DOKTORI ÉRTEKEZÉS

A FIZIKA „ELHANYAGOLT” RÉSZEI AZ OKTATÁSBAN, TEHETSÉGGONDOZÁS A KÖZÉPISKOLÁBAN

Lendvai Dorottya

Témavezető: Dr. Tél Tamás emeritusz professzor

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Fizika Doktori Iskola
Vezető: Dr. Gubicza Jenő egyetemi tanár

Fizika Tanítása Doktori Program
Vezető: Dr. Nguyen Quang Chinh egyetemi tanár

2023

DOI: 10.15476/ELTE.2023.030

Tartalomjegyzék

BEVEZETŐ

A mai rohamosan fejlődő világban és egyre nehezebb oktatási helyzetben – különös tekintettel a fizika tanítására – nagyon fontosnak tartom a diákok kreatív módon való, korszerű pedagógiai eszközökkel történő motiválását, tehetséggondozását. Ennek jegyében igyekszem végezni a fizika tanári munkámat is. Szerencsés helyzetben vagyok, mert – mióta 2009-ben diplomát szereztem matematika-fizika szakos tanárként – lehetőségem volt 13 éven át egy tehetséggondozó iskolában – a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnáziumban – tanítani. Az iskolában 6 és 4 évfolyamos osztályok vannak. Előbbi matematika tagozatos (teljes osztály), utóbbi fizika és biológia-kémia (fél-fél csoportok), humán, illetve nyelvi tagozatos osztályok. Ebből kifolyólag elég sokrétű és változatos a „diákanyag”, valamint az ő fizikához való hozzáállásuk, az azzal kapcsolatos érdeklődésük és céljaik. Doktori munkámban előtérbe helyezem a fizika, matematika és biológia-kémia tagozatos csoportjaimat, ahol a tehetséggondozás fizikából különösen fontos és jó terepet is ad.

A doktori értekezés fejezetei

Doktori munkám egy olyan „színes csokornak” tekinthető, amely egy-egy hosszabb iskolai projektmunka folyamatát, eredményét és hosszútávon is sokrétű eredményességét mutatja be. Ebben a „színes csokorban” olyan kutatási témákat sorakoztatok fel, amelyek kellőképpen változatosak: eltérőek módszertanilag, témakörben, avagy a foglalkoztatott korosztályban. Ezen projektek mindegyikét tanulókkal végeztem.

Talán külön magyarázatot érdemel az „elhanyagolt” szó a doktori munkám címében. A szó maga a tézisek témáinak kiválaszt(ód)ására utal. A projektek ugyan eltérő okokból készülhettek, de ami közös bennük, hogy mind olyan témakört érintenek, amelyek a hétköznapi fizika órák anyagába nem igazán férnének bele azok „különc” (a fizikaoktatásban nem jellemző) tartalmi és/vagy módszertani jellege (pl. betegségterjedés vizsgálata – statisztikus fizika), szakmai nehézsége, bonyolultsága (pl. zongorahangolás rejtelmei), avagy időigényessége (pl. szélcsatorna építés) miatt. Ezen túlmenően mind tartalmaznak valamiféle szakmai, pedagógiai újdonságot is, amelyek elősegítik a diákok felkészültségét akár a hétköznapi életre, akár reálirányú továbbtanulásaik során, valamint később a munkájukban előforduló helyzetekre, feladatokra egyaránt (pl.: prezentációkészítés, előadástartás, csapatmunka, matematikai-, informatikai- és „barkácsolási” készségek fejlesztése, labormunka, mérési jegyzőkönyv készítése stb.).

Ugyan a reál tagozatainknak köszönhetően szaktanárként lehetőségem volt sokrétűen a fizika iránt érdeklődő diákokkal is dolgoznom, azonban a felsorakoztatott projektmunkák jó része olyan, hogy azok (megfelelő szinteken) felkelthetik a fizikai jelenségekkel kapcsolatban kevésbé szenzitív diákok figyelmét is. Fontos, hogy megtaláljuk a jelenségek megfelelő szinten való vizsgálódásának módszereit és lehetőségeit a diákok érdeklődéséhez és képességeihez igazodva. Ez nem csak csoport, hanem sokszor egyénfüggő is. Mindenkinek meglehetnek a maga erősségei és gyengeségei. Egy csoporton belül is lehetnek olyan diákjaink, akik éppen kutatni, építeni, mérni, kvalitatív avagy kvantitatív módon jelenséget értelmezni, IKT eszközökkel dolgozni szeretnek, stb. Mindig arra törekszem, hogy egyszerre „használjam” a diákok erősségeit és egyben fejlesztőleg hasson a gyengébb kvalitásaikra is. A legfontosabb amire támaszkodhatunk, a diákok hihetetlen mértékű kíváncsisága. Ezért fontos a megfelelő (csoporthoz vagy egyénhez illeszkedő) jelenségek (sokszor közös) megtalálása. A mai világban erre szinte kimeríthetetlen forrásaink vannak, azonban nekünk tanároknak is állandó kihívás (és fejlődési lehetőség) az aktuális (diákok számára is érdekes) témákkal, módszertani lehetőségekkel folyamatosan lépést tartani és tovább adni ezen tudást, tudni vágyást, vizsgálati módszereket és szemléletet a következő generációknak is. Jelen oktatási helyzetben erre igen kevés időnk és lehetőségünk adatik meg, mégis megmutatom, hogy több ízben is hasznosnak bizonyul elkalandozni új (a hivatalos tematikában nem szereplő, sokszor a „kötelező” tananyagon túlmutató) témakörökben, ezáltal mély értést és a későbbiekben is bőséggel kamatoztatható tudást elsajátítani. Néhány konkrét példán át mutatom be ennek lehetőségeit. Úgy tűnik, ezen – a középiskolai fizika tananyagot tekintve ismeretlen területeket súroló – projekt alapú munkaformáknak igen sokrétű (nem is kizárólag szakmai) hozománya van a diákság számára.

