolában a nemlineáris jelenségek vizsgálata. A nemlineáris jelenségek vizsgálata szorosan kapcsolódik a számítógépes alkalmazásokhoz, a reálérdeklődésű diákok számára a legtöbb számítógéppel kapcsolatos probléma, illetve tevékenység izgalmas kihívást jelent. A számítógép alkalmazása területén a tehetséges középiskolások rendkívül kreatívak. Célul tűztem ki, hogy doktori munkám során kikísérletezem, illetve kidolgozom azokat a középiskolában is alkalmazható módszereket,



amelyekkel az átlagosan tehetséges, érdeklődő középiskolás kísérleti alapokról indulva elvezethető a nemlineáris jelenségek néhány egyszerűbb problémájáig. Az ilyen témákat elsősorban a jól kísérletezhető, közvetlenül megfigyelhető mechanikai jelenségek közt kerestem. Fontosnak tartottam, hogy a tanári munka valóban csak a bevezetés legyen a témába annyira, hogy ezután a diákok már egyedül, vagy kiscsoportban önállóan dolgozzanak. A tanárnak ezután csak segítő, kontrolláló szerepe marad. Tanári feladat természetesen a jó munkát motiváló sikerélmény biztosítása is. A diákok többsége számára már maga a téma exkluzivitása is motiváló, hiszen olyan dolgokkal foglalkozik, amiről mind a kortársai, mind az átlag felnőtt is nagyon keveset tud. Az eredményes diákmunkák szakmai elismerésének biztosítása (diákverseny, szakmai előadás, publikáció) szintén a szaktanár feladata.

A doktori munka lényegi részének tartom annak bemutatását, hogy az általam kidolgozott tehetséggondozási rendszer, kezdve a kisgimnazisták jelenség bemutató kísérleteitől a tudományos diákkörben végzett diákkutatásokig, eredményes. Ez a dolgozatban a konkrét munka részletes leírásain keresztül valósítható meg. Így példákkal illusztrálom, hogyan használják a tanulók számítógépet különböző jelenségek vizsgálatánál, mind a mérésre, mind pedig a kapott adatok elemzésére, valamint szimulációra.

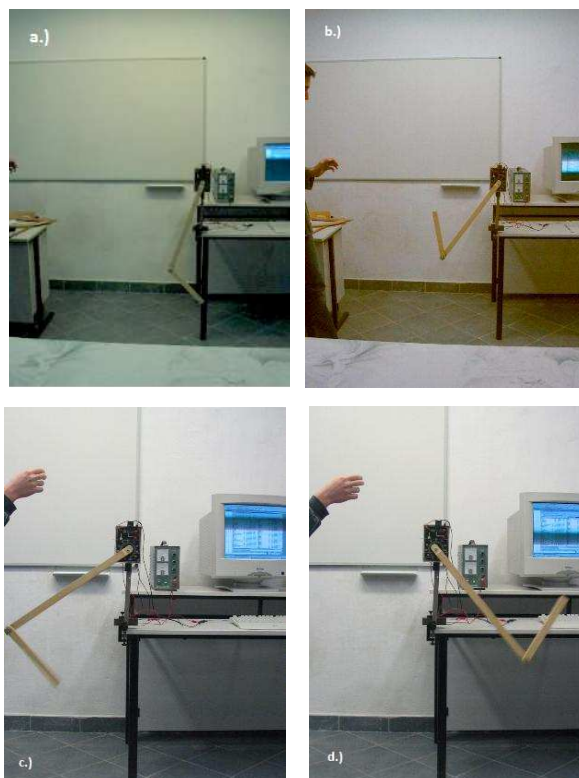
Tehetséggondozó munkám fontos célja az, hogy a konkrét kutatási projekteken keresztül a diákok a gyakorlatban ismerjék meg, és sajátítsák el a tudományos munka lépéseit (megfigyelés, kísérlet, mérés, modellalkotás, szimuláció). Fontos tudatosítani, hogy a jelenség megértésének igazi mércéje a kísérletileg mért adatok és a számítógépes modellezés összhangja.

A dolgozat saját eredményeimet tartalmazó része 6 fejezetből áll, melyek lefedik 7 doktori tézisemet és bemutatják azt az általam kidolgozott és az elmúlt évtizedben követett programot, ami irányította és tartalommal töltötte meg a középiskolai fizika szakköri és tudományos diákköri munkát. Mindez három nagy egységre bontva történik.

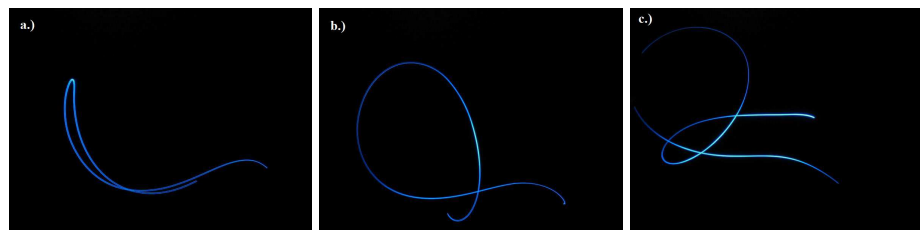
### **I. rész: Kísérletek és mérési módszerek**

Az első fejezetet a fizikai inga vizsgálatára a szakirodalomból jól ismert potenciométeres szögelfordulás mérési módszerére alapoztam. A diákkörösök sikerrel használják a potenciométeres mérést a nemlineáris jelenségek tanulmányozására. Előzményként érdemes megemlíteni, hogy egy korábbi mérésben [6] a tanulók a célnak jobban megfelelő, forgó potenciométeres kettős fizikai ingát készítettek. A felső inga 60cm, az alsó 30cm hosszú volt.

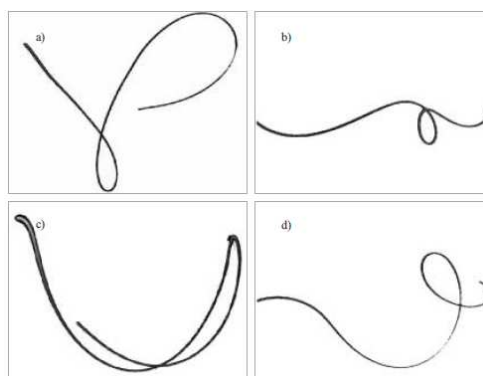
Az inga mozgását fényképezték úgy is, hogy a két rész végpontjaihoz világító diódákat rögzítettek és sötétben hosszú expozíciós időt használtak (B.1.1.-B.1.4. ábrák).



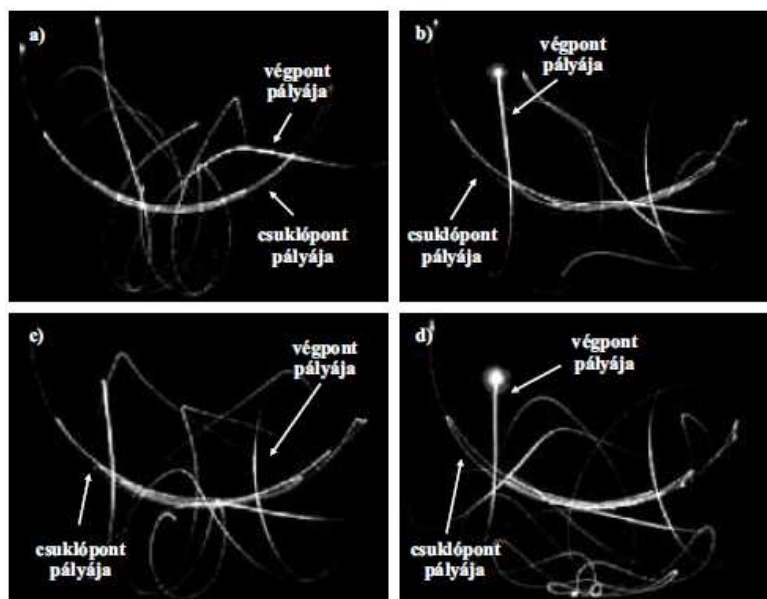
B.1.1. ábra: A kettős fizikai inga mozgásának potenciométeres vizsgálata diákkörön [6]



B.1.2. ábra: Az inga végpontjának pályája LED-del fényképezve.[6]



B.1.3. ábra: A kettős inga végpontjának pályája a fekete hátteret fehérre cserélve jobban kivehető a LED fényképeken [6].



B.1.4. ábra: A fizikai kettős inga alsó-és felső részének valós pályáit a két rész végpontjához rögzített LED- del, hosszú expozíciós idővel fényképezték a tanulók [6].

Megértve a feszültségosztás elvét, szögelfordulásra kalibrálták az eszközt. A kettős fizikai ingát a súrlódás jelentősen csillapította, ezért mozgása tranziensen kaotikus volt. Az ingáról tartott előadásukkal megnyerték az SZTE kísérleti fizikából kiírt pályázatát (2005.). A munka során a tanulók saját eszközükkel végzett kísérletekkel valóban megértik a kettős inga mozgását.

Az első fejezetben a vízszintesen rezegtetett felfüggesztésű inga mérését mutatom be, melyet potenciométeres módszerrel végeztek a diákkörösök az utóbbi években. Fontos eredménynek tekintem azt is, hogy a diákok saját eszközfejlesztő munkájukban az elektromosság-tani ismereteiket alkalmazni tudják bonyolult mechanikai mozgások vizsgálatánál.

A második fejezetben ismertetem, milyen módszert dolgoztam ki a magyar fejlesztésű „WebCam Laboratory” számítógépes mérőszoftver-csomag „Kinematika” programjának alkalmazásával a kétdimenziós nemlineáris mozgások kaotikus viselkedésének tanulmányozására. A módszert sikeresen alkalmaztam jelenlegi diákkörös tanítványaimmal kettős ingák, rezgő lemezen pattogó labdák mozgásának tanulmányozására, elsőként igazolva ezzel, hogy az iskolai demonstrációs mérésekre készült program a diákkutatásokban nemlineáris mozgások vizsgálatára is alkalmas.

Az utóbbi néhány évben magyar szakemberek által kifejlesztett számítógépes mérőprogram fizikaszakköri kipróbálásában iskolánk is részt vett. Tanulóink ismerik,

kedvelik és a szakkörön, illetve a diákkörben rendszeresen használják is a programot. A programcsomag részét képezi a síkbeli mozgások kvantitatív vizsgálatára alkalmas „Kinematika” mérőprogram. A módszer lényege az, hogy számítógéphez kapcsolt web kamerával követjük a színesre festett tárgy mozgását. Doktori munkám részeként a fejlesztők által leírt és ajánlott mérések körét a nemlineáris jelenségek vizsgálatával bővítettem, megmutattam, hogy a mérőrendszer alkalmas e területen is a jelenségek bemutatására illetve diákkutatásokra. Alapesetben a mozgást követő, a számítógéphez vezetékkel csatlakozó kamera rögzített helyzetben van, a mozgásokat tehát nyugvó rendszerben vizsgáljuk. Kidolgoztam annak módszerét, hogy a WebCamLaboratory mérőprogramot vezeték nélküli web kamerával, (rádiófrekvencián történő adattovábbítással) mozgó rendszerben történő vizsgálatokra is használni lehessen.

A harmadik fejezetben kifejtem, hogy Piláth Károly (ELTE, Trefort Ágoston Gyakorlógimnázium) által mozgások vizsgálatára alkalmazott számítógépes módszer - ami egy közismert számítógépes játék (a Nintendo) működésén alapul – eredményesen alkalmazható kaotikus síkmozgások vizsgálatára. A kísérleti módszer lényege, hogy a mozgó testre egy gombellemmel működtetett infra LED-et rögzítünk, ennek sugárzását a közeli asztalon elhelyezett Nintendo játék távirányítója vevőként érzékeli, és rögzíti a mozgó test koordináta- és időadatait. A Wiifiz programmal rögzített adatokat Excel programmal értékeljük ki. A távirányító jelét a számítógép bluetooth kapcsolattal rögzíti.

A WiiMote konzol használható egy rugóra akasztva, vagy egy ingára szerelve is. Infravörös érzékelő használatával pedig út-idő grafikonok rajzolhatók meg. Forgó rendszerbeli ingamozgást és rezgetett inga mozgását is vizsgáltuk ezzel a módszerrel. Részletesen leírom azt is, hogyan alkalmaztuk a módszert diákkörön a három-, ill. négy vonzócentrummal rendelkező mágnesinga kaotikus mozgásának tanulmányozására.

## **II. rész: Számítógépes szimulálás és összevetés**

A negyedik fejezetben bemutatom milyen módszert dolgoztam ki mozgásegyenletek numerikus megoldásának középiskolai tanítására. A differenciálegyenletek analitikus megoldása a középiskolában taníthatatlanul nehéz, ezért nem tananyag. Tapasztalataim bizonyítják, hogy a tehetséges és a számítástechnika iránt érdeklődő felsőbb éves (11-12.évfolyam) diákok számára azonban a differenciálegyenletek numerikus megoldása megérthető és sikeresen alkalmazható. A különféle numerikus eljárások megismerése során a legjobbakkal eljutunk a leghatékonyabb módszer, az RK4 módszer, vagyis a negyedrendű

Runge--Kutta-algoritmus használatáig is. A számítás elvi útjának értelmezése után a tudományos munkában is használt differenciálegyenlet megoldó programokat először az iskolai tananyagban szereplő mozgásegyenleteken alkalmazzuk. A módszert a numerikus úton kapott eredmény és a tananyagból jól ismert függvény egyezése hitelesíti. Ez az egyezés adja a biztatást, hogy bonyolultabb mozgások egyenletének felírása után, azok számítógépes megoldásával is megpróbálkozzanak a diákok. Tapasztalataim szerint a mozgásegyenletek fizikai megfontolásokon alapuló felírása, numerikus megoldása és az így kapott eredmények összevetése a kísérleti tapasztalatokkal a diákok számára szemléletformáló jelentőségű, a dinamika alapproblémájának megértését eredményezi.

Az ötödik fejezet arról szól, hogy a tehetséges középiskolás diákok, saját tevékenységükön keresztül megtapasztalják a napjaink tudományos kutatómunkájában egyre fontosabbá váló számítógépes szimulációk szerepét a jelenségek megismerésében és megértésében. Megmutattam, hogy a középiskola korlátozott lehetőségei között is van lehetőség olyan egyszerű mozgások számítógépes szimulálására, ahol a kapott eredmények jó egyezést mutatnak az adott mozgás kísérleti vizsgálatával. Alapesetben a szimuláció és a mérési eredmények egyezése igazolja, hogy a mozgásegyenlet felírása során tett fizikai megfontolások helyesek. A paraméterek változtatásával elvégzett szimulációk eredménye felhívja a figyelmet olyan érdekes esetekre, amelyeket utólag közvetlen kísérletben is érdemes megvizsgálni, igazolni.

A számítógépes szimuláció elfogadott kutatási módszere a fizikának. Egy-egy érdekes fizikai jelenség minden részletre, külső körülményre kiterjedő vizsgálata valódi kísérletekkel, mérésekkel nagyon idő és költségigényes. A jelenségek számítógépes szimulálásával ez a drága és hosszadalmas kutatási folyamat megtakarítható. A számítógépes szimuláció során kapott eredmények felhívják a figyelmet a jelenségkör lehetséges érdekesebb eseteire, amelyeket ezután valódi kísérletekkel, mérésekkel is ellenőrizni kell. A számítógépes szimuláció és a valódi mérések jó egyezése jelzi, hogy a jelenség lényegét leíró differenciálegyenlet háttérben álló fizikai elképzeléseink helyesek. Ha az egyezés nem jó, a differenciálegyenlet módosításával célszerű próbálkozni, elsősorban a jelenséget befolyásoló kölcsönhatások pontosításával. Ha javul az ismételt szimuláció és a mérések egyezése, ez azt jelzi, hogy a módosított mozgásegyenlet jobban megfelel a valóságnak, a jelenség lényegét tehát sikerült jobban megérteni.

A fenti módszer megértetése középiskolás diákokkal, a fokozatosság elvét figyelembe véve, válogatott jelenségek kísérleti vizsgálatán és párhuzamosan végzett számítógépes

szimulációján alapul. Az első három fejezetben ismertetett mérések közül a vízszintesen rezgetett inga, a kettős fonálinga és a három vonzócentrumú mágnesinga mozgásegyenleteit oldottuk meg numerikusan a negyedik fejezetben ismertetett RK4 módszerrel. A numerikus megoldás során kapott grafikonokat a megfelelő paraméterválasztással igazítottuk a mérési eredményekhez. A munka során jól megtapasztalható, hogy a diákokban fokozatosan alakul az elvárás a szimuláció eredményeinek és a kísérleteknek minél jobb egyezésére. Világosan megértik azt is, hogy a munka során a szimulációt kell a mérési tapasztalatokhoz igazítaniuk.

A szimulációk és a kaotikus mozgások megismerésének további hasznos módszere lehet az alsóéves egyetemisták számára kidolgozott kaotikus példák [7] tanulmányozása, kipróbálása, akár kísérleti megvalósítása diákkörön.

### **III. rész: Tehetséggondozás**

A Baján évek óta diákjaim aktív közreműködésével szervezett nyilvános „Fizika-show tapasztalatain keresztül igazoltam, hogy a fizika legkülönbözőbb fejezeteihez kapcsolódó kísérletezéssel vonzóvá lehet tenni a tárgyat olyan tanulók számára is, akik az elméleti és a számításos problémákkal nehezebben boldogulnak. A diákok nyilvános kísérletezése egyaránt felkelti a diáktársak, a legifjabb és idősebb látogatók érdeklődését, ami pozitívan hat vissza a fizika tantárgy széleskörű megítélésére, ezáltal jelentősen segíti az iskolában folyó további igényes tehetséggondozási munkát, biztosítja jelentős számú diák érdeklődését és növeli a szakköri és diákköri munka rangját.

Az iskolánkban hét éven keresztül megrendezett egész napos rendezvény keretében előzetesen felkészített diákok mutatnak be és magyaráznak el jelenségeket, kísérleteket. A bemutató során a hangsúly a jelenségek megfigyelésén és ezen keresztül a megértésén van. Fontos cél, hogy iskolánk tanulói és a vendégek kedvet kapjanak a kísérletek elvégzéséhez, és a jelenségek megértéséhez. Ebben fontos szerepe van annak, hogy a kísérleteket diákok végzik, és a magyarázatokat is ők adják.

A kísérletező diákok felkészülése hosszabb időn keresztül az iskolai Fizikaszakkör keretében történik. Ezen idő alatt a tanulók nem csupán megismerik a kísérleteket, de megtanulják azt szakszerűen bemutatni és az érdeklődők számára elmagyarázni. Ennek során hatékonyan fejlődik a kísérletező kompetenciájuk, figyelemösszpontosító képességük, kommunikációjuk, helyzetfelismerő képességük. A tapasztalatok szerint a részvétel szinte mindig pozitív hatással van a tantárgy iránti attitűdre. A sikeres bemutatót követően jelentősen javul a kísérletek iránti érdeklődésük, gyakran saját módosítási javaslataik vannak,

saját készítésű kísérleteket hoznak az órára, nő a kísérletes fizikaversenyek, pályázatok iránti fogadókészség. A kísérleti munka sikere általában pozitívan hat a diákok tanórai teljesítményére, önbizalmuk, órai aktivitásuk nő, érdeklődésük fokozódik, és mindez az osztályzatok javulásában is kimutathatóan megjelenik. Későbbi személyes beszélgetésekből tudom, hogy a „Fizikashow” élménye többeknél még a későbbi pályaválasztásra is hatással volt.

A diákok felkészülésének segítésére leírom és publikálom a kísérleti bemutatók alkalmával elvégzett legnépszerűbb kísérleteket, és azok szakszerű magyarázatát is.

A doktori dolgozat összefoglalással, köszönetnyilvánítással és a publikációs jegyzékkel zárul.

A dolgozathoz egy DVD-mellékletet csatoltam. A mellékelt DVD-n a dolgozatban tárgyalt mérésekhez készített videók és a 6. fejezetben elemzett „fizikashow” rendezvényekről készített filmek tekinthetők meg. A publikációk nevű mappában megtalálható a publikációs jegyzékben szereplő cikkek PDF formátumban.

### **Hivatkozások:**

[1] Wiedemann L: A természettudomány tanítása és az értelmiség helyzete; társadalmi-filozófiai kitekintés. Filozófia és természettudomány között. 1997. 39. o., Nemzeti Tankönyvkiadó, Bp.

[2] Tél T.: Milyen tudomány a fizika? Amit minden középiskolásnak tudnia kellene, Természet világa 2012/12. 177-183.o.

[3] M. Rocard - P. Csermely - D. Jorde - D. Lenzen - H. Walberg - H. V. Hemmo: Természettudományos nevelés ma: megújult pedagógia Európa jövőjéért, Iskolakultúra 2010/12. 13. o.

<http://epa.oszk.hu/00000/00011/00153/pdf/2010-12.pdf>

[4] Rocard-jelentés - első kézből. Fizikai Szemle 2007/9-10. 340.o.

[5] Papp K.: A természettudományos tanárképzés szerepe, jelentősége és lehetséges fejlesztési irányai. A tanári pálya vonzerejének javítása, a finn kutatás alapú tanárképzés adaptálásának lehetőségei. SZTE, 2010. Konferencia kiadvány, p. 26.

[6] Békéssy L.I., Bustya Á.: Fizikai kettősinga vizsgálata, Fizikai Szemle 2005/5. 185.o.

[7] Nagy P.: A számítógép felhasználása a modern fizika BSc szintű oktatásában. 16. o., [http://fiztan.phd.elte.hu/nyilt/disszertaciok/nagy\\_peter.pdf](http://fiztan.phd.elte.hu/nyilt/disszertaciok/nagy_peter.pdf)





# I. RÉSZ: KÍSÉRLETEK ÉS MÉRÉSI MÓDSZEREK

*„A mechanikában nem árt, ha az ember tisztában van azzal,  
mire nincs szüksége ahhoz, hogy valamit elkészítsen.”*  
James Watt



# 1. Nemlineáris jelenségek mérése potenciométeres szögméréssel

## 1.1 Méréseink vízszintesen rezgetett felfüggesztésű inga mozgásának vizsgálatára

### 1.1.1 Bevezetés

Egy inga mozgása nagyszerűen tanulmányozható, ha a kitérését elektromos feszültségjelekké tudjuk alakítani [1]. Az inga felfüggesztési pontját egy forgó potenciométer tengelyével kötjük össze és mérjük a jelek időbeli változását. Kalibrálással közvetlenül a szögkitérést tudjuk tanulmányozni. A diákkörünk számára adott volt a fizikaszertár felszereltségéeként egy interfész (CI-6510 PASCO Signal Interface) és szoftver (Vernier-szoftver), hogy ezeket a feszültség-jeleket számítógépre vigyük. Amikor a tanulók elsajátították a szoftver használatát, és képesek voltak arra, hogy rögzítsék az egyszerű inga kitérés-adatait és azokat feldolgozzák, javasoltam, hogy vizsgáljuk meg ezzel az eszközrendszerrel egy olyan inga mozgását, amelynek a felfüggesztési pontja mozog. Célként annak felderítését tűztük ki, hogy az inga mozgása vajon periodikus jelenség, vagy már kaotikusnak tekinthető. Így lett diákkörös feladat a vízszintesen rezgetett inga mozgásának vizsgálata.

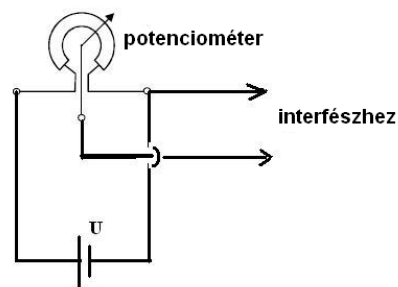
### 1.1.2 Mérési elrendezés, mérés

Ebben a kísérletben egy könnyű fémpálcához rögzített fémnehezéket használtunk ingaként. Az inga felső végét egy Helipot típusú potenciométer (1.1.1. ábra) tengelyéhez erősítettük. A potenciométer ellenállása 3 és 700 ohm között változtatható. A potenciométerrel egy kb. 8V kapocsfeszültségű elem feszültségét osztottuk meg a potenciométer csúszkájának elfordulásával (1.1.2. ábra).

Ezt, az elfordulás szögével egyenesen arányos feszültséget interfészen keresztül a számítógépbe juttatjuk (analóg jel).

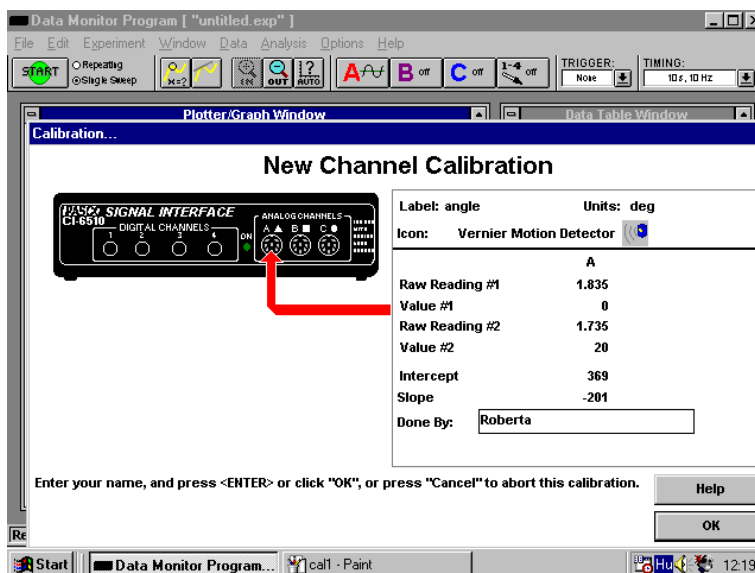


1.1.1. ábra. Helipot típusú potenciométer tengelyéhez erősítettük az ingánkat.

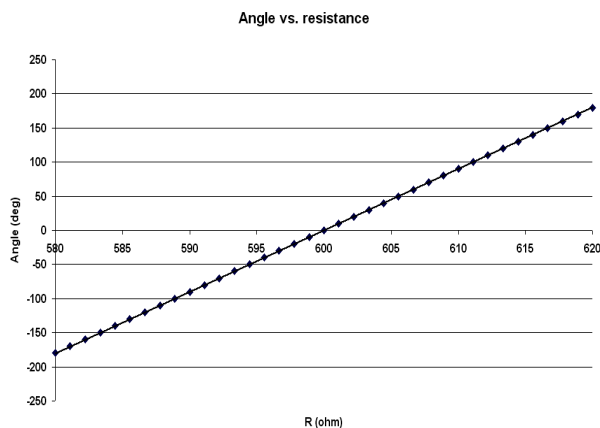


1.1.2. ábra. A potenciométer bekötési rajza. A mérésnél 8V kapocsfeszültségű elemet használtunk.

A kalibrálásakor két potenciométer helyzetet (ingahelyzetet) kell beállítani és beírni a program kalibrációs ablakába (1.1.3. ábra). Ezek után a program egyenest illetve a mért feszültségek segítségével (1.1.4. ábra). A kalibrációs fájl elmenthető a későbbi mérésekhez.

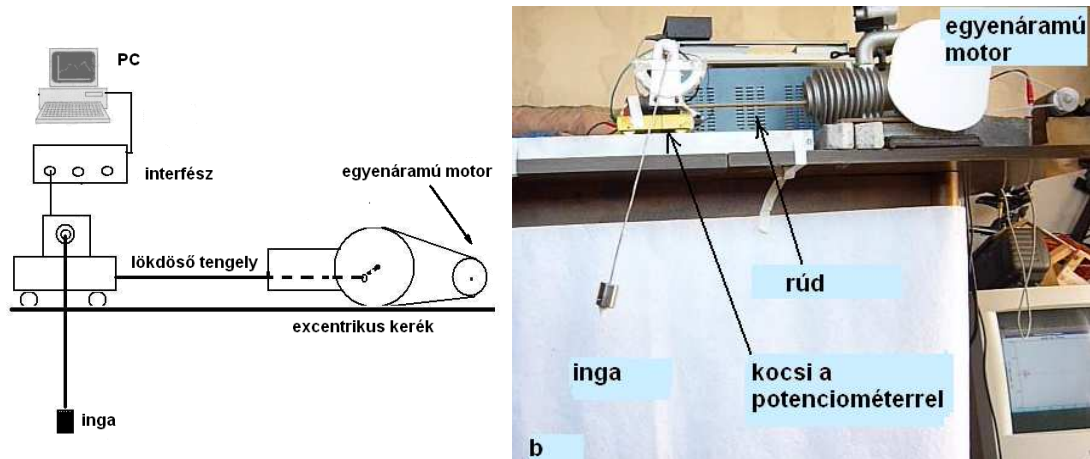


1.1.3. ábra. A (Data Monitor for Windows) szoftver kalibrációs ablaka. A potenciométer két állásának megfelelő feszültségértékekhez rendeltünk szögeket. Az egyik helyzetben az inga függőlegesen lógott (Value #1, 0 fok), a másikban 20 fokkal kitérítettük a függőleges helyzethez képest (Value #2).



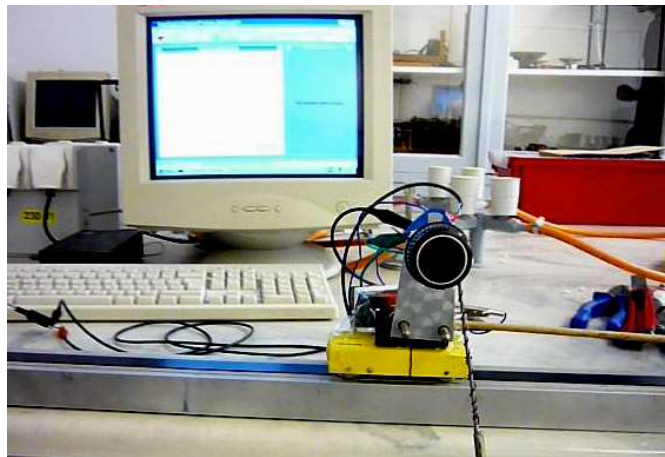
1.1.4. ábra. A Data Monitor for Windows szoftver segítségével történt kalibráció során a potenciométer bekapcsolt ellenállása (vagyis az ezen eső feszültség) bizonyos szögelfordulásnak felel meg a  $\varphi = 9R - 5400$  kalibrációs illesztés szerint és  $R_{\max} = 700$  ohm.

A teljes mérési elrendezés vázlatát az 1.1.5. ábrán látható. Az egyenáramú motor szíjjátékkal hajtja meg az excenteres karral ellátott kereket, ami a karjához csatlakozó pálcával (esetünkben ez fapálca) vízszintesen lökdösi a sínen mozgó kocsit. A sín és a kocsi az iskolai mechanika készlet része. A kocsira erősítettük a potenciométert és a tengelyében felfüggesztett csavarozott ingát. A potenciométer jelének levezetésére gondoskodni kellett a megfelelő hosszúságú zsinórokról, melyek a kocsi mozgása közben sem feszülnek meg.



1.1.5. ábra. A rezgett inga mozgásait megvalósító mérési elrendezésünk vázlatja és a gyakorlati megvalósítása (b ábra).

A csatlakoztatást egyes méréseknél krokodil csipeszekkel, máskor forrasztással oldották meg a tanulók (1.1.6. ábra). A kocsit a sínrel oly módon helyeztük el, hogy az inga az asztal szélénél szabadon lenghessen. Mivel a kocsi ilyen módon aszimmetrikusan terhelődik, felborulhat. Ezért a kocsi másik oldalára fém nehezéket erősítettünk.



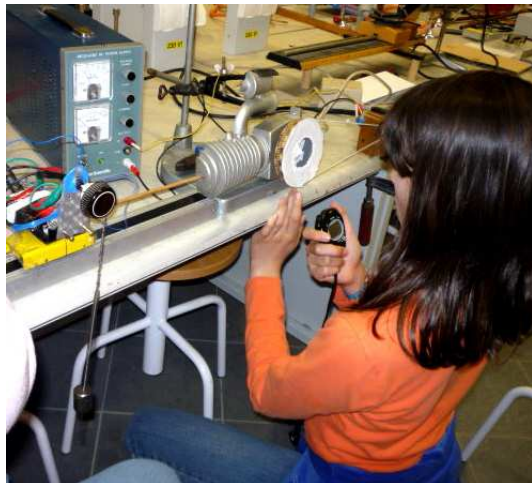
1.1.6. ábra. A kocsira erősített potenciométerről a diákok itt krokodil csipeszes megoldással vezették el a feszültségjelet.

Az egyenáramú motor fordulatszámát a tápfeszültség beállításával – bizonyos határok között – változtatni lehet (1.1.7. ábra). A mérések során a periódus idő 1-1,2s körül volt.



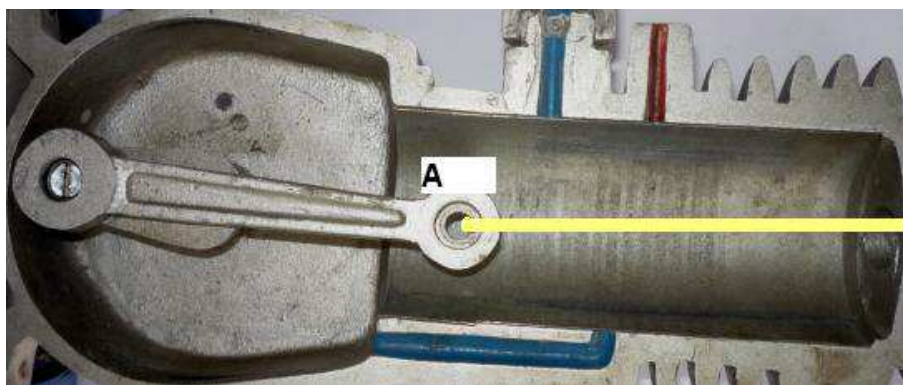
1.1.7. ábra. A szabályozható fordulatszámú motor szíjjátéttel hajtja meg az excenteres karral ellátott tárcsát.

A méréskor gondoskodni kell ennek lemeréséről is. Mi a meghajtott kerék fordulati idejét határoztuk meg stopperrel, 10 fordulat idejét mérve (1.1.8. ábra).



1.1.8. ábra. A meghajtott tárcsa fordulatszámát 10 fordulat idejének mérésével határozta meg egy diákkörös tanuló.

A kocsi kitérése 5cm körül mozgott (ezt a hajtókar geometriája szabja meg), vagyis a gerjesztés amplitúdója kb.2,5cm volt (1.1.9. ábra).



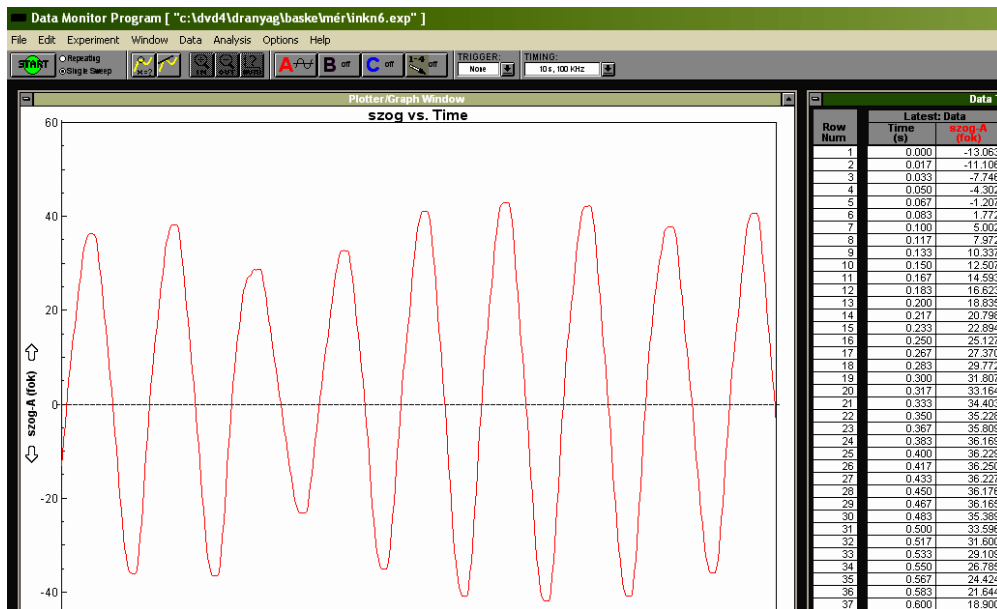
1.1.9. ábra. Az excenteres meghajtás függőleges metszeti képe. A tengelyt a villanymotor forgatta, a hajtókar két szélső helyzete között kb. 5cm a távolság. Az ábrán „A” pontként megjelölt helyen csatlakozott a meghajtó rúd, egy erős fapálca, ami a kocsihoz volt erősítve. Az ábrán szimbolikus sárga vonal jelzi a helyzetét.

### **1.1.3 Adatgyűjtés**

A mérések indítása előtt beállítottuk a motort egy bizonyos fordulatszámra, amit lemértünk. Ezután lekapcsoltuk a tápegységet. Az ingát bizonyos szöggel kitértettük, majd az elengedéssel egyszerre bekapcsoltuk a lökdösést biztosító kismotort is. A mérő szoftvert is ekkor kellett indítani (vagy kicsit előtte). Ehhez minimum két ember kell, és össze kell dolgozniuk (1.1.10. ábra). A mérő szoftver az inga lengéséről szög-idő adatokat rögzít az előzetes kalibráció után. Ezeket az adatokat „exp” kiterjesztéssel menti, amit át tudunk másolni Excel táblázatba, további feldolgozás céljából (1.1.11. ábra).



1.1.10. ábra. A mérés indításához két diákkörös tanuló összehangolt munkája kellett. A képen látható diákkörösök a mérés idején 8. osztályosok voltak.

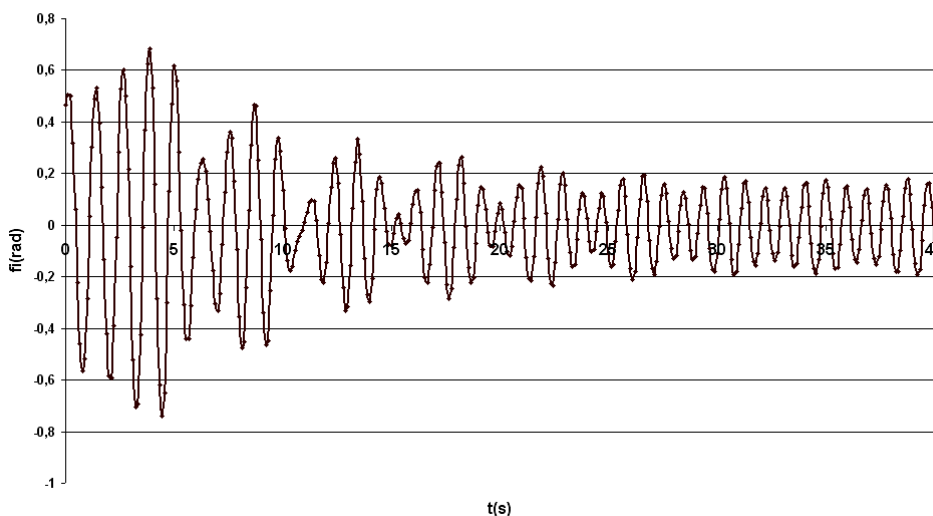


1.1.11. ábra. A mérési képernyő részlete. A szög- idő grafikon rajzolódik ki.

#### 1.1.4 Adatok elemzése

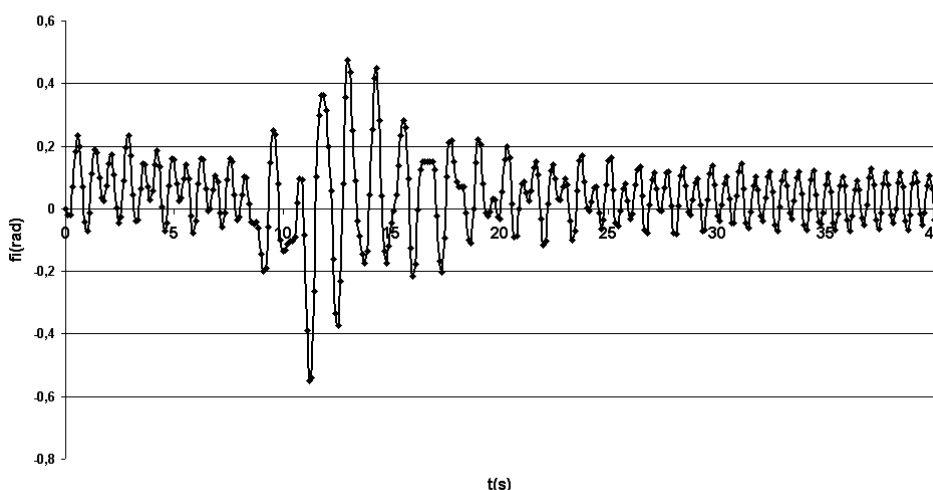
A mért és rögzített adatok feldolgozása Exceles táblázatkezelővel történt. A tanulók a szögkitérés-idő grafikonokat készítették először, és megállapítottuk, hogy ez nem az egyszerű inga jól ismert csillapodó változása (1.1.12. és 1.1.13. ábra). Az adatok elemzésében főleg az idősebb (11-12. évfolyamos) diákkörösök tudtak hatékonyan dolgozni.

A kb.27 fokkal kitérített rezgetett inga szögelfordulás-idő grafikonja



1.1.12. ábra. A kezdetben kb. 27 fokkal kitérített (kb. 1Hz-es frekvenciával) rezgetett inga szögkitérése az idő függvényében.

A kitérés nélkül kb.1Hz frekvenciával rezgetett inga szögelfordulás-idő grafikonja

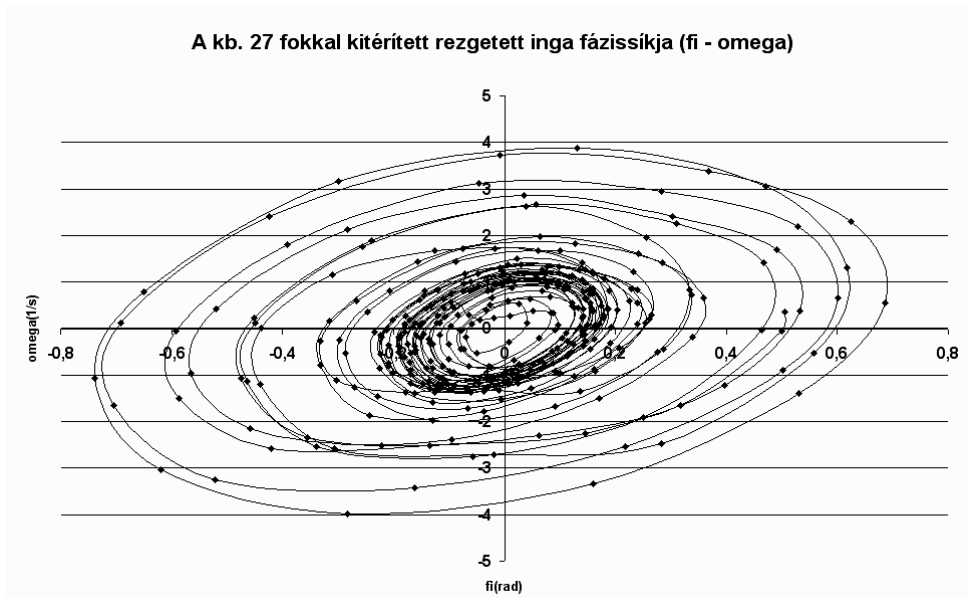


1.1.13. ábra. A kezdetben függőleges, tehát 0 fokkal kitérített (kb. 1Hz-es frekvenciával) rezgetett inga szögkitérése az idő függvényében.