A választott témák többsége egy az iskolában 2011 óta minden évben megrendezésre kerülő fizikatábori projektmunkához köthető, de van, amelyik egy a doktori iskolában elvégzett tárgyam vizsgamunkája nyomán készült el, avagy éppen „szerelemből”, egyéb irányú érdeklődésből.

Doktori dolgozatom zárásaként külön fejezetben jelenik meg a teljes fizika munkaközösséggel évről évre megszervezett fizikatábor (programjai, jellege, lebonyolításának módja és minden fontos körülménye) rövid összefoglalóval, nagy hangsúlyt fektetve és kiemelve az elmúlt évek során végzett saját fejlesztéseimre egy lehetséges pedagógiai projekttervezeten keresztül.

A projektmunka formái és lehetőségei

– *„Hogyan csináljam az én iskolámban? Vajon megéri?”* –

Ami tény, hogy a dolgozatomban felsorakoztatott projektmunkák kereteül szolgáló fizikatáborhoz[1] akárcsak hasonló program megszervezése nem kicsit energiaigényes vállalkozás, lényegében egy teljes munkaközösséget (2-8 fő) is igényelhet (szükség esetén más reál munkaközösségekkel is közös kooperáció kezdeményezhető). A szaktanárként koordinált diákprojektjeim tartalma és általam preferált mai jellege (a téma kiválasztásától az előzetes felkészülésen át a bemutatót követő értékelésig bezárólag) több éves tapasztalataim során alakultak ki. Azt remélem, a doktori munkámban bemutatott projektötletek nyomán megtalálható minden iskola számára ezen műfaj hozzájuk illeszkedő (nem feltétlenül tábori) kerete, közönsége, programjai és a megvalósíthatóságának eszközei.

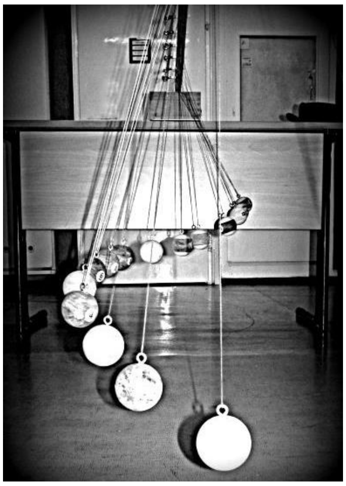
Bizonyára tanárkollégák többen többféleképpen alkalmazták már a projektalapú munkaformát, azonban ilyen módon történő megjelenésében – több hónapos munka egy nem szokványos jelenség nem szokványos módszereivel nem szokványos környezetben történő bemutatásával – talán mégsem mindennapos. Tapasztalataim szerint sokan félnek „ekkora fába vágni a fejszéjüket”, pedig a kérdésre a válasz: Bőven megérheti!

Jelen dolgozatomban ismertetem a több mint egy évtizedes gyakorlati tapasztalataimat főként a tehetséggondozásban alkalmazható (és jórészt hosszabb felkészülést igénylő) témakörök részletes bemutatásával, szakmai és módszertani ajánlásokkal. Ezen időszak alatt tanulmányoztam 6 évfolyam (7-12. osztály) háromféle tagozat (matematika, fizika, biológia-kémia) sokrétű érdeklődését, munkamorálját, megdöbbentő képességeiket, kreativitásukat és ráfordítható energiáikat, végig kísérve őket fejlődésükben, amelynek révén folyamatosan bővült(ek) ezen típusú projektmunka-forma kapcsán a saját – mind szakmai, mind pedagógiai – rálátásom, tudásom, készségeim is. Kölcsönös fejlődési lehetőség ez diáknak és tanárnak egyaránt.

[1] A Berzsenyi Dániel Gimnázium fizikatáboráról:
https://www.berzsenyi.hu/tantestulet/08Baranyai-es-tarsai%20j.pdf
https://sites.google.com/berzsenyi.hu/bdgfizikatabor

1. PENDULUMHULLÁM – különböző korosztályok közös projektje

Megmutattam, hogy a pendulumhullám jelenségének megismerése jól használható a mechanikai rezgések és hullámok témakörei tanításának színesítésére (bármely osztálytípusban), valamint komolyabb vizsgálata a látvány mellett a matematikai hátterének elmélyítésére (főként a reáltagozatokon). A bemutatására készített eszköz, illetve szimuláció pedig a diákok „barkácsoló", illetve informatikai tudásának gyarapítása mellett a különböző korosztályok tartalmas együttműködését teszi lehetővé.



1.1. ábra: Pendulumhullám. (elölnézet)

Valamikor 2013 őszén találkoztam először a pendulumhullám jelenségével, amelynek egyik pillanata van megörökítve a későbbiekben elkészült eszközön. (1.1. ábra) Már első látásra nagyon megtetszett. Rögtön az eszköz elkészítésén, fizikai-matematikai leírásán, és a benne rejlő további lehetőségeken törtem a fejem. A nyolcadikos, valamint tizenkettedikes speciális matematika tantervű osztályaink tanulóival álltunk neki a fizikatábori projektmunka keretében bővebben foglalkozni ezzel a jelenséggel. Miközben igyekeztem utánanézni mind az elmélet, mind a kivitelezés problematikájának, kiderült, hogy akkoriban lényegében alig lehetett találni magyar nyelvű leírást róla. Szebbnél szebb videók milliószámra voltak már akkor is megtalálhatók az interneten (annak, aki még nem találkozott a jelenséggel, mindenképpen érdemes először videofelvételen megnézni, miről is lesz szó[2]), azonban még az idegen nyelvű leírások [1], [2] is a legtöbbször nem voltak elég részletesek, vagy nem „iskolai szempontok" alapján közelítették meg a témát. Ezen túlmenően azzal is meglepődve szembesültem, hogy más kollégák is szinte alig-alig ismerték korábban ezt a jelenséget. Nálam jóval tapasztaltabbak sem tudtak azonnali, egyértelmű választ adni a működést illetően, amiről később kiderült, hogy nem is olyan bonyolult, azonban nem is feltétlenül kézenfekvő. Innen jött az ötlet, hogy egy honlapon [3] osszam meg tapasztalataimat

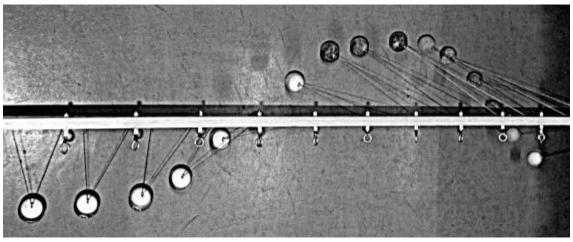
[2] Videók az interneten
- Egyszerű pendulumhullám: https://www.youtube.com/watch?v=yVkdfJ9PkRQ
- Pendulumhullám sötétben: https://www.youtube.com/watch?v=7_AiV12XBbI
- Extrém pendulumhullám tűzgolyókkal: https://www.youtube.com/watch?v=u00OF3ilNUs
- Pendulumhullám szimmetrikusan: https://www.youtube.com/watch?v=vDtfWxL-AJg

másokkal is egy olyan fizikai jelenségről, ami a diákságot, kicsiket és nagyokat, felnőtteket, reál és humán beállítottságúakat egyaránt ámulatba ejt.

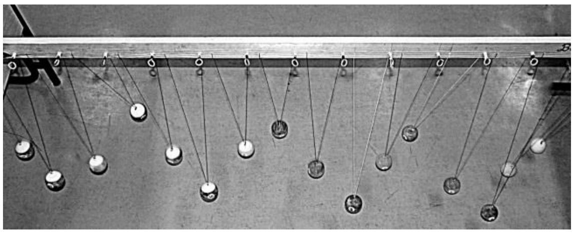
A nagyobbak számára nem túl bonyolult, a kisebbek számára éppen emészthető, viszont mindenki számára meglepő fizikai és matematikai háttér tisztázása után a kisebbek elkészítették az eszközt, majd a nagyobbak az ehhez kapcsolódó pontosabb vizsgálatot elősegítendő számítógépes szimulációt.

1.1. A pendulumhullám fizikai háttere és matematikai leírása

A matematikai inga harmonikus rezgőmozgással való kapcsolatának felhasználásával megmutatható, hogy egy matematikai inga lengésideje kis szögkitérések esetén a $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ összefüggésből meghatározható, ahol *T* az inga periódusideje, *l* a kötél hossza, *g* a nehézségi gyorsulás. [4] Az inga lengési síkját megtartja, valamint kis kitérésekre lengésideje sem változik lényegesen.



1.2. ábra: Pendulumhullám. (felülnézet)



1.3. ábra: Pendulumhullám. (felül-oldalnézet)

Na de mi is az a pendulumhullám?

A pendulumhullám tetszőleges számú ingából álló ingasor, amelyben az ingák hosszát megfelelő matematikai összefüggés szerint választva, az ingák az ábrákon látható különleges alakzatokat veszik fel. (1.2.-1.3. ábra)

Legfőbb kérdésünk, hogy vajon milyen legyen az elrendezés módja? Vagyis milyen hosszúak legyenek a kötelek, hogy az ingákat egyszerre kitérítve, majd kezdősebesség nélkül elengedve, azok ilyen szép alakzatokat mutassanak? A „trükk” a következő: Az ingák úgy vannak beállítva, hogy a teljes pendulumhullám rövid időn belül visszatérjen a kiindulási állapotába. Vagyis minden golyó újra egyszerre legyen ugyanazon szélső helyzetében, mint a legelején. Ez alatt az idő alatt minden inga különböző frekvenciával leng. Ha a leghosszabbik mondjuk 52-t leng a pendulumhullám teljes periódusideje alatt, akkor a rákövetkező 53-at, utána 54-et és így tovább. Ha ezt felismerjük, akkor matematikailag már nincs olyan nehéz dolgunk.