Érdekesnek ígérkezett megvizsgálni az inga szögsebességét a szög függvényében is. Ezt az inga fázissíkjának nevezhetjük (A függelék ). A méréskor kapott szögkitérés adatokból az adott időszakra meghatároztuk az átlagos szögsebesség értékeket a  $\Delta\varphi/\Delta t$  definíció alapján. Ezt a szögsebességet állandónak vettük az időszakra és ábráztuk a radiánban kifejezett szögkitérés függvényében. Ez a grafikon az időbeli változást nem tartalmazza, de az adott helyzetben lévő szögsebesség is fontos információ. Az inga trajektóriája nem érinti az origót ebben az ábrázolásban, hiszen a kitérése nem volt nulla indításkor és a mérés leállásakor sem (1.1.14. ábra). A tanulók ekkorra már ismerik, hogy a leálló periodikus mozgás (csillapodó

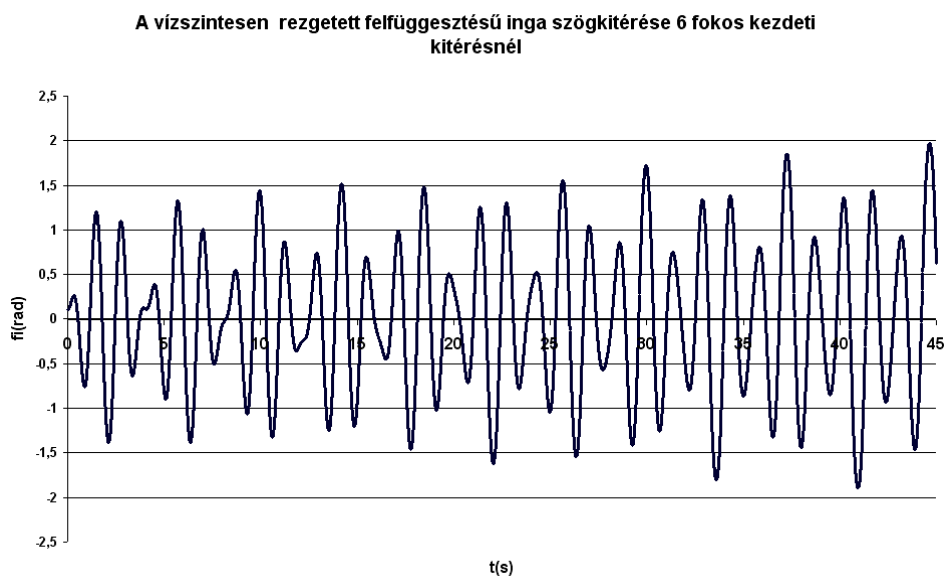


inga) fázissíkján a pályavonal az origóba tartó spirális görbe. Az 1.1.14 ábráról is világos, hogy a mozgás nem áll le, hosszú ideig tart.

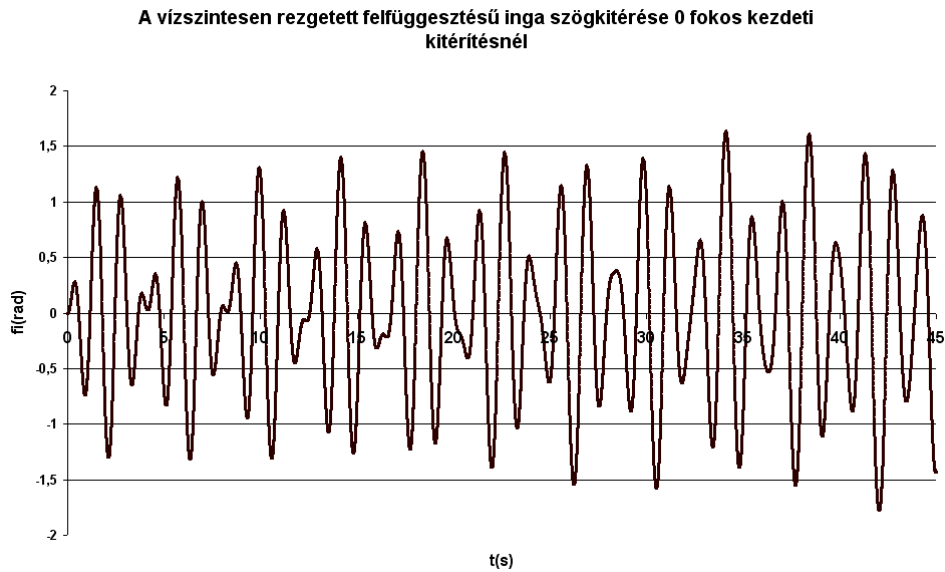


1.1.14. ábra. A kezdetben kb. 27 fokkal kitérített (kb. 1Hz-es frekvenciával) rezgetett inga szögsebessége a kitérés függvényében.

Külön felvettünk olyan méréseket, melyekben az inga kezdeti kitérése csak kissé különbözött. A mentett adatok feldolgozása során ábráztuk a kitérést (radián) az idő függvényében. Az egyik esetben ingánkat 6 foknyit térítettük ki a függőlegetől (1.1.15. ábra). A másik alkalommal az inga függőleges helyzetében kapcsoltuk be a rezgettetést (1.1.16. ábra). A gerjesztő frekvencia ezeknél is 1Hz körüli érték volt, az amplitúdó 2,5cm. Első ránézésre a két grafikon hasonlít, bár nem tűnik periodikusnak a mozgás.



1.1.15. ábra. A kezdetben kb. 6 fokkal kitérített (kb. 1Hz-es frekvenciával) rezgetett inga kitérése az idő függvényében.

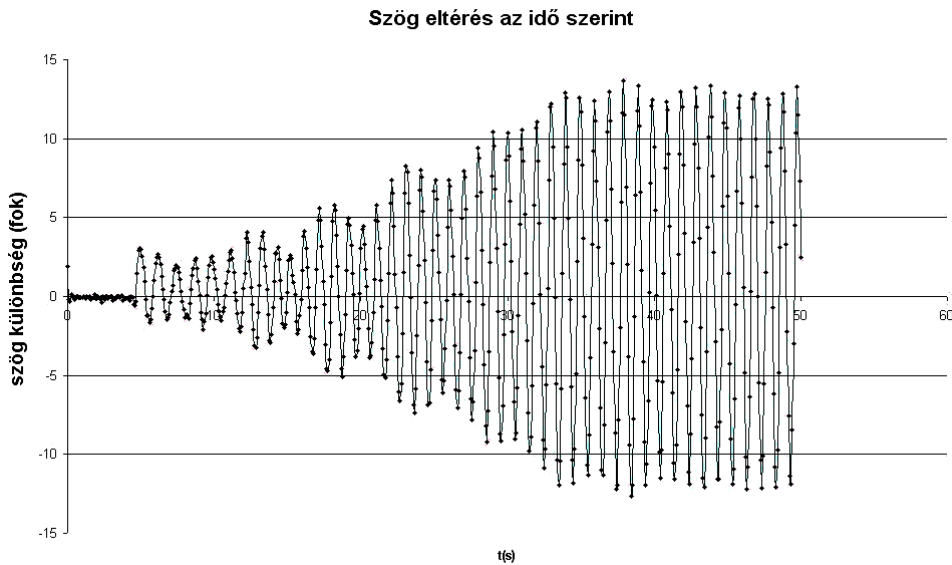


1.1.16. ábra. A kezdetben függőleges helyzetű (kb. 1Hz-es frekvenciával) rezgetett inga kitérése az idő függvényében.

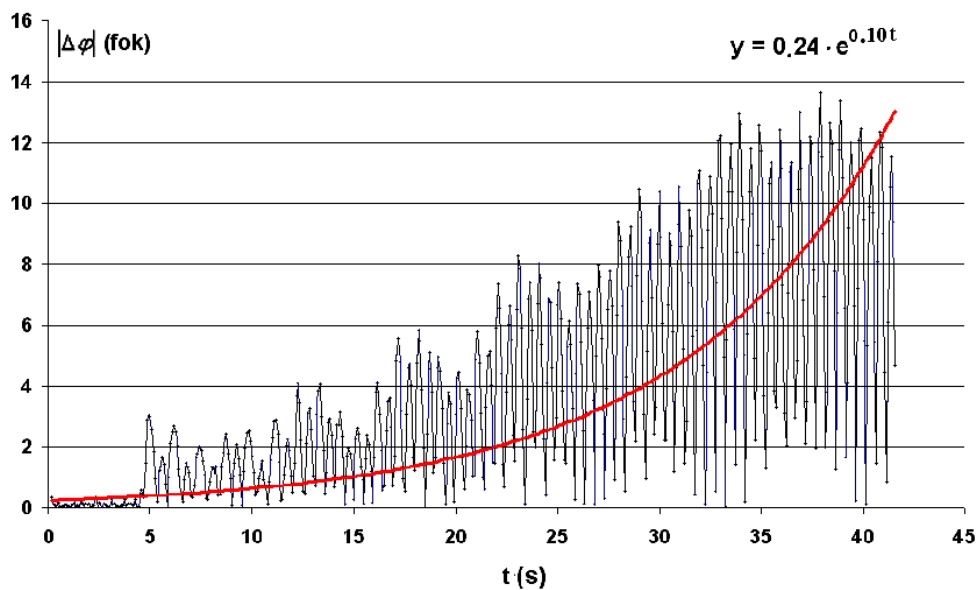
Annak érdekében, hogy megállapíthassuk, mennyire periodikusak a közel azonos kezdőfeltételű mozgások, kiszámoltuk a két ilyen mozgás szögkitérés eltérését, és ábrázoltuk az idő függvényében. Az így kapott görbe (1.1.17. ábra) rövid idejű oszcillációkra épülő, egyre rohamosabb tempójú növekedés. A fokokban mért szögkitérés-különbségek nagyságát az idő függvényében ábrázolva (1.1.18. ábra), arra exponenciális görbét illesztettünk, melynek egyenlete:

$$|\Delta\varphi| = 0,24e^{0,10t},$$

vagyis egy pozitív kitevőjű exponenciális függvény. A kitevő (0,10 1/s) a mozgás ún. Ljapunov-exponense [3]. Ennek reciproka az az idő, mely alatt a szomszédos kezdőpontok távolsága e-szeresére nő. Valóban, az ábráról jól látszik, hogy 10 másodperc alatt a távolság mindig kb. megháromszorozódik. Elemzésünk alapján tehát a trajektóriák – legalábbis a vizsgált kb. 1 perces intervallumban – exponenciálisan távolodnak egymástól. Ez a tulajdonság a kaotikus mozgások sajátossága [3].



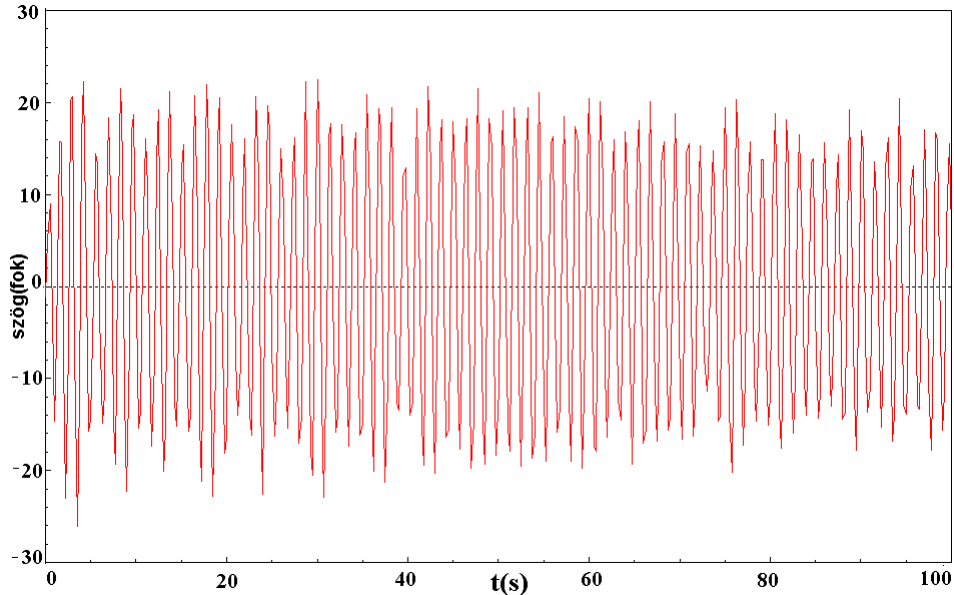
1.1.17. ábra. A két ingaindítás közti szögkitérés különbség kb. 35 másodpercig növekedett. A kezdeti  $\varphi_0 = 0$  és  $\omega_0 = 0$  (1/s) volt, a rezgető rúd helyzetében volt apró eltérés.



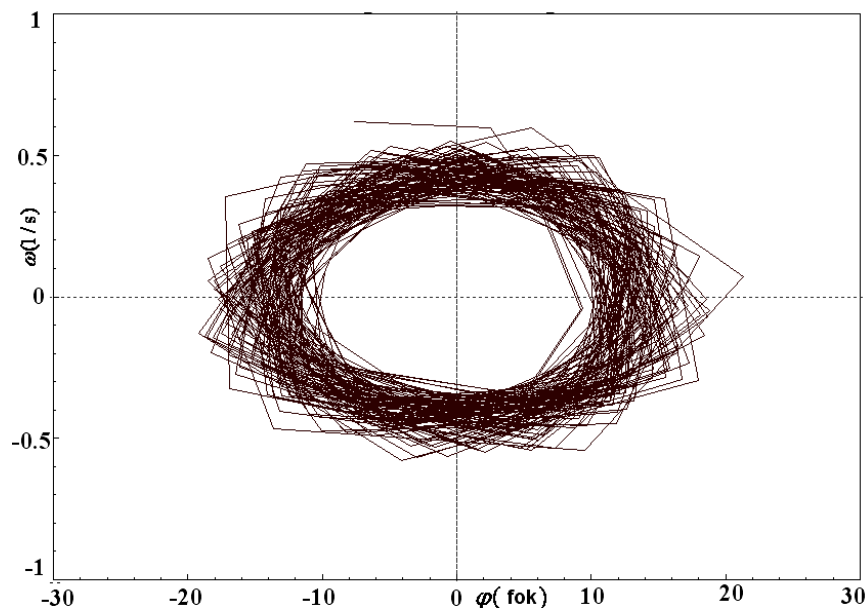
1.1.18. ábra. Az 1.1.17. ábrán látható szögkitérés különbség abszolút értékének (fok) növekedése exponenciálisan növekedett az első 35 másodpercben.

Ezekkel a vizsgálatokkal igazoltuk a kaotikus rendszerek alapvető tulajdonságát, a kezdeti feltételre való érzékenységet, ami mindig a mozgások közötti különbségek kezdeti exponenciális növekedésével jár. Rendszerünkben meghatároztuk az eltávolodás tipikus erősségét, a Ljapunov-exponenst. Mivel a gyors eltávolodás miatt a közeli kezdőfeltételből induló mozgások nagyon távolra kerülnek, a kaotikus mozgás hosszú távon mindig előrejelezhetetlen is. A Ljapunov-exponens reciproka, esetünkben 10s, az előrejelezhetőségi időnek tekinthető, hiszen ez annak a leghosszabb időintervallumnak a

tipikus értéke, melyen belül a mozgások még közel is maradnak. Jól látszik, hogy ez jóval rövidebb, mint a megfigyelés ideje, tehát a rezgetett inga mozgása az 1 perces időskálán már előrejelezhetetlen.



1.1.19. ábra: A rezgetett inga szögkitérése (fokban), hosszabb ideig mérve.  $\varphi_0 = 0; \omega_0 = 0$ .



1.1.20. ábra: A rezgetett inga fázissíkbeli trajektóriája az 1.1.19. ábrának megfelelő adatokkal:  $\varphi_0 = 0; \omega_0 = 0$ .

Ingánk mérésekor rögzítettünk 2 perc körüli mozgásokat is, kb.5,2 (1/s) rezgetési omegával. Egy ilyen mérést mutat az 1.1.19. ábra 100s-ig rögzített szögkitérést az idő függvényében. Az inga kezdeti kitérése és szögsebessége is 0 volt. A mozgás kaotikussága az 1.1.20. ábrán látható, ahol ugyanezen mozgás fázissíkját ábrázoltuk a

mérőprogram (Data Monitor for Windows, Vernier) segítségével. A mozgást kaotikus attraktor jellemzi.

A mérési elrendezés megépítése, működtetése és az adatfeldolgozás komplex folyamat. A tanulók részéről igényli az elektromosságtani alapismeretek alkalmazását (Ohm törvény, feszültségosztás), a mechanikában tanult mozgások (egyenletes körmozgás, rezgőmozgás, ingamozgás) ismeretét. Mindezeket a mérés során összekapcsoljuk a számítógépes adatfeldolgozással, amiben matematikai ismereteik bővítésére, elmélyítésére van lehetőség (szög, radián, differenciahányados, derivált, függvényillesztés stb.). A megépített eszközzel nagyon sok vizsgálatot, mérést is végeztek, melynek során a foglalkozásokon szinte automatikusan kialakul bizonyos fajta csapatmunka és munkamegosztás. A komoly munka mellett fontos az is, hogy jó hangulatban dolgoznak, igazi közösséggé fejlődnek. Egy ilyen összetett műveletsor alatt lehetőség nyílik az alsóbb (8-9.) évfolyamos szakkörösök alapismereteit bővíteni, kreativitásukat fejleszteni (az eszköz megépítése, rögzítése, működtetése révén). Az idősebb (10-12. évfolyamos) diákok számára az igazi új tapasztalatot az jelenti, hogy periodikus mozgások ilyen integrációja (egyenletes körmozgás, harmonikus rezgés, ingamozgás) nem periodikus mozgást eredményez, ami gyaníthatóan - legalábbis rövid időre – kaotikussá válhat. Ennek igazolását a kísérlet szimulációjával foglalkozó fejezetben ismertetem.

A vízszintesen rezgetett felfüggesztésű inga mozgásának további elemzését a mérés és szimulációról szóló 5. fejezetben elemzem.

Az 1. fejezet jelenti az 1. számú tézis háttérét.

### **Hivatkozások:**

- [1] Bérczes Gy.- Főzy I.: Fizikai kísérletek számítógéppel, ELTE Továbbképzési Csoport, Bp.,1981, 24-26. o.
- [2] J. Jaloveczki: Studying Non-linear and Chaotic Phenomena in High School, Physics Competitions Vol.13. No.1.2011, 29. o.
- [3] Tél T.- Gruiz M.: Kaotikus Dinamika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002,150.o.

## **2. Kaotikus mozgások vizsgálata web kamerás számítógépes mérőrendszer alkalmazásával**

### **Mérések a WebCam Laboratory programcsomag segítségével**

A WebCam Laboratory szoftvercsomag web kamera alapú természet megfigyelő rendszer iskolák számára [1]. Iskolánk, a Szent László Általános Művelődési Központ tanulói a 2010. évi Károly Iréneusz Fizikaversenyen egy 30 felhasználós licenst nyertek kísérleti munkájukkal. A programcsomagot elsősorban mozgások vizsgálatára használjuk a fizika szakköri, diákköri munkában és tanórákon. A diákok a rövid betanulási idő után örömmel használják a program moduljait (6 modul), elsősorban a kinematika, a gyorskamera és a mikroszkóp funkciókat [2]. Nagyon sok mérést, vizsgálatot végeztek, melyek közül két – kaotikusnak tekinthető - mozgás mérési eredményeit mutatom be az alábbiakban.

A programcsomag telepítése után mindösszesen egy web kamerára van szükség ahhoz, hogy mozgásokat tanulmányozhassunk a kinematikai modullal. A kinematikai modulról rövid leírás a C Függelékben található a leendő felhasználók segítésére. A szokásos egyenes vonalú mozgásokon (pl. kocsijelzőn) túl, használtuk ingalengések, rezgőmozgások elemzésénél is. A mérés elvégzésénél gondoskodni kell valamilyen semleges háttérről (pl. szürke vagy fehér) és a vizsgálandó mozgó tárgy élénk színezéséről.

### **2.1 Méréseink kettős fonálinga mozgásának vizsgálatára**

A fonálinga mozgásának leírását, kinematikai dinamikai tárgyalását a középiskolában 11. évfolyamon tanulják a diákok. A Mandelbrot Tudományos Diákkört olyan céllal hoztuk létre 1999-ben iskolánkban, hogy a fizika, informatika, matematika iránt érdeklődő tanulókkal a tanítási órákon nem tárgyalható „bonyolult” jelenségeket vizsgáljunk. Kézenfekvő gondolat volt, hogy az ingát kettős ingaként átalakítva, diákkörön tanulmányozzuk annak mozgását. A diákkörös munkából készített előadást 2013 februárjában két diákkörös tanuló (Hegy Anna - Kovács Dorina) mutatta be diákköri konferencián Sopronban.

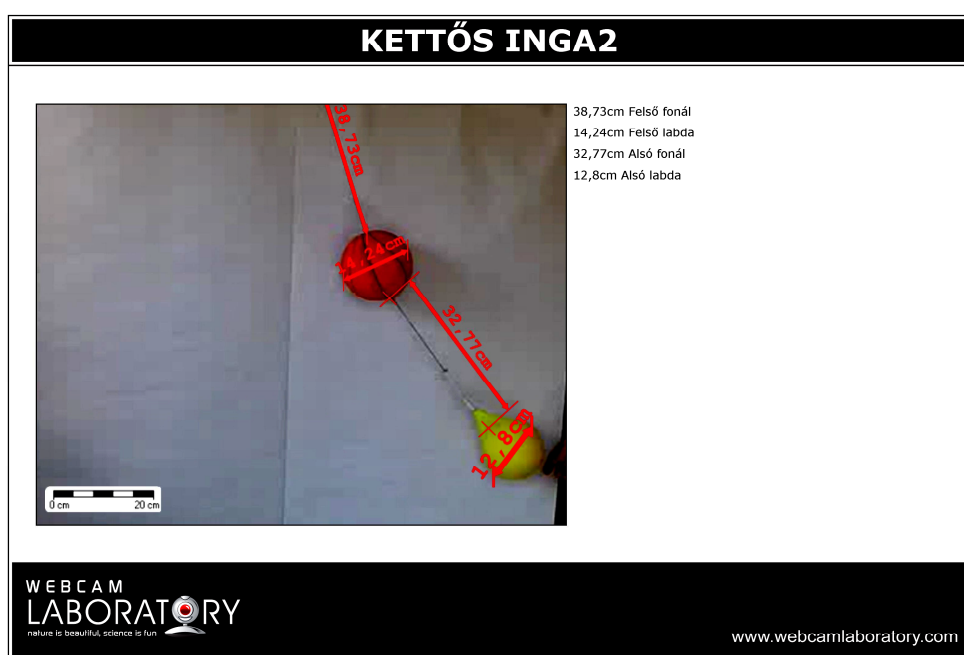
#### **2.1.1 Szükséges eszközök**

Két színes műanyag labda, zsinór, állvány felhasználásával kettős fonálingát készítettünk. A kitérített inga mozgását diákkörös foglalkozásokon tanulmányozták a tanulók WebCam Laboratory szoftvercsomag, web kamera felhasználásával. Célként azt fogalmazzuk meg,

hogy megvizsgáljuk milyen körülmények között lesz a két labda mozgása szabályos (periodikus) és milyen beállítással kaotikus.

### 2.1.2 Mérési elrendezés

Többféle kettősingát is készítettünk, de a kamerával való követés szempontjából a 2.1.1. ábrán látható nagy színes labdák bizonyultak a legjobbnak. A labdák átmérőjét, a fonalak hosszát a programcsomag mikroszkóp modulja segítségével határoztuk meg. Ehhez fényképet készítettünk az ingáról, és egy ismert méretű kalibráló tárgyról (szigetelő szalag csík).



2.1.1. ábra. A kettősinga méreteit a „mikroszkóp” modullal határoztuk meg

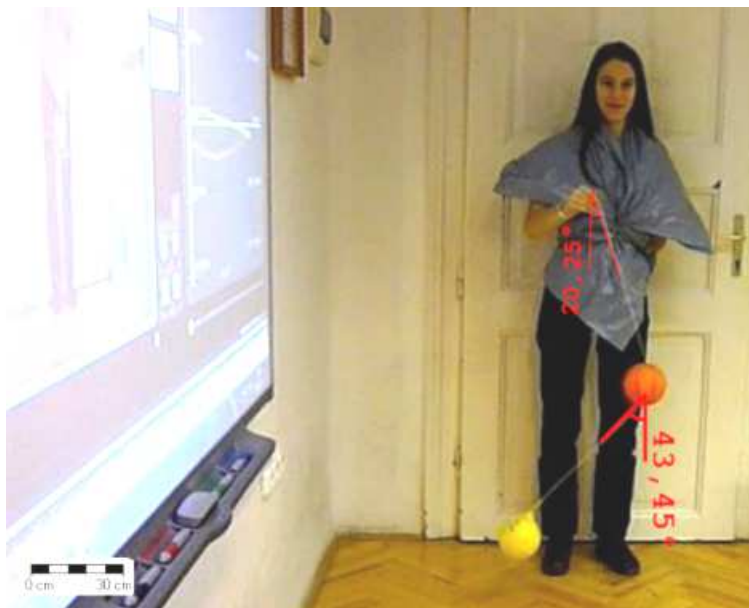
A mérések indításánál ügyelni kellett a háttér megfelelő kiválasztására. Ez legtöbbször fehér, illetve szürke volt. A kamera távolságát úgy kellett megválasztani, hogy a lengés során mindkét labda benne maradjon a képben, ugyanakkor még ne legyen távol sem, mert a mozgás során esetleg „leugrik” a jelölés. Ez annyit jelent, hogy nem követi tovább a tárgy mozgását, átugrik valamilyen hasonló színű háttértárgyra, így a mérés használhatatlanná válik. Ha csak pillanatnyi átugrás van, de a szoftver gyorsan újra felismeri a tárgyat, akkor ez a mérési hiba a szoftveres simítással, Excelben pedig a rossz sor törlésével javítható.

Az indítás előtt a koordinátarendszer kalibrációját kellett elvégezni valamelyik labda ismert mérete alapján. Legtöbb esetben rögzített állványra akasztott ingát használtunk a méréseknél (2.1.2. ábra), de volt olyan eset, mikor az inga felső pontját kézzel a megfelelő

ütemben vízszintesen mozgattuk (2.1.3. ábra). Ebben a beállításban gondoskodni kellett az ingát mozgató tanuló kellően „semleges” színű öltözékéről.



2.1.2. ábra. A mérések vidáman, ugyanakkor nagy gondossággal történtek a délutáni foglalkozásokon. Az indítást itt egy hetedikes szakkörös végzi nagy örömmel.



2.1.3. ábra. Az inga végének vízszintes kézi mozgatasakor ügyelni kellett az öltözék színére is. A modulus kialakításánál figyelni kellett a rezgetetés ütemére, ezt egy diákkörös végezte. A felső és alsó inga függőlegeshez mért szögét a „mikroszkóp” modullal határozták meg a tanulók.

### **2.1.3 Adatgyűjtés**

A méréseinkről rögzített adatokat minden esetben Excel táblázatos formában is elmentettük. A szoftver a mérés indításától leállításig méri az időt (ms), a hely (x, y) koordinátákat az indulás előtt beállított origótól a kalibrált távolság egységeiben (cm). Meghatározza a mozgás vízszintes és függőleges sebességét és gyorsulását (szintén a kalibrált



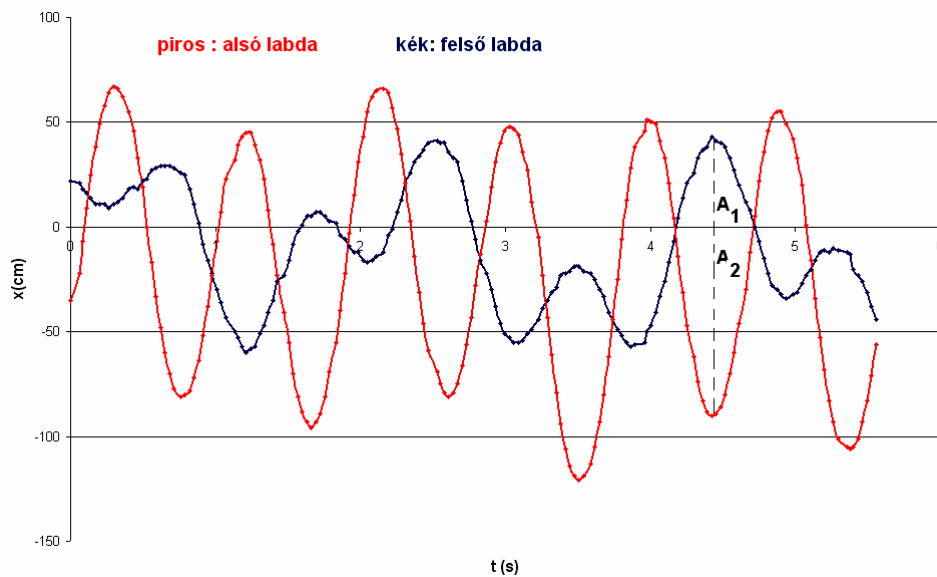
távolságnak megfelelő cm/s ill. cm/s<sup>2</sup> egységekben). A kettős inga elkészítését, a mozgás indítását, kalibrációt, az adatok Excelbe mentését szakköri foglalkozásokon 7-9. évfolyamos tanulók is lelkesen végezték. A web kamerás mérések szakköri tanításánál már alsóbb évfolyamos tanulók is vizsgálhatják az inga kitérés-, sebesség-, gyorsulás-idő függvényeit még akkor is, ha pontos matematikai leírásukat később tanulják. Ha a kísérleti munkában már találkoznak ilyen függvényekkel, megkönnyíti későbbi trigonometriai tanulmányaikat, a rezgések és ingamozgás megtanulását.

### **2.1.4 Adatok elemzése**

A rögzített adatok alapján minden esetben meghatároztuk az ingák indulási helyzetét, ábrázoltuk a kitérést, sebességet (a kezdősebesség nulla volt minden esetben) az idő függvényében. Az inga mozgására jellemző fázistérbeli hely-sebesség grafikonokat is készítettünk az  $(x - v_x)$  ill.,  $(y - v_y)$  síkon. Mivel ingánk mozgása csillapodó volt, a kitérés – idő függvények csökkenő amplitúdót mutatnak, melyből meghatározható a mozgás csillapodására jellemző tényező értéke. A grafikonok elkészítése, a mozgásegyenlet felírása, a mozgás szimulációja diákkörös munka, a fizikában, matematikában és informatikában jártasabb diákkörösök feladata.

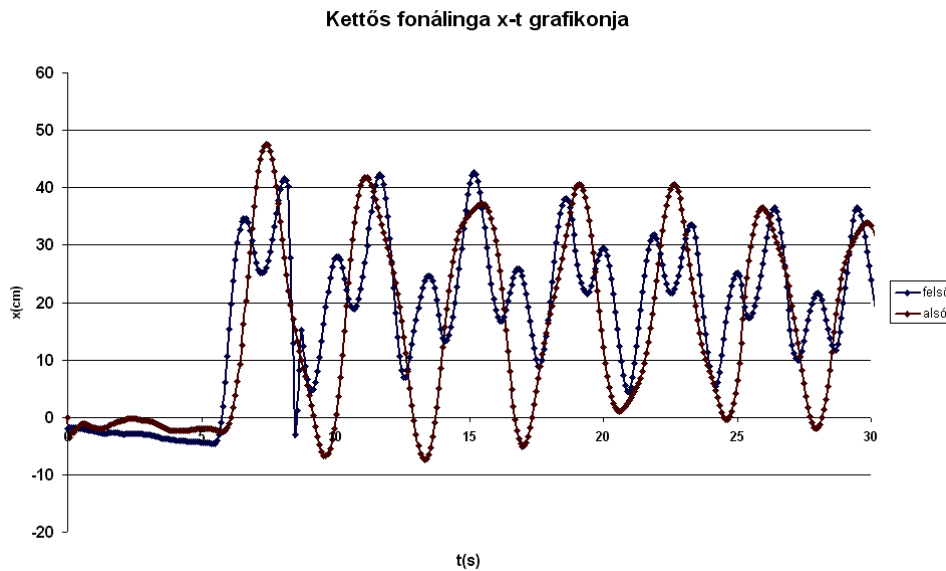
A kettősingánkat jellemző módusokat (azaz az ingatestek azonos és ellentétes fázisú mozgását) megkaphatjuk, ha az ingát a felső végénél bizonyos frekvenciával és amplitúdóval vízszintesen lökdössük. A kézi gerjesztés üteme átlagosan 1 Hz volt, amplitúdója 15cm körül ingadozott.

Az ingát lehet úgy lengetni, hogy mindkét ingatest azonos fázisban lengjen, ehhez alacsony gerjesztő frekvencia szükséges. Ha növeljük a lengetés frekvenciáját, elérhetjük a másik módust, amikor az ingák ellentétes fázisban lengenek. Kézi lengetéssel nem túl könnyű előállítani a módusokat és azokat hosszabb ideig tartani, kis gyakorlással sikerült. Az  $x-t$  grafikonon ez megfelel annak, hogy a két csúcs ugyanakkor jelentkezik. Az általunk megvalósított ellentétes módusnál az  $A_2/A_1$  amplitúdó-arány -2,2 volt (2.1.4. ábra).



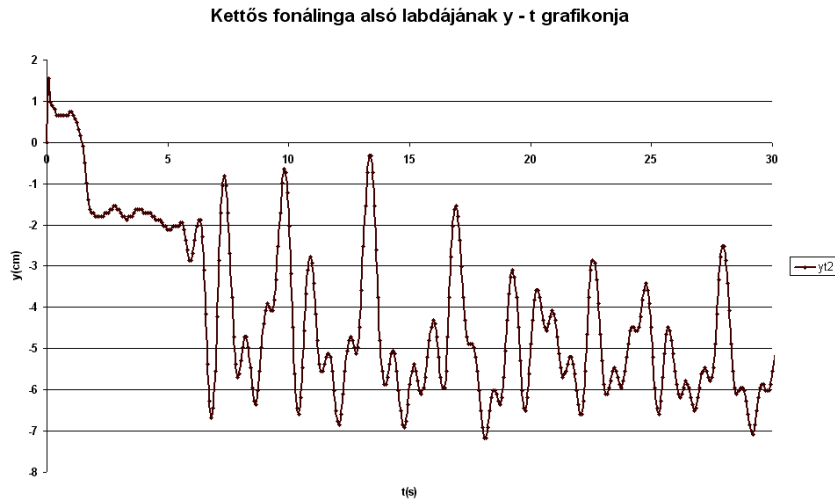
2.1.4. ábra. A kettősinga végének kb. 1 Hz-es vízszintes kézi mozgásakor kialakult ellentétes fázisú módus

Az inga elindítása történhet a felső labda kitérítésével úgy, hogy az alsó labda fonala függőleges marad. Másik változatban az alsó ingát térítjük ki, majd kezdősebesség nélkül elengedtük. A koordináta rendszer origóját általában az alsó labdához rögzítettük. Az egyik ingaindításhoz tartozó  $x$  kitérés mért időfüggése látható az 2.1.5. ábrán.



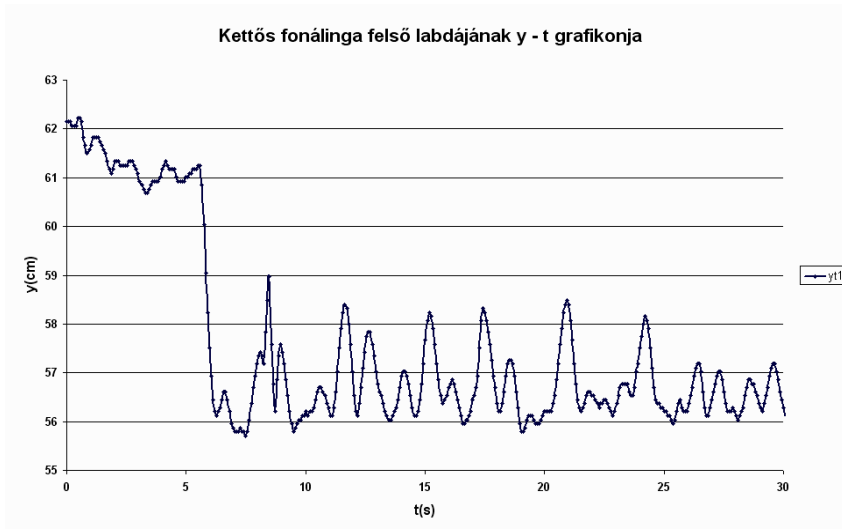
2.1.5. ábra. A felső labda  $x_0 = -1,95\text{cm}$ ;  $y_0 = 62,1\text{cm}$ , az alsó labda:  $x_0 = 0\text{cm}$ ;  $y_0 = 0\text{cm}$  kezdőkoordinátáihoz és zérus kezdősebességhez tartozó mozgás mért  $x - t$  grafikonja mindkét labda adatait ábrázolva

Megfigyelhető a mérés elején kb. 6s-ig az indítás után nem sokat változik a kitérés. A kitérés kézzel történt, az adatgyűjtés elindulása után engedte csak el az indító diák a labdákat.



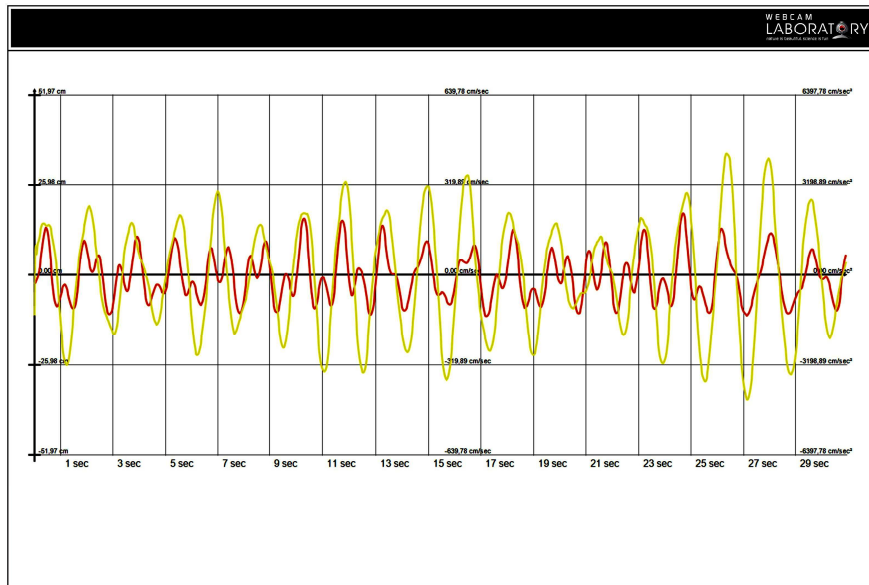
2.1.6. ábra. Az előző ábrához tartozó mozgás alsó labdájának y-t függvénye.

A 2.1.6. ábrán az előző indítás alsó labdájának y-t grafikonja látható. Itt is megfigyelhető, hogy a kézi indítás később történt, mint az adatgyűjtés indítása. Viszont kézzel kb. 2cm-t lejjebb engedte a labdát az indító diák.



2.1.7. ábra. A 2.1.5 ábrához tartozó mozgás felső labdájának y-t függvénye

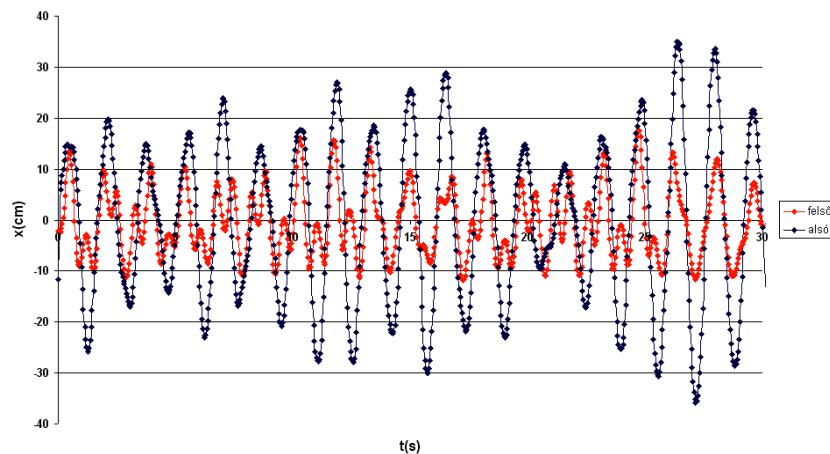
A 2.1.7. ábra az előző indítás felső labdájának y-t-grafikonját mutatja. Itt is látható, hogy a kézi indítás később történt, mint az adatgyűjtés indítása. A koordinátarendszert az alsó inga kezdeti helyzetéhez állították a mérők. A 2.1.8. ábrán a kettős fonálinga egy másik indítását látjuk. A WebCam Laboratory „diagram” ablakáról készített képen a labdák saját színeinek megfelelő x-t grafikonok láthatók mintegy 30s-ig tartó mérésen. A narancsszínű felső labda grafikonján különösen szembetűnő, hogy nem mutat periodikusságot.



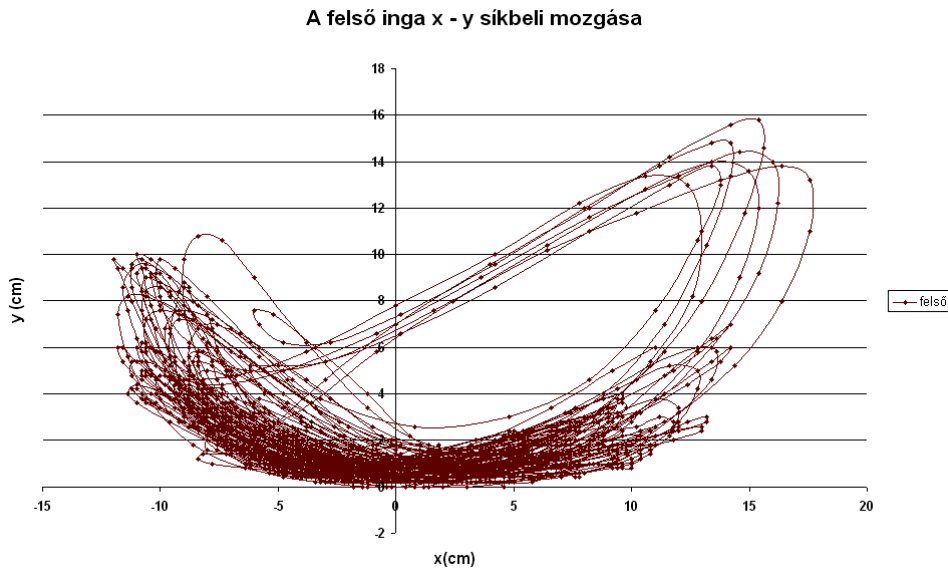
2.1.8. ábra. A felső labda  $x_0 = -2,2\text{cm}$ ;  $y_0 = 0\text{cm}$ , az alsó  $x_0 = -11,6\text{cm}$ ;  $y_0 = -26,4\text{cm}$  koordinátaival kezdősebesség nélkül indított mozgás grafikonja . A WebCam Laboratory „diagram” ablaka a labdák színeit tükrözi: a felső labda narancs, az alsó citromsárga.