A pendulumhullámban lévő *ingákat (golyókat) beszámozzuk:* $i = 0,1,2,3,\dots,n$. A pendulum így összesen $(n+1)$ db ingából áll. Legyen a nulladik inga a leghosszabb.

További jelölések:

τ – a pendulumhullám teljes periódusideje (az a legkisebb idő, amely alatt a pendulumhullámban lévő összes inga ismét egyszerre éppen a kezdeti pozíciójába ér)

T_i – az i-edik inga periódusideje

l_i – az i-edik kötél hossza

N – a leghosszabb (i = 0) inga τ idő alatti lengéseinek száma

Ezek alapján az egyes ingák periódusidejei az 1.1. táblázatban feltüntetett módon alakulnak.

A kötélhosszak megadására vonatkozó összefüggést két különböző módon is bemutatjuk.

1. Adott τ, n, N esetén az egyes ingák hossza:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow l_i = \frac{g}{4\pi^2} \cdot {T_i}^2 \quad \rightarrow$$

$$l_i = \frac{g}{4\pi^2} \cdot \left(\frac{\tau}{N+i}\right)^2 \quad .$$

i – inga sorszáma	τ idő alatti lengések száma	T_i
0	N	$T_0 = \frac{\tau}{N}$
1	$N+1$	$T_1 = \frac{\tau}{N+1}$
2	$N+2$	$T_2 = \frac{\tau}{N+2}$
.	.	.
.	.	.
i	$N+i$	$T_i = \frac{\tau}{N+i}$
.	.	.
.	.	.
n	$N+n$	$T_n = \frac{\tau}{N+n}$

1.1. Táblázat: Az egyes ingák periódusideje.

Az adatok egy lehetséges és kivitelezhető megadása:

$\tau = 90\ s$ – a pendulumhullám teljes periódusideje

$n = 15 \ \rightarrow n + 1 = 16$ db golyó

$N = 52$ – a leghosszabb inga lengéseinek száma a teljes τ periódusidő alatt

Ezekből az adatokból a fenti összefüggés alapján meghatározhatók a szükséges kötélhosszak. Ennek eredménye látható az iménti adatokkal az 1.2. táblázatban összefoglalva.

2. A fentiekből következik, hogy a hosszak rekurzióval is megadhatók a következő módon:

$$l_{i+1} = l_i \cdot \left(\frac{N+i}{N+i+1}\right)^2 .$$

Érdekes kérdés, hogy más elrendeződés (például számtani sorozatot követő kötélhosszak) esetén milyen mintázatok jöhetnek ki. Látunk-e hasonlóan „szépet”? Ez egy megfelelő szimulációval, ahol a különböző paraméterek könnyedén állíthatóak, gyorsan ellenőrizhető. Természetesen akkor is lesznek „látványos együttállások”, azonban az időzítések és az ebből kialakuló összhatás miatt szubjektív megítélésem szerint a jelenség messze nem ilyen szép.

i	$l_i\ [cm]$
0	**74,4**
1	**71,7**
2	**69,0**
3	**66,5**
4	**64,2**
5	**62,0**
6	**59,8**
7	**57,8**
8	**55,9**
9	**54,1**
10	**52,4**
11	**50,7**
12	**49,1**
13	**47,6**
14	**46,2**
15	**44,8**

1.2. Táblázat: A kötélhosszak egy lehetséges megadása.

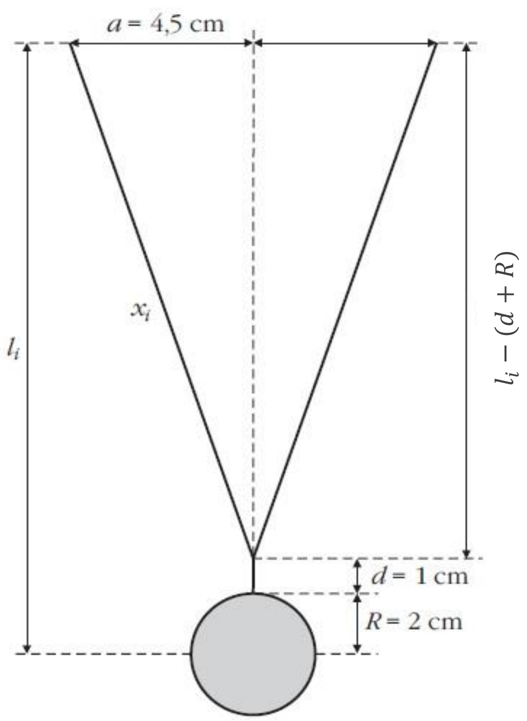
1.2. Az eszköz elkészítésének nehézségei

Az eszközt természetesen többféleképpen el lehet készíteni. Itt egy olyan módszert mutatok be, amely egyszerű iskolai körülmények között is kivitelezhető, valamint szeretném felhívni a figyelmet jó néhány olyan nehézségre, amelyekre többségében már csak a munka során derül fény. Az eszközt a nyolcadikos diákjaimmal készítettük miközben hangsúlyt fektettem arra is, hogy az ő szintjükön (az inga lengésidejének pontos levezetése nélkül) az eszköz működését matematikailag és fizikailag is megértsék. Az előadásunk során ennek bemutatása is az ő feladatuk volt.