Ennek az ingaindításnak a rögzített adataival Excelben készítették a tanulók grafikonokat. A 2.1.9. ábrán a két labda  $x - t$  kitérés – idő grafikonja látható. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért átszínezték az eredeti grafikonokat, itt piros a felső, kék az alsó labda mozgásának grafikonja. A kézi indítás ezúttal is kicsit megváltoztatta a kezdeti koordinátákat. Az eredeti kalibrációnál a felső labdához helyezték az origót, amiből a mérés indulásáig 1-2cm-t elmozdult (ez a későbbi elemzéseket nem befolyásolja).

A kettősinga vízszintes kitérése



2.1.9. ábra. A 2.8 ábra grafikonja más ábrázolásban. Felső inga indításkor:  $x_0 = -2,2\text{cm}$ . Alsó inga induláskor:  $x_0 = -11,6\text{cm}$ . Az Excelbe mentett adatok alapján készült grafikonok átszínezték: a felső piros, az alsó kék.



2.1.10. ábra. A felső labda xy síkon kirajzolt pályája az 2.8 ábrához tartozó mozgásban

A felső labda mozgása bizonyult a kevésbé periodikusnak. A felső inga pályasíkját mutatja a 2.1.10. ábra. Mivel a fonál nyújthatatlan és az origó y koordinátáját a felső ingára tették a diákok, értelemszerűen nincsenek negatív y értékek.

Az inga mozgásegyenletével, mozgásának dinamikai tárgyalásával az 5. fejezetben foglalkozunk bővebben.

## 2.2 Rezgő lemezen pattogó labda mozgásának vizsgálata

Egy másik érdekes mozgástípust vizsgáltak a diákkörös tanulók egy diákköri konferenciára (Debrecen, 2014.) készített előadás részeként. Ez a mozgás a rezgő, sík fémllemezen pattogó golyók, labdák esete. A diákok vizsgáltak apró szemcséjű anyagokat (cukor, mák, rizs), üveggolyókat, műanyag tömör kislabdákat és pingponglabdákat is [3]. A nagyobb méretű pattogó labdák mozgásának rögzítéséhez és elemzéséhez a WebCam Laboratory szoftvercsomag kinematika modulját használták. Az alábbiakban egy pingponglabda pattogásáról szóló mérést, elemzést mutatom be.

### 2.2.1 Mérési elrendezés, eszközök

A méréshez természetesen szükséges a programcsomag, web kamera és pingponglabda. Mindenképpen célszerű színes labdát használni a tárgy felismertetése miatt. Szükség van továbbá egy rezgetető készülékre, ami tulajdonképpen egy hangszóró membránjához rögzített vízszintes fémlemez (2.2.11. ábra). A rezgetetést egy hangfrekvenciás generátorral (2.2.12.

ábra) előállított (szinuszos) jelekkel végeztük. A generátor rezgési frekvenciáját és a rezgés amplitúdóját (bizonyos határok között) kézzel állítottuk be a készüléken.

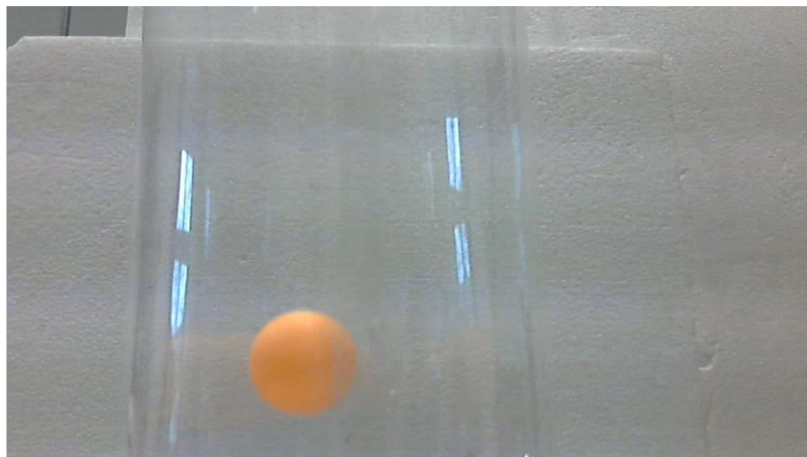


2.2.11. ábra. A rezgékeltő készülék, egy hangszóró membránjához rögzített fémlap.



2.2.12. ábra. A szabályozható frekvenciájú, amplitúdójú rezgéseket előállító hangfrekvenciás generátor

A membránhoz rögzített fémlapra átlátszó műanyagból készített hengert ragasztottunk, hogy a labda pattogás közben ne essen le a lemezről (2.2.13. ábra). A rezgő lemez amplitúdója a kísérletek alatt kb. 1cm volt, az eszköz jellemzői miatt. A labda és a lemez nyugvó helyzetből indult, majd rövid idő alatt beállítottuk rendre az 5, 10, 15, 20, 30, 40 Hz frekvenciákat mérésenként külön-külön. Nagyobb frekvenciákon már nem volt értelme megfigyelést végezni, a labda csak rezgett a lemezzel.



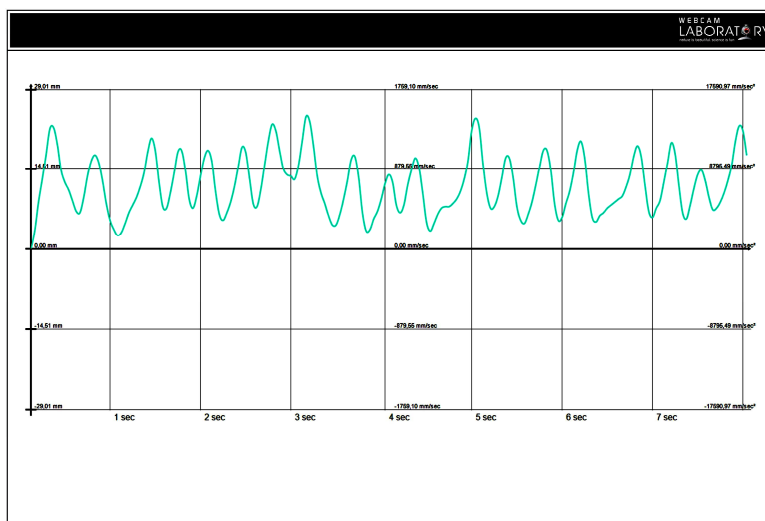
2.2.13. ábra. Pingponglabda pattog a műanyag hengerben a rezgő lemezen.

### 2.2.2 Adatgyűjtés

A WebCam Laboratory által rögzített adatokat most is Excel formátumba mentettük a további feldolgozás céljából. Természetesen a függőleges rezegtetés miatt most elsősorban a függőleges (az y irányú) komponenseket érdemes elemezni. Megvizsgáltuk, milyen a labdák y irányú kitérése az idő függvényében, és hogyan alakul az ilyen irányú sebesség-összetevő a pattogás során.

### 2.2.3. Adatok elemzése

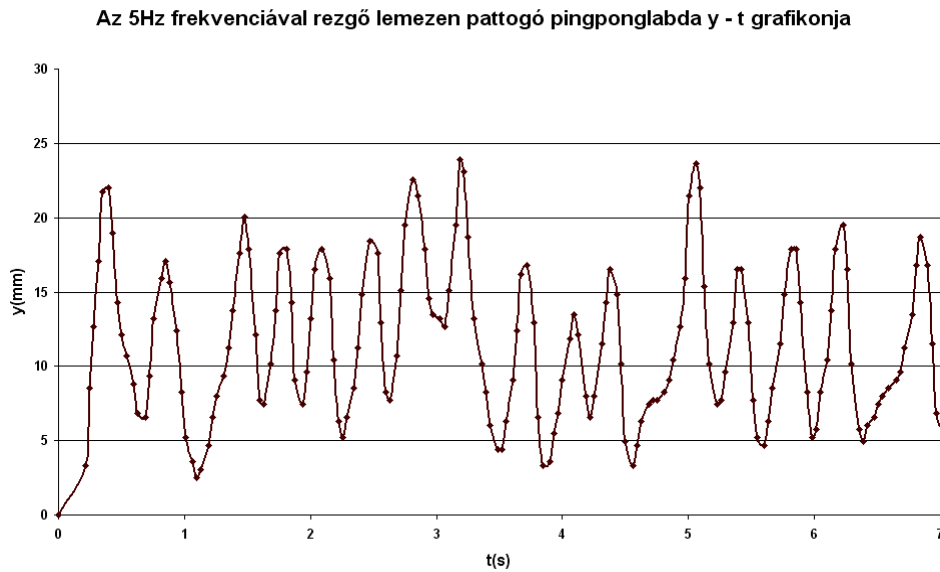
A lemez adott frekvenciájú, szinuszos rezgést végez, kis (1cm) amplitúdóval. A rajta elhelyezett műanyag labda szabálytalanul, nem periodikus ütemben pattog. A pattogás üteme, amplitúdója erősen változik, természetesen függ a lemez rezgési frekvenciájától. A mérések során az origót a labda és a nyugvó lemez érintkezési pontjához illesztettük. Kezdetben tehát a labda (x, y) koordinátái és a sebessége is 0 volt. Az 2.2.14. ábrán az 5Hz-el rezgő lemezen pattogó labda y kitérése látható 7 másodpercig. A mérés ugyan 1 percig tartott, de nagyon sok adatpont van, ezért érdemes csak rövidebb időszakaszt vizsgálni. Az 2.2.15. ábra ugyanennek a mérésnek az Exceles feldolgozását mutatja



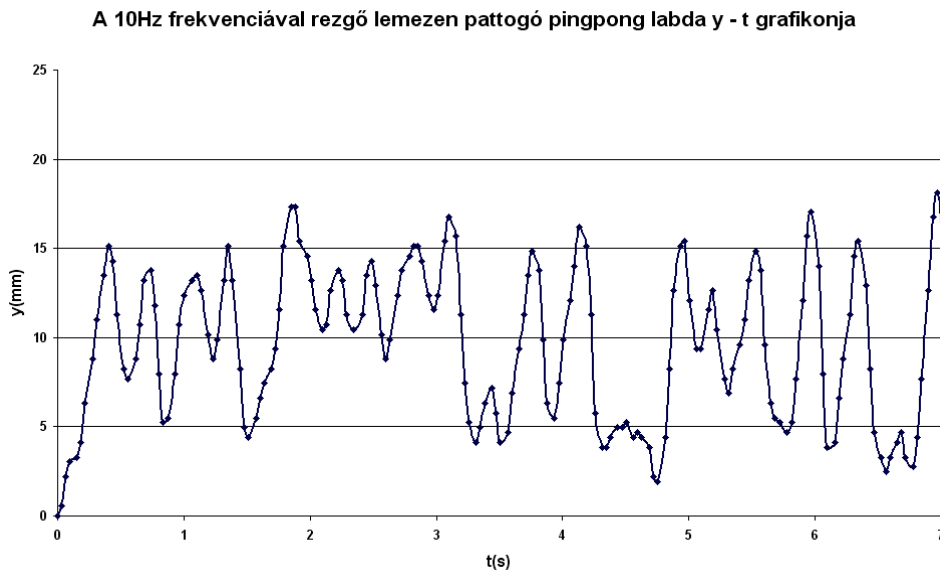
2.2.14. ábra. Pingponglabda pattogásának y-t grafikonja 5Hz frekvenciájú rezegtetésnél a WebCam Laboratory „diagram” ablakában.

Érdeemes összehasonlítani a pattogás y grafikonját a nagyobb (10Hz) frekvenciával rezgő lemezen mért adatokkal (2.2.16. ábra). A kezdeti feltételek ugyanazok, a pattogás időbeli alakulása jelentősen különbözik. Érdeemes megjegyezni, hogy nyugvó felületen történő

pattogásnál az  $y$  grafikon csökkenő amplitúdójú lenne, a mozgás véges idő alatt gyakorlatilag leállna.



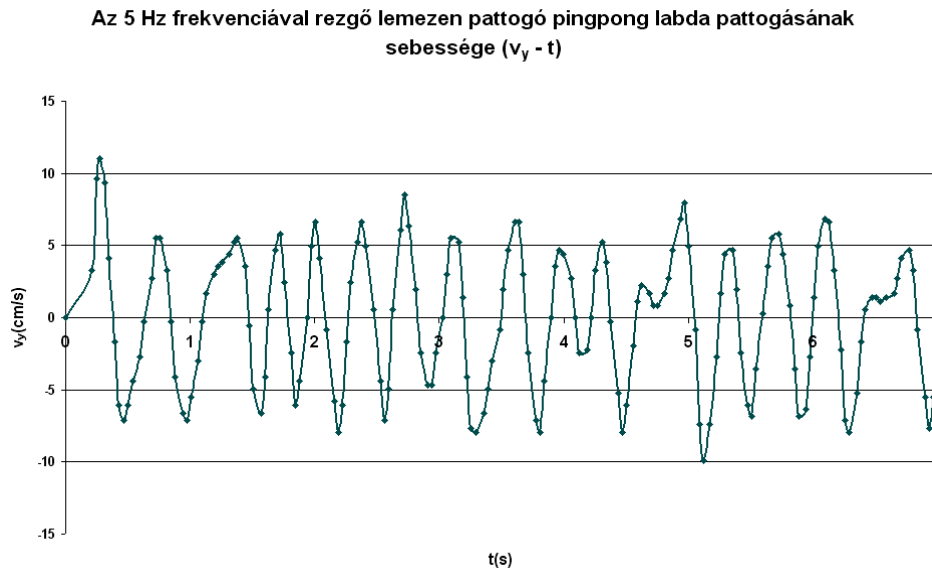
2.2.15. ábra. Pingponglabda pattogásának  $y$ - $t$  grafikonja 5Hz frekvenciájú rezgetetésnél az Exceles feldolgozás alapján. Kezdetben  $y = 0$  mm. Az időtengelyen 7s beállítás szükséges, mert az adatpontok túl sűrűk a 60s-ig tartó mérésnél



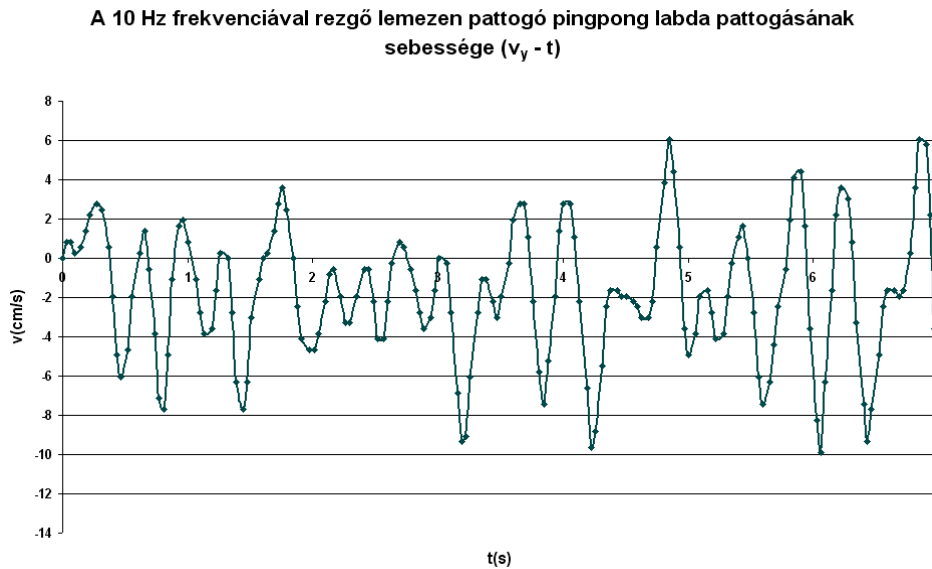
2.2.16. ábra. Pingponglabda pattogásának  $y$ - $t$  grafikonja 10Hz frekvenciájú rezgetéssel az Exceles feldolgozás alapján. Kezdetben  $y = 0$  mm

Megvizsgáltuk a labda pattogásának  $y$  irányú pattogási sebességét is az 5Hz és a 10Hz frekvenciával rezgő lemezen (2.2.17 és 2.2.18. ábra). Ezeket összevetve megállapíthatjuk, hogy a labda sebessége sem változik periodikusan az idővel.





2.2.17. ábra. A 2.2.15 ábrán látható mozgás  $v_y - t$  grafikonja az Exceles feldolgozás alapján.



2.2.18. ábra. Az 2.2.16 ábrán látható mozgás  $v_y - t$  grafikonja az Exceles feldolgozás alapján.

A kettőssingával és a rezgő lemezen pattogó labdával végzett kísérleteink a kaotikus mozgások egy újabb általános viselkedésére mutatnak rá: ezek a mozgások nem ismétlik önmagukat, szabálytalanok, aperiodikusak. A kettőssinga esetén ez csak véges ideig figyelhető meg, hiszen az energiaveszteség (csapágyak, légellenállás) miatt a mozgás előbb-utóbb leáll. A lemezen pattogó golyó esetében a szabálytalan mozgás tetszőleges hosszú ideig fennáll, hiszen a lemez rezgése éppen annyi energiát táplál be átlagosan, amennyi az ütközéskor (és a repülés közben) elvész. A diákok nagyon szeretnek web kamerás kísérleteket végezni, a

szoftver kezelését, kalibrálást könnyedén megtanulják. A kettős inga mérések végzésénél a 13-15 évesek is nagyon aktívak voltak. Tökéletesen megértik, hogy miért a felső inga lengése szabálytalanabb, és azt is, hogy a mérések végkimenetelét a kezdeti kitérés szöge erősen befolyásolja. Az Exceles adatfeldolgozást, grafikonkészítést is könnyedén elvégzik a 7-9. évfolyamos tanulók. Az eredmények értelmezését, fázisíkbán ábrázolást, a mozgásegyenlet levezetését, annak numerikus megoldását azonban csak az idősebb, tapasztaltabb diákkörösök értik meg és próbálgatják. A fiatalabb tanulók nagy lelkesedéssel próbálgatták azt is, hogy a rezgő lemezes kísérletben több labda pattogott egyszerre. A szoftver egyszerre három tárgy mozgását tudja rögzíteni, ha azok színben jelentősen eltérnek. Kipróbálták a pingpong labdánál rugalmasabb tömör kislabdákkal is. Megértették, hogy az ütközések eltérő fázisban történnek, ezért nagyon különbözhet a pattogás magassága. Azt is megfigyelték, hogy 2-3 pattogó labda esetén az egymással ütközés is befolyásolja a megfigyelt labda mozgását.

A 2.1 – 2.2 fejezetek jelentik a 2. számú tézis háttérét.

### **Hivatkozások:**

[1] A WebCam Laboratory hivatalos weboldala: <http://www.webcamlaboratory.com/>

[2] A programcsomag felhasználását bemutató videó:

<http://www.youtube.com/watch?v=1wfck6krfxs>

[3] Vankó P.: Izgalmas mérések a mérnök - fizikus hallgatói laboratóriumban, Fizikai Szemle 2006/09, 307 – 313.o.

### **3. Nemlineáris mozgások számítógépes vizsgálata Wiifiz rendszerrel végzett mérésekkel**

#### **Mérések Wiifiz program és Wiimote szenzor segítségével**

A Wii a Nintendo által gyártott videojáték-konzol. Különleges tulajdonsága, hogy a játék vezérlője egy vezeték nélküli távirányító, melyet WiiMote-nak neveznek. Használatkor ezt az eszközt kézben kell tartani és a játék eseményének megfelelően 3D-s mozgásokat lehet vele végezni. A Wiifiz programot egy magyar fizikatanár, dr. Piláth Károly készítette, aki kifejezetten a fizikatanításban való felhasználásra fejlesztette a szoftvert. A programot ingyenesen letölthetjük dr. Piláth Károly honlapjáról [1]. Fontos megjegyezni, hogy Windows XP operációs rendszer alatti futásra készült, így Windows Vista és Windows 7 alatti futtatása esetén problémák adódhatnak. A program a WiiMote számítógéphez való csatlakoztatása után indítható [2], és annak érzékelő egységei által küldött adatokat dolgozza fel (D Függelék).

#### **3.1 Méréseink három vonzócentrumos mágneses ingával**

A WiiMote eszközzel és hozzá kapcsolódó wiifiz szoftverrel sok érdekes fizikai mérést végeztek már [3], én a középiskolás tanulókkal kaotikus mozgás vizsgálatára használtam fel. A vonzócentrumok fölött mozgó mágnesinga szemmel láthatóan nem periodikus. Az indítási helyzetből nem lehet következtetni a végállapotbeli helyzetre, mondhatni véletlenszerű, hogy melyik vonzócentrum fölött fog megállni. Sokféle mágnesinga vizsgálatot végeztünk diákkörös és szakkörös foglalkozásokon, az alábbiakban a háromcentrumos pálcás mágneses inga vizsgálatát mutatjuk be.

##### **3.1.1 Szükséges eszközök**

A méréshez szükség van három kisméretű mágnesre (pogácsa, ferrit, 3.1.1. ábra) és egy negyedik, az ingára szerelhető mágnesre. Ez utóbbi nálunk egy kb. 3cm átmérőjű korong alakú ferrit mágnes volt (3.1.2. ábra). Szükség van egy vékony pálcára (a mi mérésünknel vékony alumínium pálcá, kb. 40cm), állványra, tartó karikára (mi szemcsavarba illesztett függönykarikát használtunk, (3.1.3. ábra).



3.1.1. ábra. Kis pogácsa mágnes,  
1,4cm-es átmérővel



3.1.2. ábra. Az ingatestként  
használt mágnes korong 2,8cm  
átmérővel.



3.1.3. ábra. Az inga felfüggesztése. A szemcsavarba illesztett  
fémkarikához akasztjuk az inga pálcáját, így csak kis  
súrlódás lép fel a mozgás során.

A méréshez kellett IR-LED, elemmel (mi 3V-os gombelemet ragasztottunk a mágnes korongra aljára.), kis vezeték (szigetelt, a gombelem és LED közötti kapcsolathoz szükséges). Szükséges továbbá számítógép bluetooth-kapcsolattal, telepített Wiifiz-programmal és természetesen a Nintendo távirányító eszközre.

### 3.2.2 Mérési elrendezés

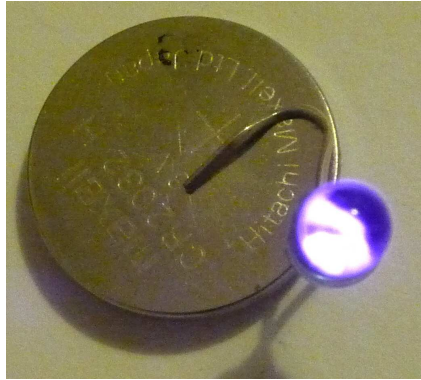
Kisméretű ( $d = 1,4$  cm) pogácsa mágneseket ragasztottunk egy kör alakú műanyag tartó belső peremére háromszög alakzatban (3.1.4. ábra). A háromszög majdnem szabályosra sikerült, két szára 6cm, alapja 5,2cm hosszú a mágnesek középpontjától mérve, 0,2cm pontossággal.



3.1.4. ábra. A háromszög alakzatban rögzített mágnes pogácsák  
távolsága kb. 6cm.

A kis mágnesek jelentik a vonzó centrumokat a mágnes inga számára. A műanyag tartó belsejébe ragasztáskor ügyelni kellett, hogy a mágnesek azonos pólusukkal, az ingával vonzó

kölcsönhatásban, lehetőleg azonos távolságban legyenek rögzítve. A tartókorongot a pálcához rögzített mágnes test alá helyeztük a közepét a pálca alá igazítva. A nagy mágnes korong aljához 3V-os gombelemet ragasztottunk, melyről kis szigetelt vezetékkel csatlakoztunk a korong felső részén elhelyezett IR LED-hez. A LED működését mobil telefon kamerájával ellenőriztük (3.1.5. ábra).



3.1.5 ábra. Az infra LED bekapcsolt állapota ellenőrizhető egy mobiltelefon kamerájával.

A teljes mérési elrendezéshez a Wiimote-ot rögzíteni kellett az állványhoz olyan helyzetben, hogy az infra érzékelője tudja követni a mágneshez rögzített LED fényét (3.1.6. ábra). Ehhez kalibrálnunk kellett az eszközt a D.1.7. bekezdésben leírtakat követve. Arra is ügyeltünk, hogy a távirányító ne zavarja az inga lengését. A teljes összeállításban a mágnes korong kb. 1,5cm-re helyezkedett el a kis mágnesek síkja fölött, középen mérve. Az alumínium pálca hossza 40cm volt.

3.1.6. ábra. A (háromcentrumú) mágnesinga teljes mérési elrendezés. Az ábra felső részén a kissé belógó távirányító követi a pálcához rögzített mágnes koronghoz rögzített IR LED fényét. A mágneseket tartalmazó műanyag tartó belsejében a 3.1.4. ábrán látható elrendezésben vannak a mágnesek. A tálca tetején betűk jelzik a mágnesek helyét.



### **3.2.3 Adatgyűjtés**

A mérések során az ingát kitérítettük és igyekeztünk közel azonos helyzetből indítani mindhárom csúcs (mágnes) közeléből. A mérési folyamatban az automatikus 120s mérési időt alkalmaztuk, ez alatt bőven megállapodott a kitérített ingánk valamelyik vonzócentrum fölött. A kapott  $t$ ,  $x$  és  $y$  értékeket Excel fájlba mentettük a további feldolgozásra.

### 3.2.4 Adatok elemzése

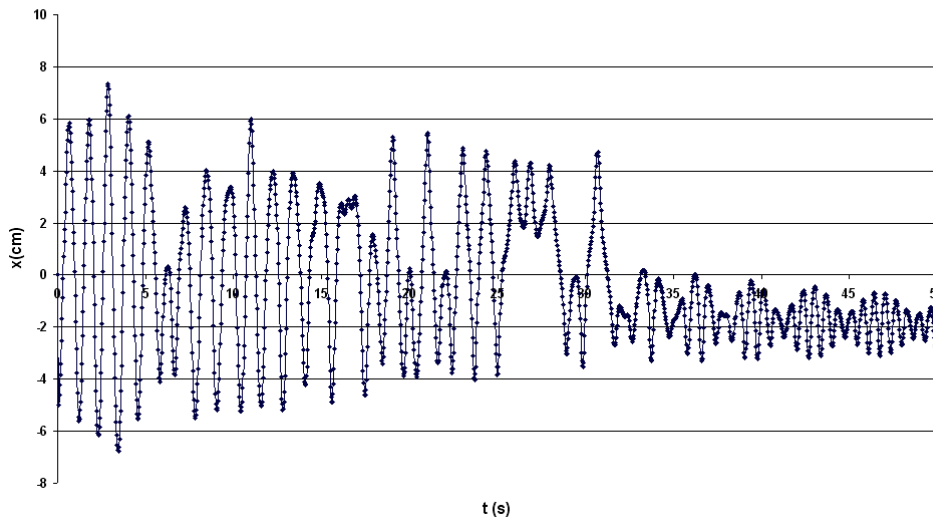
A mérések során azt tapasztaltuk, hogy a közel azonos helyzetből indított inga egyáltalán nem biztos, hogy ugyanannál a vonzócentrumnál állapodik meg. A befutott pálya síkbeli vetülete is jelentősen különbözik. Példaként nézzük az A csúcs közeléből indított két inga lengését. Az egyik esetben az inga ugyancsak az „A” csúcsban elhelyezett mágnes fölött állapodott meg (3.1.7-3.1.9. ábrák), de másodszeri, kissé eltérő indításakor már a „B” csúcs fölött állt le (3.1.10-3.1.12. ábrák). A csúcsok koordinátái 0,5cm pontossággal (a leállásból jól leolvashatóak):

„A”:  $x = -2\text{cm}; y = 3\text{cm}$

„B”:  $x = -2\text{cm}; y = -2\text{cm}$

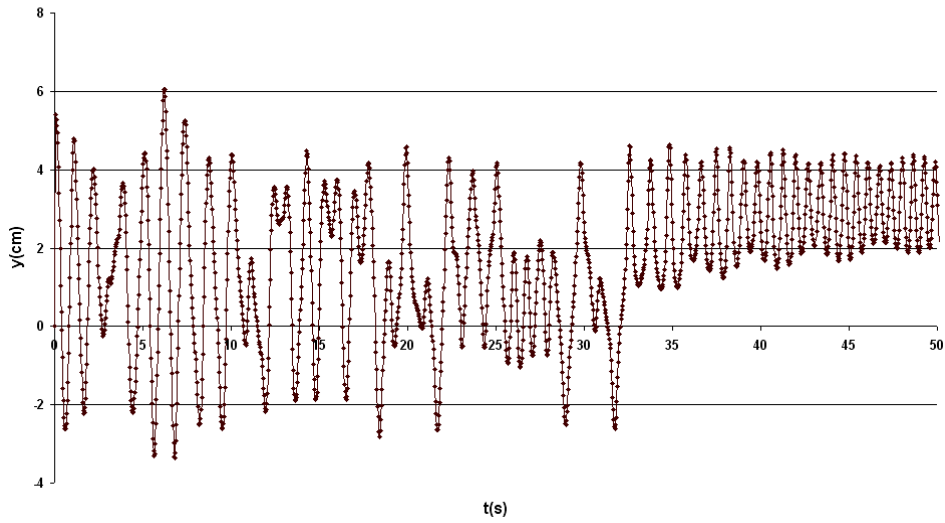
„C”:  $x = 3,5\text{cm}; y = 0,5\text{cm}$

Az "A" csúcs közeléből indított mágnesinga x-t grafikonja



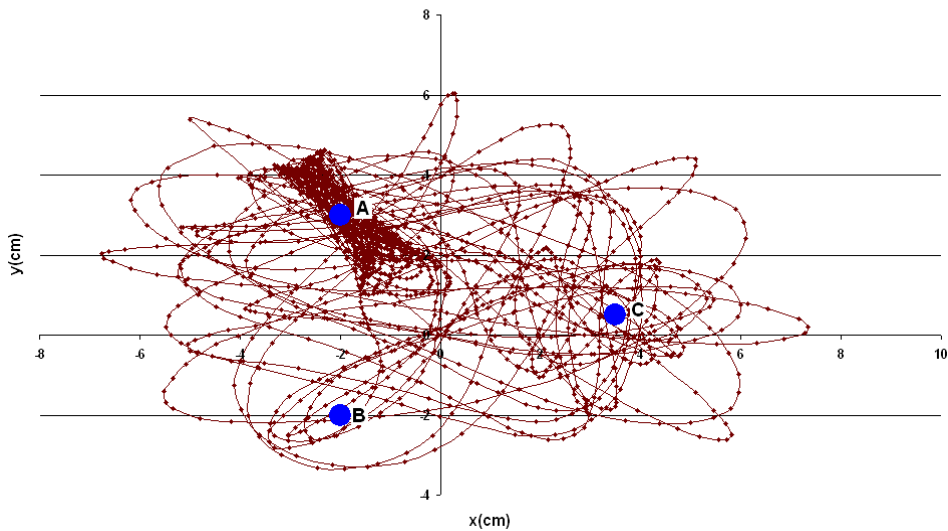
3.1.7. ábra. Az  $x = -5\text{cm}, y = 5,4\text{ cm}$  koordinátájú pontból indított inga  $x(t)$  grafikonja. Az inga az „A” csúcsnál állt le rezegve, aminek a koordinátája  $x = -2\text{cm}$ .

Az "A" csúcs közeléből indított mágnesinga y - t grafikonja



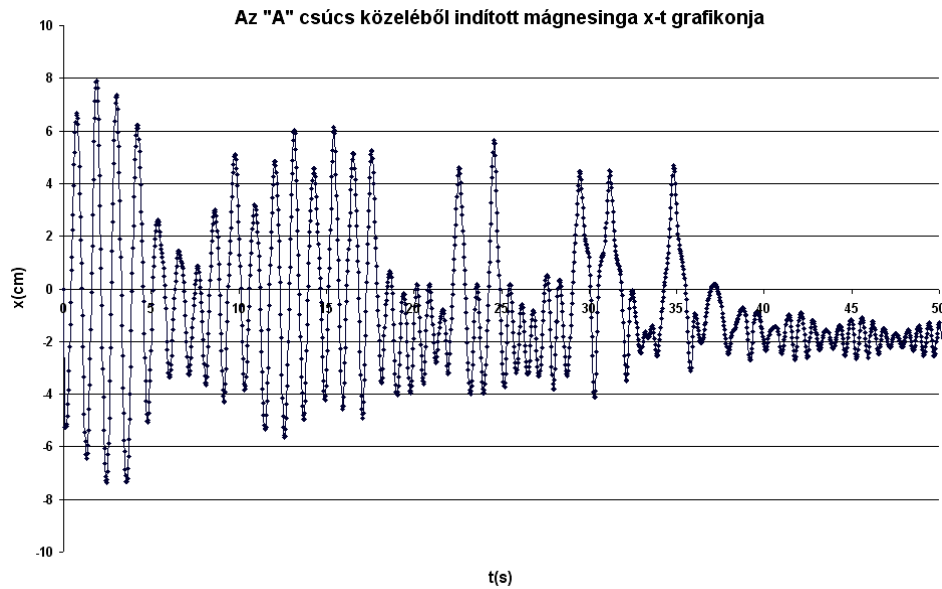
3.1.8. ábra. Az  $x = -5$  cm,  $y = 5,4$  cm koordinátájú pontból indított inga  $y(t)$  grafikonja. Az inga az „A” csúcsnál állt le rezegve, aminek a koordinátája  $y = 3$  cm.

XY síkbeli mozgás grafikonja

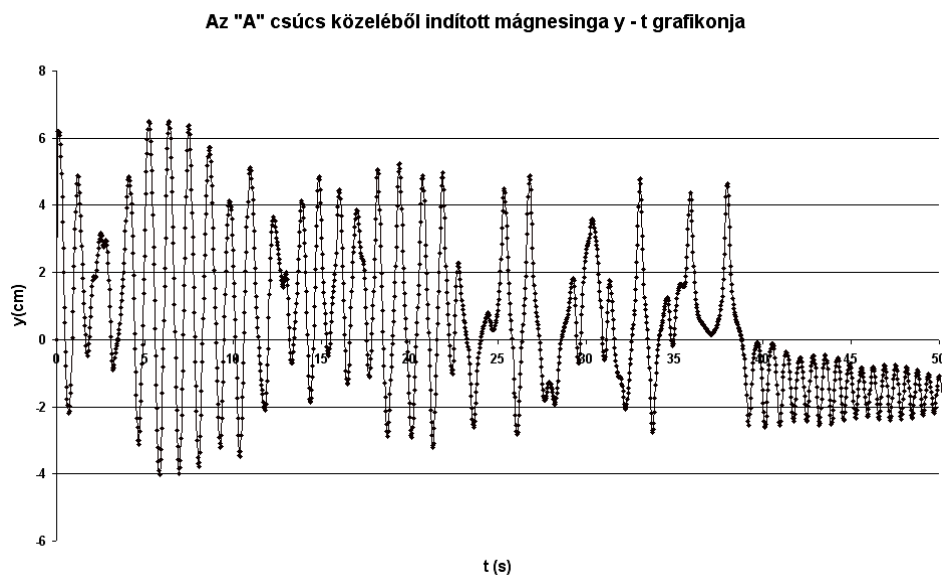


3.1.9. ábra. Az  $x = -5$  cm;  $y = 5,4$  cm koordinátájú pontból indított inga  $x, y$  grafikonja. A mágneseket kék körök jelölik. Az inga az „A” csúcsnál állt le rezegve.

A  $(-5; 5,4)$  koordinátájú indítás után tehát az inga az „A” csúcsnál állt le. Ha újra indítottuk, kicsit eltérő pontból  $(-5; 6)$ , akkor az inga a „B” csúcsnál állapodott meg lengve.

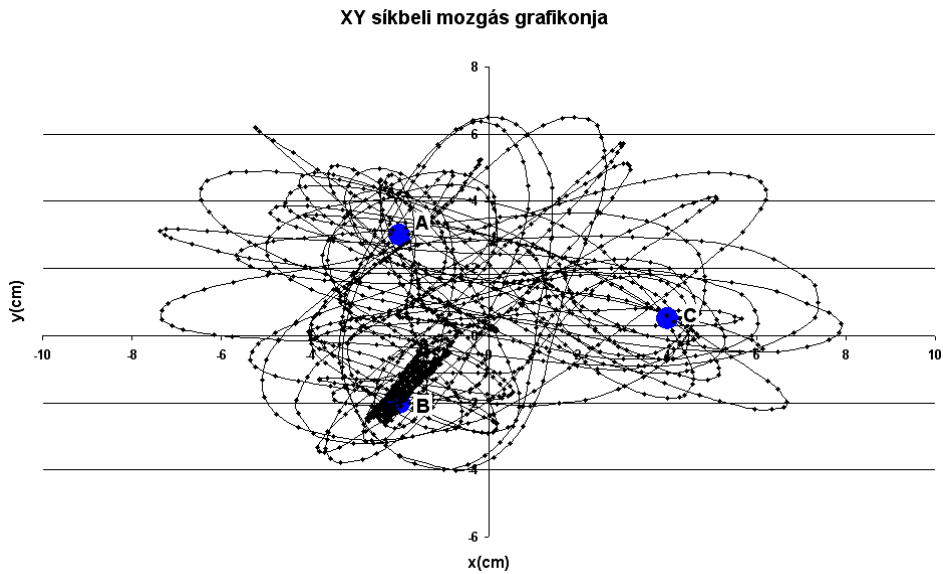


3.1.10. ábra. Az  $x = -5\text{cm}$ ,  $y = 6\text{ cm}$  koordinátájú pontból indított inga  $x(t)$  grafikonja. Az inga az „B” csúcsnál állt le rezegve, aminek a koordinátája  $x = -2\text{cm}$ .



3.1.11. ábra. Az  $x = -5\text{cm}$ ,  $y = 6\text{ cm}$  koordinátájú pontból indított inga  $y(t)$  grafikonja. Az inga az „B” csúcsnál állt le rezegve, aminek a koordinátája  $y = -2\text{cm}$ .



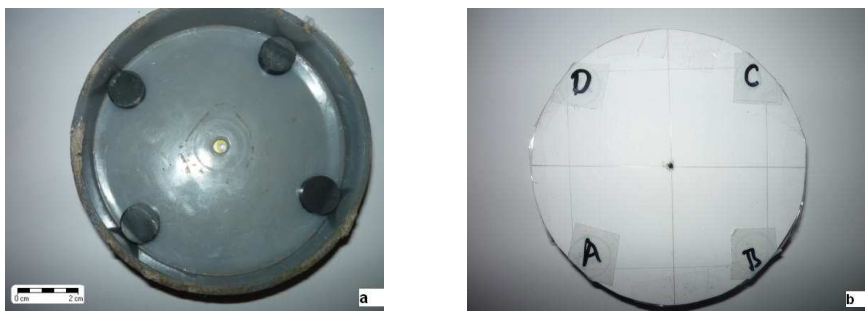


3.1.12. ábra. Az  $x = -5\text{cm}$ ;  $y = -6\text{cm}$  koordinátájú pontból nulla kezdősebességgel indított inga xy grafikonja. A mágnesek kék körökkel jelölve. Az inga a „B” csúcsnál állt le rezegve.

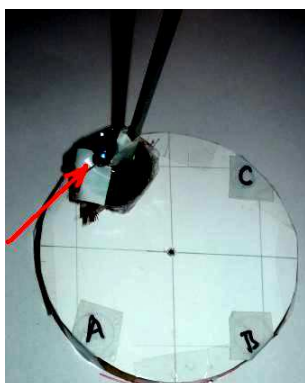
## 3.2 Méréseink négy vonzócentrumos mágneses ingával

### 3.2.1 Mérési elrendezés, eszközök

A méréshez szükséges eszközök ugyanazok, mint az előző fejezetben leírt három vonzócentrumos ingánál voltak, természetesen 1 mágnes pogácsával több kell. A mérés elrendezése annyit változik, hogy a négy kis mágneset négyszög alakzatban szigetelőszalaggal rögzítettük a tartóban (3.2.1.a. ábra). Ezt eredetileg négyzetnek szántuk, de téglalpra sikerült. A hosszabb oldal (AB és DC) 6cm körüli, a rövidebb (AD és BC) 5cm néhány mm-es hibával (3.2.1. b. ábra).



3.2.1. ábra. A négyszög alakzatban rögzített mágnes pogácsák a tartó belsejében (a) és az inga felől nézve (b). a mágneseket az ABCD betűk jelzik



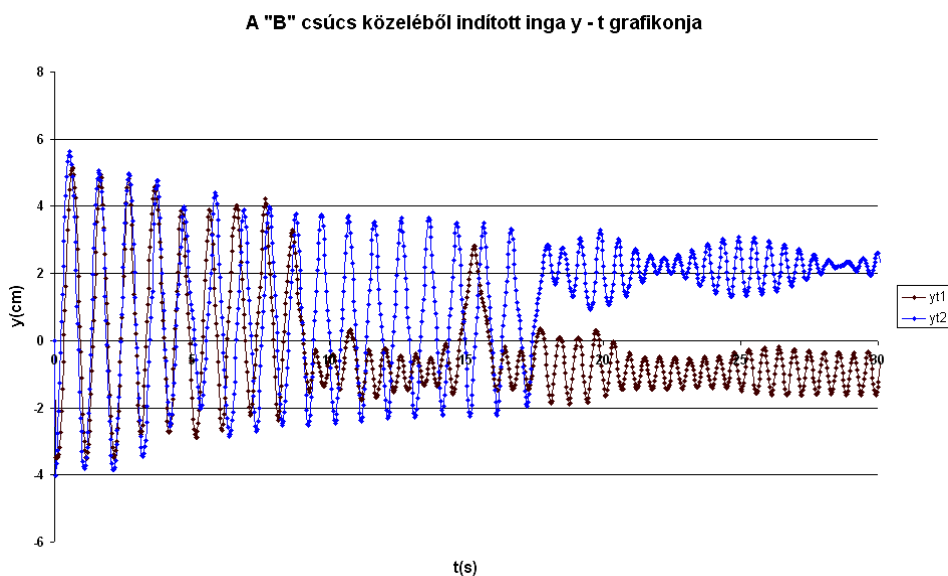
3.2.2. ábra. A négyszög alakzatban rögzített mágnes pogácsák síkja fölött elhelyezett alumínium pálcás mágnesinga. A képen nyíl mutatja a mágnes koronghoz rögzített, még bekapcsolatlan IR LED-et.

### 3.2.2 Adatgyűjtés

A mérések során az ingát kitérítettük és igyekeztünk közel azonos helyzetből indítani a négy mágnes közeléből és a mágnesek közti felező pontokból. A mérési folyamatban az automatikus 120s mérési időt alkalmaztuk, ezt a mérés során rövidítettük, ha a kitérített ingánk megállapodott valamelyik vonzócentrum fölött. A kapott  $t$ ,  $x$  és  $y$  értékeket Excel fájlba mentettük a további feldolgozásra.