Tartószerkezet: A tartószerkezet bármilyen egyszerű fa/fém állvány lehet, ami elbírja a golyókat, és amelybe kellő számú lyukat lehet fúrni. Akár talpazatra sincs szükség, egy egyszerű, kellő hosszúságú deszkalap is megteszi, amit aztán két oldalról alá lehet támasztani lényegében bárhol, ezzel a szállítást is megkönnyítve. Megjegyezném, hogy tapasztalat szerint bármiféle szállításra igen érzékeny a rendszer, főképp a kötelek, amik indokolatlan külső behatásra könnyen szakadnak, elmozdulnak. A kötél megválasztása emiatt kardinális lesz!

Golyók kiválasztása: Sajnos a méretes fagolyók elég drágák. Több videó található, ahol óriási anyacsavarral oldották meg ezt a feladatot. Nekem végül a biliárdgolyó vált be, amelyet olcsón (akár ingyenesen) is be lehet szerezni némi telefonálgatás után leselejtezett golyókból, amelyek után biliárdszalonokban érdemes érdeklődni. Ennek felfúrása egyetlen kicsiny kampós csavarral könnyen kivitelezhető, stabilan tartható fúróval és szükség esetén alkalmas pillanatragasztóval. Amennyiben a fúró a csavar meneténél egy hajszállal vékonyabb, akkor a csavarás által a kampó könnyen beleszorul a menetbe. A biliárdgolyó anyagából kifolyólag, ha sokszor ki-be tekergetjük, akkor meglazul a menet, ekkor egy kis pillanatragasztó még segíthet. Szerencsésebb azonban elsőre helyesen megfúrni és becsavarozni.

Kötélválasztás és felfüggesztés: Ahogyan az a legtöbb videón is látszik, a csavarodás minimalizálásának érdekében kettős felfüggesztést érdemes készíteni. A golyók oldalnézetből az 1.4. ábrának megfelelő pozícióban egymás mellett helyezkednek el. Az ilyen típusú felfüggesztés stabilizálja ugyan a golyót, ellenben nehézkesebbé teszi a kötélhosszak amúgy sem könnyű beállítását! A kötél anyagának kiválasztása nem egyszerű. Mi kezdetben damillal próbálkoztunk, mondván, hogy elég erős és kevéssé csavarodik, ám ha a felfüggesztésnél elhelyezett kicsiny csavarokkal apró hangolásokat is szeretnénk tudni végezni, akkor a fel-le tekert apró köteldarabkák teljesen megtörnek és használhatatlanná válnak. Így ezzel utóhangolásokat végezni nem lehetett. Olyan kötelet/fonalat javaslok, amely viszonylag csavarodásmentes, a súrlódástól nehezen kopik és kellőképpen teherbíró. Erre a hímzőfonalak egészen jól alkalmasak. A kötelek számára 2-2 lyukat fúrtunk a tartószerkezetbe. Az egyikbe az ingákat fixen rögzítettük, a másik oldalon egy tipliben mozgó csavar segítségével a szükségesnél pár centivel hosszabb kötelet a csavar köré tekertük, így ennek ki-be tekergetésével apró, finom hangolásokat lehetett végezni. Egy alkalmas méretezés látható az 1.4. ábrán: R a biliárdgolyó sugara, d a kilógó kampó hosszúsága, $2a$ a két felfüggesztési pont



1.4. ábra: Az egyes ingák készítésének paraméterezése. (oldalnézet)

közötti távolság, l_i az 1.2. táblázat alapján megadott elméletileg kiszámolt i-edik kötél hossza, $2x_i$ a felfüggesztéshez ténylegesen szükséges i-edik kötélhossz. A többi golyó az ábrázolt golyótól balra, illetve jobbra helyezkedhet el, nem pedig előtte, illetve mögötte.

Távolságok precíz hangolása: A legfőbb gondot az okozza, hogy néhol csupán pár milliméter a különbség két kötél hossza között, amelynek pontos beállítása szinte lehetetlen, ráadásul a hibafaktor olyan erős (csavarodás, rossz indítás, mérési pontatlanság, közegellenállás, súrlódás stb.), hogy nincs is értelme bizonyos ponton túl a hosszak pontosabb mérésének. Mit tehetünk mégis? Az egyik, ami segíthet az, hogy nem a függőleges l_i hosszakat próbáljuk meg beállítani, hanem a golyó elhelyezkedését a kötélen. Az 1.4. ábráról leolvasható $2x_i$ távolságokat lényegesen könnyebben lehet mérni az alábbi Pitagorasz-tétel alkalmazásával megadható formula szerint: $x_i = \sqrt{(l_i - R - d)^2 + a^2}$. Ez általában még mindig nem elég pontos. Lehet próbálkozni a golyók egyenkénti hangolásával periódusidőt mérve. Amennyiben az időmérés még mindig nem elég jó, ehhez igénybe vehető számítógépes időmérő program, amely ezt pontosabbá teszi. Ezt megelőzően azonban mindenképpen ajánlom, hogy az egész rendszert többször elindítva figyeljük meg, a teljes pendulumhullámhoz képest mely golyók sietnek, avagy éppen késnek, és ennek függvényében óvatosan, csak 1-2 millimétert állítsunk a hosszakon a megfelelő irányokba, majd ismételjük meg jó néhányszor ezt a műveletet. Ezzel a módszerrel néha gyorsabb és pontosabb a hangolás, mint szigorúan ragaszkodva az idő- illetve hosszmérésekhez, amit annyi egyéb tényező is befolyásol.