### 3.2.3 Adatok elemzése

A „B” csúcs közeléből (3;-3.5) indított mágneses inga elsőként szintén a „B” mágnesnél állt le. A leállítás alapján leolvastuk a „B” mágnes koordinátáit (2;-1). A második indításnál kissé eltérő helyzetből indult (3,2;-4) és az „A” mágnes fölött állt meg. A két indítás  $y(t)$  grafikonján látszik, hogy a közel azonos helyzetből indított inga végső helyzete jelentősen eltér (3.2.3. ábra).

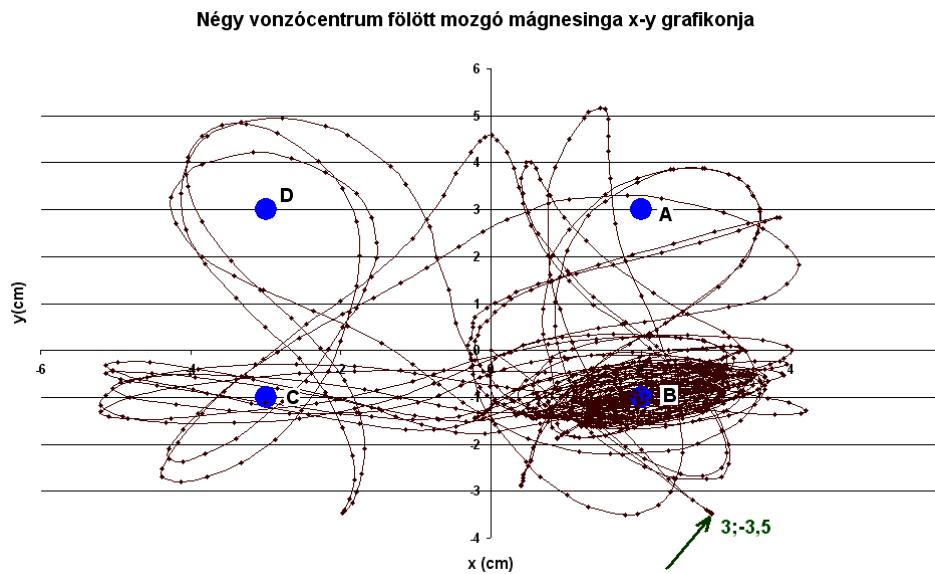


3.2.3. ábra. A „B” mágnes közeléből indított mágneses inga egyszer a „B” majd az „A” mágnes fölött áll meg.

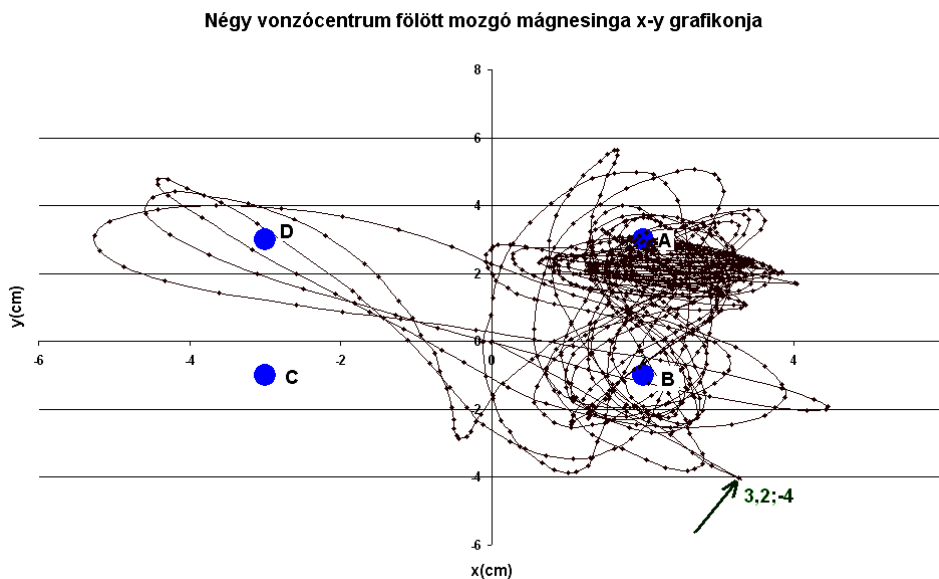
A további indítások során mindegyik mágnes közeléből, és a köztük lévő szakasz felezőjétől indítottuk az ingát. A leállításokat előre nem lehetett megjósolni, véletlenszerűnek tűntek. Megállapítottuk a mágnesek koordinátáit a felfüggesztett távirányító koordinátarendszerében: A (2; 3), B (2;-1), C (-3;-1), D (-3; 3). Az értékek cm-ben értendők.

A 3.2.3. ábrán barna színnel rajzolt  $y-t$  grafikon a „B” mágnes koordinátáihoz tart, ott állapodott meg. Ennek az ingaindításnak az  $xy$  síkbeli pályáját mutatja az 3.2.4. grafikon. Az 3.2.3. ábrán kék színű grafikon a hasonló kezdőhelyzetből indított mágneses inga  $xy$  pályája a

3.2.5. ábrán látható. Az ábrákon kék körök jelzik a mágnes pogácsák helyzetét, a zöld nyíl az indítási helyzetet mutatja.



3.2.4. ábra. A „B” mágnes közeléből indított mágnes a „B” mágnes fölött állt meg. A zöld nyíl és a koordináták az indulási helyzetet mutatják.



3.2.5. ábra. A „B” mágnes közeléből indított mágnes az „A” mágnes fölött állt meg. A zöld nyíl és a koordináták az indulási helyzetet mutatják.

Ezekkel a vizsgálatokkal igazoltuk a kaotikus rendszerek alapvető tulajdonságát, a kezdeti feltételre való érzékenységet [4]. A mágneses ingák példája jól mutatja, hogy kis kiindulási különbségek alapvetően más végkifejletre vezetnek, ezek a rendszerek előre jelezhetetlenek.

A mágnesinga mérésekben a fiatalabb korosztályhoz tartozó szakkörösök is részt vettek. Az inga elkészítése során többféle változatot kipróbáltak. Volt fonalas, pálcás, sőt még rugóra, gumira függesztett mágnes is kipróbáltak. Voltak taszító és vonzó kölcsönhatásra beállított ingák is. Különböző magasságokban helyezték el az ingát a mágnesek fölött és változatos mágnes elrendezésekkel próbálkoztak. A legizgalmasabbnak mégis a három és a négycentrumú vonzó kölcsönhatású mágnes ingák bizonyultak. A mérések elvégzésekor izgalmasnak bizonyult előre megtippelni, melyik mágnes fölött fog megállni a mágnes nehezebb. Erre egyesek fogadásokat is kötöttek. Az adatok rögzítése után a feldolgozásban már az idősebb diákkörösöknek jutott nagyobb szerep. Az ő feladatuk volt a mágnesek közötti erő távolságfüggésének kimérése, ábrázolása, függvény illesztése is. A mozgásegyenletek felírása, értelmezése után a szimulációt a nagyobb informatikai rutinnal rendelkezők készítették. Erről részletesebben a „Számítógépes szimuláció és kísérlet összevetése” című 5. fejezetben lesz szó.

### **3.3 A mágnesek közötti kölcsönhatás mérése**

A kis mágnes pogácsa és a mágnes korong közötti erőhatás jellemzésére megmértük az erőhatás nagyságát a köztük lévő távolság függvényében.

#### **3.3.1 Szükséges eszközök**

Digitális mérleg, 1g pontossággal mér tömeget, mágnes pogácsa, mágnes korong, kartondoboz távtartó), átlátszó műanyag cső (a mágnes korong vezetésére), gyújtópálca, amihez a mágnes korongot hozzá erősítve toltuk közelebb a mágneset.

#### **3.3.2 Mérési elrendezés**

Kartondobozt erősítettünk a digitális mérlegre, majd a doboz tetejére kis pogácsa mágneset rögzítettünk cellux ragasztóval. Az elrendezés mögé egyenes lécezt erősítettünk, ehhez ragasztottunk egy átlátszó műanyag hengert, melyet lapból készítettünk, megfelelő átmérőjű (3cm) csővé hajlítva, ragasztva. A digitális mérleget tárazva, a gyújtópálcához erősített mágnes korongot lefelé toltunk és leolvastuk a mérleg által mutatott tömeget (taszító kölcsönhatás volt). A mágnesek közti távolságot fényképezéssel állapítottuk meg, megfelelő méret kalibrálás után (3.3.1. ábra).

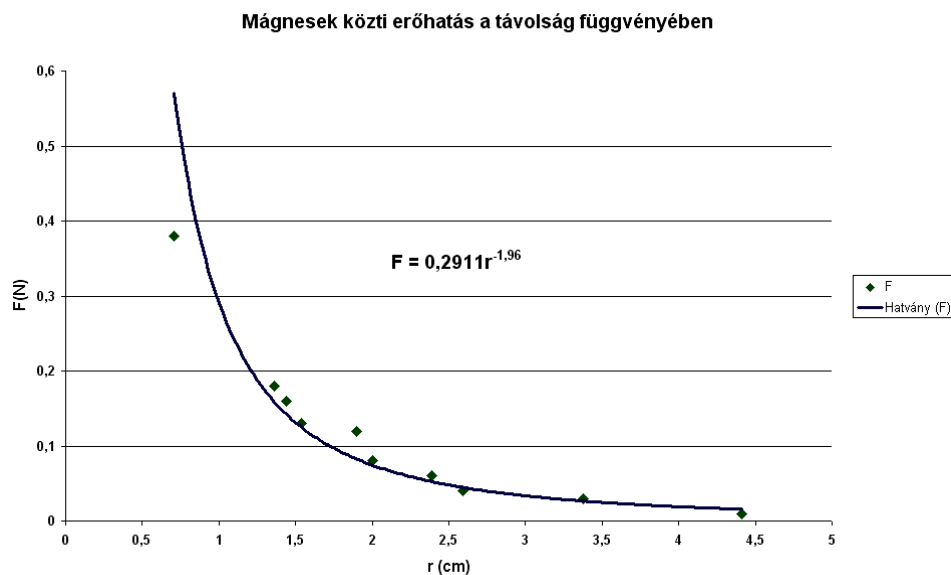


3.3.1. ábra. A mágnesek közti távolságot a fényképen kalibrált ismert távolsággal határoztuk meg.

### 3.3.3 Adatgyűjtés

A leolvasott tömegértékeket (gramm egység) átszámítottuk erő egységbe, alkalmazva a  $10\text{m/s}^2$  kerekítést a gravitációs gyorsulásra. A fényképekről leolvasott távolsággal együtt Excel táblázatba írtuk, majd hatványfüggvényt illesztettünk a mérési pontokra. A függvény  $F = 0,29 \cdot r^{-1,96}$ , ahol  $r$  a távolság cm-ben,  $F$  a mágnesek közti erő N-ban (3.3.2. ábra).

### 3.3.4 Adatok elemzése



3.3.2. ábra. A mágnesek közti erőhatás távolságfüggése digitális mérleggel mérve. A mért pontokra jó közelítéssel illeszthető egy  $F \sim 1 / r^2$ -es hatványfüggvény.

Ezek szerint annak ellenére, hogy a mágnesek dipólusok, a vizsgált orientációval, és a mért távolságokon a köztük levő kölcsönhatás jó közelítéssel olyannak adódik, mint a ponttöltések közötti Coulomb-kölcsönhatása.

Ezekkel a vizsgálatokkal bővítettük a kaotikus rendszerek alapvető tulajdonságáról, a kezdeti feltételre való érzékenységről kialakított képünket. Az 1. fejezetben már láttuk, hogy a közeli mozgások rövid idő alatt exponenciális ütemben távolodnak. Ez vezetett a Ljapunov-exponens és az előrejelzési idő fogalmának felismeréséhez. A mágneses ingák példája jól mutatja, hogy az előrejelezhetőség hiánya hosszú időskálán is jelentős különbségekkel jár. A kis kiindulási különbségek alapvetően más végkifejletre vezetnek: ha több állandósult állapot (attraktor) is létezik a rendszerben, akkor az egészen közeli kezdőfeltételekből induló mozgások is vezethetnek eltérő állandósult állapotokra.

A 3.1 – 3.4 fejezetek jelentik a 3. számú tézis háttérét.

### **Hivatkozások:**

[1] Piláth Károly honlapja: <http://www.freeweb.hu/pilath/lapok/efiz.php?LF=k21.htm>

[2] A BlueSoleil program honlapja: <http://www.bluesoleil.com/> (2010.04.13.)

[3] Medvegy T: A Nintendo Wii felhasználása a fizikaoktatásban TDK dolgozat, Szeged, 2010, 21. o.

[4] Tél T.- Gruiz M.: Kaotikus Dinamika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002. 24.o.



## II. RÉSZ: SZÁMÍTÓGEPES SZIMULÁLÁS ÉS ÖSSZEVETÉS

*„Azoknak, akik nem ismerik a matematikát, nehézséget okoz keresztüljutni a szépség valódi  
érzéséhez, a legmélyebb szépséghez, a természethez..  
Ha a természetről akarsz tanulni, méltányolni akarod a természetet, ahhoz szükség van arra,  
hogy értsd a nyelvét, amin szól hozzád.”*

R. Feynman

*„Ha világunk fizikai törvényei autonómak, nem vagyunk szabadok;  
ha viszont szabadok vagyunk, a fizikai törvények nem autonómak.”*

Karl Popper



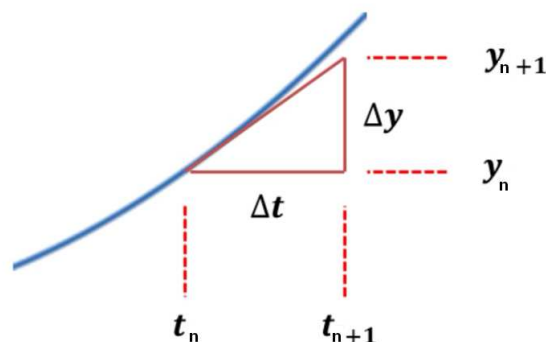


## 4. Nemlineáris és kaotikus jelenségek numerikus szimulálása

### 4.1 Bevezetés

A középiskolában tanult természettudományos tárgyak, köztük elsősorban a fizika, gyakran használ differenciálegyenleteket a mozgások, jelenségek időbeli változásának leírására. Ha valós problémákkal szeretnénk szakkörön, diákkörön foglalkozni, akkor az elméleti leírás, de főleg annak egzakt megoldása meghaladja a középiskolában elsajátítható matematikát. Még a matematikában jeleskedő tanulók sem juthatnak tovább a néhány egyszerű, szeparálható közönséges differenciálegyenlet analitikus megoldásánál. A differenciál-és integrálszámítás alapjainak elsajátítása után a felsőbb éves érdeklődő diákok elegendő matematikai- és informatikai tudással bírnak ahhoz, hogy egyszerű numerikus módszerek alkalmazásával oldjanak meg a valós életből vett természettudományos problémákat. A kapott eredményeket célszerű összevetni a tényleges megfigyeléssel és méréssel kapott adatokkal.

Közönséges, első-és másodrendű időnként nemlineáris differenciálegyenletek megoldására különféle numerikus módszerek léteznek. A diákkörön ezek közül három módszert alkalmazunk [1]: az Euler-, a javított Euler-, és a Runge-Kutta-módszert. A cél általában valamely  $y(t)$  időtől függő függvény meghatározása a függvényt és deriváltját összekapcsoló szabály, a differenciálegyenlet alapján.



4.1.1. ábra: A numerikus megoldásban alkalmazott közelítés geometriai jelentése:  $\Delta y/\Delta t$  a  $t$  időpillanatban az  $y(t)$  függvényhez húzott érintő meredeksége.

## 4.2. Euler-módszer

Differenciálegyenletünk

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) . \quad (4.1)$$

alakú. A numerikus megoldás alapja a  $\frac{\Delta y}{\Delta t} \cong \frac{dy}{dt}$  közelítés, ami akkor teljesül jó közelítéssel, ha  $\Delta t$  kicsi.

A probléma megoldásakor ismerjük a jobboldali  $f(t, y)$  függvényt és a  $t_0, y_0$  (a  $t_0$  pillanatban az  $y$  függvény értéke  $y(t_0) = y_0$ ) kezdeti feltételt is.

A differenciahányados jelentése alapján írhatjuk:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n} = f(t_n, y_n). \quad (4.2)$$

Mivel  $\Delta t$  véges, bár kicsi, az egyenlőség használatával  $\Delta t^2$  - tel arányos hibát követtünk el. Ezzel a hibával azonban átrendezés után írhatjuk, hogy

$$\Delta y = \Delta t f(t_n, y_n), \quad (4.3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y_n), \quad (4.4)$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t. \quad (4.5)$$

A kezdőfeltételnél  $\Delta t$ -vel későbbi pillanatban

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta t f(t_0, y_0), \\ t_1 &= t_0 + \Delta t. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Újabb  $\Delta t$  -vel később:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \Delta t f(t_1, y_1), \\ t_2 &= t_1 + \Delta t. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A numerikus megoldás lényege tehát az, hogy lépésenként felépítjük az  $y(t)$  függvényt

Összefoglalva, az Euler-módszer a (4.1) egyenlet következő iterációs megoldását jelenti:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t \times f(t_n, y_n), \\ t_{n+1} &= t_n + \Delta t \rightarrow \Delta t = t_{n+1} - t_n = \text{állandó}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Megállapodás szerint  $m$ -ed rendűnek nevezzük a módszert, amennyiben pontossága  $\Delta t$   $m$ -edik hatványával arányos, vagyis, ha a hiba tag  $\Delta t$   $(m + 1)$ -edik hatványával arányos:  $\Delta t^{m+1}$ . Ennek értelmében az Euler-módszer elsőrendű. Az egy lépésben elkövetett hiba  $\Delta t^2$  -rendű.

A diákkörös tanulók Excel tudásának felfrissítésére a délutáni foglalkozásokon néhány gyakorlati órát szánunk. Ezeken a gyakorlatokon a matematikából ismert függvényeket ábrázolnak (lineáris, másodfokú, trigonometrikus), egyenleteket oldunk meg grafikus úton, valamint a fizikában megismert mozgások mozgásegyenleteiből meghatározzák a sebesség- és az elmozdulás - idő grafikonokat. Ilyen jól ismert példa számukra pl. a szabadesés közegellenállás nélkül. A megoldás során először tisztázzuk a kezdőfeltételeket (a  $t_0 = 0$  időpillanatban a sebesség nulla, a hely pedig az elejtés magassága). A mozgásegyenlet newtoni alakját felírva, a numerikus megoldáshoz kipróbálják az Euler-módszert [2].

A diákok nagyon gyorsan megértik, hogy ha rövid ideig nézzük a mozgást, akkor a sebesség még nem sokat változik, és minél rövidebbre választjuk az intervallumot, annál kisebbet hibázunk. A kapott sebesség- és út (magasság) értékeket grafikonon ábrázolják az idő függvényében. Örömmel fedezik fel a megoldásként kapott, fizika órákon tanult lineáris függvényt a sebességre és a parabolát a megtett útra. Az ejtés magasságának grafikonjánál természetes módon vetődik fel a kérdés: hogyan lehet a földet érést automatikusan beállítani? Ekkor beépíthetünk feltételeket az oszlopokba (ha a magasság negatív, akkor a gyorsulás és a sebesség nulla legyen). Lelkesen próbálgatják, hogy mit jelent az időköz megváltoztatása a kapott grafikonoknál, sőt maguktól javasolják a kezdeti feltételek változtatását is (pl. legyen függőleges lefelé hajítás).

### 4.2.1. Középiskolás példa

A módszerrel való ismerkedés érdekében egy analitikusan ismert megoldású egyszerű differenciálegyenletet tekintünk és az egzakt megoldást összevetjük a (4.8) Euler-módszerrel kapott numerikus megoldással. Válasszuk a következő egyenletet és kezdeti feltételt ( $t_0 = 0s$ ):

$$\frac{dy}{dt} = 10t + 2, \quad (4.9)$$

$$y(0) = 10m. \quad (4.10)$$

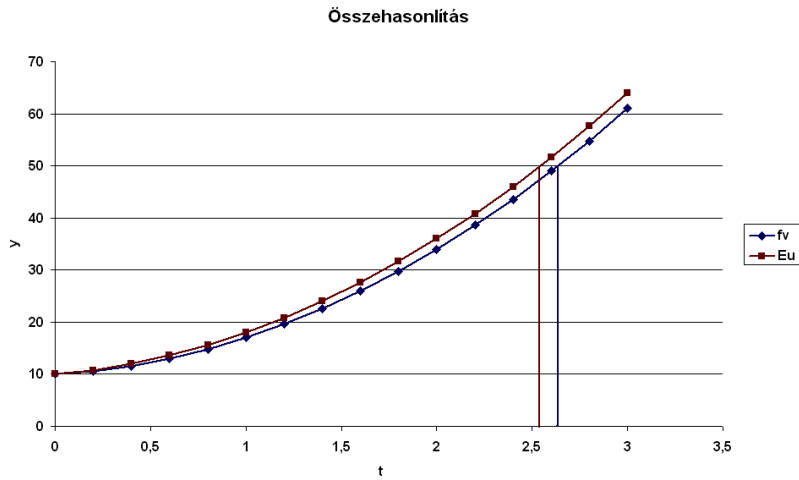
Fizikai problémaként  $dy/dt$  megfelel egy egyenletesen változó, egyenes vonalú mozgás sebesség-idő függvényének,  $y(t)$  a helykoordinátának,  $y(0)$  pedig a kezdeti helynek.

Kérdés: Mikor lesz az  $y = 50m$ ?

Előrebocsájtva az analitikus megoldást (amit persze nem tudunk, de a 9. évfolyamos fizikában tanultak alapján sejtjük):

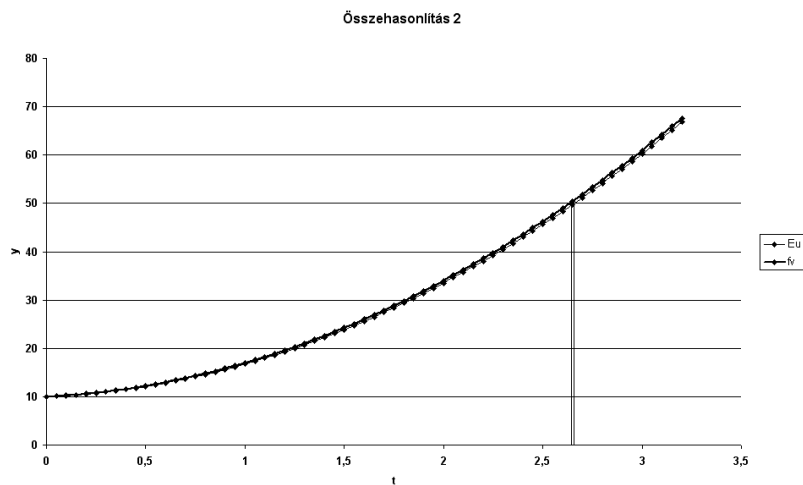
$$y = 5t^2 + 2t + 10. \quad (4.11)$$

Közös koordináta-rendszerben ábrázolva (Excel) az analitikus függvényt és az Euler-módszerrel kapott megoldást  $\Delta t = 0,2s$  választása esetén (4.2.2. ábra):



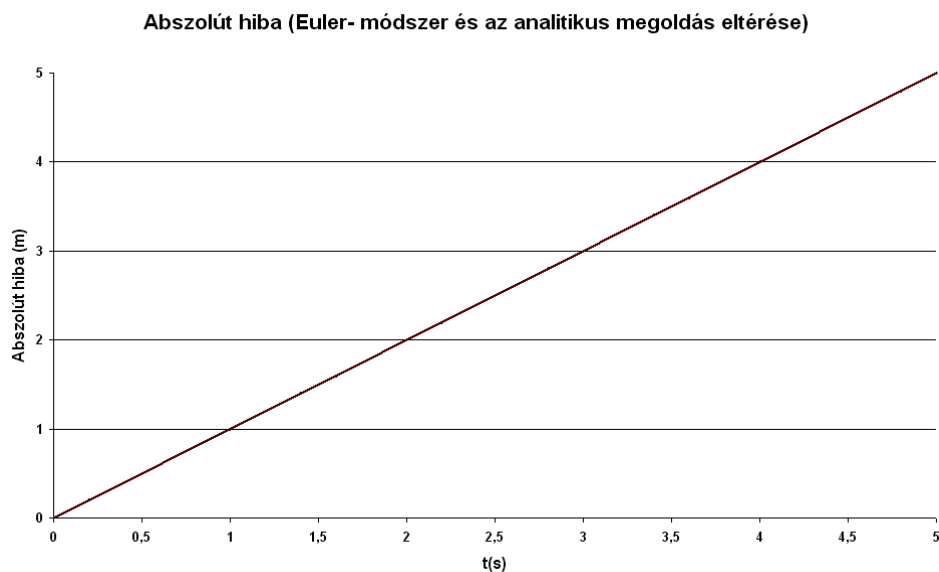
4.2.2. ábra: A (4.11) analitikus megoldás (fv) és az Euler-módszeres megoldás ( $y_{n+1} = y_n + \Delta t(10t_n + 2)$ ) (Eu) ábrázolása  $\Delta t = 0,2s$  időlépéssel  $y(0) = 10m$  kezdeti értékkel.

Érdekes megfigyelni, hogy az eltérés szabad szemmel már alig vehető észre, ha az időlépés az előbb használt lépés negyede, amint azt a 4.2.3. ábra mutatja.



4.2.3. ábra: A (4.11) analitikus megoldás (fv) és az Euler-módszeres megoldás ( $y_{n+1} = y_n + \Delta t(10t_n + 2)$ ) (Eu) ábrázolása  $\Delta t = 0,05s$  időlépéssel  $y(0) = 10$  kezdeti értékkel.

Azt tapasztaljuk, hogy az eltérés az analitikus és a numerikus megoldás között a 4.2.4. ábra szerint lineárisan nő időben:



4.2.4 ábra: A (4.9) probléma Euler-módszerrel történő megoldása és az analitikus megoldás eltérése az idő szerint. Itt  $\Delta t = 0,2s$ .

Vizsgálataink szerint az abszolút hiba növekménye ebben a példában pontosan arányos  $\Delta t$  -vel, azaz  $t$  idő elteltével a hiba:  $hiba(t) = 5 \cdot \Delta t \cdot t$ . Az idő növekedésével a hiba mindig nő. Ennek oka, hogy a deriváltat differenciányadossal helyettesítjük.  $5\Delta t^2$  a kezdeti lépés hibája. A következő lépés ugyanezt a hibát hozza létre, miközben már a rossz adatra építünk. A hibák összegződnek, és ebben az egyszerű esetben az összesített hiba lineárisan nő az időben. (Olyan esetekben, amikor az egymás utáni lépések hibáinak előjele váltakozó, a lineárisnál lassabb hibanövekedést is tapasztalhatunk.)

A középiskolai matematikában a diákok a 11. (esetleg csak 12.) évfolyamon tanulnak a differenciályadosról, határértékről, függvények deriváltjáról. Ezért a diákkörös tanulók számára (10. és 11.) többször is tartottam egyfajta „nyári matematika tábor”, ahol megismerkedünk a deriválás alapfogalmaival, szabályaival, a fizikában gyakran előforduló (hatvány, szinusz, koszinusz és exponenciális) függvényekkel és deriváltjaikkal. A „tábor” kifejezés azt jelenti, hogy 4-5 tanuló önkéntes alapon több alkalommal meglátogat engem otthon, és kötetlen formában megismerkedünk a vektorszámítással és függvények analíziséhez kapcsolódó fogalmakkal, majd ezeket az ismereteket fizikához kapcsolódó példákon begyakoroljuk (pl. pillanatnyi sebesség meghatározása az út-idő függvényből).

Egy ilyen nap 3-4 óra időt vesz igénybe, és 4-5 alkalmat jelent az egész „kurzus”. A „kurzus” végére a diákok jobban megértik a mozgásoknál előforduló mennyiségek közti összefüggéseket (elmozdulás-sebesség-gyorsulás), alkalmazni tudják a grafikus megoldásokat, értelmezik azokat. A foglalkozások nem óra jellegűek, kötetlenek és jobban

összekovácsolódik a diákkörös csapat. Új értelmet kap a korábban már használt Euler-módszer is, hiszen jobban értik a differenciahányadossal való közelítést és annak jelentését.

Gyakorlatilag mindig kitérünk a pontosabb módszerek lehetőségére és a tanulók felismerik, hogy a derivált függvények alapján (egyszerűbb esetekben) hogyan kaphatjuk meg a függvényeket. Megbeszéljük az integrál fogalmát, megállapítjuk néhány egyszerűbb esetre a primitív függvényt és egy-egy konkrét fizika feladat kapcsán a numerikus integrálás során megértik a kezdeti értékek alkalmazását, szerepét.

Az Euler-módszerben a test mozgását úgy írjuk le, hogy az új helykoordináta a réginek és a sebesség  $\Delta t$  - szeresének az összege. Az  $f$  „sebességet” az intervallum elején lévő értéknél vesszük. Ehhez képest a (4.1) egyenlet megoldására pontosabb módszert kapunk, ha az intervallum közepén vett értékkel, azaz az időközre vett átlagsebességgel számolunk.

Legyen

$$K_1 = v_n = f(t_n, y_n), \quad (4.12)$$

$$K_2 = v_{n+1} = v(t_{n+1}, y_{n+1}) = f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t K_1). \quad (4.13)$$

Ekkor

$$y_{n+1} = y_n + \frac{K_1 + K_2}{2} \Delta t. \quad (4.14)$$

A számolás első és utolsó lépéseként Euler módszerét, (4.8), alkalmazzuk. Az első lépésben a kezdeti sebességet a  $t = 0$  értéknek (4.8)- be való helyettesítésével kapjuk, és a hely kezdeti értékéhez ( $y_0 = 10$ ) hozzáadjuk a  $\Delta y = \Delta t \cdot v_0$  értéket, mintha az intervallumban végig állandó maradna a sebesség. Az utolsó lépésben pedig a  $\Delta y = \Delta t \cdot v_n$  növekményt adjuk a helykoordinátához. Ez a javított Euler-módszer már másodrendű, az egy lépésben elkövetett hiba  $\Delta t^3$  nagyságrendű.

### **4.3. Fizika példák a kétféle Euler-módszerre a középiskolából ismert mozgások általánosításával**

#### **4.3.1. Szabadesés közegellenállással**

A középiskolai fizika tananyagban számos idealizált esettel találkozhatnak a tanulók. Egy ilyen eset a szabadesés, mely a nehézségi erő hatására történik. Ennek sebesség- és út-számítását a 9. évfolyamon megtanulják a diákok. A problémát az jelenti, hogy a

mindennapos tapasztalat szerint a különböző tárgyak esése nagyon is eltérhet a tanult szabályoktól. A dinamika tananyagrészen külön megtanítjuk a közegellenállási törvényt, gyakoroltatjuk, azonban - érthető matematikai okokból - nem kapcsoljuk össze a szabadeséssel, hogy esési, hajítási problémákat tudjunk a tanulókkal elemezni. A numerikus módszerek megtanítása, a számítógép alapszintű használata mellett lehetővé teszi a tanár és tanuló számára, hogy valós rendszerek mozgását is tanulmányozhassa, elemezhesse az idealizált esettől való eltérések okait és mértékét.

Ha az esésnél figyelembe akarjuk venni a levegő hatását is, azt a sebesség négyzetével arányos közegellenállási erő beépítésével tehetjük. Így Newton II. törvénye alapján írhatjuk, hogy

$$ma = mg - \frac{1}{2}CA\rho_{\text{levegő}}v^2, \quad (4.15)$$

ahol  $m$  a test tömege,  $g$  a nehézségi gyorsulás,  $C$  a formatényező, a merőleges keresztmetszet  $A$  és  $\rho_{\text{levegő}}$  a levegő sűrűsége, ami ugyan függ a nyomástól és hőmérséklettől, de a szokásos értékét  $1,29 \text{ kg/m}^3$ -nek tekintjük. Osszuk végig az egyenletet  $m$ -mel és jelölésként vezessünk

be  $k$ -t, ami  $k = \frac{CA\rho_{\text{levegő}}}{2m}$ . Vegyük figyelembe, hogy a gyorsulás definíciója:

$$a = dv/dt.$$

Ekkor a  $v(t)$  sebességre vonatkozó mozgásegyenlet:

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2. \quad (4.16)$$

Itt  $k$  a fenti közegellenállásra jellemző állandó,  $v$  a test pillanatnyi sebessége. Ez megfelel (4.1)-nek az  $y = v$  választással és az  $f(t, v) = g - kv^2$  alakkal, ami  $t$ -től független. Ekkor:

$$K_1 = f(t_0, v_n), \quad (4.17)$$

$$K_2 = f(t_0 + \Delta t, v_n + \Delta t K_1),$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{K_1 + K_2}{2} \cdot \Delta t. \quad (4.18)$$

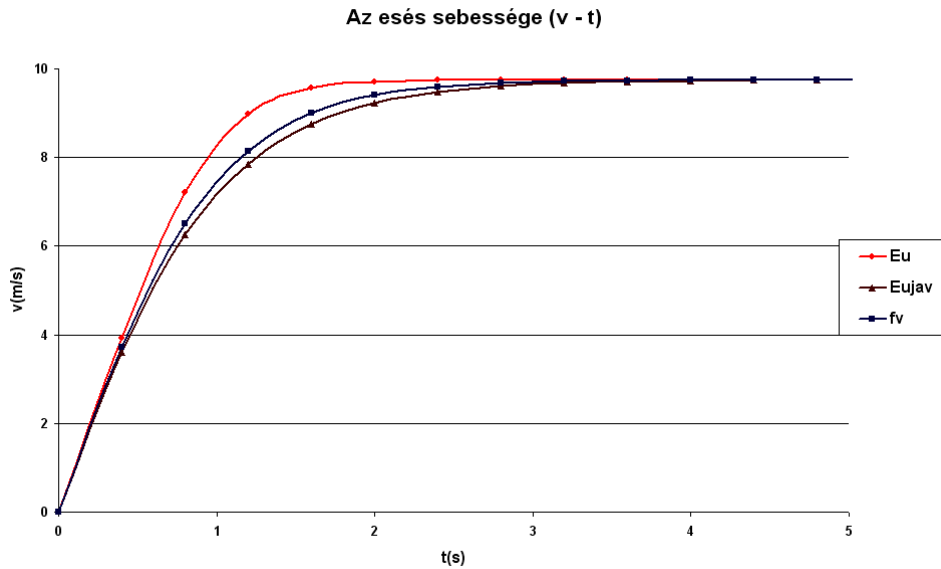
A kezdeti feltételek:  $t = 0s$ ;  $v(0) = 0 \text{ m/s}$ .

A (4.16) egyenletnek létezik analitikus megoldása is. Az idő-sebesség függvény [3] alapján

$$\text{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}v - \text{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}v_0 = -\sqrt{gk}t. \quad (4.19)$$



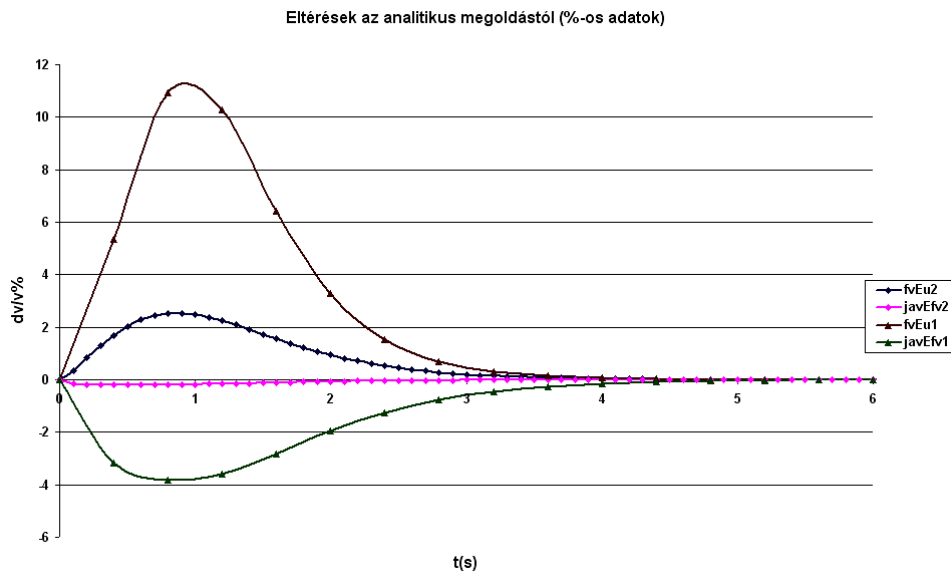
Az eső test (4.16) mozgásegyenletét numerikusan megoldjuk Euler módszerével és a javított Euler-módszerrel is. A két módszerrel kapott eredményeket együtt ábrázoljuk a (4.19) analitikus megoldással az esés első 5 másodpercére (4.3.5. ábra). A megoldásnál Excel 2003-as táblázatkezelőt használunk, a közegellenállásra jellemző állandó  $k = 0,1 \text{ 1/m}$ , a kezdősebesség 0 és a lépésköz 0,4s.



4.3.5. ábra: Esés közegellenállással. A sebesség-idő függvény ábrázolása Euler (Eu) és a javított Euler (Eujav) módszerrel, valamint az egyenlet analitikus megoldásával (fv). Paraméterek:  $k = 0,1 \text{ (1/m)}$ ;  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ;  $\Delta t = 0,4 \text{ s}$ .

Látszik, hogy a javított Euler-módszer sokkal jobban közelíti az egzakt megoldást, mint az eredeti Euler-módszer.

A megoldások pontosságát jobban láthatjuk, ha az Euler- és a javított Euler - módszerrel kapott sebességeknek az analitikus megoldástól való eltérését ábrázoljuk az idő szerint, az elméleti érték százalékában (4.3.6. ábra, barna és zöld görbék). A paraméterek megegyeznek a 4.3.5. ábrán szereplő értékekkel. A hiba gyakorlatilag nullára csökken 4 másodperc után. Ennek oka az, hogy a gyorsulás addigra nullává válik a közegellenállás következtében. Mivel a numerikus megoldásokban úgy számolunk, hogy rövid időközre állandónak tekintjük a gyorsulást (az intervallum elején vagy éppen a közepén, mint a javított Euler módszernél), ezért, ha az állandóvá válik, az eltérés megszűnik, s  $v = \sqrt{\frac{g}{k}} = \text{állandó}$ .



4.3.6. ábra: Az Euler (EU) és a javított Euler (javE) módszerrel ábrázolt sebességek eltérése az egyenlet analitikus megoldásával (fv) kapott értékektől, az elméleti értékek %-ában kifejezve. Paraméterek:  $k = 0,1$  (1/m);  $g = 9,81\text{m/s}^2$ ; Az időköz  $\Delta t = 0,1\text{s}$  a 2-es számú,  $\Delta t = 0,4\text{s}$  az 1-es számú görbékénél.

Kisebb időlépés esetén, a két numerikus módszer pontosabbá válik, eltérésük az analitikus megoldástól jelentősen csökken (sötétkék és rózsaszín görbék). A 4.3.6. ábrán látszik, hogy a javított Euler módszer már csak néhány tized százalékkal tér el a pontos megoldástól.

#### 4.3.2. Rugóhoz rögzített test rezgése

A problémát a 11. évfolyamos mechanikai rezgések és hullámok fejezetben részletesen tanítjuk.

Egy rugóra akasztott testre két erő hat: a rugó rugalmas ereje és a gravitáció. Az eredő erő arányos az  $y$  kitéréssel és ellentétes vele. A mozgásegyenlet ([3], 113.o.):

$$ma = -ky, \quad (4.20)$$

ahol  $k$  a rugóállandó, és  $a$  a gyorsulás. Az  $y$  kitéréssel felírva:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky. \quad (4.21)$$

Ennek az egyenletnek az  $y(0) = A$ ,  $v(0) = 0$  kezdőfeltételhez (a test a  $t = 0$  időpillanatban indul az  $y(0) = A$  ( $A$  az amplitúdó) helyzettől  $v(0) = 0$  kezdősebességgel) tartozó analitikus

megoldása  $y = A\cos(\omega t)$ , ahol  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . A mozgásegyenlet egy súrlódásmentes,

csillapítatlan rezgés egyenlete. A középiskolában ezt az egyenletes körmozgás vetületeként vezetjük le.

A gyakorlatban megvalósuló mozgásnál feltehetjük, hogy a sebességgel arányos, de ellentétes irányú fékező erő is hat.

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - cy \quad (4.22)$$

Ahol  $c$  egy, a csillapodásra jellemző tényező. A tömeggel leosztva és bevezetve a  $2b = c/m$  és  $\omega^2 = k/m$  jelöléseket, a mozgásegyenlet:

$$\ddot{y} = -\omega^2 y - 2b\dot{y} \quad (4.23)$$

A kezdőfeltétel:

$$\begin{aligned} y(0) &= A, \\ v(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

A (4.23) egyenlet nem olyan típusú, mint (4.1), hanem másodrendű differenciálegyenlet. Itt ezért a következő közelítéseket alkalmazzuk:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t}, \quad (4.25)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \approx \frac{\Delta \left( \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)}{\Delta t} = \frac{\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} - \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{(\Delta t)^2}. \quad (4.26)$$

Ezeket behelyettesítve, a (4.23) mozgásegyenlethez tartozó iterációs formula:

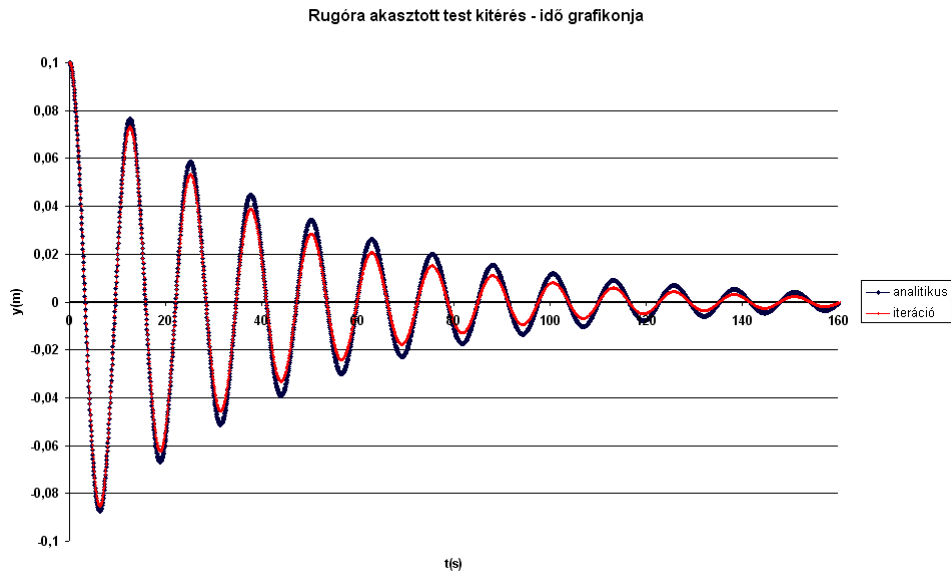
$$y_{n+1} = (2 - \omega^2 (\Delta t)^2 - 2b\Delta t)y_n + (2b\Delta t - 1)y_{n-1}. \quad (4.27)$$

Az

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 = A, \\ v(0) &= \frac{y_1 - y_0}{\Delta t} = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

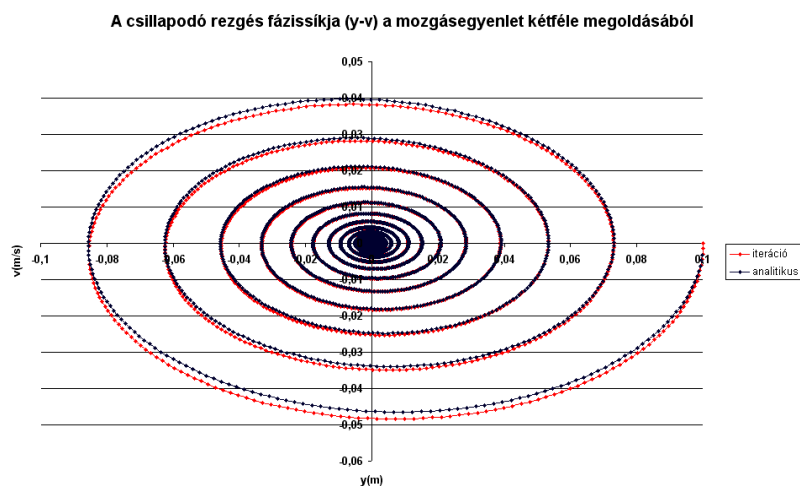
$$y_0 = y_1 = A. \quad (4.29)$$

kezdeti értékekkel indulva a 4.3.7. ábrán piros vonallal ábrázolt mozgást kapjuk numerikusan. A késsel jelölt analitikus megoldástól való eltérés kicsi, és 0,01s-os lépésköz esetén már olyan kicsi lenne, hogy nem lehetne észrevenni a piros és a kék görbe eltérését.



4.3.7. ábra : A rugóra akasztott test mozgásának kitérés-idő grafikonja a (4.27) iterációs képlettel és az analitikus megoldással ábrázolva . Kezdeti értékek:  $y(0) = 0,1\text{m}$ ,  $v(0) = 0$ . A test tömege  $0,2\text{kg}$ , közegellenállási tényező  $c = 0,01$  (kg/s). A rugóállandó  $0,05\text{N/m}$ , időlépés  $0,06\text{s}$ .

Egy dinamikai rendszer mozgásának leírásakor alapvető fogalom az állapotér, fázistér (A Függelék). A fázistér a pontszerű testek mechanikájában egydimenziós mozgásokra kétdimenziós (hely- és sebességkoordináta). A fázistérben a rendszer adott időpontbeli állapota egyetlen ponttal adható meg. A rendszer állapota az időben előre-hátra egyértelműen követhető, a fázispont az ún. trajektória mentén mozog. A fázistér használatának előnye, hogy azon több kiindulási állapotnak megfelelő folyamatot is ábrázolhatunk együtt.



4.3.8. ábra: A rugóra akasztott test mozgásának kitérés-sebesség (kétdimenziós  $y - v$  fázissík) trajektóriája Iterációs módszerrel és az analitikus megoldás alapján a 4.3.3. ábrához tartozó esetben.

A 4.3.7 ábra mozgásának megfelelő trajektórián (4.3.8. ábra) jól látszik, hogy az egyetlen ponthoz, az origóhoz tart. Ez a disszipatív (súrlódásos) rendszerekre jellemző pont attraktor, melynek elérésével a rendszer egyensúlyba jut, belőle már nem indulnak ki trajektóriák.

#### 4.4. A negyedrendű Runge – Kutta-módszer

A témával komolyabban foglalkozni kívánó, informatikában, matematikában jártasabb tanulók megtanulhatnak egy pontosabb numerikus egyenletmegoldó módszert. A módszer olyan problémák megoldásában lehet nagyon hasznos, ahol nagy gyorsulások lépnek fel (pl. rezgéseknél).

A Runge-Kutta-módszerek családjának egy tagja a gyakran csak RK4-nek emlegetett módszer, amit sokszor klasszikus Runge-Kutta-módszerek is neveznek. Tekintsük az

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y), \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

elsőrendű differenciálegyenletet, ahol  $y$  és  $f$  abban az esetben vektor, ha  $y_1, y_2, y_3$  stb. változók vannak.. A keresett  $y(t)$  időfüggvényt közelíteni szeretnénk egy numerikus megoldással. Az  $\dot{y}$  (az  $y$  változási sebessége) maga is az időnek, valamint  $y$ -nak a függvénye. A kezdeti  $y_0$  egy  $t_0$  kezdeti időpillanatban adott. Tűzzünk ki egy  $\Delta t = h > 0$  lépésközt és definiáljuk:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (4.31)$$

$$t_{n+1} = t_n + h,$$

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \quad (4.32)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3).$$

Itt  $n = 0, 1, 2, \dots$ , és  $y_n = y(t_n)$  az  $y$  függvény RK4 módszerrel való közelítése a  $t_n$  pillanatban.

$y_{n+1}$  értékét a pillanatnyi  $y_n$  értéken kívül meghatározza a négy növekmény, melyek mindegyike a  $h$  intervallum és a differenciálegyenlet jobb oldalán szereplő  $f$  függvény által meghatározott  $k_i$  becslült meredekség szorzata. Az RK4 módszer negyedrendű módszer, ami azt jelenti, hogy a lépésenkénti hiba  $h^5$ -nel arányos [4].

#### 4.4.1. Példa: fizikai (rúd) inga, a szögsebességgel arányos súrlódással

Az  $l$  hosszúságú homogén rúd által megvalósított fizikai inga mozgásegyenlete [5]:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{l} \sin\varphi - k\dot{\varphi}. \quad (4.33)$$

Itt  $\varphi$  az inga szögkitérése (radiánban),  $\dot{\varphi}$  az inga szögsebessége (1/s),  $g$  a gravitációs gyorsulás ( $9,81 \text{ m/s}^2$ ),  $\ddot{\varphi}$  a szöggyorsulás ( $1/\text{s}^2$ ),  $k$  pedig a csillapodást jellemző paraméter, melynek egysége 1/s.

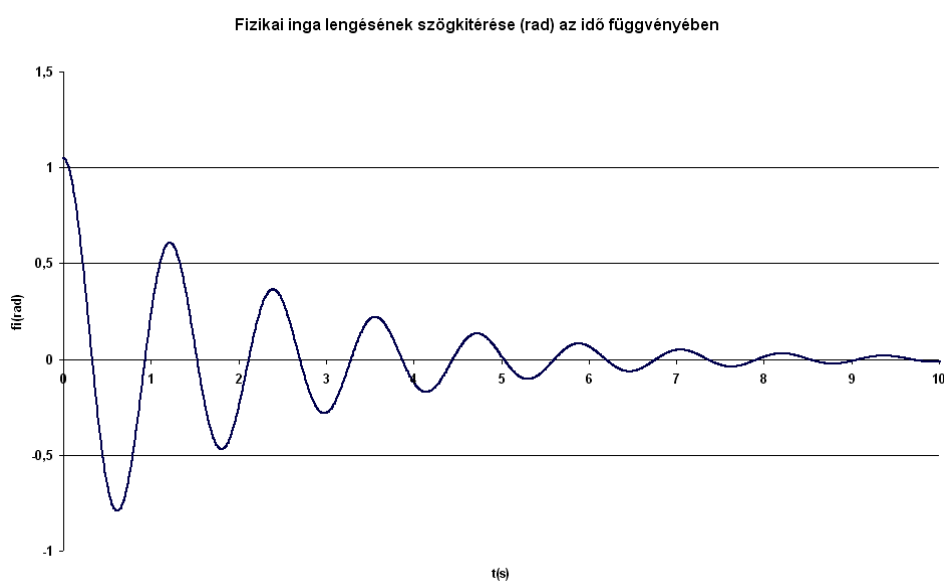
A másodrendű egyenletet új változó bevezetésével két elsőrendű differenciálegyenletté alakítjuk.

$\dot{\varphi} = y$ , ami az inga szögsebessége és  $\dot{y} = -\frac{3g}{l} \sin(\varphi) - ky$ , ennek segítségével az inga mozgásegyenlet-rendszere:

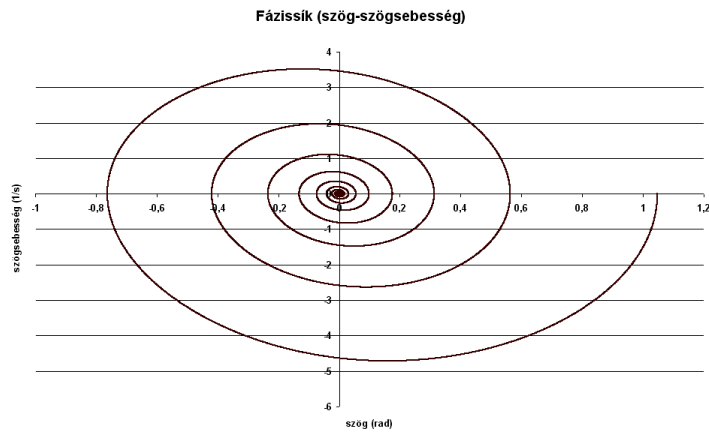
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3g}{l} \sin(\varphi) - ky, \quad \frac{d\varphi}{dt} = y. \quad (4.34)$$

A (4.30)-ban szereplő vektor tehát  $y = (\varphi, y)$  és a jobb oldal vektora  $f = (y, -3g/l \sin \varphi - ky)$ .

A fenti (4.34) mozgásegyenleteket a pontosabb RK4-es módszerrel érdemes numerikusan megoldani. A (4.32.) algoritmusok Excel táblázatkezelővel is megoldhatók, nem szükséges programnyelvet ismerni. A táblázatkezelőbe való képletbeírás az előző módszereknél nagyobb figyelmet és körültekintést igényel, célszerű először a súrlódásmentes eseten gyakorolni és az E megmaradását ellenőrizni. A súrlódásos esetben kapott szögkitérés-idő függvényt és a trajektóriát a 4.4.9, ill. 4.4.10. ábrák mutatják.

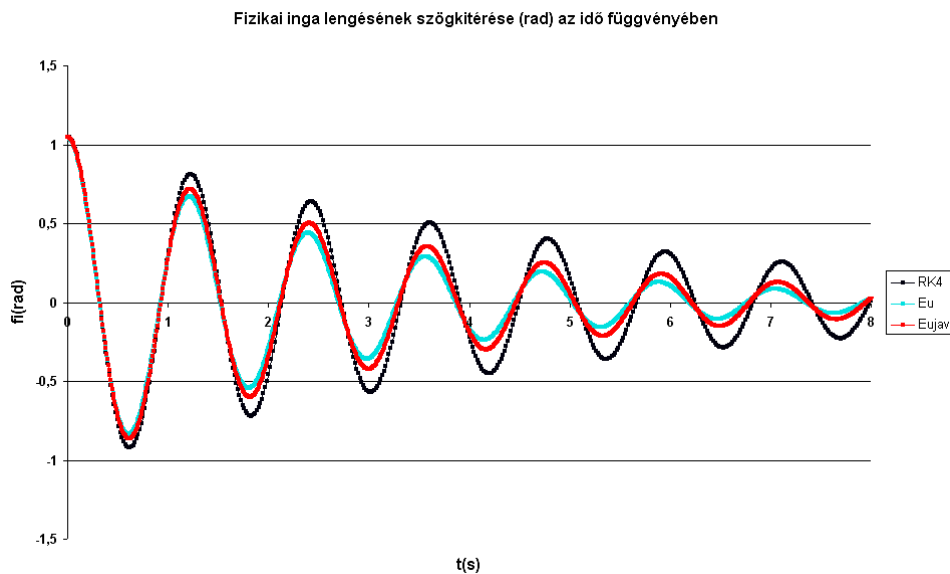


4.4.9. ábra: Az inga szögkitérése RK4 módszerrel ( $l=1\text{m}$ ;  $\varphi_0=60^\circ$ ;  $k=1$  (1/s);  $h=0,01\text{s}$ )



4.4.10. ábra: A 4.4.1. ábrán látható mozgás trajektóriája a szög-szögsebesség fázissíkon

Érdekes összehasonlítnunk a három numerikus módszerrel (Euler-, javított Euler- és RK4) kapott szögkitéréseket, ugyanolyan időközzel (0,008s), megegyező paraméterek ( $k = 0,5 \text{ 1/s}$ ,  $l = 1\text{m}$ ) és kezdeti feltételek esetén ( $\varphi_0 = 60^\circ$ ) (4.4.11. ábra). Az ábrán jól látszik, hogy az Euler-módszerek hibája nagyobb, már rövid idő alatt jelentősen eltérnek a RK4 – módszer alapján kapott grafikontól. Néhány további, diákkörön tárgyalt érdekes numerikus megoldást az E függelékben találhatunk.



4.4.11. ábra: A fizikai inga szögkitérése RK4-, Euler- és javított Euler- módszerrel ( $l=1\text{m}$ ;  $\varphi_0=60^\circ$ ;  $k=0,5 \text{ (1/s)}$ ;  $dt =0,008\text{s}$ )

#### 4.4.2. Tudománytörténeti érdekesség (motivációs példa)

A tanulók nagy része ismeri, látta a Jurassic Park (Spielberg) című filmet, vagy legalábbis hallott már a pillangóhatásról. A jelenség elnevezésének története a diákok számára

jó motiváció lehet arra, hogy az ún. Lorenz-modell numerikus megoldásával kiderítsük az elnevezés eredetét. 1963-ban jelent meg *Edward N. Lorenz* tanulmánya, amelyben az amerikai Massachusetts Institute of Technology (MIT) elméleti meteorológus professzora kimutatta, hogy determinisztikus rendszerek is tanúsíthatnak előre nem látható, véletlenszerű viselkedést. Lorenz egy 1979-ben Washingtonban elmondott előadásának címe ugyanis a következőképpen hangzott: „Előre jelezhetőség: képes-e egy pillangó brazíliai szárnycsapása Texasban tornádót kiváltani?”. És a szerző előadásának végén erre a kérdésre nem zárta ki az igenlő elvi választ.

Bármelyik fizikai rendszer, amelyik hosszú ideig aperiodikusan viselkedik, annak a folyamatai előrejelezhetetlenek. Később kiderült, hogy az aperiodikus viselkedés megjelenése elkerülhetetlen minden általános (legalább két szabadsági fokú), nemlineáris mechanikai rendszerben. Az előrejelezhetetlenség oka az ezekben a rendszerekben törvényszerűen jelentkező *pillangó-hatás*, illetve, tudományosabb megfogalmazásban, *a kezdőfeltételekre mutatott érzékenység*, amit *dinamikai instabilitásnak* is szoktak nevezni. A dinamikai instabilitás révén a megadott kezdőfeltételekben óhatatlanul rejlő kis hibák az idő múlásával a rendszerre jellemző exponenciális mértékben növekednek, és ezért előbb-utóbb a prognózis elveszíti minden gyakorlati értékét [4,6].

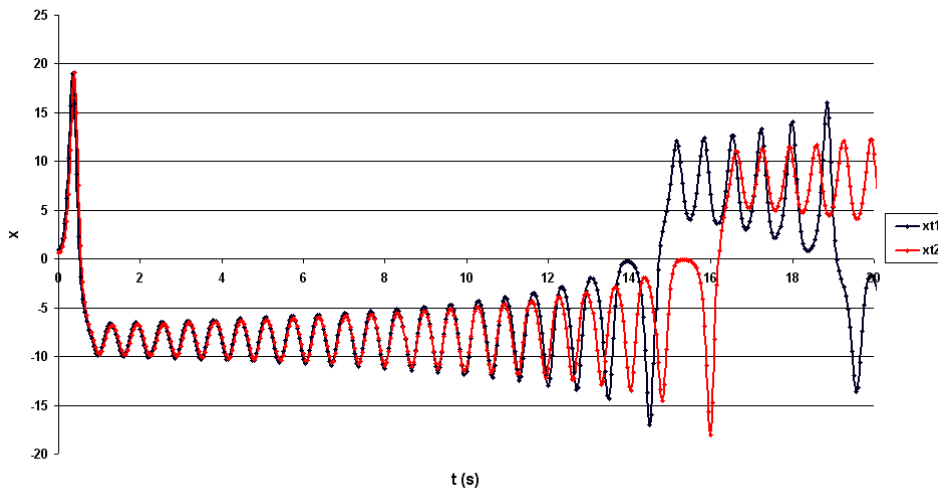
A Lorenz-modell három változót tartalmaz:  $x$ ,  $y$  és  $z$ -t, differenciálegyenlete:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

A modellben az  $r = 28$ ;  $\sigma = 10$ ;  $b = 8/3$  paraméterek mellett, apró kezdeti különbségek esetén is jelentősen eltérőek a numerikusan szimulált időfejlődések eredményei (4.4.12. ábra).

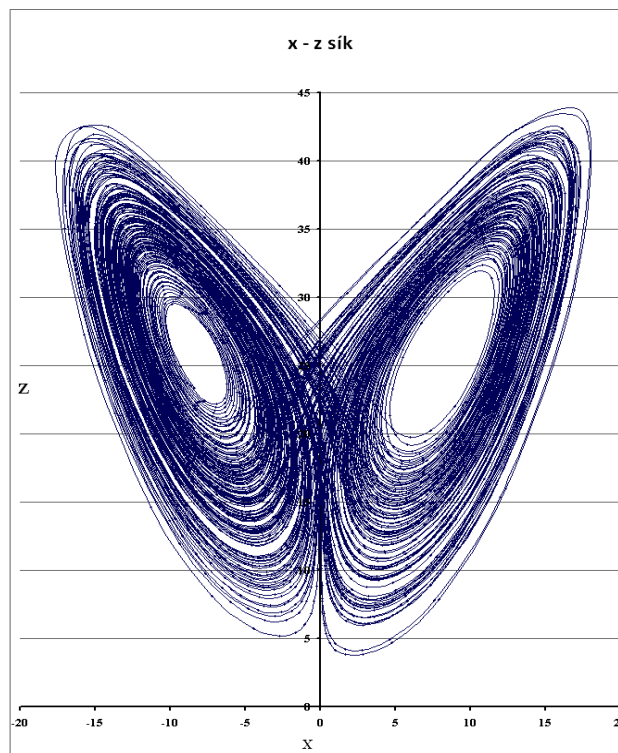


A Lorenz-modell x változójának időbeli fejlődése két, kicsit különböző kezdeti értékről indítva



4.4.12. ábra: A Lorenz-modell (4.35.) egyenletrendszerének numerikus megoldása RK4 módszerrel kissé eltérő  $x_0, y_0, z_0$  kezdeti értékekkel. A megoldásból látszik, hogy a két görbe kb. 10 időegység elteltével jelentősen szétválk. A kék (xt1) grafikonhoz az  $x, y, z$  változók egységnyi kezdeti értéke tartozik, a piros (xt2) grafikonban mindhárom változó kezdeti értéke 0,6;  $dt = 0,01s$ .

A Lorenz-modell volt az első példa az előrejelezhetetlenség megjelenésére kis szabadságfokú autonóm rendszerben. Ez a modell azóta a folytonos idejű kaotikus rendszerek alappéldája lett, az RK4 módszerrel kapott kaotikus attraktort a 4.4.13. ábra mutatja.



4.4.13. ábra: Lorenz modelljének lepkeszárnyakra emlékeztető különös attraktora (az  $x-z$  síkban) az egyenletrendszer numerikus megoldásával (RK4 módszer,  $h=0,01s$ )

Az RK4 módszer előnye (a kis hiba) különösen a hosszú ideig követett mozgásoknál mutatkozik meg. Ezért tekintik a kaotikus problémák vizsgálatára legalkalmasabb numerikus eljárásnak.

A kaotikus attraktorok fraktál tulajdonságot is mutatnak, melyek tört dimenziós alakzatok. Diákkörön számos ingyenesen letölthető fraktálkészítő programmal ismerkednek meg a tanulók, dekorációs célokra saját fraktálokat is készítenek.

A 4.1 – 4.4 fejezetek jelentik a 4. számú tézis háttérét.

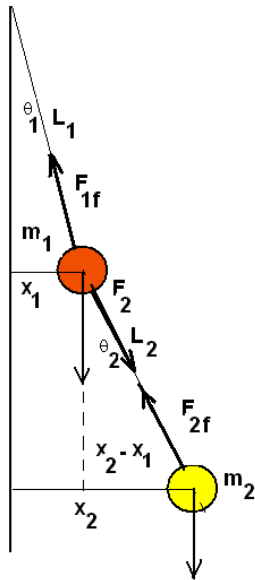
### **Hivatkozások:**

- [1] Eichhardt I., Jaloveczki J: Fizikázzunk egyszerűen, számítógéppel; Fizikai Szemle2008/9. sz.,311.o.
- [2] Eichhardt I., Jaloveczki J: Numerikus módszerek a diákköri munkában, Fizikai Szemle2009/10. sz.,348.o.
- [3] K. K. Ponomarjov: Differenciálegyenletek felállítása és megoldása, Tankönyvkiadó, Bp.1981. 54.o.
- [4] Tél T.- Gruiz M.: Kaotikus dinamika, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.Bp.2002.,290.o.
- [5] Békéssy L.- Bustya I.: Fizikai kettősinga vizsgálata, Fizikai Szemle2005/05\_1. sz.185.o.
- [6] Götz G: A pillangó – effektus – a káosz felfedezése a meteorológiában, Fizikai Szemle 1993/12. sz.,487.o.

## 5. Számítógépes szimuláció és kísérlet összevetése

### 5.1. A kettősinga mozgásegyenletének numerikus megoldása, a mérési eredmények és a szimuláció összevetése

Kettős fonálingánk mozgásának vizsgálatát, mérési összeállításunkat és a kapott mérési eredményeket a 2.1. fejezetben tárgyaltuk. Ebben a fejezetben ismertetem hogyan írtuk fel a diákkörös tanulókkal az inga mozgásegyenletét, milyen numerikus módszert használtunk a megoldásnál, és mit eredményezett a szimuláció összevetése a mérési eredményekkel. A két kitérített labdára ható erőket berajzoltuk az 5.1.1. ábrába.



A felső fonál hossza  $L_1$ , a labda tömege  $m_1$ . A függőlegetől  $\theta_1$  szöggel térítettük ki. Az alsó fonál hossza  $L_2$ , az alsó labda tömege  $m_2$ . Ezt a labdát  $\theta_2$  szöggel térítettük ki. A függőleges nehézségi erőkön kívül hatnak még a fonalakban ható feszítőerők is [1]. A közegellenállást most elhanyagoljuk. A labdákra külön-külön felírjuk Newton II. törvényét a vízszintes irányra. A felső labdára ható  $x$  irányú erő, a jobbra mutató irányt pozitívnak véve:

$$\Sigma F_1 = m_1 a_1 = -F_{1f} \sin \theta_1 + F_{2f} \sin \theta_2. \quad (5.1)$$

5.1.1. ábra. A kitérített kettős ingára ható erők

Ha a kitérés szöge nem nagy, használhatjuk a következő közelítéseket:

$$F_{1f} \cong (m_1 + m_2)g, \quad (5.2)$$

és

$$F_{2f} \cong m_2 g. \quad (5.3)$$

Ezért az (5.1) mozgásegyenletet a tömeggel leosztva a felső labda vízszintes gyorsulása:

$$a_1 = -\frac{m_1 + m_2}{m_1} g \sin \theta_1 + \frac{m_2}{m_1} g \sin \theta_2. \quad (5.4)$$

Az 5.1.1. ábra alapján kis szögeket feltételezve írhatjuk:

$$\theta_1 \cong \sin \theta_1 = \frac{x_1}{L_1}, \quad (5.5)$$

$$\theta_2 \cong \sin\theta_2 = \frac{x_2 - x_1}{L_2}. \quad (5.6)$$

Az 5.5 és 5.6 felhasználásával a felső labda mozgásegyenlete x irányban:

$$a_1 = -\frac{m_1 + m_2}{m_1} g \frac{x_1}{L_1} + \frac{m_2}{m_1} g \frac{x_2 - x_1}{L_2}. \quad (5.7)$$

Az alsó labda mozgásegyenlete x irányban:

$$\Sigma F_2 = m_2 a_2 = -F_{2f} \sin\theta_2, \quad (5.8)$$

Ami az (5.3) és az (5.6) figyelembe vételével és a tömeggel leosztva:

$$a_2 = -\frac{g}{L_2} (x_2 - x_1). \quad (5.9)$$

Bevezetve a tömegek arányára a  $k = \frac{m_2}{m_1}$  jelölést, a labdák mozgásegyenletei az x irányú

mozgásra:

$$a_1 = -(1+k)g \frac{x_1}{L_1} + kg \frac{x_2 - x_1}{L_2}, \quad (5.10)$$

$$a_2 = -\frac{g}{L_2} (x_2 - x_1). \quad (5.11)$$

Mivel a labdák viszonylag nagyok ( $d > 10\text{cm}$ ) és a lengés során viszonylag gyorsan mozognak, ezért jelentős közegellenállással kell számolni. A vízszintes irányú mozgásnál mindkét labdánál a sebesség négyzetével arányos, a sebesség irányával ellentétes irányú súrlódási erőt vettünk. Ez módosítja a mozgásegyenleteket:

$$a_1 = -(1+k)g \frac{x_1}{L_1} + kg \frac{x_2 - x_1}{L_2} - C_1 v_{x1}^2, \quad (5.12)$$

$$a_2 = -\frac{g}{L_2} (x_2 - x_1) - C_2 v_{x2}^2. \quad (5.13)$$

Az (5.12.) és (5.13.) numerikus megoldásánál a 4.4. fejezetben ismertetett RK4-módszert használtuk 0,05s időlépéssel.

Méréseink során a k tömeghányados értéke 0,77 volt. A 2. fejezet 2.1.1. ábráján látható paraméterekkel és a 2.1.9. ábra alatti kezdeti értékekkel oldottuk meg numerikusan az (5.12) és (5.13) mozgásegyenleteket. A közegellenállási tényező értékeit a labdák átmérője, alakja alapján kaptuk a közegellenállásra felírható erők kifejezéséből:

$$F_{1k} = \frac{1}{2} c \rho_{\text{levegő}} A_1 v_1^2 \rightarrow a_{1k} = \frac{F_{1k}}{m_1} = \frac{c \rho_{\text{levegő}} d_1^2 \pi}{8 m_1} v_1^2 = C_1 v_1^2. \quad (5.14)$$

A másik labdára az (5.14)-hez teljesen hasonló kifejezés írható fel. A gyorsulások természetesen negatív előjellel szerepelnek a mozgásegyenletben. A  $c$  alaktényezőt mindkét labdára 0,4 értékűnek vettük, ami a gömbre vonatkozik. A kettősinga felső labdájára kiszámolva a  $C_1$  tényezőt:

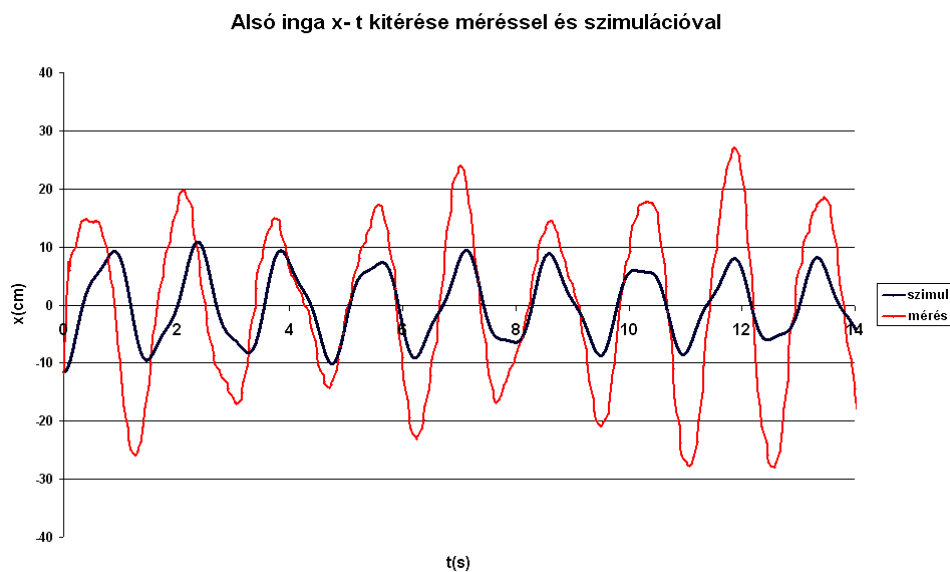
$$C_1 = \frac{c \rho_{\text{levegő}} d_1^2 \pi}{8 m_1} = \frac{0,4 \cdot 1,29 \cdot 0,14^2 \pi}{8 \cdot 0,084} = 0,048 \text{ (1/m)}. \quad (5.15)$$

Az alsó labda adataival:

$$C_2 = \frac{c \rho_{\text{levegő}} d_2^2 \pi}{8 m_1} = \frac{0,4 \cdot 1,29 \cdot 0,128^2 \pi}{8 \cdot 0,065} = 0,05 \text{ (1/m)} \quad (5.16)$$

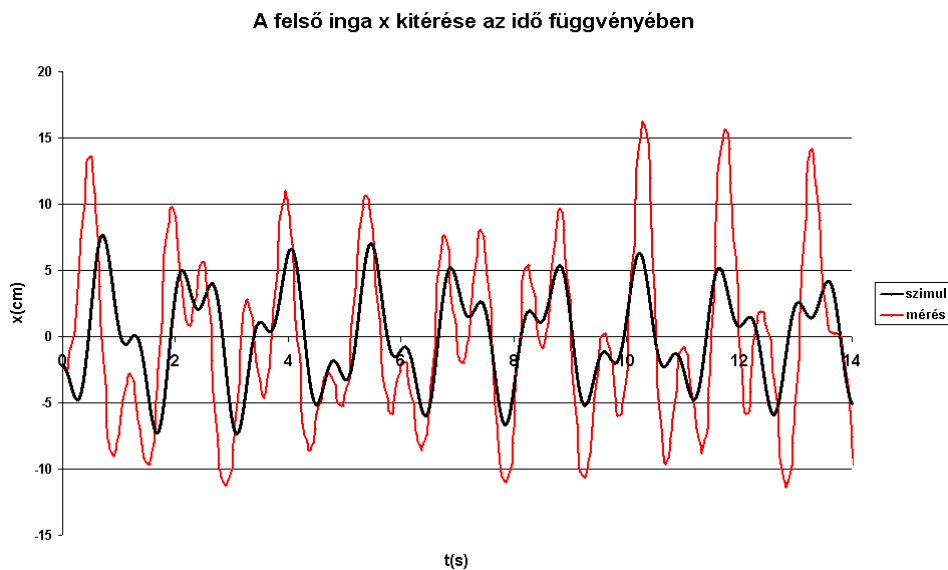
Az így levezetett mozgásegyenletek lineárisak az  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  ismeretlen kitérésekben, a kettős inga kis lengéseit írják le, ezért kaotikus mozgást nem képesek visszaadni [2]. Azért ezeket vizsgáljuk, mert a nagy kitérésekre vonatkozó mozgásegyenletek levezetése messze meghaladja a középiskolai ismeretanyagot. A numerikus eredményeket a mérésekkel csak rövid időkre hasonlítjuk össze, kvalitatív egyezést remélve ezen az időskálán.

A megoldásnál külön ábrázoltuk az alsó és a felső labda  $x$  irányú kitéréseit a méréskor kapott adatokkal (2. fejezet, WebCam Laboratory módszerrel) összevetve. Az alsó labda mozgása gyakorlatilag periodikusnak mutatkozott kb. 1,5s-os periódusidővel, ahogyan ezt az 5.1.2. ábra mutatja.



5.1.2. ábra: A kettősinga alsó ingájának kitérés-idő grafikonja a mozgásegyenlet numerikus megoldásával (kék) és a WebCam Laboratory méréssel kapott grafikon (piros) összevetése 1,5s periódusú lengést mutat. A piros görbe azonos a 2.1.9 ábrán mért kék görbével a 14 s-ig terjedő időintervallumban.

A felső inga mozgásában nem mutatkozik periodikusság. Legfeljebb kváziperiodikusnak nevezhetnénk a labda mozgását. Olyan mozgást végez, ami csak majdnem tér vissza önmagába, azaz melyet legalább kettő periódusidő jellemez. Az 5.1.3. ábrán a kék színű görbe a szimulációval kapott kitérés, ami jellegét tekintve nagyon hasonlít a mérési görbékre. A 14s-os időszakasz több pontján csak az amplitúdó tér el kissé, az intervallum elején egy kis fáziseltérés is mutatkozik.



5.1.3. ábra: A kettősinga felső ingájának kitérés-idő grafikonja a mozgásegyenlet numerikus megoldásával (kék) és a web kamerás méréssel kapott grafikon (piros) összevetése. A piros görbe azonos a 2.1.9 ábrán mért piros görbével a 14 s-ig terjedő időintervallumban. A szimulációs görbe leginkább a jellegében hasonlít a méréssel kapott grafikonhoz, amplitúdója kisebb.

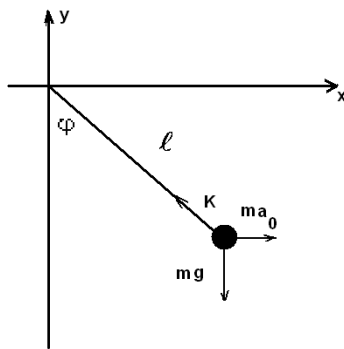
A mért és a szimulált görbék között mutatkozó eltéréseket is megbeszéltük diákkörön, ahogy a mozgásegyenlet levezetését is. Az eltérések egyik okaként a tanulók felvetették, hogy nyilván a méréseinknek is vannak hibái. Ezen a fonalak hosszának, a labdák átmérőjének és tömegének a mérését értették. A hosszakat mm pontossággal, a tömegeket gramm pontossággal mérték. A közegellenállás mellett felléphetett a felfüggesztésnél is egy bizonyos súrlódási erő, mely a szögsebességgel egyenesen arányos, amit a mozgásegyenletben nem vettünk figyelembe. Abban mindenesetre megegyeztünk, hogy az egyenlet numerikus megoldása itt is hatékonyan működött.

## 5.2.A vízszintesen rezgetett felfüggesztésű inga mozgásegyenletének numerikus megoldása, a mérési eredmények és a szimuláció összevetése

Egy merev szárú,  $\ell$  hosszúságú matematikai ingának a felfüggesztési pontját vízszintes síkban,  $A$  amplitúdójú,  $T$  periódusidejű harmonikus rezgéssel mozgatjuk, melynek kitérés-idő függvénye  $x_0(t) = A \cos(\omega t)$  (a körfrekvencia és a periódusidő kapcsolata:  $\omega = 2\pi/T$ ). Mérésünk során  $A = 2,5\text{cm}$  és  $T = 1\text{s}$ , más esetekben  $1,2\text{s}$  volt. Az inga szögelfordulásának potenciométeres mérését az 1. fejezetben tárgyaltuk, mérési eredményeinket a tanulókkal az inga egyenletének numerikus megoldásával hasonlítottuk össze, és vizsgáltuk, mennyire lehetett ingánk mozgása kaotikus.

A mozgásegyenletet a felfüggesztési ponthoz rögzített koordináta-rendszerben írjuk fel, s a rezgetés hatását a gyorsuló koordináta-rendszerben ébredő, időben változó  $a_0(t)$  tehetetlenségi gyorsulással vesszük figyelembe:

$$a_0(t) = -\frac{d^2 x_0}{dt^2} = A\omega^2 \cos(\omega t) \quad (5.17)$$



5.2.1. ábra: A vízszintesen rezgetett ingára ható kötél erő ( $K$ ), a gravitációs erőből adódó  $mg$  és a mozgó koordináta-rendszerben ébredő  $ma_0$  tehetetlenségi erő.

A gyorsulások vízszintes és függőleges komponenseinek előjeles összegével a közegellenállás nélküli egyenletek (tömegegységre vonatkoztatva) [2]:

$$\ddot{x} = -K \sin \varphi + a_0(t), \quad (5.18)$$

$$\ddot{y} = K \cos \varphi - g, \quad (5.19)$$

Itt  $K$  az egységnyi tömege vonatkoztatott kötél erő,  $g$  a gravitációs gyorsulás. Az ábra alapján írhatjuk, hogy:

$$x = l \sin \varphi, \quad (5.20)$$

$$y = -l \cos \varphi. \quad (5.21)$$

Az (5.20) kétszeri deriválásával (a diákkörösök gyakorolhatták a deriválási szabályokat):

$$\dot{x} = l \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad (5.22)$$

majd

$$\ddot{x} = l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi, \quad (5.23)$$

adódik. Teljesen hasonlóan kapjuk az (5.21) kétszeri deriválásával:

$$\dot{y} = l\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad (5.24)$$

$$\ddot{y} = l\ddot{\varphi}\sin\varphi + l\dot{\varphi}^2\cos\varphi. \quad (5.25)$$

Az (5.23) egyenlet mindkét oldalát  $\cos\varphi$ -vel beszorozva:

$$\ddot{x}\cos\varphi = l\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi. \quad (5.26)$$

Az (5.25) egyenlet mindkét oldalának  $\sin\varphi$ -vel szorzásával:

$$\ddot{y}\sin\varphi = l\ddot{\varphi}\sin^2\varphi + l\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi. \quad (5.27)$$

Ezek után összeadjuk az (5.26) és (5.27) kifejezéseket:

$$\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{y}\sin\varphi = l\ddot{\varphi}. \quad (5.28)$$

Felhasználjuk az (5.18) és (5.19) gyorsulásokat:

$$(-K\sin\varphi + a_0(t))\cos\varphi + (K\cos\varphi - g)\sin\varphi = l\ddot{\varphi}. \quad (5.29)$$

A  $K$  kötélrő kiesik:

$$\frac{a_0(t)}{l}\cos\varphi - \frac{g}{l}\sin\varphi = \ddot{\varphi}. \quad (5.30)$$

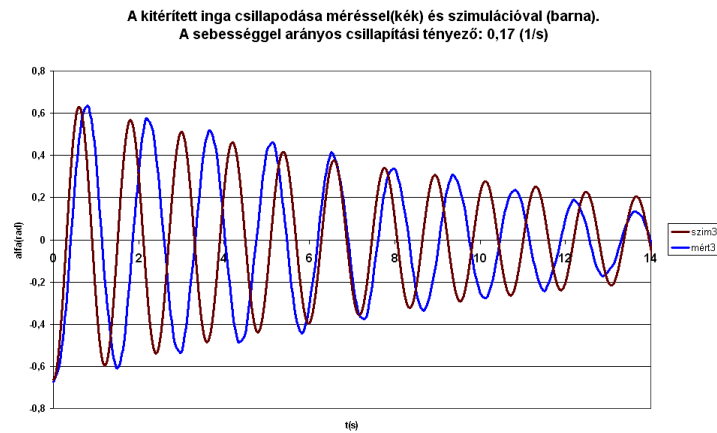
Beírva az  $a_0$  tehetetlenségi gyorsulást, valamint szögsebességgel arányos közegellenállást feltételezve, a megoldandó mozgásegyenlet (tömegegységre vonatkoztatva):

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi - \alpha\dot{\varphi} + \frac{A}{l}\omega^2\cos\varphi\cos(\omega t), \quad (5.31)$$

ahol  $\omega$  a rezgtetés körfrekvenciája

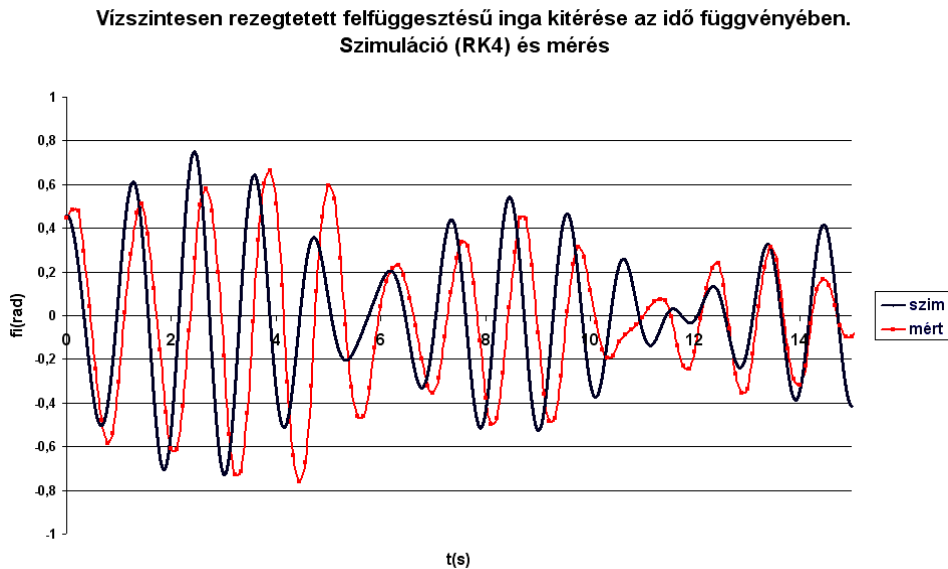
Az ingánk kb. 40cm volt, az  $A$  amplitúdó kb. 2,5cm. A közegellenállási tényező ( $\alpha$ ) 0,2 1/s, értékét a rögzített végű inga csillapodása alapján mértük. Ekkor kikapcsoltuk a lökdösést a szimulációban is, és beállítottunk olyan csillapítási tényezőt, hogy a mérésnél tapasztalhoz hasonló legyen a csökkenés mértéke. Több ilyen összevetést is végeztünk, amelynek alapján a csillapodási tényező 0,17 és 0,22 (1/s) értékeknek adódott. Ennek alapján vettük a lökdösött inga szimulációjánál az alfa tényezőt 0,2 (1/s) értékűnek (5.2.2. ábra).





5.2.2. ábra: A rögzített végű inga szögkitérése (kék) és az (5.31) (rezgetés nélküli) mozgásegyenlet numerikus megoldásával (barna) kapott görbe csillapodása azonos ütemű  $\alpha = 0,17$  (1/s)-os tényezőnél. Más méréskor 0,22-es értéket is kaptunk. Ezek átlagát 0,2 (1/s)-os értéknek vettük a teljes mozgásegyenlet numerikus megoldásánál.  $T=1,2s$  és  $\omega=5,2$  1/s.