Természetes ötletként adódik, hogy a teljes szerkezet méretét (és ezzel a kötélhosszakat) növelve nőnek a kötélhosszak közötti különbségek, így a hangolás precizitása is kevésbé kardinális, azonban a méretek további növelésével nehézkessé válhat a tárolás és szállítás (ami a mi esetünkben fontos szempont volt). Ha ez utóbbi kevésbé lényeges, akkor természetesen készíthető jóval nagyobb eszköz is hosszabb ingákkal, amelyek így akár pontosabbá is tehetők.

Indítás: Az elkészített ingarendszert az elindításkor egy hosszú deszkával térítjük ki. Azonban a fenti számítások alapján a lengéseknek nem azonos amplitúdóval, hanem azonos maximális szögkitéréssel kellene történniük. Ez a kitérítés szempontjából a valóságban alkalmazott paraméterértékek mellett nem jelent lényeges különbséget: a szélsőhelyzetek burkológörbéje jó közelítéssel egyenes. (1.5. ábra)

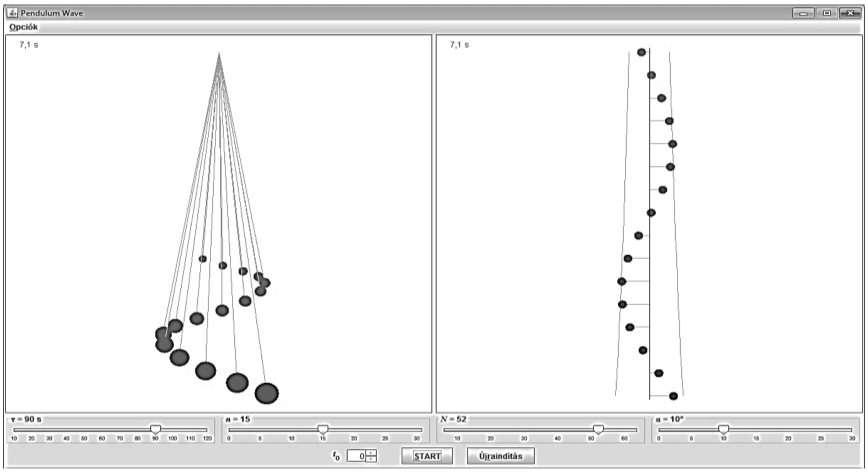
1.5. ábra: A pendulumhullám indítása.

Egyéb ötletek: Sötétben is csodálatos a pendulumhullám, ha a golyókat (és akár a köteleket is) láthatóvá tesszük. Ehhez alkalmazható hobby boltokban többféle színben kapható foszforeszkáló festék, ami pár ezer forintból kivitelezhető, avagy fehér alapanyaggal dolgozva, UV lámpával is megvilágítható az elkészült eszközünk. Mindkettő káprázatos látványt nyújt!

Továbbá az interneten megtalálható egy tűzgolyós verzió is, amelyen a golyók fémláncokon lógnak és némi éghető anyagot tartalmaznak. Kémiás elhivatottságúak előnyben! A fémlánc hossza viszonylag könnyen és precízebben hangolható, nem is igényel kettős felfüggesztést. A golyó üregesnek tűnik, amely valamilyen folyékony, éghető anyaggal lehet megtöltve. Természetesen alkalmas lehet egy játszótéri hinta váza is, de némi kreativitással ennél jóval kisebb változatban is kivitelezhető. Ugyan nagy elővigyázatosságot igényel, de a látványért talán megéri.

További pluszt adhat, ha az ingák hangot is szolgáltatnak például úgy, hogy a szélső helyzetükben valamit megkongatnak. Ez azonban hosszabb távon lényegesen megváltoztatná az ingák továbbhaladását. Az ötletünket nem feladva, a „pendulumhullám zenéje” sikeres megvalósítást a következő részben olvasható szimuláció elkészítése során nyert.

1.3. Pendulumhullám számítógépes szimuláción



1.6. ábra: Pendulumhullám szimuláción.
(elöl- és felülnézet)

A jelenség pontosabb vizsgálatát elősegítendő elkészült egy azt demonstráló program is. A Java programnyelven íródott szimulációt végzős diákok készítették. Kerestem az eszközt készítő nyolcadikosaim mellé programozni tudó felsőbb éveseket. Az együttműködésünk hozománya, hogy a későbbiekben egy másik projekt („Beteges kertecske” – 2. fejezet) kapcsán – már egyetemistaként – is közösen dolgoztunk együtt, amely témából szintén közös cikkünk is született.

A program természetesen a valóságban is működő eszközünknek megfelelő 1.2. táblázat adataival indul, a későbbiek során azonban a különböző paraméterek módosíthatók, illetve az adatok a programból exportálhatók.

Előkészületek: A program fő funkciója, hogy az ingarendszert mutatja egyidejűleg elöl- és felülnézetből (lásd az 1.1. és 1.2. valós, valamint az 1.6. szimulációs ábrákon). Ezen vetületek megrajzolásakor ténylegesen egy síkra rajzolunk, tehát a program nem háromdimenziós adattípusban tárolja az ingákat annak ellenére, hogy bizonyos grafikai megoldások – mint például a golyók mérete – erre engednének következtetni.