A mozgásegyenlet numerikus megoldására a 4.4. fejezetben ismertetett RK4 módszert használtuk ( $dt = 0,05s$ ). A kb. 26 fok kezdeti kitérésnél kapott kitérés (rad)-idő grafikon:

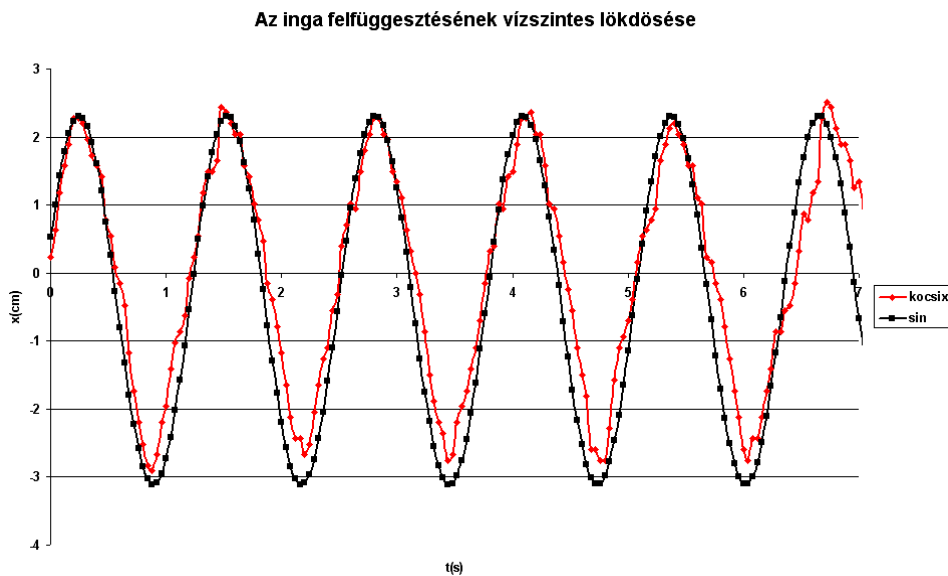


5.2.3. ábra: A vízszintesen rezgetetett felfüggesztésű, kezdetben kb. 26 fokkal, azaz 0,45 radiánnal kitérített inga szögkitérés-idő grafikonja méréssel (piros) és a mozgásegyenlet szimulációjával (kék). A gerjesztés periódusideje 1s, amplitúdója kb. 2,5cm, ingánk hossza kb.40cm, a közegellenállási tényező ( $\alpha$ ) 0,2 1/s volt. A rezgetést jellemző  $\omega$  kb.5,2 1/s volt.

Az 5.2.3. ábrán látszik, hogy a mozgásegyenlet numerikus megoldásával kapott kitérés (kék) aránylag jó egyezést mutat a mérés során kapott szögkitérésekkel (piros). A szimuláció

leginkább a 4-6s és a 10-12s között tér el a méréstől, de a jellege itt is megegyezik. A méréskor megállapított (1.1.16. ábra) Lyapunov exponense  $0,10 \text{ 1/s}$ , így az előrejelzési idő:  $t_p = 1/\lambda = 10\text{s}$ , az általunk vizsgált intervallum tehát éppen az előrejelzési idő nagyságrendje.

A megfigyelt eltérések oka lehet, hogy a rezgés nem volt tisztán szinuszos, az ingát tartó kocsi ugyanis egy merev pálca mozgatta, s a fordulópontokban erősen rántott rajta. A kocsi mozgása, vagyis a gerjesztés csak közelítően szinuszos, az 5.2.4. ábra is mutatja. Előfordulhat, hogy a közegellenállás nemcsak a sebesség első hatványával arányos, de ezt nem vizsgáltuk, mivel az ingatest mérete, mozgásra merőleges keresztmetszete nagyon kicsi volt. A mozgás érzékeny a kezdeti feltételekre, a szimulációban pl. csak két tizedesre egyezik meg az induló helyzet kitérése a méréskor felvett értékkel, tehát már emiatt sem fogja hosszú távon lefedni a szimulációs görbe a méréskor kapott kitérést teljesen egyező paraméterek esetén sem.



5.2.4. ábra: A lökdösött ingánk felfüggesztésének (kocsi) mozgása az idő függvényében (piros görbe) nem tiszta szinuszos függvény (kék). A hegyes csúcsok hirtelen rántásra utalnak. A periódusidő  $T = 1,2 \text{ s}$ , a körfrekvencia (omega) pedig kb.  $5,2 \text{ 1/s}$ .

### 5.3. A három vonzócentrum fölött mozgó mágnesinga mozgásegyenletének numerikus megoldása, a mérési eredmények és a szimuláció összevetése

A három, illetve négy vonzócentrum fölött mozgó mágnesinga kísérleti vizsgálatát, a kapott mérési eredményeket a 3.2. fejezetben írtuk le a mérési elrendezéssel és az alkalmazott módszerrel együtt. Ebben a fejezetben a három vonzócentrumos mágnesinga mozgásegyenletének numerikus megoldását összehasonlítjuk a méréskor kapott grafikonokkal.

A mozgásegyenletet három erőhatást figyelembe véve lehet felírni [3]. Az egyik a gravitációból származó visszatérítő erő, a másik a mágnesek vonzóereje, a harmadik pedig a közegellenállásból származó erő. Ezt a harmadikat a sebességgel egyenesen arányosnak vettük, mivel az inga kisméretű és nem mozgott túl nagy sebességgel.

Mivel a kitérés sokkal kisebb, mint az inga hossza, ezért az inga  $z$  koordinátáját állandónak vehetjük, s a gravitációból származó visszatérítő gyorsulás  $x$  komponensére írhatjuk, hogy:

$$a_{1x} = -g \sin \alpha = -g \frac{x}{l} = -\frac{g}{l} x. \quad (5.32)$$

Az  $y$  komponensre teljesen ugyanígy írjuk fel a mozgásegyenletet. Bevezetve az

$$k_1 = \frac{g}{l}, \quad (5.33)$$

jelölést, általánosan is felírhatjuk az inga  $\vec{r}$  helyvektorával:

$$\vec{a}_1 = -k_1 \vec{r} \quad (5.34)$$

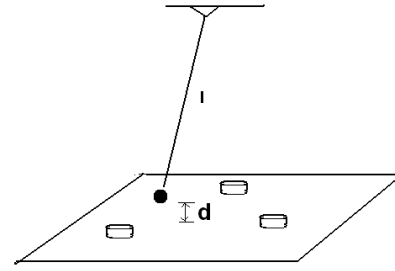
A mágnesek közötti erőhatás távolságfüggését a 3.4. fejezetben ismertetett módon mértük le. A méréseink alapján adódó (az adat pontokra illesztett hatványfüggvény szerint) erő (közelítőleg)  $F = 0,29 \cdot r^{-2}$  alakú, így a mágnesek vonzóerejét dipólus kölcsönhatás helyett Coulomb - szerű kölcsönhatással közelíthetjük, mintha pontszerű mágneses töltések lennének. Az inga mágneses erőből adódó gyorsulása így

$$\vec{a}_2 = k_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (5.35)$$

összetevőt jelent mágnesenként. Az  $\vec{r}$  vektor az ingától az adott mágnesig mutat,  $k_2$  a mágneses kölcsönhatást jellemző állandó. A vektor hosszát térbeli Pitagorasz-tétellel írhatjuk fel figyelembe véve, hogy az inga a mágnesek síkja fölött  $d$  távolságra van (esetünkben  $d = 1,5\text{cm}$ ).

$$r_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2}. \quad (5.36)$$

A kifejezésben  $(x_i, y_i)$  a rögzített mágnes,  $(x, y)$  az inga pillanatnyi koordinátái,  $d$  az inga távolsága a síktól (5.3.1. ábra).



5.3.1. ábra Az  $l$  hosszúságú mágnesinga mágnes  $d$  távolságban van nyugalomban a rögzített mágnesek síkjától ([2] 1.9 ábra alapján)

A súrlódásból adódó gyorsulás aránya a sebesség ellentettjével

$$\vec{a}_3 = -k_3 \vec{v}. \quad (5.37)$$

A teljes gyorsulás

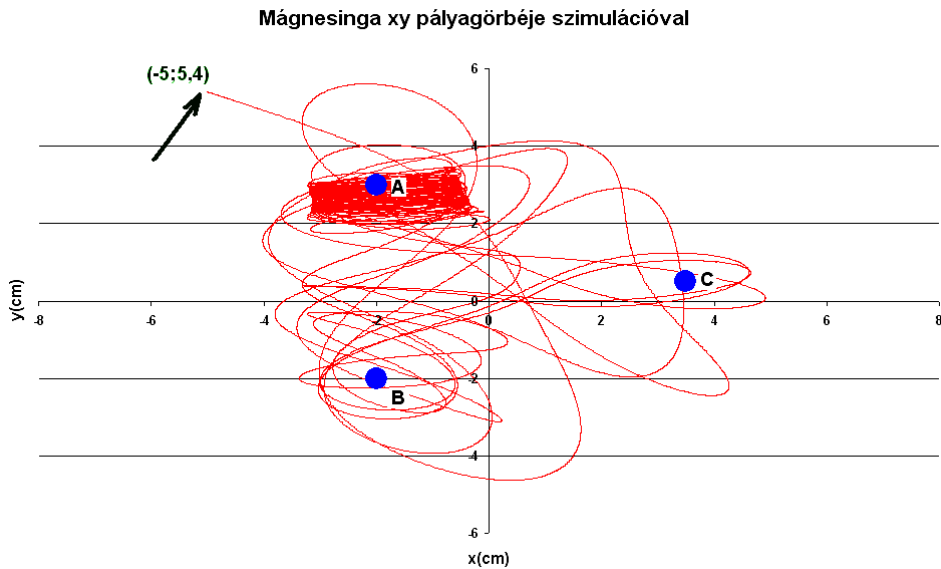
$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \sum_{n=1}^3 \vec{a}_2 + \vec{a}_3. \quad (5.38)$$

Amiből a mozgásegyenlet komponensekben

$$\ddot{x} = -k_1 x + \sum_{i=1}^3 \frac{k_2 (x_i - x(t))}{\left( \sqrt{(x_i - x(t))^2 + (y_i - y(t))^2 + d^2} \right)^3} - k_3 \dot{x}, \quad (5.39)$$

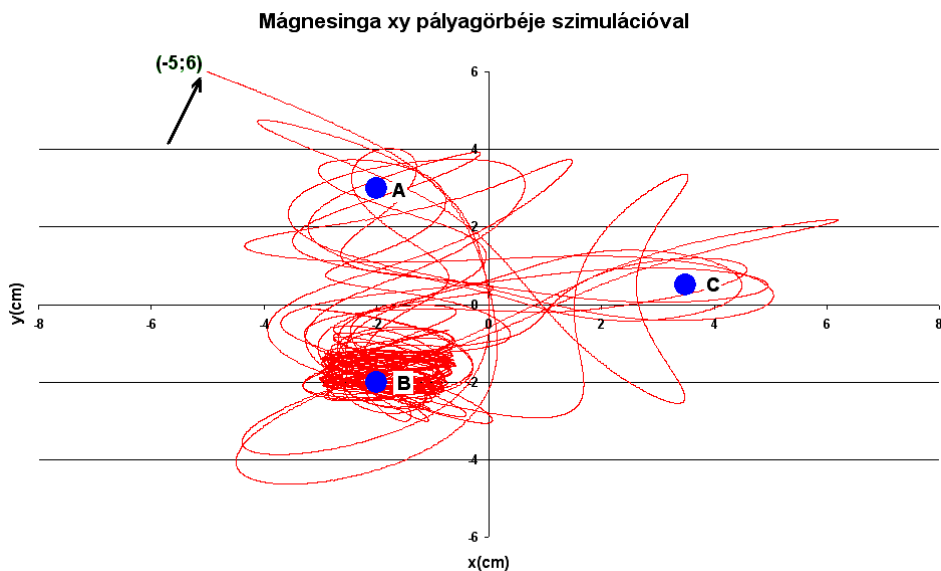
$$\ddot{y} = -k_1 y + \sum_{i=1}^3 \frac{k_2 (y_i - y(t))}{\left( \sqrt{(x_i - x(t))^2 + (y_i - y(t))^2 + d^2} \right)^3} - k_3 \dot{y}. \quad (5.40)$$

Összefoglalva tehát  $k_1$  a visszatérítő hatást jellemzi,  $k_3$  pedig az ingára ható közegellenállásra jellemző állandó. A mágneses kölcsönhatás  $k_2$  együtthatóját a mágneses dipólusok ponttöltés jellegű közelítő erőtvénnye alapján határoztuk meg. A 3.4. fejezetben kimutatott  $F = 0,29 \cdot r^{-2}$  erőtvénny szerint (az  $r$  távolság méterben van) a hatványfüggvény szorzója  $0,29 \text{ Nm}^2$ . Ha ezt tömegegységre számoljuk, vagyis leosztjuk a mágnesinga tömegével ( $0,03\text{kg}$ ), akkor az értéke  $9,6 \text{ m}^3/\text{s}^2$ . A szimulációban ezt az értéket használtuk. A  $k_3$  csillapodási tényezőt úgy próbáltuk kísérletben meghatározni, hogy az inga lengésének csillapodását mágnesek nélkül (és egy, középen elhelyezett mágnessel is) összehasonlítottuk a szimulált három vonzócentrumos mozgással. A csillapodás mértéke alapján csak becsülni tudtuk a tényezőt, melyre 7-10 (1/s) nagyság közötti értékeket kaptunk. A bemutatott szimulációkban a  $k_3 = 8,5$  (1/s) közepes értéket használjuk. Az egyenleteket RK4 módszerrel (4.4. fejezet), numerikusan megoldottuk  $dt = 0,05\text{s}$  lépésközzel, figyelembe véve a méréskor használt paramétereket és kezdeti feltételeket (3. fejezet, 3.2.9. ábra).



5.3.2. ábra: Az A jelű mágnes közeléből indítva ( $x_0=-5\text{cm}$ ,  $y_0=5,4\text{cm}$ ) a mágnésingát, az A mágnes fölött állt meg, a mérési 3.2.9. ábra adatainak megfelelően. Szimulációnkban  $k_1 = g/l = 9,81/0,4 = 24,5 \text{ 1/s}^2$ ,  $k_2 = 9,6\text{m}^3/\text{s}^2$ ,  $k_3 = 8,5 \text{ 1/s}$  volt.

Az inga mozgásának kaotikus jellegét mutatja, hogy a kezdő helyzet kicsi változtatásával az inga pályája jelentősen megváltozik, ahogy ez az 5.3.3. ábrán látható. Amikor a kezdeti y koordinátát mindössze 6mm-rel változtattuk meg, az inga nem az A mágnes fölött, hanem a B jelű fölött állt meg. A 6mm a mérésnél kis eltérésnek számít, viszont a szimulációban ennél sokkal kisebb is lehet.



5.3.3. ábra: Az A jelű mágnes közeléből (3.fejezet, 3.1.12.ábra adatai alapján;  $x_0=-5\text{cm}$ ,  $y_0=6\text{cm}$ ) indítva a mágnésingát, a B mágnes fölött állt meg. Ez a kezdeti feltételekre való érzékenységre utal. Szimulációnkban  $k_1 = g/l = 9,81/0,4 = 24,5 \text{ 1/s}^2$ ,  $k_2 = 9,6\text{m}^3/\text{s}^2$ ,  $k_3 = 8,5 \text{ 1/s}$  volt.

A szimulációval kapott ábrák (5.3.2. és 5.3.3.) jellegükben nagyon hasonlítanak a méréskor kapott ábrákhoz (3.1.9. és 3.1.12.). A kezdő és véghelyzet megegyezik, az inga pedig többször is megkerüli a mágneseket. Az eltérés, ami a görbék pontos alakjában mutatkozik, főleg annak tulajdonítható, hogy nem tudjuk pontosan az ingára ható fékező erőt, a mágneses kölcsönhatás is csak közelítőleg fordítottan arányos a távolság négyzetével. A mozgás rendkívül érzékeny a kezdőfeltételekre, mert néhány tized cm-rel megváltoztatva a kezdőhelyzetet, már másik mágnes felett állapodhat meg az inga. A mért és a szimulált pályák teljes egyezését ezért még teljesen pontosan ismert paraméterek esetén sem várhatjuk el, hiszen a kísérleti és a numerikus kezdőfeltétel kissé biztosan eltér. Számunkra fő eredmény az, hogy a végállapot beállása megfelel a kísérletnek.

A tanulók ezt a mérést szerették a legjobban, és a mozgás szimulációja során azt is megtanulták, hogy nem tudjuk abszolút pontosan reprodukálni a méréskor jelenlévő összes hatást, és kezdeti értékeket. Nagyon tanulságos számukra a mozgásegyenletek felírása, Newton II. törvényének a gyakorlatban való alkalmazása. Megtanulták tudniillik azt is, hogy ha a mozgásegyenlet numerikus megoldásakor némelyik hatást kikapcsoljuk, akkor visszakaphatjuk az idealizált esetet, amit a tanórákon is tanulnak. Ha például a rezegtetett inga esetében nullának tekintjük a gerjesztő amplitúdót és a közegellenállást, akkor az ingamozgás klasszikus szinuszos görbéjét kapjuk. Hasonlóképpen a mágnesinga esetében, a mágneses kölcsönhatást kikapcsolva (a  $k_2$  együtthatót nullának véve), egy csillapodó lengés kitérés-idő görbéjét látják. Nagyon sokat tanulnak a mozgásegyenletek levezetésénél a deriválási szabályok alkalmazásából, volt alkalmuk gyakorolni a negyedrendű Runge-Kutta módszer algoritmusának Excel táblázatkezelőbe való beírását is.

Az 5.1 – 5.3 fejezetek jelentik az 5. számú tézis háttérét.

### **Hivatkozások:**

- [1] W. Lewin: Gerjesztett kettősinga módusai, <http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-03-physics-iii-vibrations-and-waves-fall-2004/video-lectures/lecture-5/>
- [2] Tél T.- Gruiz M.: Kaotikus dinamika, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Bp.2002., 222.o.
- [3] Memorial University of Newfoundland. The Magnetic Pendulum  
[http://www.physics.mun.ca/~cdeacon/labs/3900/magnetic\\_pendulum.pdf](http://www.physics.mun.ca/~cdeacon/labs/3900/magnetic_pendulum.pdf)



### III. RÉSZ: TEHETSÉGGONDOZÁS

*Új törvényekkel, túl a szűk egen,  
új végtelent nyitottam én eszemnek;”*

Babits Mihály: Bolyai

*"Ha hajót akarsz építeni, ne azzal kezd, hogy a munkásokkal fát gyűjtetsz, szó nélkül kiosztod  
közöttük a szerszámokat és rámutatsz a tervrajzra. Ehelyett először keltsd fel bennük az  
olthatatlan vágyat a végtelen tenger iránt!"*

Antoine de Saint-Exupéry





## **6. Fizika népszerűsítése, a kisdíjak érdeklődésének felkeltése (Fizika - show)**

Az eddigi fejezetek tehetséggondozást érintő üzenete úgy foglalható össze, hogy kidolgoztam a jelenségekre, kísérletekre és a számítógép alkalmazására alapozott, a fokozatosság elvén felépülő tehetséggondozó programot, melynek segítségével az érdeklődő kisdíjak (7-8.évfolyam) az egyszerű demonstrációs kísérletek megismétlésétől indulva elvezethető az önálló, nemzetközi szinten is publikálható eredményeket hozó diákkutatásokig. Megmutattam, hogy a középiskolai tananyagban túlmutató, jól kiválasztott problémák megoldása olyan kihívást jelent a középiskolás diákoknak, ami kitartó kreatív munkára ösztönzi őket. A munkát hatékonyan motiválja a határidőkhöz kötött konkrét cél, mint például egy kísérleti bemutatóra, kísérletező versenyre való felkészülés, hazai és nemzetközi pályázatokon való részvétel. A kis csoportokban, kötetlen hangulatban végzett munka során a tanári irányítás mellett döntő szerepe van a csoporttársak együttműködésének (team-munka). A munka során szinte észrevétlenül, de mégis rendkívül hatékony módon fejlődik a tanulók fizikai szemlélete, problémamegoldó képessége, kreativitása. Az évtizedes tapasztalatok alapján kimondható, hogy a kísérletekre alapozott, a fokozatosság elvén felépülő és egyre nagyobb önállóságot kívánó tehetséggondozásban résztvevő diákok reál-műszaki területeken tanulnak tovább.

A tehetséggondozó program résztvevői a 7-12. évfolyamos tanulók köréből kerülnek ki. Az alsóbb korcsoport (13-15 évesek) még nem rendelkeznek kellő tárgyi tudással, megszilárdult fogalomrendszerrel, de tanulmányi előmenetelük, érdeklődésük jelezheti fejleszthető szaktárgyi tehetségüket. Ezek a 7-9. évfolyamos tanulók a tanulásban tehetségesek, általában minden tantárgyból jó eredményt produkálnak.

A diákköri – szakköri gyakorlatban el kell készíteni az eszközt, végrehajtani a kísérletet, mérést, majd kiértékelni a kapott adatokat. Nem lényegtelen, hogy a mérésben, kísérletezésben hogyan lehet a tehetségeket megtalálni, fejleszteni. A leglényegesebb fejlesztendő vonások a precizitás, türelmesség, megfigyelő képesség, koncentráció képesség, fegyelmezett gondolkodás, lényeglátás, kezűgyesség, ötletesség, figyelem-megosztás, kíváncsiság. Szakköri foglalkozásokon élményt jelenthet a tanuló számára akár 1-1 tanórai kísérlet saját kezű kivitelezése is, de sokan hoznak máshol látott, olvasott kísérletet is. A diákkörös munkában jól teljesítő tanulók általában a 11-12. évfolyamról kerülnek ki. Egy-egy probléma kidolgozásánál jól hasznosítják informatikai, matematikai ismereteiket. A mérések

során csapatmunkában egymás kreativitását is fejlesztik. A mérések egy részét a kísérleti versenyfeladatok adják, úgy, mint a Károly Iréneusz Fizikaverseny, vagy az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyén kitűzött problémák vizsgálata. Másrészt a szakköri foglalkozásokon kell megtanulni a számítógépes mérések alapjait, például mozgások web kamerás észlelését. A diákkörös gyakorlatban már a kísérleti elrendezést (például gumiszálra akasztott inga), mérő berendezéseket, adatok értékelést is végzik párban vagy kisebb csapatban. A szokásos út – kimagasló tanórai aktivitás, szakkörös munka, versenyzés, diákkörözés, konferencia – bejárása után a továbbtanulás reál-műszaki területen szinte törvényszerű.

A fenti rövid összefoglalás az előző fejezetekben részletezett diákköri tevékenységekkel együtt jelenti a 6. tézis háttérét.

### **6.1 A Fizika - show rövid története**

A 2000/2001-es tanévben a fizika szakköröseimnek javasoltam, hogy a Károly Iréneusz Fizikaverseny kísérleti fordulójának mintájára, az ott bemutatott kísérleteinkből iskolai és városi bemutatót szervezzünk néhány kiegészítő szakköri kísérlettel. A rendezvény sikerét jelzi, hogy a látogatók kérték, legyen ilyen a következő évben is. A következő bemutatóra ugyan 6 évet kellett várni, de a 2007/2008-as tanév óta minden évben megrendezzük a „show”-t [1]. A kísérletek kiválogatása, tanulói kísérletező csoportok kialakítása, a bemutató programjának megalkotása a fizika részéről teljesen az én feladatom [2].

A 2011-es bemutató az Atommag Centenárium Évének jegyében zajlott 16 kémia kísérlettel kiegészítve a kémia nemzetközi éve alkalmából. 2012-ben a kémia kísérletekhez biológia kísérletek társultak, ezzel komplex természettudományos rendezvénné alakult a show. A kémia és a biológia kísérleti részt kollégáim szervezik. A kémia szakkörösök és fakultációsok *Szabó Attila* kémia szakos kolléga szervezésében és irányításával kémia kísérleteket mutatnak be a fizikashow ideje alatt. A kísérletek óránkénti ismétlésben zajlanak egymás után a zsúfolt kémia előadóban, más részük az udvaron. A biológia szakos kollégák, *Sivák Szilvia* és *Csanádi Zoltán* több teremben is szerveznek játékos élményszerző kísérleteket. A városi televízió minden alkalommal, riportműsorral számolt be esti híradásában a rendezvényekről.

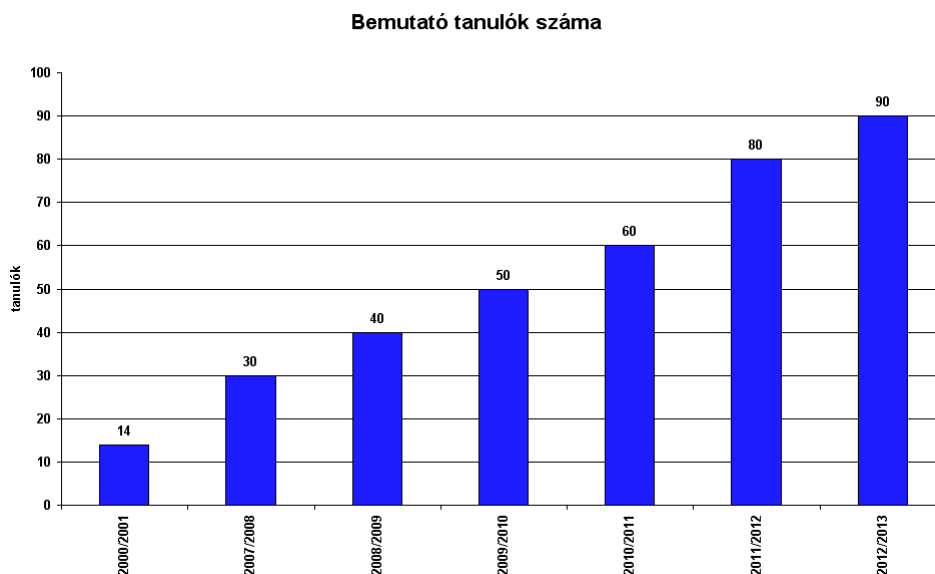
## 6.2. A Fizika - show lebonyolítása, a kísérletezők

A fizika szakkörösök és a Mandelbrot Diákkör tagjai gyűjtik össze a bemutatandó kísérletek nagy részét (6.2.1. ábra), számukra természetes, hogy ők is részt vesznek a bemutatón. Részt vesznek a kísérletek kiválasztásában, kipróbálásában, segítenek a kevés tapasztalattal rendelkező kísérletezni jelentkező társaiknak. A szakkörös és diákkörös tanulók száma átlagosan 20-30 közötti (éves átlag).



6.2.1. ábra. A diákkörös Marci (jelenleg ELTE TTK fizika MSC hallgató) az e/m mérést magyarázza a látogatóknak.

A kísérletek nagy száma miatt, önkénteseket is keresünk iskolánk tanulói között. Az alábbi grafikon összesítve mutatja be az évek során rendezett „fizikashow” rendezvényeken, aktív módon résztvevő tanulók számát (6.2.2. ábra)



6.2.2. ábra. A fizika show (fizika) kísérleteit végző tanulók száma a bajai Szent László ÁMK-ban.

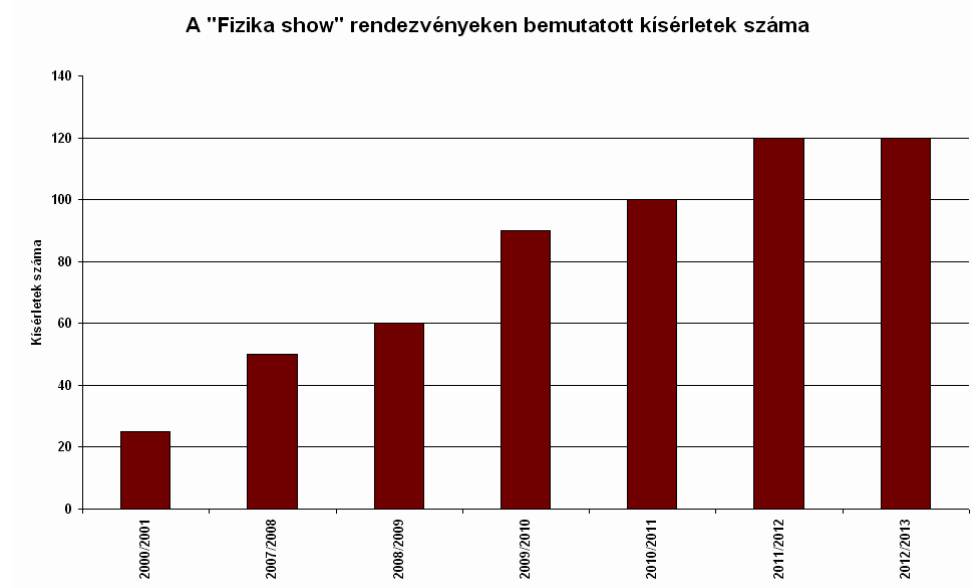
A bemutató diákok között megtalálhatunk alsóbb éves kisgimnazistát (5-8.évfolyam), általános iskolást (7-8.évfolyam), a négyéves évfolyamú gimnáziumi és szakközépiskolai tanulót, és persze felsőbb évfolyamos 8 osztályosokat is.

A kísérletek kiosztásakor figyelembe vesszük a diákok életkorát és lehetőleg az aktuális fizika tanulmányaikat. Csoportokat alakítunk, általában 2-3 főből, utóbbi években 4-5 főből, akik 3-6 kísérletet mutatnak be. A próbákon gyakorolják be a kísérleteket és megbeszéljük a magyarázatokat. A bemutató alatt a tanulók jó hangulatban dolgoznak, rendszeresen ismétlik a kísérleteket és nem keserednek el akkor sem, ha valamelyik nem úgy sikerül, ahogy azt megszokták [3].

### 6.3. A kísérletekről általában

A kísérletek helyszíne a fizikai előadóterem, labor, a díszterem és az udvar. A kísérletek egy része a fizikatanításban alaplámként használt könyvekből való [4], [5], [6] más részük egyéb forrásokból [7], [8], [9], [10].

A bemutatásra került kísérletek skálája a jól ismert, hagyományostól a kevésbé ismert, illetve önállóan fejlesztett kísérletekig terjedt. A kísérletek témakörei: mechanika, elektromágnesség, hőtan, fénytán és atomfizika. A kiválasztás szempontjai: látványosság, kivitelezhetőség, olcsóság, a bemutató tanuló érdeklődése. A bemutatott fizika kísérletek száma az évek során növekedett, de nem célunk a rekordszámok hajszolása (6.3.1. ábra).



6.3.1. ábra. A „Fizikashow” kísérleteinek száma.

### 6.3.1. Mechanika kísérletek

A legnagyobb számú kísérletcsoport a fizika bemutatókon (B Függelék 1-31. és 66-86. kísérletek). Gyakorlatilag bármelyik korosztály számára kiosztható. A kisebbek (7-9. évfolyam) egyensúlyokat, tehetetlenség törvényt, lendület megmaradást mutatnak be, míg a 11. évfolyamos tanulók rezgéseket, hullámokat, hangtani kísérleteket és forgómozgást.



6.3.2. ábra. A nagyon egyszerű, de meghökkentő egyensúlyok hétköznapi eszközökkel.

Évről évre visszatérő sikert hoznak a házilag is kivitelezhető, egyszerű, ám ugyanakkor meghökkentő mechanikai egyensúlyi kísérletek. A legegyszerűbb talán az üdítős (sörös-) doboz egyensúlya. Ebbe előzőleg körülbelül egyharmad magasságig vizet töltünk, majd lassú, óvatos döntéssel körülbelül 45 fokos szögnél megállítjuk a peremén (6.3.2. ábra).



6.3.3. ábra. A perdület megmaradás egy meglepő példája

A közönség körében nagy sikert aratnak az interaktív kísérletek, játékok. Ezek közé tartoznak a mechanika jól ismert perdület-megmaradási kísérletei is. A megpörgetett kerék egy tengelyvégen megtartva is vízszintes marad (6.3.3. ábra), és a forgószámolyos súlyzós kísérletet is 11. évfolyamos szakközépiskolás tanulók mutatják be. Minden fizika show izgalmas műsora az udvaron indított patronos és vizes rakéta (6.3.4. ábra).



6.3.4. ábra. Vizes rakéta indítása az udvaron

### **6.3.2. Hőtani kísérletek**

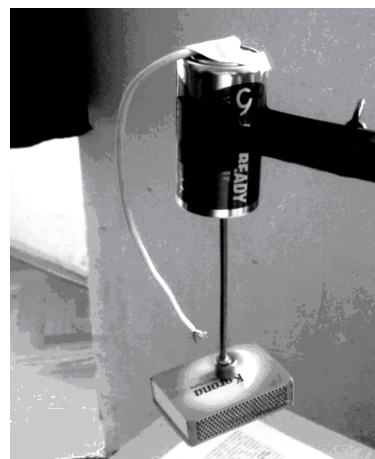
Elsősorban a 10. évfolyamos tanulóknak szánt kísérletek, mivel a tananyag szerint is aktuális számukra. A kísérleteket itt nagyobb csoportban, több tanuló mutatja be (6-8 tanuló) a vízzel, gázzal felszerelt tanári előadó asztalnál. A hőlégballonos kísérlet (6.3.5. ábra) és a pénzről felrepülő lángoló tea filter elbűvöli a közönséget. A főtt tojást beszipantó lombik, a pohárban (lombikban) felemelkedő víz és az összeroppanó sörös doboz demonstrálja a légnyomás nagyságát. A víz nagy fajhőjének hatását bemutató kísérletek is látványosak, mint például a lángoló pénz vagy a tűzálló lufi (B Függelék 59-65. kísérletek).



6.3.5. ábra. Kísérletek hőlégballonnal

### 6.3.3. Elektromosság-mágnesség

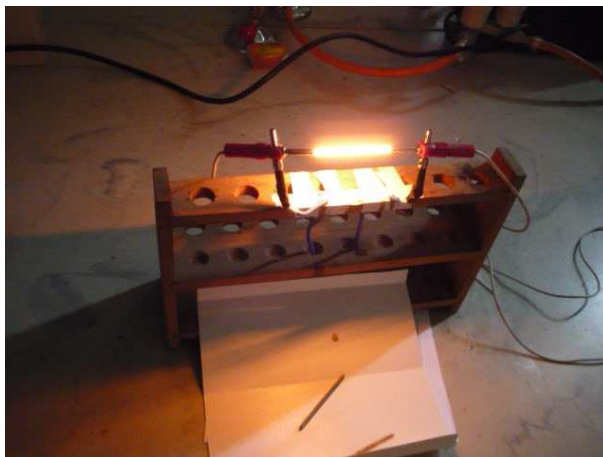
Egyenáram és elektromágneses indukció, az áram hatásai és a mágneses mezővel kapcsolatos kísérletek nagy számban vannak jelen a bemutatókon (B Függelék 45-58. kísérletek). Általában a 10. évfolyamos tanulók készítik elő és mutatják be a jelenségeket. Az áram mágneses hatását jól mutatják a kis házi készítésű egyenáramú motorok. A kis villanymotorok is a fiatalabb korosztály kedvencei. Egyszerű, ún. Homopoláris motorhoz (6.3.6. ábra) szükség van egy erős mágnesre (neodímium), egy csavarra, egy elemre (pl. „góliát”) és vezetékre. A mágnes a csavar fejéhez tapad, míg a csavar hegye az elem negatív pólusához. Ezután egy szigetelésétől megfosztott drótot az elem pozitív pólusához rögzítünk, míg a másik drótvéggel hozzáérünk a mágneshez. Így az áramkör záródik, nagy áram folyik a vezetéken és az erős mágnes a csavarral együtt rendkívül gyors forgásba jön. A forgást még jobban látni, ha a mágnesre gemkapcsot, esetleg gyufásdobozt rögzítünk.



6.3.6. ábra. Egyszerű homopoláris villanymotor

Kiválóan szemlélteti az áram hőhatását a ceruzabélből készített lámpa [9]. A kísérlet tűzveszélyes, szemre ártalmas lehet, de olcsó és házilag is kivitelezhető (6.3.7. ábra).





6.3.7. ábra: Áram hatására a ceruzabél felizzik, majd vakítóan világít

#### 6.3.4. fénytani kísérletek

Az optika témakör kísérletei elsötétített teremben zajlanak. A (kereskedelemben olcsón beszerezhető) zselégolyók fénytörési tulajdonságát használjuk ki a vízben láthatatlan golyók kísérleténél. Olcsón kivitelezhető látványos kísérletek a hangulatlámpa hajzseléből (6.3.8. ábra) (fecskendő, zselé, LED), valamint a LED-ből készült fénycső (szívószál, LED, pezsgőtabletta tubus, elem, kapcsoló). A ceruza egy részének eltűnését a teljes visszaverődés okozza (6.3.9. ábra). Használton kívüli DVD-t reflexiós rácsként használva elővarázsoljuk a szivárvány színeit. Dobozra húzott gumimembránra tükröt erősítve és azt lézerral megvilágítva beszéd kivetítő eszközhöz jutunk, ha a doboz másik oldalán belebeszélünk. Érdekes látvány a kereskedelemben kapható homorú tükrökből álló mágikus doboz, ami a benne elhelyezkedő figurát (nálunk békát) a doboz tetején valódi képként vetíti ki (B Függelék 87-93.).



6.3.8. ábra. Hangulatlámpa hajzselével

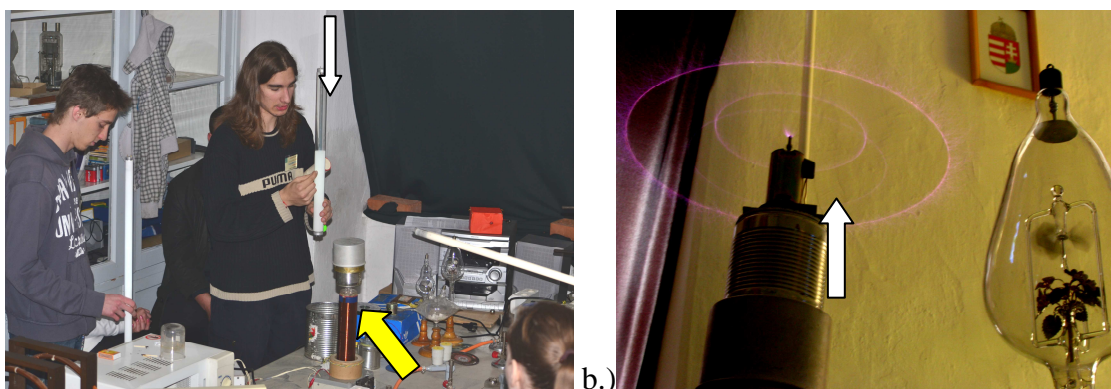


6.3.9. ábra. A teljes visszaverődés miatt eltűnik a ceruza egy része (piros nyíl).

### 6.3.5 Modern fizika, elektronika

A látogatók körében minden évben nagy tetszést aratnak a (mini) Tesla-tekerccsel végzett kísérletek. A működő tekercs környezetében az égők, neon- és kisülési csövek látszólag „áramforrás nélkül” világítanak (6.3.10. a-b. ábra). Az idősebb tanulók inkább a modern technikához kötődő kísérletek iránt érdeklődnek. Ilyenek például a LED-ek és lézerek felhasználásával végrehajtott fénytani kísérletek, számítógépes ingakísérletek, CD-sütés és plazmakészítés a mikróban gyufa lángjával.

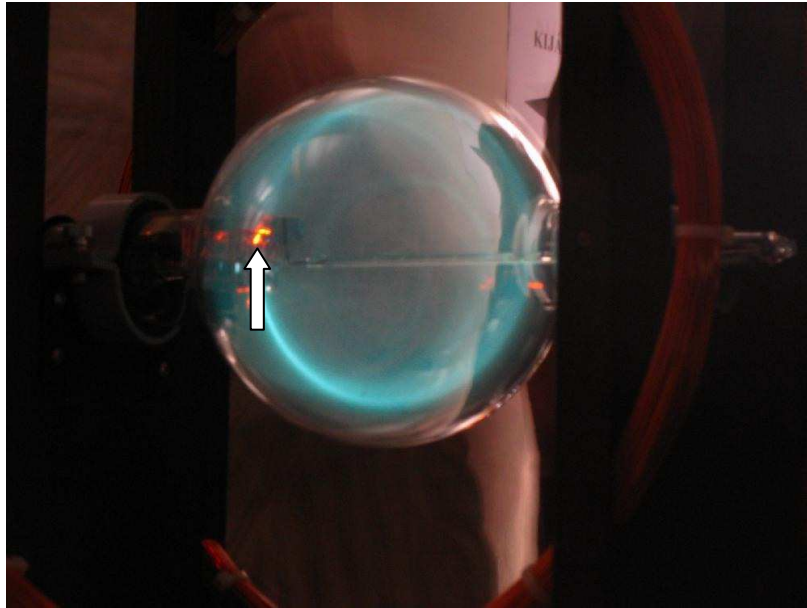
A jelenségkörbe tartozó kísérletek közül kiemelkedő látványosság még a gázkisülési csövek szikrainduktorral, oszcilloszkópon megjelenített rezgésösszeadások (Lissajous-görbék), valamint a rezgések és ingamozgások számítógépes vizsgálata (B Függelék 94-102.kísérlet).



6.3.10. a-b. ábra. Diákkörös tanulóknak Tesla – tekercse (sárga nyíl) neon-és kisülési csövekkel (fehér nyíl) (a) és a kis motorral forgatott drótvégen (fehér nyíl) keletkező csúcskisüléssel (b) a show egyik színfoltja.

Modern fizikához kapcsolódó kísérlet a mágneses mezővel eltérített elektronok az  $e/m$  mérő készülékben (6.3.11. ábra). Az eszköz lényegében egy Helmholtz-tekerccspárban elhelyezett katódcső. A 6.2.1. ábrán a teljes eszköz látható a tápegységekkel, tekercspárral, amint egy diákkörös tanuló bemutatja a közönségnek. A katódból annak felizzítására elektronok lépnek ki függőlegesen lefelé (6.3.11. ábra fehér nyíl). Az alatta elhelyezkedő anód gyorsító hatására az üvegben lévő csökkentett nyomású nemesgáz halvány zöldes fénnel világít. A függőleges elektronnyalábot a Helmholtz-tekerccspár vízszintes (tengely irányú) mágneses mezeje eltéríti, az elektronokat a Lorentz-erő körpályára kényszeríti. A csőben elhelyezett, az elektronok hatására fluoreszkáló skálázott üvegrúddal pontosan mérhető a körpálya átmérője. Ennek leolvasásával, a tekercspár adataival, valamint az anódfeszültség ismeretében meghatározható az elektron  $e/m$  hányadosa. Az eszközzel demonstrálható a Lorentz-erő vektoros tulajdonsága, mivel egy állandó mágnessel (külső

mágneses mező) a mágneses indukció sebességgel bezárt szöge változtatható. Ezzel az elektronnyaláb spirális pályára kerül.



6.3.11. ábra. Elektronok mágneses eltérése az e/m mérő készülékben A nyíllal jelzett izzókatódból kilépő elektronok zöldes fénykibocsátásra készítetik a nemesgáz atomokat, válik a körpálya..

## 6.4. Diákjaink saját fejlesztésű kísérletei

A kísérletezők általában nagyon megkedvelik és megtanulják az általuk bemutatott kísérleteket, főleg ha saját fejlesztésük, munkájuk kapcsolódik hozzá.

### 6.4.1. Reakciós és a Magnus- kocsi

Egyik alkalommal a mechanika készlethez tartozó kiskocsiból egyszerű átalakítással ún. reakciós kocsit készített egy diákkörös. Számítógépből kiserelt ventilátort erősített rá a megfelelő teleppel. A ventilátor működése közben a kocsit a levegő áramlása az árammal ellentétes irányba taszította. Ha merev, a kocsin rögzített lapot helyezett a légáram útjába, akkor a kocsi nem haladt. Ezzel demonstrálta Newton III. törvényét (6.4.1. a-b. ábra). Egy másik diákkörösünk saját fejlesztésű eszköze a forgóhengeres kiskocsi, működése a Magnus-hatáson alapul (6.4.2. ábra).



6.4.1. a-b. ábra. A sok kísérletet kitaláló diákkörös – szakkörös diákunk, Kornél (jelenleg ELTE TTK fizika BSC hallgató) reakciós kiskocsija.

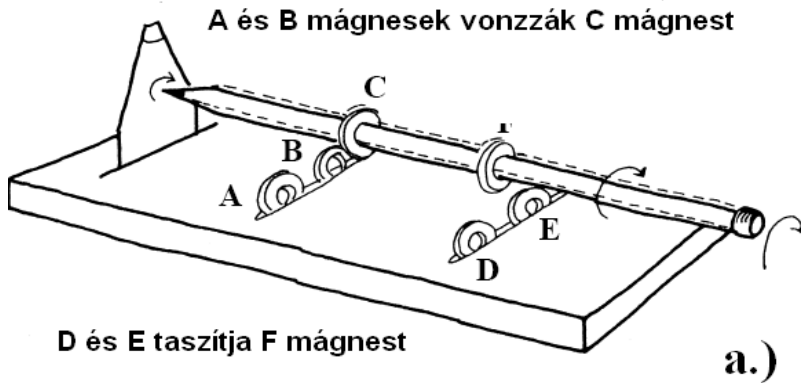


6.4.2. ábra. A diákkörös Ádám (Jelenleg a Kecskeméti Főiskola duális képzésében hallgató) Magnus-kocsija működés közben

### 6.4.2. *Lebegő ceruza*

Egy további ilyen saját továbbfejlesztésű (az alapötlet [10]-ből származik), talán kevésbé ismert kísérlet a lebegő ceruza (6.4.3. a-b. ábra). Egy kemény gumitalpba (megfelel egy régi strandpapucs is, mi ezt használtuk) 5cm hosszú párhuzamos réseket vágunk éles szerszámmal a végétől 2cm, 6,5cm és 12,5cm-re. Az első részbe beillesztünk egy kitámasztó műanyagot (mi egy CD nyolcad szektorát használtuk alsó sarkait megfelelő szögben lemetszve). A második és harmadik részbe 2-2 mágnes gyűrűt helyezünk (3mm vastag, belső átmérő 7,5mm, külső

17,5mm). Két mágnes gyűrűt egy ceruzára erősítünk (ha szükséges szigetelő szalagot ragasztunk a ceruzára). A ceruza hegyét a kitámasztáshoz érintjük. Kis ügyeskedés után a ceruza lebegni fog a mágnesek fölött, hegyével kitámasztva. Célszerű a ceruzára csigavonalban szigetelőcsíkot ragasztani, a végére pedig kis kemény papírlapokat. Így akár egy szívószállal megfújva a lapátokat, forgásba hozható.



6.4.3. a-b. ábra: lebegő ceruza mágnes gyűrűkkel. A terv (a), és a megvalósítás (b).

## 6.5. Néhány kevésbé ismert sikeres kísérletünk

A show-elemekre építő bemutatók kísérletei között az utóbbi években helyet kaptak a számítógéppel segített méréses, elemzéses kísérletek. Ezek ingamozgásos (fonálinga, csatolt ingák, mágneses inga, fizikai inga) és rezgéseket bemutató (harmonikus rezgés, kényszerrezgések) kísérletek. A számítógépes megjelenítés és mérés alapvetően 2 módszerre épül, ami egy web kamerás mérő szoftverrendszer, és egy wiifiz nevű rendszer infra érzékelővel, szoftverrel. A 2012-es bemutatón helyet kapott egy diákkörösök által kifejlesztett

eszköz is, amelynek segítségével forgó rendszerben vizsgálhatók a folyamatok és a mozgások.

### 6.5.1. Varázslatos golyók

Egyik meglepő és egyszerűen kivitelezhető kísérlet a *varázslatos golyók*. Szakkörön, bemutatókon egyszerűen elvégezheti bárki, anyagköltsége nem jelentős, könnyen beszerezhető.

A kísérlethez fogtunk egy nagyobb, lezárható fedelű műanyag hengeres edényt (megfelel egy nagy tejfölös edény is). Szükséges még a végrehajtáshoz egy pingpong labda, valamint egy kb. azonos méretű vas- vagy acélgolyó. Vásároljunk annyi pattogatott kukoricát, hogy az edényt kb.  $\frac{3}{4}$  részig meg tudjuk vele tölteni. A kukoricát nem kell kipattogatni, viszont meg kell többször mosni mosószerrel, hogy a szemek ne tapadjanak össze. A megszáritott kukoricát töltjük az edénybe. Tegyük bele a pingpong labdát és nyomjuk bele alaposan a kukoricába. Ezután helyezzük a szemek tetejére az acélgolyót, ami kissé besüpped, de nem süllyed el (6.5.1. ábra).

Tegyük rá a tetejét (előtte mutassuk meg a hallgatóságnak, hogy ott a tetején a nehéz golyó, de lehetőleg ne tudják, hogy alul benne pingpong labda is van), majd mixelős mozdulatokkal alaposan forgassuk meg az edényt, hogy mozogjanak a szemek. A fedél levétele után a közönség csodálkozva észleli, hogy az acélgolyó „átváltott” pingpong labdává (6.5.2. ábra). A magyarázat egyszerű fizika, hiszen az acél (vas) sűrűsége sokkal nagyobb, mint a kukoricáé, a pingpong labda sűrűsége jóval kisebb. A szemek közti súrlódás átmenetileg gátolja a nehéz golyó lesüllyedését és a könnyű labda felemelkedését. A rázás, mixelés hatására a szemek elcsúsznak egymáson, ami lehetővé teszi a golyók cseréjét.



6.5.1. ábra. Acélgolyó a pattogatott kukoricán...



6.5.2. ábra. Rázás után helyet cserél a pingpong labdával

### 6.5.2. Borautomata

Egyszerű, mégis mehökkentő kísérlet az ún. *Borautomata*. A víz és a levegő kölcsönös kiszorításával lehetőség nyílik italautomata előállítására. Ehhez két egyforma műanyag palack

(mi fél literes palackokat használtunk) függőleges oldalfalának felső részén, azonos magasságban, lyukat fúrunk. Ezekbe a lyukakba vízszintes helyzetben egy-egy rövid, kis belső átmérőjű üvegcsövet ragasztunk. A két csődarabot összekötjük egy rövid gumicsővel. Lehet egy keményebb műanyag cső is, fontos azonban, hogy a palack falánál jól szigeteljünk, pl. szilikonos tömítővel! Az egyik palackot lezárjuk egy átfúrt dugóval. A dugón keresztül vezetünk (jó szigeteléssel) egy, a felső részén tölcsérben végződő függőleges helyzetű hosszú üvegcsövet, amely leér egészen a palack aljáig. A másik palackot az összekötő csővel szemközti oldalfalának alsó részén átfúrjuk. Ebbe a lyukba egy olyan csövet ragasztunk, amely derékszögben meghajlik és felfelé irányul. A palack kiöntő nyílása alatt körülbelül 5 cm-rel meghajlítjuk a csövet úgy, hogy néhány cm hosszan vízszintesen fusson, majd ismét derékszögben, kifolyó nyílásával lefelé fordítjuk. A nyílás alá egy átlátszó üvegpoharat helyezünk. A második palackot a felső cső nyílásáig töltjük festett vízzel (vörösborral).

Ezután lezárjuk a palackot a csavaros kupakjával. Az egész elrendezést lefedjük egy kartonpapírral (dobozzal) úgy, hogy csak a tölcsér és a második palack kifolyónyílása legyen látható. Töltsünk most vizet a tölcsérbe! Meglepődve tapasztaljuk, hogy a „bor automatából” festett víz (vörösbor) folyik a pohárba. Éppen annyi vörösbor lesz a pohárban, mint amennyi vizet a tölcsérbe töltöttünk. Az első palackba töltött víz térfogatával egyenlő térfogatú levegő áramlik át a másik palackba (6.5.3. ábra). Ez a levegőmennyiség ugyanakkora térfogatú vörösborra nyom át a pohárba. Ilyen módon tudta Héron a vizet borrá változtatni.



6.5.3. ábra. A borautomata titka

### 6.5.3. *Nem newtoni folyadék*

Sokak számára internetről ismert az úgynevezett nem newtoni viselkedésű folyadék [11]. Ezek viszkozitása változik a folyadékrétegeket elcsúsztató feszültséggel. Készítettünk ilyen folyadékot. Kukoricakeményítő és víz 4:5 tömegarányú keverékét használtuk. Ha lassan nyúlunk bele a folyadékba, akkor az sűrű folyadékként viselkedik. Ha viszont ujjunkkal vagy öklünkkel hirtelen akarunk belecsapni, rugalmas közegként viselkedik. A látogatók élvezettel, hitetlenkedve játszanak vele. Fóliával leterített hangszóró membránjára helyezve érdekes viselkedést mutat bizonyos frekvenciákon (nálunk 80Hz körül tapasztaltunk ilyet). Mintha élőlény lenne, karok "csápolnak" ki a folyadékból (6.5.4. ábra).



6.5.4. ábra. A keményítő oldatot hangszórón rezegtetve furcsa csápolásba kezd.

### 6.5.4. *Plazmagömb*

A kereskedelemben beszerezhető plazmagömb látványosan csábítja a fiatalokat a fizikához. A plazmagömb elképesztő fényjelenségeket mutat és a jelenségek megértése felöleli a fizika nagy részét. Az eszköz egy nagyobb (kb. 20-30cm átmérőjű) üveggömbből és belsejében egy kis üveggömbből áll, általában csökkentett nyomású közömbös gázzal (pl. neon) töltve. A plazmagömb belsejében levő, középpontosan beépített üveggömb szolgál az elektromágneses tér keltésére, ahonnan a kisülések elindulnak a gáztéren át a külső ballon falára.

A plazmagömbök indukciós gerjesztésére viszonylag alacsony frekvenciatartományt alkalmaznak, az ultrahang-frekvencia alsó, már nem hallható részében. A kísérleti és egyedi berendezések, az olcsó megvalósítás miatt, 15-16 kHz-en üzemelnek. A generátorból a



nagyfeszültségű, jól szigetelt vezetéken a kiscső belseje az üveggömb belső tere az üveggömb képzett kondenzátor külső fegyverzete, míg a másik oldalon a gömb háztere a fegyverzet. Ezen a kondenzátoron kerül a nagyfeszültség a gáztérbe, amelyet az elektromágneses tér ionizál. A vezetővé vált gáztérben az áramkör záródik, a külső gömb belsejéig a külső ballong üvege ismét kondenzátort képez. A külső fegyverzet maga a légtér, amely az itt ható kis gerjesztés miatt vezet. Természetesen a levegőn történő földelés csak a fonalszerű kisülés kialakítását biztosítja, azonban a külső ballongfelület kézzel történő megérintésekor az egyensúly felborul.

Testünk, amely a levegőnél sokkal jobban vezet, az érintési ponton egy kisebb ellenálláson keresztül földeli a gömb külső környezetét, eltorzul a nagyfrekvenciás tér és a felületi potenciál, amelynek az eredménye a megvastagodott kisülés az érintési hely felé. A kisülésben az áram erőssége annyira megnő, hogy kezünk a ballong melegedését nem bírja hosszabb idő után elviselni. Optimálisan beállított generátor esetén az érintés nem ráz, de a kezünk és a ballong között 12 mm távolságban szikrákat észlelhetünk.

Ha az üveggömb külső felületére fémet, pl. alufóliát fektetünk, a fém külső felületén megjelennek az üveg külső felületén keletkező indukált töltések. Az alufóliára ezután szigetelőt (pl. papírlapot) fektetünk, akkor ezzel egy újabb kondenzátort hozunk létre (a másik fegyverzet a levegő). Ha egy tüvel közelítünk a papírlap (dielektrikum) felé, úgy a nagy télerősségnek köszönhetően, szikrázást, csúcskisülést láthatunk (mi földelünk a tűn keresztül). A kisülés árama, energiája olyan nagy lehet, hogy a papírra akár szöveget is égethetünk. (6.5.5. ábra)



6.5.5. ábra. A plazmagömbre tett alufólia és papír kondenzátort alkot a földelt tüvel

### 6.5.5. Lángoló pénz

A víz nagy fajhőjével kapcsolatos kísérlet. Víz és etanol 50 tf %-os elegyét készítjük el, melybe papírpénzt áztatunk (minél nagyobb címletű, annál meghökkentőbb), melyet – az oldatból csipesszel kivéve - meggyújtunk. Az alkohol lángol a pénz felületén, azonban a víz nagy fajhője nem engedi, hogy a papírpénz lángra lobbanjon. A láng kialszik, a pénz sértetlen. Akik nem ismerik a víz fajhőjének szerepét, azok számára sokkoló a kísérlet eredménye (6.5.6. ábra).



6.5.6. ábra. A papírpénz épségének titka a víz nagy fajhőjében rejlik. Minél nagyobb címletű a pénz, annál sokkolóbb a látvány.

### 6.5.6. Inga forgó rendszerben

Számítógépes mozgásvizsgálatok is szerepet kapnak a fizika kísérleti bemutatón. A 2012-es bemutatón két diákkörös tanuló olyan saját fejlesztésű rendszert mutatott be, mely a mozgásokat forgó rendszerben vizsgálja. A rendszer egy egyenáramú motor által forgatott kerékpár kerékabroncsból, hozzá rögzített indító elektromágnesből és vas nehezékekkel készített ingából áll (6.5.7. ábra, kék nyíl). Az abroncsra felül egy vezeték nélküli web kamerát rögzítettek (6.5.7. ábra, fehér nyíl), ezáltal a forgó rendszerben felülről rögzíthetők a mozgás adatai. A kamera bluetooth rendszerrel közvetíti a rögzített adatokat (idő, helykoordináták). A rendszer alkalmas arra, hogy akár a (első fejezetben tárgyalt) wiifiz rendszerrel, akár a WebCamLaboratory szoftverrel elemezze a mozgást. Természetesen az álló keretre rögzített kamerával a laboratóriumi rendszerben is elemezhetővé válik a jelenség.



6.5.7. ábra. Diákkörösök saját fejlesztésű eszközével egy forgó rendszerben vezeték nélküli webkamerával és a WebCamLaboratory szoftverrel vizsgálja Fehér Ádám diákkörös tanuló (jelenleg a Kecskeméti Főiskola hallgatója) egy fonálinga lengését.

## 6.6. A látogatók

A látogatók többsége tanuló, nemcsak iskolánkból, hanem Baja és környéke más iskoláiból is jönnek csoportok, osztályok. Felnőtt látogatóink elsősorban tanárok és a kísérletezők ismerősei. A fizika kísérletek között számos olyan is bemutatásra került, melyek már korábbi bemutatókon is láthatott a közönség. Mivel a közönség összetétele változik, sokan látnak számukra új kísérleteket. A leghálásabb közönség az alsó tagozatosok és az óvodások, akik őszinte érdeklődéssel figyelik a kísérleteket és – amivel lehet – játszanak is

A vendégek tájékoztatását és irányítását a bemutató alatt házigazda tanulók végzik, akik a vendégkönyvi beírásra is felhívják a figyelmet. A vendégek számát az előzetes bejelentkezések, vendégkönyvi bejegyzések alapján becsüljük (6.6.1. ábra). Néhány bejegyzés:

„Nagyon érdekes volt és megszerettette velem a kémiát és fizikát.”

„Szerintem fenomenális volt ez a fizika show!”

„Igaz, hogy még ötödikes vagyok, és nem tanulok kémiát és fizikát, de nagyon érdekelt, és nem csalódtam, hogy eljöttem.”

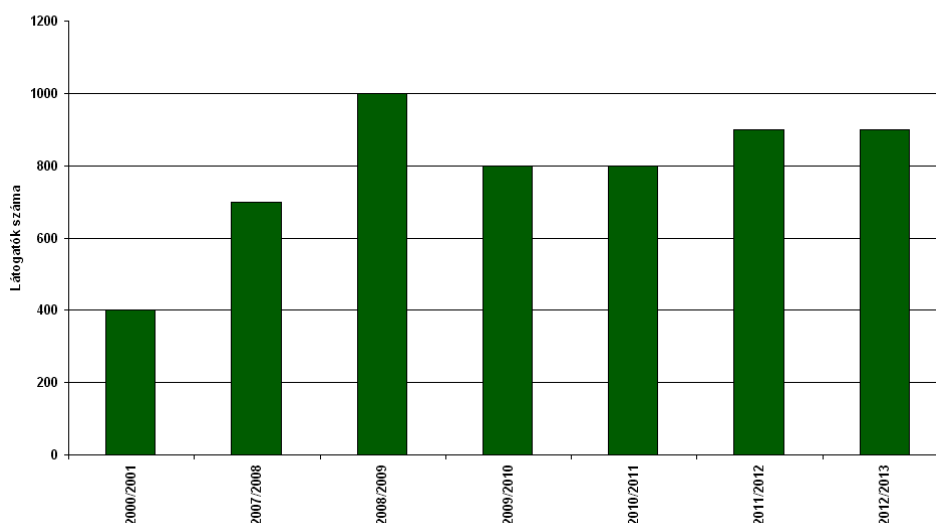
„Király volt a só”!

„I love fizika „

„Felejthetetlen élmény volt! Eddig csak néző voltam, de most a fizika show része voltam!”

„Őszinte örömet okozott, hogy láttam a nézőkön, hogy tetszett nekik.”

A "Fizika show" rendezvények látogatóinak száma



6.6.1. ábra. A bemutatók látogatottsága az előzetes jelentkezés és a vendégekönyv alapján. A kiugró nézőszámú 2008/2009-es show két napos volt

A kísérleti bemutatókról további képek, videók a <http://www.fizikashow.hu/main.htm> weboldalon található.

## 6.7. A „show” hatásai

### 6.7.1. Óvodások, kisiskolások

Iskolánk, mint Általános Művelődési Központ, rendelkezik óvodával és alsó tagozatos általános iskolával is. Minden fizika show nagy izgalmat vált ki a legkisebbek körében. Örömmel, izgatottan járják végig a helyszíneket, amit csak lehet, ügyesen ki is próbálnak. Kíváncsiak, érdeklődők, kérdeznek. Ezek az élmények jó hatással vannak további érdeklődésükre, sokan közülük otthon is megismétlik szüleiknek a kísérletek egy részét. Nagy siker koronázza a légnyomás hatására hangos durranással beszakadó celofánt is (bár az ovisok egy része fél tőle). Az óvodás korosztály és az alsó tagozatosok szeretnek játszani a hatalmas szappanbuborékokkal (6.7.1. ábra), lufikkal, de a szívószálból készített sípokat is csodálják, lelkesen fújják. A látogatást követően az óvodában és a tanítási órákon sokáig beszélnek a látott kísérletekről.



6.7.1. ábra. A hálás és játékos közönség; iskolánk ovisai minden „fizika show”-t megnéznék.

A bemutató diákkörös és szakkörös „nagyok” a kisgyerekek számára mondanivalójukat maguktól átformálják, minden esetben egyszerű, játékos formában magyaráznak, interaktivitásra törekednek (6.7.2. ábra).



6.7.2. ábra. A diákkörös Máté (jelenleg BME VIK hallgató) játékosan magyaráz egy kisiskolásnak

### **6.7.2. Kommunikáció, kapcsolatok**

A mai gyerekek nagy része kommunikációra képtelen vagy kommunikációs zavaroktól szenved. A beszéd, a beszélgetés már nem tartozik a tanult készségek közé (sem otthon, sem egymással nem beszélnek eleget). A bemutató tanulók jól begyakorolják azt, hogyan kell saját szavaikkal adott jelenségről érthetően beszélni, kontaktust teremtenek a látogatóval, az

érdeklődőkkel. A bemutatót végző csoporton belül munkamegosztás és kötetlen, játékos hangulat alakul ki már a kísérletek próbái alatt. Névkartyás kitűzőik erősítik bennük az összetartozást, büszkén viselik. Diáktársaiknak, tanáraiknak, általában a tudás magabiztosságával magyaráznak.

### **6.7.3. Tantárgyi attitűd, érdeklődés**

A kísérleteket bemutató tanulók tantárgyszeretete határozottan nőtt, ez fizika érdemjegyeiken is látszik. A kísérleti bemutatókon gyakran az elméleti tananyaggal, feladatokkal nehezebben birkózó diákok is eredményesen vesznek részt. A tapasztalatok szerint a részvétel szinte mindig pozitív hatással van a tantárgy iránti attitűdre. A sikeres bemutatót követően jelentősen javul a kísérletek iránti érdeklődésük, (gyakran saját módosítási javaslataik vannak, saját készítésű kísérleteket hoznak az órára, nő a kísérletes fizikaversenyek, pályázatok iránti fogadókészség). A kísérleti munka sikere általában pozitívan hat a diákok tanórai teljesítményére, önbizalmuk, órai aktivitásuk nő, érdeklődésük fokozódik, és mindez az osztályzatok javulásában is kimutathatóan megjelenik. Fizika érdemjegyeik átlagban akár egy egészet is javul a bemutatót követő év végén az előző évi eredményhez viszonyítva. Sokan közülük 2-3 bemutatóban is részt vesznek. Jobban figyelnek az interneten fellelhető kísérletekre, új tudományos felfedezésekre. Megnőtt a szakkör iránti érdeklődés is. A szakköri létszám az utóbbi években folyamatosan nőtt. A kezdeti (2007-es) 14-15 fő 2010-re duplájára növekedett. Az utóbbi években a kísérletezők közül sokan választottak természettudományos, illetve a fizikával kapcsolatos pályára irányuló továbbtanulást. A kísérletező tanulók jelentős hányadát képviselő fizikaszakkörös tanulók közül az utóbbi öt évben végzetek közül nyolcan műszaki (mérnök), ketten informatikus, négyen fizika szakirányban tanultak tovább, döntésükben egyik meghatározó tényező volt a szakköri-diákköri munka és a „Fizika-show”.

A kísérletezős gyakorlatnak köszönhető több komoly diákköri siker is (TUDOK, 2009. Sárospatak 1. díj, Béni Kornél (ELTE fizika Bsc) és Pusztai Máté (BME VIK)). A másfél évtizedes diákköri tevékenység alatt 2 ízben is szerepeltek tanulóink nemzetközi versenyen (Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye - Bustya Áron, 2005. Winterthur, Svájc, jelenleg informatikus és Lájér Márton Kálmán, 2010. Tienjin, Kína, jelenleg az ELTE TTK fizikus Msc hallgatója). 1999 óta iskolánk minden évben képviselteti magát a KPSZTI által (a katolikus iskolák számára) szervezett Károly Iréneusz Országos Fizikaversenyen. A fizika szakköri és a diákköri munkának köszönhetően minden évben sikerült valamilyen (általában

kísérletes munkához köthető) díjat elhozni diákjainknak. Ennél is fontosabb, hogy több olyan volt diákkörös van, aki a természettudományos- műszaki pályán találta meg élethivatását. A korábbi szakkörösök és diákkörösök általában műszaki pályára (építész-, építő-, gépész-, villamos-, informatikus-, vegyész-mérnök) készülnek, de akad köztük fizikahallgató, sőt fizika tanári pályára készülő tanulónk is. Három ilyen volt fizika szakkörösről van tudomásom, az egyik, már fizikát tanít a pécsi Nagy Lajos Gimnáziumban, a másik az idén – 2014-ben – érettségizik és fizika-német szakos tanárnak készül. A harmadik – Béni Kornél, aki 5 Károly I. versenyen is eredményesen vett részt – jelenleg kisiskolások számára tart fizikakísérletezős foglalkozásokat.]

A 6.1-6.7 fejezetekben leírtak jelentik a 7. tézis háttérét.

### **Hivatkozások:**

- [1] Jaloveczki J.: Kétnapos "fizika-show" az iskolában, Fizikai Szemle, 2008. szeptember, 309.o.
- [2] Jaloveczki J.: Fizika kísérleti bemutató avagy: Fizikashow újratöltve az iskolában, Fizikai Szemle, 2010. június, 215.o.
- [3] Jaloveczki J.: »Fizikashow«, a fizika népszerűsítésének eszköze, Fizikai Szemle 2012/11. 388.o.
- [4] Jaloveczki József: Hetedíziglen "Fizikashow" a bajai Szent László ÁMK-ban, Fizikai Szemle, 2013. december, 427.o.
- [5] Juhász A.: Fizikai kísérletek gyűjteménye 1. Arkhimédész Bt. - Typotex Kiadó, Bp., 1996. 69-79.o.,113.o.,115-116.o.,229-232.o.,269-272.o.
- [6] Juhász A.: Fizikai kísérletek gyűjteménye 2. Arkhimédész Bt. - Typotex Kiadó, Budapest, 1995.29-32.o.,45.o.,58.o.,65.o.,85.o.,195.o.,221-232.o.,242-243.o.,270-273.o.,302-305.o.
- [7] Juhász A.: Fizikai kísérletek gyűjteménye 3. Arkhimédész Bt. - Typotex Kiadó, Budapest, 1996. 204-214.o.,112.o.
- [8] C. Siddons: Fizikai kísérletek, Novotrade kiadó, Sulikomp, 1991.11.o.,13.o.,31-33.o.,36-39.o.,50-53.o., 120-122.o.,129-130.o.,153-160.o.,172.o.,183-184.o.,229-230.o.
- [9] [http://www.indavideo.hu/video/Vilagito\\_Ceruza](http://www.indavideo.hu/video/Vilagito_Ceruza)
- [10] <http://www.arvindguptatoys.com/toys/levitation.html>
- [11] <http://scifun.chem.wisc.edu/homeexpts/lumpyliquids.ht>

### Összefoglalás

A középiskolai fizikaoktatásban szinte kizárólag a fizika lineáris összefüggésekkel többé-kevésbé jól leírható területei szerepelnek. A gyakorlatban előforduló olyan fizikai problémák, melyek nem oldhatók meg zárt alakban, elemi szinten, azok vagy teljesen kimaradnak, vagy csak durva elhanyagolásokkal kerülnek be a tananyagba (pl. szabadesés és hajítások levegőben).

A számítógépek elterjedésével olyan jelenségeket is lehet vizsgálni, melyek a középiskolai tanulók számára érdekesek lehetnek. Az iskolai kísérletezés, legyen az tanári demonstrációs vagy a diákok által tanuló kísérletként végzett, pozitív hatását mindenki elismeri, mégis egyre jobban háttérbe szorul.

Dolgozatomban annak a tanórán kívüli gyakorlatnak a néhány szeletét ismertettem, melyet fizika szakköri foglalkozásokon és tudományos diákköri munkaként végeztünk diákjaimmal az utóbbi hat évben a bajai Szent László Általános Művelődési Központ Gimnáziumában.

Az első három részben ízelítőt adtam a számítógép segítségével végrehajtott tanulói mérésekből, melyek ugyan ismert módszereken alapulnak, de nemlineáris folyamatokra történt középiskolai alkalmazásuk újdonságnak számít. Ezeknél a gyakorlatoknál a tanulók duplán motiváltak, mivel a kísérletek, mérések kivitelezését összekapcsolják a számukra oly ismerős és mindennapos gyakorlatban használt számítógéppel. Átérik azt az élményt, hogy amit a képernyőn látnak, az nem egy virtuális világ, amit ügyes programozók hoztak létre, hanem ők irányítják a folyamatot, állítják be a mérés kezdeti paramétereit, jelenítik meg a mozgás különböző jellemzőit grafikonokon.

Dolgozatom negyedik részében példákkal illusztrálva mutattam be azokat a numerikus módszereket, melyeket a tanulókkal a mozgásegyenletek számítógépes megoldására használunk diákkörön. Kitértem olyan mozgások egyenleteinek számítógépes megoldására és a megoldások grafikus megjelenítésére, melyek elméletét a tanórákon csak radikálisan leegyszerűsítve tudjuk tárgyalni. A módszer szemlélete már az 1980-as évek közepén megjelent a fizika tanításában, most a számítógéppel segített fizikaoktatásban reneszánsza kezdődhet, a tantárgy megszerettetésének inspiráló eszköze lehet.

Megismerik a módszerek hatékonyságát és korlátait, hibáját. Ebből a szempontból különös jelentőséggel bír a dolgozat 5. fejezetében bemutatott mérés és szimuláció összehasonlítása. Megtanulják, hogy egy adott mérés során nem tudjuk az összes hatást és kezdeti feltételt pontosan figyelembe venni, de a probléma megoldása jól közelíthető az



egyenletek és a numerikus módszer pontosításával. Megismerik és megértik a fázistérbeli ábrázolást, az attraktorok fogalmát. A mérések, szimulációk elemzése során megtanulják, hogy a dinamikai káosz megjelenése egyáltalán nem ritkaság a valóságos mozgásoknál. Számtalan ingakísérletet végeztek diákköri (és sokszor szakköri) munkában. Ezek közül a kettős fonálinga, a rezgetett felfüggesztésű inga és a mágnes ingamérésekről, elemzésekről számoltam be az első három és az ötödik fejezetben.

A doktori disszertációban összefoglalt tehetséggondozó munka eredményességét a diák sikere igazolja. A hatodik részben ismertetem, hogy az évi rendszerességgel megrendezett városi „Fizikashow” népszerűsége a diákok és a város lakossága körében is növekszik. A szakkörös és diákkörös tanulók munkáikkal rendszeresen vesznek részt regionális és országos pályázatokon, versenyeken, diákköri konferenciákon

Iskolánkban, a bajai Szent László Általános Művelődési Központban, a természettudományos képzésnek és tehetséggondozásnak kiemelt szerepe van. A fizika szakkört és a tudományos diákkör munkáját az intézmény erkölcsileg és anyagilag is támogatja, ami reményeim szerint hosszabb távon is biztosítani fogja a munka folytatását. A jól bevált témakörök és módszerek folytatásán túl tervezem, hogy a diákkör tematikáját a mechanikai mozgások tanulmányozásán túl mágneses, hőtani nemlineáris jelenségek vizsgálatával, valamint nemlineáris áramkörök építésével és tanulmányozásával bővítem.

Fontosnak tartom, hogy a tehetséggondozás Baján sikeresnek bizonyuló módszereit más magyar iskolákban is hasznosítani lehessen. A korábbiakban már tartottam diákjaimmal közösen mérésekkel, kísérletekkel demonstrált előadásokat tanári fórumokon.

Tervezem, hogy eddigi tapasztalatom alapján tantervjavaslat és tanári segédanyag formájában összefoglalom a Mandelbrot Tudományos Diákkör programját. A tanároknak szóló módszertani jegyzetben részletesen tárgyalom a középiskolai tananyagban nem szereplő tartalmak általam követett diákköri feldolgozásának módját. A kísérletek, mérések ismertetésén túl, az elméleti kiegészítések tanításáról is beszámolok.

## A Függelék

### A fázistér

Egy mechanikai rendszer pillanatnyi állapotát a hely-és sebességkoordináták együttes megadása jelenti, hiszen ezen koordináták és a dinamikai egyenlet ismeretében a mozgás egyértelműen folytatható. A dinamikai rendszerek leírhatók differenciálegyenlet-rendszerekkel, vagy iterált függvényrendszerekkel. Az egydimenziós mozgás fázistere 2 dimenziós  $(x, v)$ , a háromdimenziós mozgások esetében a fázistér 6 dimenziós  $(x, y, z$  és  $v_x, v_y, v_z)$ . A legalább háromdimenziós fázisterekben különös attraktorokkal (Isd.lent) társuló kaotikus folyamatok is megjelenhetnek.

A fázistér egy pontja leírja a rendszer pillanatnyi mozgásállapotát. A rendszer állapotának változását követve ez a pont elmozdul, és egy utat jár be. Ezt az utat *trajektóriának* nevezik. A trajektória maga nem tükrözi, hogy milyen gyorsan telik az idő. A hozzárendelt nyíl a mozgás (idő) irányát jelzi.

A fázistérben önmagukba záródó görbék oszcillációt jeleznek. Egyszerű konzervatív rendszerekben a legtöbb trajektória ilyen. Ezekben a rendszerekben van egy megmaradó mennyiség (energia), ami nem változik a trajektóriák mentén. A konzervatív rendszereknél a hétköznapi jelenségekben gyakoribbak a disszipatív rendszerek, amikben az idő előrehaladtával az összes mechanikai energia folyamatosan csökken (például súrlódás következtében).

A középiskolai fizika tananyagban tárgyalt dinamikai egyenletek legnagyobb része konzervatív rendszert ír le (mechanikai energiamegmaradás), disszipatív rendszerek mozgásegyenleteit (súrlódás, közegellenállás) nem tanuljuk analitikusan megoldani, mert meghaladja a középiskolai matematikai ismereteket. Ilyen esetekben különösen meggyőző és szemléletes lehet a mozgásegyenlet numerikus megoldása.

### Attraktorok

A disszipatív rendszerek fázistérében vonzó objektumok, attraktorok léteznek, a trajektóriák ezekhez az attraktorokhoz tartanak. Az attraktoroknak több típusa is előfordul.

**Pontattraktor:** a rendszer stabil állapotát jelöli. Ha a rendszer elérkezik ebbe az állapotába, akkor onnan ki nem mozdul, és egy kicsit kitérítve visszatér.

**Periodikus attraktor, stabil határciklus:** a rendszer ezt elérve oszcillálni kezd, periodikusan viselkedik. Lehetnek összetett periódusai is.

**Különös attraktor:** Ha a rendszer az attraktoron mozog, akkor nincsenek periodikus változásai, a rendszer soha nem ismétli magát, kaotikusan viselkedik. A rendszer determinisztikus, de megjósolhatatlan; közeli pontokból kiindulva a trajektóriák exponenciálisan távolodnak egymástól. Különös attraktorok nem fordulhatnak elő háromnál alacsonyabb dimenzióban.

Egy fázistérben több attraktor is lehet. Ha több attraktor van, akkor mindegyiknek megvan a maga vonzási tartománya, hasonlóan a folyók vízgyűjtő területeihez. Számuk a paraméterek értékétől is függhet.

## B Függelék

### A FIZIKASHOW 2013. részletes programja

A bemutató ideje: 2013. április 24. 8:30 – 16:00

Helyszín: Baja, Szent László ÁMK

Díszterem		
1.	egyensúlyok üdítőkkel	Mechanikai egyensúly 1.
2.	villa-kanál egyensúly	
3.	kalapács egyensúlyban	
7.	Leonardo hídja	Mechanikai egyensúly2.
8.	hétköznapi egyensúly (seprő)	
9.	egyensúly pénzekkel	
10.	Spárgaszakítás	
13.	melyik szakadjon?	Tehetetlenség
14.	krumpli és szívószál	
15.	Esik a tojás...	
16.	ejtés karikáról üvegbe	
17.	pohár a kézen-lefelé	Légnyomás, levegőáramlás
18.	ki bírja tüdővel?	
19.	víz a pohárban - lefordítva	
20.	víz és bor	
21.	táncoló pingpong labda	
22.	gyertyaoltás	
23.	szívószál sípok	Hangok
24.	zenélő gégecső	
25.	őseber-"telefon"	
26.	zenélő fémálca	
27.	zenélő poharak	
28.	dudáló vascső	

Díszterem		
29.	forgás súlyzókkal	Forgások
30.	forgás kerékkal	
31.	zsinóron forgó kerék	
32.	homopoláris m.	motorok
33.	kistekercs m.	
34.	spirál m.	
35.	szív m.	

Krix (44.sz.) terem		
36.	elektrofór	Elektrosztatika
37.	lebegtetés lufival	
38.	szikrák VDG	
39.	gyertyafújás tűvel	
40.	Segner-kerék	
41.	elektromos „frizura”	
42.	elektromos inga	
43.	Fény (cső) kard	
44.	elektrosztatikus motor	Áramok mágneses tere
45.	Oersted-kísérlet	
46.	Pohl - hinta	
47.	tekercsek tánca	
48.	gördülő tengely	Elektromágneses indukció
49.	karika	
50.	mágnes csőben ejtve	
51.	Lenz-ágyú	
52.	csoportos élmény	Egyenáram hatásai
53.	citromelemek	
54.	"szippantó" szívszál	
55.	írás árammal	
56.	elektromos bűvár	
57.	ívfény	
58.	ceruzából lámpa	

Krix (44.sz.) terem		
59.	éghetetlen lufi	Hőtan
60.	tojásszippantás	
61.	doboz roppantás	
62.	gyertya fölkapja a vizet	
63.	mágikus tea filter	
64.	Leydenfrost jelenség	
65.	hőlég "ballon"	Rezgések, hullámok
66.	látható hullámok	
67.	hullámok fúróval	
68.	Chladni cukorábrák	
69.	hullámzó acélkarika	
70.	rezgő acéllemezek	Légnyomás, folyadékok, anyagi érdekességek
71.	Meglepő Euler-korong	
72.	házi barométer	
73.	huj-huj játék	
74.	katapult	
75.	varázslatos golyók	
76.	fura golyók alkoholból	
77.	forgó spirál vízben	
78.	Maestro-cső	
79.	hápogó poharak	
80.	sózott papírszepe	
81.	keményítő furcsa lények	
82.	hullámzó biliárd	Vákuum kísérletek
83.	felfelé folyik a víz	
84.	vízforralás hidegen	
85.	lufi fúvásszívással	
86.	robbanó cellofán	

46.sz. terem		
87.	láthatatlan golyók	Optika
88.	Eltűnik a ceruza	
89.	béka, „megfogható”	
90.	lámpa hajzseléből	
91.	Cd-ből szivárvány	
92.	"fénycső" LE D-ből	
93.	hangvetítés	
94.	nedvesség érzékelő	Elektronika
95.	"örökmozgó"	
96.	rezgésösszeadás oszcill.	
97.	Elektronhajlítás	Atomfizika, fény
98.	szikra kisülések	
99.	gázcsövek	
100.	plazmagömb	
101.	CD -sütés	
102.	plazma gyertyalángból	

8. sz. terem Biológia		
125	Érzékek birodalma- kísérletek érzékszervekkel	Érzékszervek

Kémia terem C-épület			
103.	indikátor-szökőkút	KÉMIA SZAKKÖRI KÍSÉRLETEK	
104.	Kálium-permanganát szökőkút		
105.	Sósavgránát		
106.	Üvöltőpalack		
107.	Gumimaci		
108.	Titkosírás		
109.	Varázsceruza		
110.	Tűzijáték		
111.	Természetes indikátorok		
112.	Kénes rágógumi		
113.	Vegyészek virágoskertje		
114.	Fekete kígyók (ne hagyd a parkban)		
115.	Tűzgolyó		
116.	Izzik a tavaszi délután		
117.	Savbázis		
118.	Hidrogén lufi		
119.	Kiss Virág titkos kísérlete		
6. sz. és 7. sz. terem Biológia			
120.	vérnyomásmérés		nyomásmérés
121.	reflexvizsgálatok		
122.	mikroszkópos csodák	mikroszkóp	
123.	mi van a dohányfüstben?	mikroszkóp	
124.	szemünk csodái: hogyan keletkezik a 3D-s kép?	szem	

## C Függelék

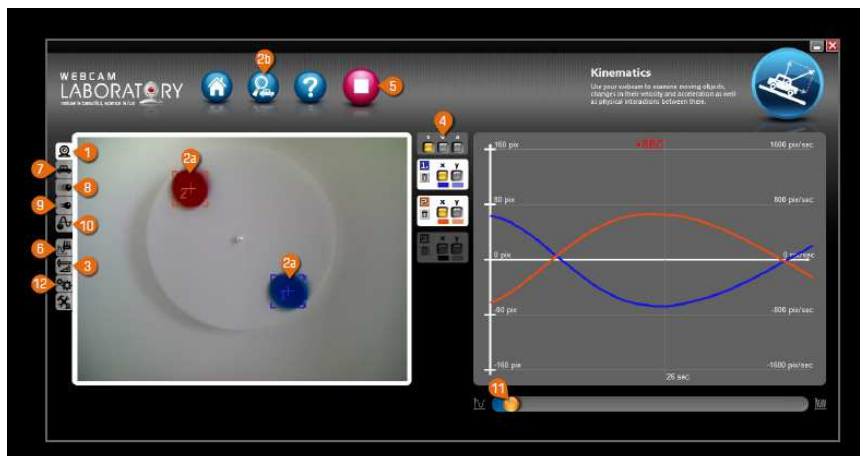
### WebCam Laboratory

#### *Kinematika modul*

Ez a modul alkalmas arra, hogy web kamera használatával akár 3 tárgy (vízszintes és függőleges) mozgását kövesse valós időben, rögzítse a tárgyak elmozdulás, sebesség és gyorsulás (x, y) koordinátáit.

#### *C.1. Kezelőfelület rövid bemutatása*

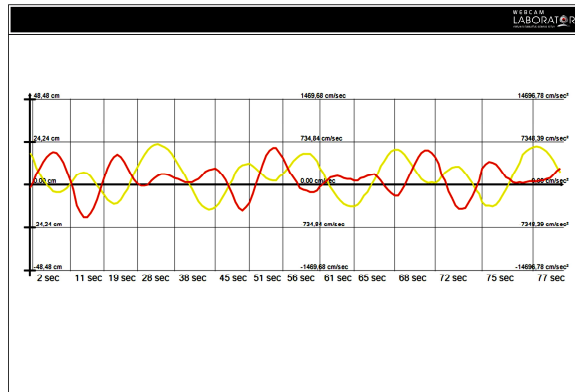
Az C.1.1. ábra felső részén található négy kezelőgomb rendre a főmenübe visszatérés (ház), az objektum felismertetése (2b) és help (kérdőjel) és a mérés indítása - leállítása (5).



C.1.1. ábra. Részlet a kinematikai modul felhasználói útmutatóból

Az (1) számú kezelőgomb a kamera indítására, beállítására (fényerő, felbontás) szolgál. Bal egérgomb kattintással felismertetjük a tárgyat (2a), összesen három, eltérő színű objektumot követhetünk.. A (7) autóforma hatására a felismert tárgy helyzetét színes vonallal mutatja a képernyő jobb részében (vízszintes az idő tengely). A (4) –nél kiválaszthatjuk, hogy az adott objektum mozgásának milyen jellemzőjét (hely, sebesség, gyorsulás) szeretnénk jobboldalt látni (a többit is rögzíti, itt csak a pillanatnyi nézetet állítjuk be). A (8) és (9) számú kezelők arra szolgálnak, hogy a kiválasztott objektum halványodó, vagy folytonos nyomot hagyjon mozgása során a bal oldali (kamera) képernyőn. A (10) gombbal kérhetünk azonnali grafikont a tárgy mozgásáról a kamera képernyőn. A (6) kezelő gomb a rögzített adatok elemzésére szolgál. Rákattintva a diagram ablak nyílik meg, ahol nyomtathatjuk a grafikont, vagy

elmenthetjük képként (C.1.2. ábra). Az adatokat (hely, sebesség, gyorsulás, idő) további elemzésre menthetjük xls vagy csv formátumban. A diagram ablakot, vagy annak egy részét kivághatjuk, megváltoztathatjuk az adatsűrűséget a rács ikonjával. A pontatlan adatok kiszűrésével simíthatjuk a kapott görbénket. Az idő tengelyen mozoghatunk előre és vissza, nagyíthatjuk vagy kicsinyíthetjük a diagramunkat (zoom).