Ahhoz, hogy animációt hozzunk létre, egymáshoz közeli időpillanatokban rajzoljuk ki az ingarendszert. Minden újrarajzoláskor a vászonról letöröljük az előző képkockát, majd kirajzoljuk az újat – másodpercenként 33-szor. Ez tehát azt jelenti, hogy szükségünk van arra, hogy tetszőleges időpillanatban ismerjük valamennyi inga helyzetét. A rajzolást Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben végezzük, tehát minden ingáról tudnunk kell például az aktuális kitérési szögét és a fonál hosszát: ezekből az adatokból meghatározhatók a golyók koordinátái. A fonálhosszak adott ingarendszernél ismertek. Szükség van tehát a kitérési szög–idő $\alpha(t)$ függvényére minden egyes l hosszúságú inga esetén, amelyet az alábbi összefüggésből kaphatunk meg: $\alpha(t) = \alpha_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$, ahol $\alpha_0 = \alpha(0)$. Így már minden adott, hogy az ingarendszer megfelelő vetületeit tetszőleges időpillanatban ki tudjuk számítani.

Az úgynevezett objektumorientált programozási koncepciót követtük: saját adattípusokat hoztunk létre. Elsőként elkészült az inga típus, ami tárolja egy inga összes paraméterét. Erre épülve jött létre az ingarendszer típusa, ami az előbb megírt ingákat használja; azok belső működését nem befolyásolja, csupán összehangolja őket: gondoskodik például arról, hogy egyszerre induljanak el, illetve ez végzi el az ingák paramétereinek beállítását is. A grafikus felülethez a Java nyelv Swing[3] csomagját használtuk.

A programozás hozadékai:

Burkológörbe: Amint azt már említettük, a megépített ingarendszerben a szélsőhelyzetek burkológörbéje csak közelítőleg egyenes. Ez a videók alapján nem feltétlenül vehető észre egészen addig, amíg az ember nem gondol igazán bele, avagy meg nem nézi az egzakt matematikai formulákra épült szimulációt. Persze a jelenség szépségén és a fizikai leírás

[3] http://docs.oracle.com/javase/7/docs/api/javax/swing/package-summary.html

lényegén ez nem változtat, mégis érdekes lehet a szimuláció hatáskörének erre való kiterjedése, főleg ott, ahol már esetleg más paraméterértékekkel jelentőssé válik az eltérés.

Nagy kitérítések: Az általunk írt program nem tanult fizikát: nincs tisztában sem Newton törvényeivel, sem a gravitációval, csak az ingák mozgását leíró képleteket ismeri, amelyek azonban a közelítés miatt csak kis szögek esetén igazak. Ebből következően az sem zavarja, ha olyan kitérési szögértéket adunk meg, amire a közelítés már nem lenne igaz. Ez igen szép és szórakoztató jelenségekhez vezet: 120°-os kitérítés esetén például a golyók egy „pillangómintát” írnak le. Persze ennek a valósághoz nincs sok köze: ha a rendszert 120°-kal térítjük ki, a golyók nem körpályán fognak elindulni, hanem először szabadesést végeznek. Ez utóbbi példa jól jellemzi a programozás során oly gyakran megfogalmazott álláspontot: „megcsináljuk, mert megtehetjük”.

Lineáris kötélhosszak: Felmerült a kérdés, hogy mi történik, ha az ingák hosszai a megadott képlet helyett egy egyszerűbb összefüggést, például egy számtani sorozatot követnek. A szimulációból kiderül, hogy ebben az esetben az indulás ugyan nagyon hasonló, de rövidesen az ingák mozgásában már nem lesz látható olyan „szép” szabályosság, mint az általunk elkészített pendulumhullámnál.

Hangok: Tekintve, hogy a pendulumhullám látványra igen esztétikus, logikusnak tűnik, hogy ez a szépség esetleg más érzékszervekkel is észlelhető, például hallhatóvá tehető. A pendulumhullám megépítésekor technikailag nem igazán lenne megvalósítható, hogy az ingák a szélső helyzetekben hangot adjanak ki (vagy legalábbis veszítenének pontosságukból), ezért ezt a jelenséget is szimuláltuk. A programban a leghosszabb inga normál zenei „A” hangon ($f = 440\ Hz$) szól, ettől kezdve minden inga sorban fél hanggal magasabb hangot ad ki. A programban a hangok bekapcsolásával egyidejűleg érdemes a „*Szélsőhelyzet más színnel*” funkciót is engedélyezni, így látható, hogy mely ingák adnak ki éppen hangot. A kezdeti feltételezés igaznak bizonyult: valóban szép, de legalábbis érdekes „zenét” kapunk. (Ennek szemléletessé tételére másféle inga–hang hozzárendelés is lehetséges. Egy másik megoldás lehet például a spirális ábrázolás[4], amelynek lényege, hogy a felhangrendszer szerint, az alaphang egész számú többszörösei elvén van skálázva. További „pattogó labdákkal” illusztrált zenei motívumokra is lelhetünk az interneten animációk formájában.[5])