C.1.2. ábra. A diagram ablak. A grafikonon a kettősingánk egyik kitérés (x) – idő változása látható

## C.2. Beállítás, kalibrálás

A (3) gomb a mérés kalibrálására, a (12) gomb a koordináta rendszer felvételére és a színérzékenység beállítására szolgál. Koordinátarendszerünk origóját célszerű a tárgy kezdőpontjára állítani. A tárgy (és környezete) színétől függően kell a színérzékenységet növelni vagy csökkenteni. Előfordulhat, hogy nem ismeri fel a tárgyat, vagy mozgás közben átugrik valamilyen környezeti objektumra. Ilyenkor szüntessük meg (kitakarással) a zavaró tárgyat, illetve változtassunk az érzékenységen. Kalibrálásakor egy fényképet készítünk a tárgyról és környezetéről, ezen bejelölhetünk (egérrel) egy ismert méretű alakzatot és a jobboldali mezőbe beírhatjuk a megfelelő egység kiválasztásával. Ennek hiányában a méréskor pixelekből jelenik meg az objektum helyzete.



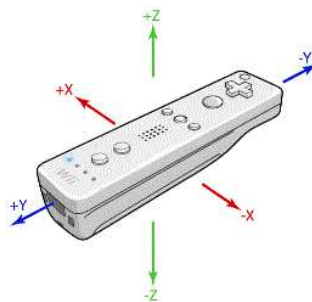
## D Függelék

### D.1. Wiimote

A Wii Remote (röviden WiiMote) a konzol távirányítója (D.1.1.ábra), amelyet vezeték nélküli bluetooth kapcsolattal szereltek fel, amit egy BCM2042-es típusú, aránylag olcsó, billentyűzetekbe és egerekbe fejlesztett chip szolgáltat. Rendelkezik továbbá egy 3 dimenziós, 50 Hz-es mintavételű ADXL335 típusú gyorsulásmérővel, amely  $\pm 50 \text{ m/s}^2$ -os intervallumban képes mérni. A gyorsulásmérő adatait a Wiimote koordináta-rendszerében (D.1.2. ábra) továbbítja a számítógépnek.



D.1.1. ábra. A Wii távirányító különböző nézetekből

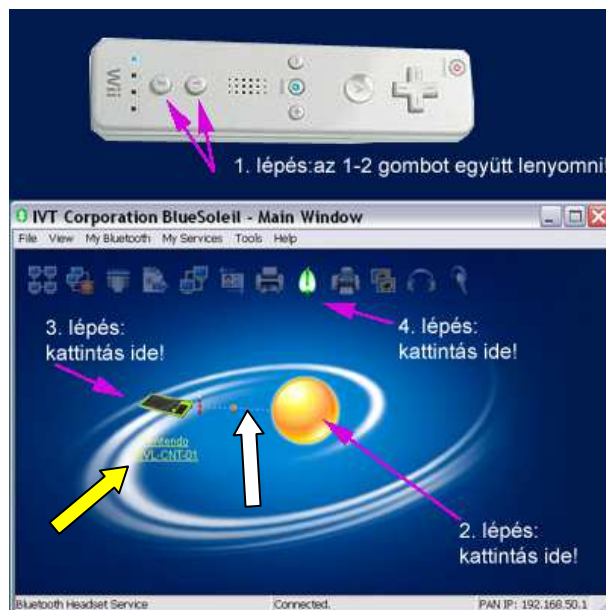


D.1.2. ábra. A Wiimote tengelyei

A fejlesztés és a mi vizsgálataink szempontjából legfontosabb a Wiimote elejébe épített infra kamera, amely a 940 nm-es hullámhosszra a legérzékenyebb, és egy képfeldolgozó chiphez van csatlakoztatva, így a számítógéphez már csak a feldolgozott adatok érkeznek meg. Ez az egység képes 1024x768-as felbontásban, 100 Hz-es mintavétellel egy időben 4 infravörös fénypontot 45°-os érzékelési félszögben követni, illetve ezek nagyságát 4 bit-es, fényességét 8 bit-es adatként átadni a számítógépnek. A kamera és a képfeldolgozó egység nem képet, hanem a pontok koordinátáit továbbítja. A Wiimote 2 db AA-ás elemmel működik.

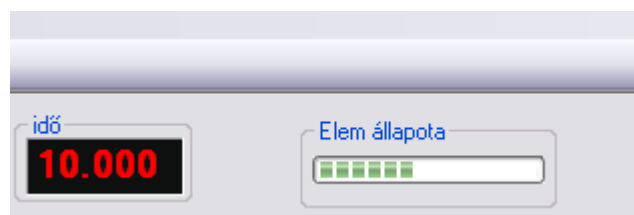
## D.2 A kapcsolat felépítése a számítógép és a WiiMote között.

A kapcsolat felépítéséhez a WiiMote és a számítógép között sokféle program található az interneten. Mi a BlueSoleil programot használjuk [2]. A bluetooth beüzemelését (az új hardver felismerése, driverek telepítése) követően connect, vagy keresés üzemmódra állunk, majd bekapcsoltuk a WiiMote-t (1 és 2 gomb egyszerre). Ekkor a készüléken levő négy kék LED villogni kezdett. Kattintgatás a BlueSoleil program ablakában az D.2.3 ábra sorrendjének megfelelően történt.



D.2.3. ábra. A kapcsolat létrejöttét a program jelzi (fehér nyíl), azonosítva a Nintendo eszközt (sárga nyíl).

Amikor befejeztük a mérést, megszakítottuk a kapcsolatot a bluetooth és a WiiMote között, kímélve a WiiMote-ban lévő telepeket. A telepek állapotáról a program főablakában található kijelzőn tájékozódunk (D.2.4. ábra).



D.2.4. ábra. A telep állapotát kis zöld négyzetekkel jelzi.

### D.3 Új mérés indítása

Új gyűjtőlapot a File Új menüből kérhetünk (D.3.5. ábra). Az új gyűjtőlap elnevezése automatikusan Wii n lesz (pl. Wii 2), ahol n az új mérések számát jelenti. Átnevezés hiányában ilyen néven mentődik a mérési jegyzőkönyv, ill. a hozzá tartozó grafikon. A grafikon betöltését követően kiválasztjuk a méréshez használandó érzékelőt (IR), majd elindítjuk a mérést.



D.3.5. ábra. Új mérés indítása a Wiifiz programmal

### D.4 Az érzékelő kiválasztása

Tudjuk, hogy a vezérlőegység, egy 3D-s gyorsulásmérővel és infravörös érzékelővel van felszerelve, így lehetőségünk van ezen adatforrások között választani (D.4.6. ábra)

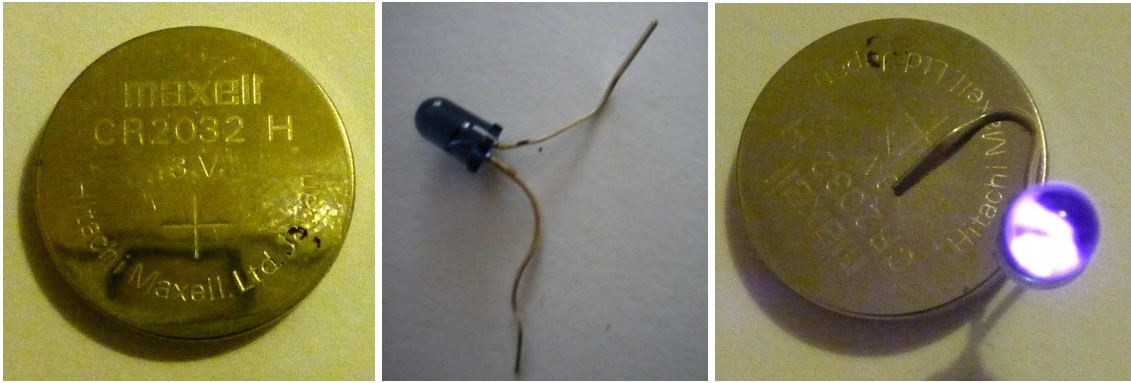


D.4.6. ábra. Az érzékelő kiválasztása a Nintendo eszköznél.

Infravörös üzemmódhoz gyártanunk kell egy fényforrást, amelyet a WiiMote kamerája követhet.

### D.5 Egy IR fényforrás készítése

Az IR fényforrást mi egy 3V-os gombelemből, és egy IR LED-ből alakítottuk ki (D.5.7. ábra). A működőképes állapotról meggyőződünk egy mobiltelefon kamerájával. Ez látja a bekapcsolt IR LED-et.



D.5.7. ábra. Az IR fényforrás: Gombelem (3V), IR-LED, a bekapcsolt infra LED

### D.6 Az időtengely beállítása

Amennyiben módosítani szeretnénk a koordinátarendszerünk idő tengelyének (a mérés idejének) a hosszát, kattintsunk a Wiifiz program képernyőjén (az D.6.8. ábrán) látható léptetőre,



D.6.8. ábra. A mérési idő beállítása

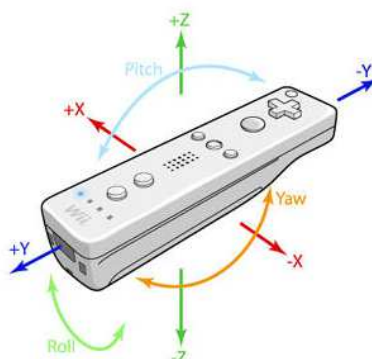
vagy írjunk be új értéket. Mi a 120s-os beállítást használjuk. A léptető a távvezérlővel is irányítható a WiiMote UP vagy Down gombjának (D.5.9. ábra) értelemszerű lenyomásával.



D.6.9. ábra. Időléptetés távvezérlővel

### D.7 Az irányokról

A mérések során adatforrásként választhatunk x, y, ill. a z irányú adatok között. Az irányok a WiiMote geometriája alapján leolvashatók, az D.7.10. ábráról.



D.7.10. ábra. A Wiimote érzékelő tengelyei

### D.8 Kalibráció IR adatforráshoz

A Wii gyorsulásérzékelője gyárilag kalibrált. Az IR érzékelő azonban kalibrálandó, hisz az IR fényforrás képe függ a távolságtól is, ezért a pontos mérésekhez kalibrálni kell.

Az adatgyűjtés egyik lehetséges módja, hogy a WiiMote egy tárgyhoz rögzített IR fényforrás helyzetének koordinátáit adja át a számítógépnek, így út idő grafikonokat kaphatunk. Ezek az adatok nyers formában számok, amelyek X irányban 0-1024, Y irányban 0-767 közötti értékeket vehetnek fel. A kalibrálatlan rendszer ezen adatokkal dolgozik. Pontos mérésekhez azonban lehetőség van kalibrációra is. Ez azt jelenti, hogy a kalibrációt követően e számok helyett, már m-ben, vagy cm-ben kapjuk a pontos helykoordinátákat. A kalibráció az IR szenzor kiválasztását követően, a kisméretű rácson ikonra kattintva kezdeményezhető (D.8.11. ábra)



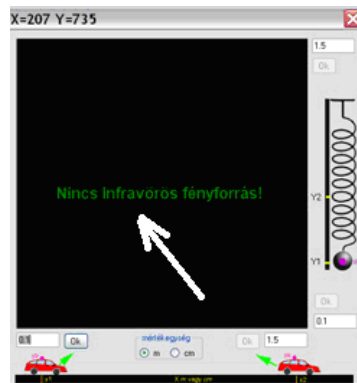
D.8.11. ábra. Az IR kalibráció indítása

Az ikonra kattintva, megjelenik a kalibrációhoz szükséges ablak, amelyben vagy egy piros pontot látunk (D.8.12 ábra), vagy egy "Nincs infravörös fényforrás" feliratot (D.8.13. ábra), attól függően, hogy a WiiMote kamerája látja-e a fényforrást. Amennyiben nem látjuk a fényforrást, változtassuk meg a WiiMote helyzetét. Addig mozgassuk, amíg a piros pont be nem kerül a fekete ablakba. Innen, már könnyen optimalizálhatjuk a kamera helyzetét.



D.8.12. ábra. A kalibrációs ablak az IR fényponttal (nyíl)

Törekedjünk arra, hogy követendő tárgy útvonalának hosszától függően, a WiiMote az útvonal hosszának mintegy másfélszeres távolságáról nézze az objektumot, hogy az egész út beférjen a látómezőjébe (D.8.13. ábra).



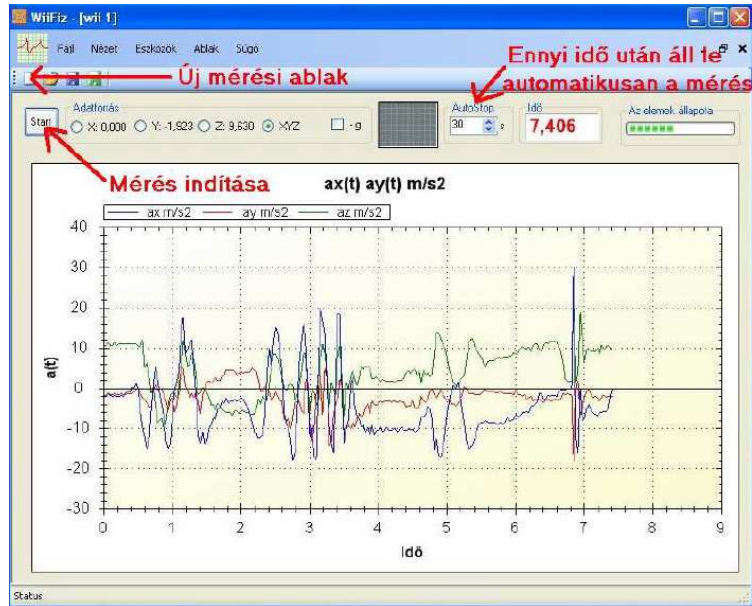
D.8.13. ábra. Az IR fényforrás hiányát jelző üzenet (fehér nyíl) és a tengelyek kalibrálása

Ezt követően mérjük le az út pontos hosszát (Mi ezt 20cm-nek vettük). Vigyük az objektumot egy olyan helyre, amely a megfigyelni kívánt távolság kb. 10%-a. Írjuk be, méterben, vagy centiméterben a pontos koordinátát (cm-ben kalibráltunk), az űrlap bal oldalán található első szövegdobozba, majd nyomjuk meg az Ok gombot. Helyezzük át az objektumot egy másik helyre, majd a második szövegmezőbe is írjuk be a pontos X koordinátát a mértékegység választóban kiválasztott mértékegységben. Az Ok gomb lenyomását követően az érzékelő vízszintes irányban már kalibrált. Ugyanezt az eljárást ismételjük meg Y irányban is és már be is kalibráltuk az érzékelőt.

### ***D.9 Infra kamera***

A Wiifiz program a Wiimote infra kamerája által küldött adatokat dolgozza fel.

Új mérési ablak indításakor (D.9.14. ábra) alapesetben a WiiMote gyorsulásmérőinek adatait mérjük (tehát át kellett állítanunk az érzékelőt), a Start gomb mellett választhatjuk ki a figyelni kívánt tengelyt, vagy, ahogy az ábrán látszik, választhatjuk mindhárom tengely egyidejű figyelését. Fontos megjegyezni, hogy a tengely kiválasztásával csak a nézetet változtatjuk, a mérés mindhárom irányban történik.



D.9.14. ábra. Új mérési ablak indításkor alapesetként a gyorsulást mérjük, a start gomb mellett kiválaszthatjuk a figyelni kívánt tengelyt. IR méréskor át kell állítani az érzékelőt.

### D.10 A mérések indítása

A mérést a start gombra kattintva indíthatjuk el, vagy az indítást követően ugyanezzel a gombbal állíthatjuk le (D.8.11. ábra).

Távolról a Wiimote "A" gombjának megnyomásával indítjuk a mérést, majd az "A" gomb ismételt lenyomásával befejezhetjük az adatgyűjtést. Ezt a lehetőséget mi nem használtuk, mivel az állványhoz rögzített Wii beállítását kis mértékben sem akartuk zavarni.

Az indítás feltétele, hogy a kapcsolat a Wiimote és a számítógépben lévő bluetooth között már fel legyen építve.

### A mérések leállítása

A mérések automatikusan leállnak a mérési idő leteltével, vagy a Stop gomb lenyomásával, ha mérés közben akarunk megállni. A mérést a start gombra kattintva is leállíthatjuk.

### Mérési eredmények mentése

Egy mérést követően, a mérési adatok menthetők, vagy exportálhatók MS Excel formátumba. Ezt a File menüből tehetjük meg. Az ily módon elmentett adatok később megnyithatók, ill. kinyomtathatók.

## E Függelék

Ebben a függelékben bemutatjuk, hogy mozgásegyenletek numerikus megoldása hasznos a nem kaotikus mozgások megértés szempontjából is. A diákok ekkor azt élhetik meg, hogy az olyan mozgásokat is tudják követni, melyek nem részei a tananyagnak. A közegellenállási erő figyelembe vétele pedig világossá teheti számukra, hogy ez az erő sokszor lényeges, jelentősen befolyásolja a mozgást, elhanyagolása csakis annak tulajdonítható az órán, hogy a pálya egyszerű képletekkel nem írható le. Még általánosabban, a tanulók így tudnak meggyőződni arról, hogy az erőtvényből mindig kibontakozik a mozgás, mely nem más, mint a mozgásegyenlet megoldása.

Ez a kétezres években zajló tevékenységünk lényegében a mechanika Dede Miklós és Isza Sándor által megfogalmazott tanításának megvalósítása. Könyvükben [1] az elvi alapokat a nyolcvanas évek elején fektették le, de az akkori számítógépes kultúra (a ZX 84 és Commodore 64 kora) még feltehetően nem volt eléggé fejlett/kényelmes ahhoz, hogy ez az oktatási módszer széleskörűen elterjedhessen. Az alább bemutatott példák illusztrálják, hogy a numerikus megoldások ma már eléggé egyszerűek és megbízhatóak ahhoz, hogy a középiskolai oktatásban bárhol használhatóak legyenek.

### 1. Ferde hajítás közegellenállással

A középiskola 9. évfolyamán és érettségi felkészítőkön is hasznos lehet megvizsgálni a tárgyak valóságos esésének mozgásegyenletét és annak numerikus szimulációját. Egy kis (Excel) programcska megfelelhet e célnak, amit a diákok némi tanári vezetéssel meg tudnak írni [2]. A program a kezdeti adatokból kezdeti gyorsulás komponenseket számol. Ezek alapján az új sebességeket és az  $x$ ,  $y$  koordinátákat a javított Euler-módszer alapján határozzuk meg. A vízszintes irányú gyorsulás a sebesség négyzetével arányos, irányával ellentétes. Ha  $k = 0$  értéket adunk meg, akkor a megszokott parabola pályagörbét kapjuk. A függőleges gyorsulás a lefelé mutató nehézségi gyorsulás és a függőleges sebesség és a sebesség nagyságának szorzatával arányos, de a sebességgel ellentétes lassulás előjeles összege. A kezdeti adatoknál beállíthatjuk az elhajítás helyét  $(x_0, y_0)$ , kezdősebesség nagyságát  $(v_0)$ , elhajítás szögét. Beállíthatjuk a numerikus megoldás időközét, amit célszerű  $0,001s$  alatt tartani, különben a megoldás nagyon pontatlanná válik. A tanulókkal írt program meghatározza a földet érés idejét, az emelkedés magasságát és a repülés maximális távolságát



(pirossal írt számok). A  $k$  alaktényező az 5. fejezetben előforduló  $C1$ ,  $C2$  konstansok (l. pl. (5.15)) megfelelője. Gömb alakú,  $m$  tömegű labdára  $k = 0,5\rho_{\text{levegő}}R^2\pi/m$ . Egy igazi focilabda ( $R = 11$  cm sugarú,  $0,45$  kg tömegű labda) esetén  $k = 0,025$ . Példánkban R. Carlos  $150\text{km/h}$  sebességgel elvégzett szabadrúgása szerepel.

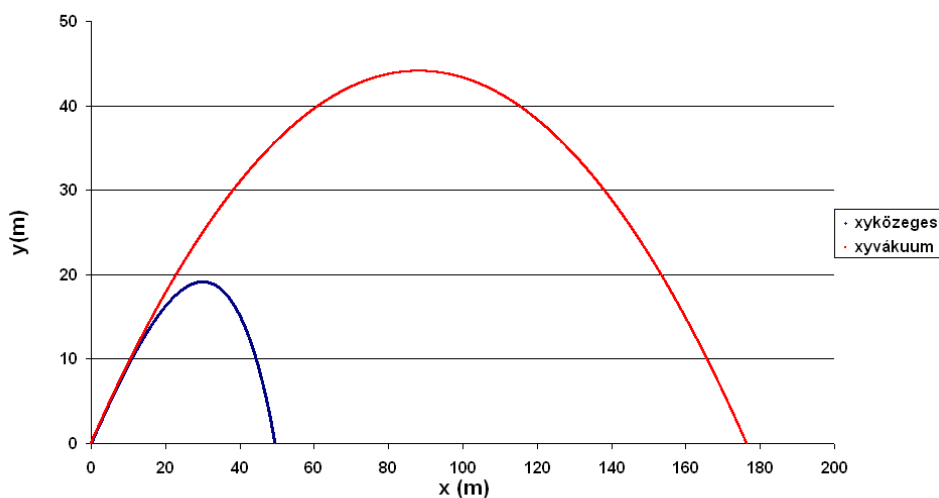
Ferde hajítás közegellenállással						
kezdeti						
<i>hely</i>	$x_0 =$	0	m	$g =$	9,81	$\text{m/s}^2$
	$y_0 =$	0	m	$dt =$	0,001	s
<i>sebesség</i>	$v_0 =$	41,6	m/s	$h_{\text{max}} =$	19,16	m
<i>szög</i>	$\alpha =$	45	fok	$x_{\text{max}} =$	49,45	m
<i>tényező</i>	$k =$	0,025	1/m	$t_{\text{rep}} =$	3,901	s
<i>tömeg</i>	$m =$	0,45	kg	$C =$	0,45	
<i>átmérő</i>	$d =$	0,22	m	$A =$	0,038	$\text{m}^2$
<i>levegő sűrűség</i>	$\rho =$	1,29	$\text{kg/m}^3$			

$$a_x = -\frac{k}{m} v_x |v|$$

$$a_y = -g - \frac{k}{m} v_y |v|$$

E1. táblázat: A ferde hajítás Excel program fejléce. Megadhatjuk a kezdeti helyet, kezdősebességet, az elhajítás szögét, a közegellenállási tényezőt ( $k=0,025$  1/m), a numerikus időlépést. A programmal meghatározhatjuk a repülési magasságot és távolságot is.

Ferde hajítás pályagörbéje (x - y)



E.1.1. ábra: Az E1. táblázat beállításainak megfelelő ballisztikus görbe és a vákuumbeli parabolapálya összehasonlítása

Az E.1.1. ábrán jól látható, hogy a négyzetes közegellenállás jelenlétében megvalósuló ballisztikus pálya erősen aszimmetrikus a maximális emelkedés helyéhez viszonyítva. Ott ugyanis a fékezőerő nagy, a vízszintes irányba mutat, s így onnét rohamosan lassul a vízszintes irányú mozgás, a repülés lelankad (kék, xyközeges). Ennek megfelelően a teljes vízszintes elmozdulás jóval kisebb a megfelelő vákuumbeli mozgáshoz viszonyítva. A vákuumbeli mozgás (piros görbe, xyvákuum) adatait a jól ismert középiskolai képletekkel kiszámolva a táblázatban szereplő focilabdára:  $h_{\text{max}} = 44,1\text{m}$ ;  $x_{\text{max}} = 176,4\text{m}$ ;  $t_{\text{repülési}} = 6\text{s}$ .

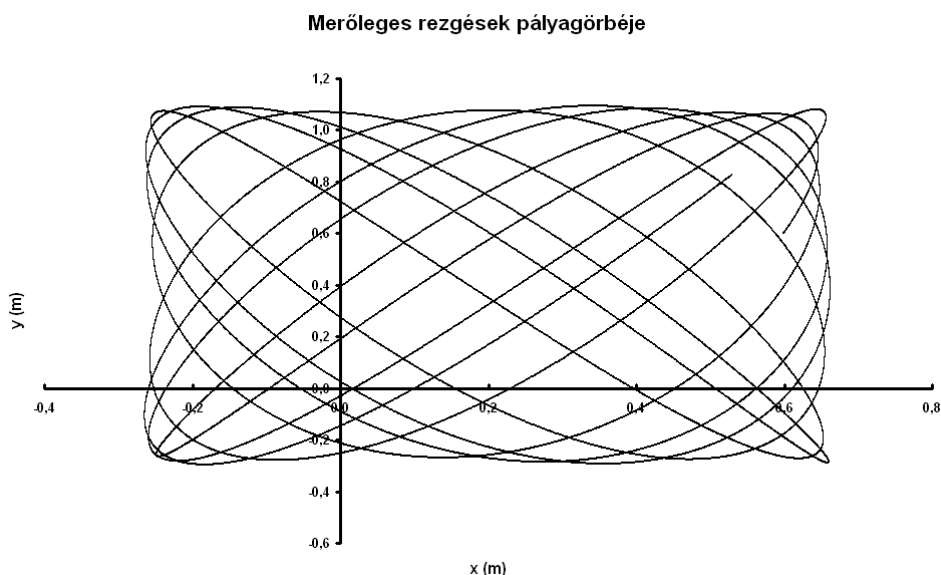
## 2. Pontszerű test síkmozgása

A pontszerű test kétdimenziós mozgásának tanulmányozása során izgalmas probléma lehet, ha a testre  $x$  és  $y$  irányú rugalmas erők hatnak, emellett még a sebességgel arányos csillapodás is fellép. A teljesség kedvéért egy konstans külső erőt is hozzáadunk az eddigiekhez. Kitérítjük a testet (kezdeti hely), majd kezdősebesség nélkül elengedjük. A csillapodó rezgés mozgásegyenleteit megoldottuk a javított Euler – módszerrel. A tanulókkal közösen felírjuk a mozgás egyenleteket, majd némi tanári segítséggel numerikusan megoldják. A számolást  $dt = 0,0005$  s időközzel végeztük [2] 20 000 lépésben. E mozgás mozgásegyenlete  $x$  irányban, egységnyi tömegre ( $y$  irányban hasonló alakú):

$$a_x = -D_x(x - l_x) - \mu_x - k_x v_x$$

## 3. Lissajous-görbe

A súrlódásmentes esetben külső erő nélkül zajló mozgás két harmonikus rezgés (az  $x$  és az  $y$  irányú) szuperpozíciója. Ha a két rezgés rugóállandója nem azonos, érdekes alakzatok, ún. Lissajous- görbék rajzolódnak ki. Erre ad példát az E.2.2. ábra.



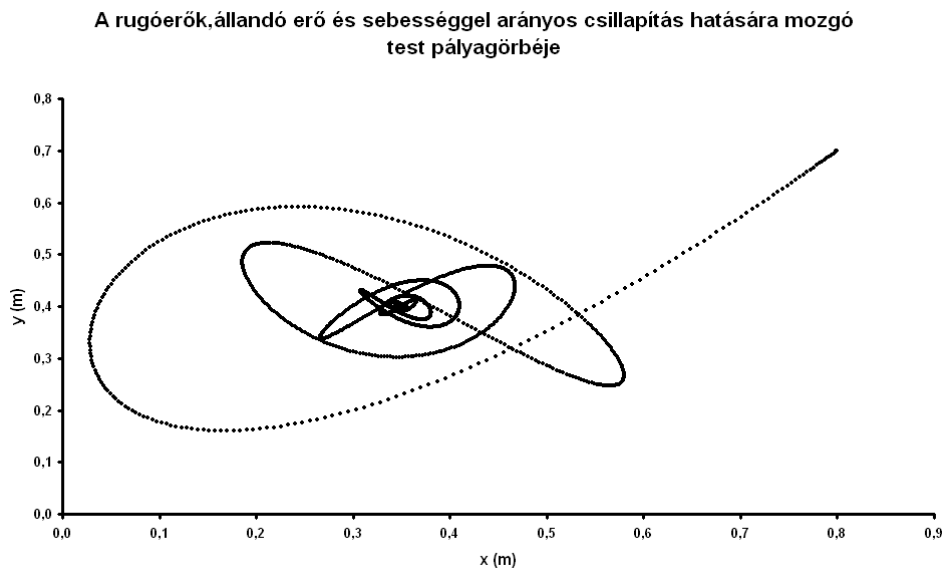
E.2.2 ábra: Egyidejű merőleges rezgések összetétele. Az  $x$  irányú rezgés kezdeti adatai és paraméterei :  $x_0 = 0,6\text{m}$ ;  $v_{x0} = 1\text{m / s}$ ;  $L_{x0} = 0,2\text{m}$ ;  $D_x = 50\text{N / m}$ . Az  $y$  irányú rezgés kezdeti adatai és paraméterei :  $y_0 = 0,6\text{m}$ ;  $v_{y0} = 4\text{m / s}$ ;  $L_{y0} = 0,4\text{m}$ ;  $D_y = 80\text{N / m}$

A tanulók nagyon szeretnek ezzel a szimulációval játszani. Javaslatomra rögzített kezdőfeltételekkel vizsgálják a  $D$  és  $m$  hatását, majd állandó  $D$  és  $m$  mellett különböző

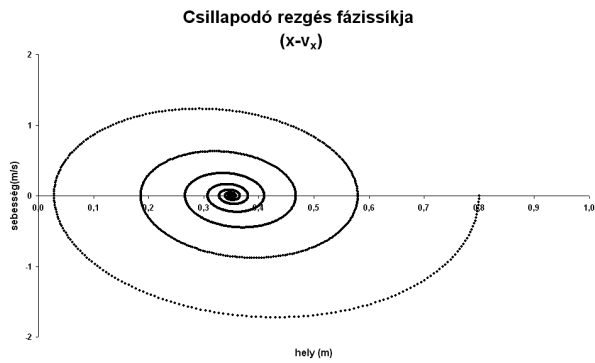
kezdőfeltételekkel (hely, sebesség) futtatják a programot. A kisebbek inkább a görbe művészi jellegét élvezik, a 11-12.évfolyamos diákok már órán is tanulták a rezgések összetételét, nekik igazán tanulságos a mozgásegyenletek ilyen megoldása. Velük kipróbáljuk, hogy a rezgések kinematikájáról tanultak alapján (vagyis szinusz és koszinusz függvények összetételével) hozzuk ki a görbéket az amplitúdók, a rezgésidők és fáziszögek variálásával.

#### 4. Csillapított rezgés

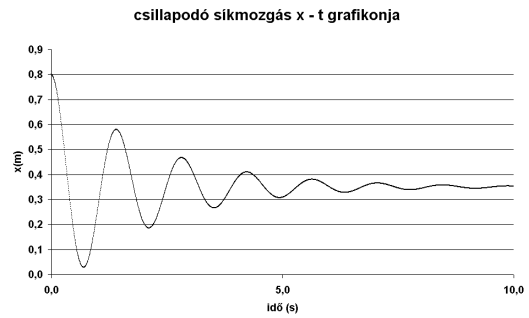
Csillapodás jelenlétében a mozgás előbb-utóbb megáll. Az E.4.3. ábrán látható mozgás kezdeti feltételei: kezdeti  $x_0$  és  $y_0$  kitérése 0,7m és 0,8m, kezdősebessége 0 mindkét irányban. A rugók nyújtatlan hossza  $l_x = l_y = 0,4m$ , az x irányban a rugóállandó  $D_x = 20N/m$ , y irányban  $D_y = 40N/m$ . A sebességgel arányos csillapodási tényezők  $k_x = k_y = 1$  (1/s), a külső erő mindkét irányban 1 N,  $\mu_x = \mu_y = 1$  m/s<sup>2</sup>. Már a szimulálás előtt meghatározhatjuk, hogy a nyugalmi állapot  $x^*$  koordinátája a  $D_x (x^* - l_x) = -\mu_x$  egyenletből  $x^* = l_x - \mu_x / D_x = 35cm$ .



E.4.3 ábra: Csillapodó síkbeli rezgés pályagörbéje  $x_0 = 0,7m$  és  $y_0 = 0,8m$ ,  $v_{x0} = v_{y0} = 0$ . A rugók nyújtatlan hossza 0,4m,  $D_x = 20N/m$ ,  $D_y = 40N/m$ .  $k_x = k_y = 1$  (1/s), és  $\mu_x = \mu_y = 1$  m/s<sup>2</sup>.



E.4.4. ábra: A fenti mozgás  $x$  fázissíkja

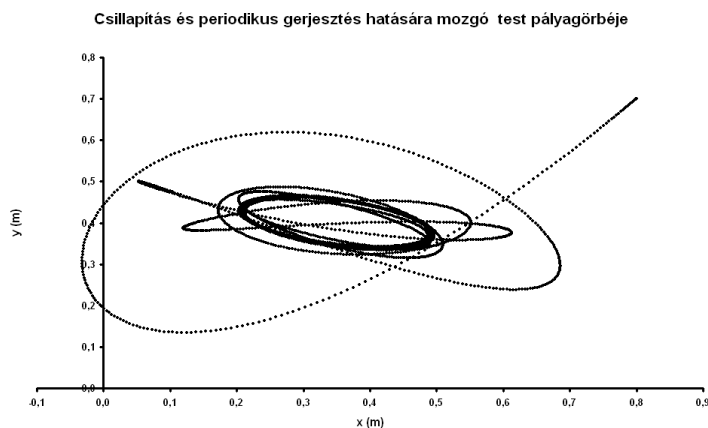


E.4.5. ábra A mozgás  $x - t$  görbéje

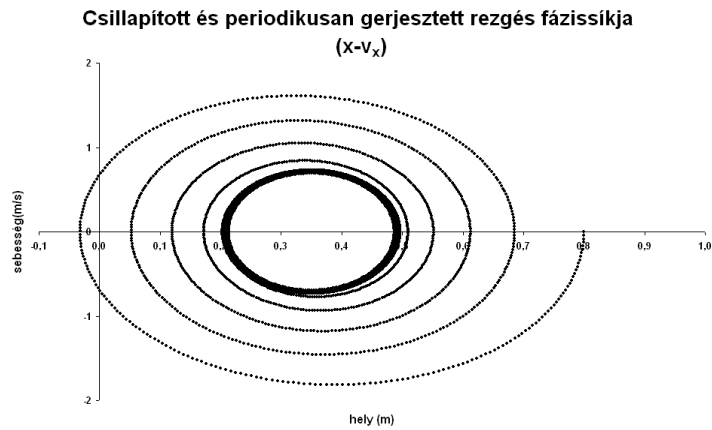
Érdekes megfigyelni, hogy a vetületbeli mozgás egyszerű csillapított rezgés (mindkét vetületben), a síkbeli mozgás mégis összetett, mert a rugóállandók nem azonosak.

## 5. Gerjesztett csillapított rezgés

Nagyon tanulságos volt eljátszani a kezdeti hely és sebesség értékek változtatásával, továbbá a paraméterek (rugó állandók, külső erő) más értékeivel. Ha a mozgásegyenlethez hozzáveszünk egy periodikus  $A\cos(\omega t + \varphi)$  gerjesztő hatást mindkét irányban, akkor a mozgás igazán izgalmassá válik. A pályasíkbeli és a fázissíkbeli rajzolat is jelentősen változik. Az E.4.3. Ábrának megfelelő adatokkal, de  $A = 1\text{m/s}^2$ ,  $\omega = 5\text{Hz}$  és  $\varphi = 1\text{rad}$  gerjesztéssel mindkét irányban, a mozgás pályagörbáját az E.5.6.ábra, fázissíkbeli mozgását az E.5.7.ábra mutatja.



E.5.6.ábra. Az E.4.3. ábrának felel meg, de periodikus gerjesztő hatás hozzáátételével ( $A = 1\text{m/s}^2$ ,  $\omega = 5\text{Hz}$  és  $\varphi = 1\text{rad}$ ).



E.5.7. ábra. Az E.5.6. ábrának felel meg, a mozgás  $x - v_x$  fázissíkja. Eltűnik a pontattraktor, helyette a periodikus mozgásnak megfelelő kör jelentkezik.

A gerjesztés révén energiát adunk át a rendszernek, ezért a mozgás most nem áll le hosszú idő után sem. Kialakul viszont egy állandósult rezgés. A pályák az ennek megfelelő ellipszishez tartanak mindkét ábrázolásban. Ez a "vonzó" viselkedés arra utal, hogy az állandósult mozgás attraktor, de nem a megállt állapotnak megfelelő pontattraktor, hanem egy ún. határciklus attraktor. Az állandósult mozgás itt periodikus. Nemlineáris esetekben ez lehet kaotikus mozgás is, s a megfelelő attraktor akkor hívjuk kaotikus attraktornak.

## Hivatkozások

1. Dede Miklós - Isza Sándor: Fizika II., Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1983
2. Eichhardt I. – Jaloveczki J.: Fizikázzunk egyszerűen, számítógéppel; Fizikai Szemle 2008/9. 311.o.

## Köszönetnyilvánítás

- Köszönöm Dr. Tél Tamásnak, a témavezetőmnek, a sok jó tanácsot, segítséget, szakmai ellenőrzést és hogy a szó valódi értelmében vezetett végig a doktori dolgozat elkészítésében. Köszönet illeti a sok biztatásért a csüggedő pillanataimban.
- Dr. Juhász Andrásnak a Fizika Tanítása Doktori Iskola létrehozásáért, szervezéséért és működtetéséért. Köszönet a sok éves szakmai együttműködésért, melyben nemcsak tanárom volt, hanem munkatársam, barátom is, aki emberi, erkölcsi tartásból, kitartásból is példát mutatott.
- Megköszönöm a WebCam Laboratory számítógépes mérőrendszer kifejlesztőinek, kiemelten Szigetlaki Zsoltnak, hogy biztosította számomra a programok használatát és így hatékonyan segítette doktori munkámat.
- Köszönöm a már végzett és jelenlegi diákkörös tanulóknak a sok szép és vidám pillanatot, sok munkát, amivel segítettek dolgozatom megírását, és hogy igazi munkatársként sokat tanulhattunk egymástól.
- Hálával tartozom a Szent László ÁMK fenntartójának és vezetésének, hogy biztosították számomra a nyugodt körülményeket, az eszközöket és időt, hogy a dolgozatomhoz szükséges méréseket elvégezhessek, anyagilag is támogatva tanulásomat és munkámat.
- Végül, de nem utolsósorban hálás köszönet a családomnak a türelméért és biztatásért. Azért is, hogy bíztak bennem és elviseltek, mikor elfogyott a türelmem.

## **Publikációs jegyzék**

### ***Tézisek alapjául szolgáló publikációk***

1. Jaloveczki J. : 2008, Kétnapos "fizika-show" az iskolában, Fizikai Szemle, No. 9, 309-311.
2. Eichhardt I., Jaloveczki J.: 2008. „Fizikázzunk egyszerűen, számítógéppel”, Fizikai Szemle, No.9, 311-315.
3. Eichhardt I., Jaloveczki J. : 2009, Numerikus módszerek a diákköri munkában, Fizikai Szemle, No.10, 348-351.
4. Jaloveczki J.: 2010, Fizika kísérleti bemutató ,Fizikai Szemle, No.6, 215-218.
5. Jaloveczki J.: 2012, „Fizikashow”, a fizika népszerűsítésének eszköze, Fizikai Szemle, No.11, 388 -391.
6. J. Jaloveczki., 2011, Studying Non-linear And Chaotic Phenomena in High School, Physics Competitions 13, p.29-37, No.1.
7. Jaloveczki J.: 2011, „Fizikashow”, mint a fizika népszerűsítésének eszköze, in: Természettudomány tanítása korszerűen és vonzóan, szerk: Tasnádi P., ELTE, TTK, Budapest, 409 - 413.
8. Jaloveczki J.: 2010, Numerikus módszerek a diákköri munkában, in: Fizikatanítás tartalmasan és érdekesen, szerk: Juhász A, Tél T.,. ELTE, TTK, Budapest, 303-309.

### **Egyéb, a dolgozathoz kapcsolódó publikációk**

9. Jaloveczki J. : 2010, Témazáró feladatlapok - Fizika 7. [R00788], Panoráma sorozat, Nemzedékek Tudása Kiadó, Budapest
10. Jaloveczki J. : 2010, Fizika 7. Feladatgyűjtemény [00788/F], Panoráma sorozat, Nemzedékek Tudása Kiadó, Budapest
11. Jaloveczki J. : 2011, Fizika 8. Feladatgyűjtemény [00888/F], Panoráma sorozat, Nemzedékek Tudása Kiadó, Budapest

## Summary

In secondary school physics there are only fields more or less well describable by linear interrelations almost exclusively. Problems occurring in practice not solvable in closed structure at elementary level are either left out or included in the curriculum only with rough negligence (e.g. freefall and throwing in the air).

As computers are well-spread these days phenomena might be interesting for secondary school students can also be studied. School experiments done either by teachers demonstratively or by students are known as encouraging activities, yet, they happen less and less frequently.

In my dissertation I exposed a few segments of the after school activities my students and I have been doing in study groups and in scientific student workshops for the last six years in the Grammar School of Szent László Művelődési Központ.

In the first three parts I gave a sample of measurements done by students with the help of computer based on well-known methods though but their application to non-linear procedures in secondary school is considered innovative. During these activities students are doubly motivated as they combine experiments and measurements with the computer use familiar to them in everyday practice. They are fully aware that whatever they can see on the screen is not a virtual world produced by clever programmers but they are the ones who control the procedure, they set the initial parameters and reproduce the various characteristics of the motion on graphs.

In the fourth part of my dissertation I introduce the numerical methods illustrated by examples that I and the students have been using for solving motion equations with the help of computer in student workshop. I also included computerised solution of motion equations and their reproduction on graphs the conception of which can only been discussed in lessons in a radically simplified way. The approach to the method appeared in the mid 1980s already, now with teaching physics with the help of computer its renaissance can start off, it can be an inspiring asset to make physics likable.

Students will find out about the effectiveness of the method, its limits and faults. In this respect the comparison of the measurement and simulation described in the 5<sup>th</sup> chapter of the dissertation is especially significant. They will learn that we cannot take all the effects and initial conditions into account but the solution of the problem can be approached by refining the equations and the numerical method rather well. They get acquainted with and understand



the presentation in phase space and the notion of attractors. During analysing measurements and simulations they learn that the appearance of dynamic chaos is not at all scarce in the case of real motions. They have performed countless experiments with pendulum in workshops (and often in study groups). Of these I told about the measurements and analyses made with the double thread pendulum, the driven damped pendulum and the magnetic pendulum in the first three chapters and in chapter 5.

The efficiency of the work of nurturing talents summarized in the dissertation is proved by the students' success. In the sixth section I review that the popularity of the "Physics Show" organized annually has been growing among the students and the residents of the town. Students belonging to the study groups or workshops take part in regional and national competitions and students' conference.

In our school, in Szent László Általános Művelődési Központ in Baja teaching natural sciences and nurturing talents have an emphasised role. The work of the physics study group and the science workshop is supported morally and also financially by the institute, which –to my hopes- will make it possible to continue the job. Beyond long standing topics and methods beside mechanical motions I plan to extend the syllabus to studying non-linear phenomena in magnetism and thermodynamics as well as building and examining non-linear circuits. I regard as important that the methods of nurturing talents proved to be successful in Baja should be utilized by other schools too. Previously I already gave lectures demonstrated with measurements with my students in teachers' forums.

Based on my experience I plan to summarise the programme of Mandelbrot Science Workshop in the form of curriculum recommendation and teachers' guide. In the methodical specialization for teachers I would describe in details how students worked processing the materials not included in secondary school curriculum. Beyond reviewing the experiments and the measurements the background knowledge will also be presented.