---

[4] Spirális ábrázolás zenével: https://www.youtube.com/watch?v=JMzB7sLeSbs

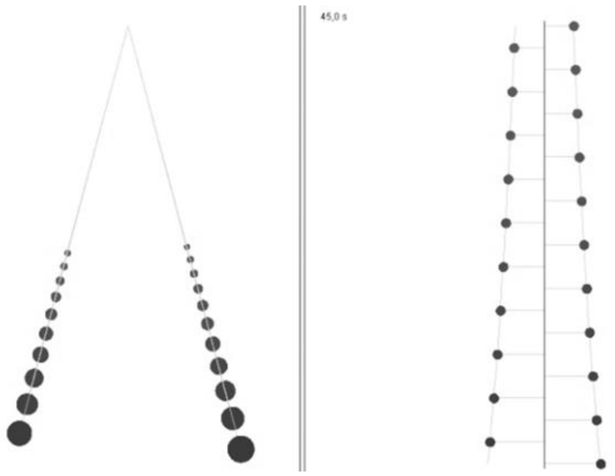
[5] Pendulumhullám zenéje pattogó labdákkal:
http://bouncemetronome.com/video-resources/harmonic-polyrhythms/pendulum-waves-played-harmonics
http://bouncemetronome.com/features/pro/theremins-rhythmicon

Egyéb fejlesztések: A szimuláció készítése közben a végzős diákjaimnak a projekthez kapcsolódóan rengeteg egyéb ötlete is támadt például a víz- illetve földrengéshullámokat, valamint egyéb zenei vonatkozásokat illetően. Ezeknek is igyekeztek utána olvasni, majd programozási ismereteiket bővítve meg is valósították azokat. A lehetőségek tárháza azonban még bőven nyitott.

Letöltés és felhasználás: A program szabadon letölthető [3], használatához legalább 7-es Java futtatókörnyezetre van szükség.[6] Az imént említett, a projekt oldalhajtásaiként készült hasonló jellegű szimulációk a víz- és földrengéshullámokkal, valamint a hangokkal kapcsolatban ugyanilyen feltételek mellett érhetők el.

1.4. Részletes elemzés

A szimuláció alapján a „szép alakzatok” még sokkal könnyebben értelmezhetők, akár a nyolcadikosok számára is elemezhetőek. Ugyanis a szimuláció a valós látványhoz képest nagyon nagy pontosságú és nagy előnye, hogy a megfelelő időpontokban megállítható. Természetesen ez messze nem helyettesítheti az élő látványvilágot. Azonban használjuk ezt most ki mi is és vizsgáljuk meg a pendulumhullámunkat néhány speciálisan kiválasztott időpillanatban!



1.7. ábra: Fél periódus (45 sec) utáni állapot elöl- és felülnézetben.

Amikor a pendulumhullám éppen fél periódusnál jár (1.7. ábra), akkor azok a golyók, amik a teljes periódusidő alatt páros számú teljes lengést végeztek, most is hasonlóan tesznek. Azonban azok a golyók, amik a teljes periódusidő alatt páratlan számút lengtek, most valahány teljes és egy fél lengést tudnak csak elvégezni. Ennek köszöngetően az előbbiek a kiindulási helyzetben, míg utóbbiak éppen azzal átellenes oldalon lesznek a 45. másodpercben.

[6] http://java.com/en/

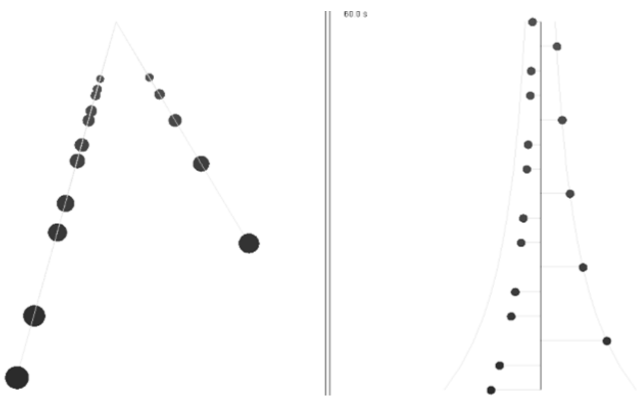
A 30. illetve 60. másodperc (1/3 ill. 2/3 periódusidő) esetére ennek kiértékelése (1.3. táblázat):

eh – egyensúlyi helyzet
jszh – jobbszélső helyzet
bszh – balszélső helyzet

eh-bszh: az inga éppen az egyensúlyi helyzetből tart a balszélső helyzetébe
bszh-eh: a inga éppen a balszélső helyzetből tart az egyensúlyi helyzetébe

golyók sorszáma	periódusidő alatti lengések száma	30 sec alatt végzett lengések száma	golyók helyzete (30. sec)	60 sec alatt végzett lengések száma	golyók helyzete (60. sec)
0	52	17 1/3	eh-bszh között	34 2/3	bszh-eh között
1	53	17 2/3	bszh-eh között	35 1/3	eh-bszh között
2	54	18	jszh	36	jszh
3	55	18 1/3	eh-bszh között	36 2/3	bszh-eh között
4	56	18 2/3	bszh-eh között	37 1/3	eh-bszh között
5	57	19	jszh	38	jszh
6	58	19 1/3	eh-bszh között	38 2/3	bszh-eh között
7	59	19 2/3	bszh-eh között	39 1/3	eh-bszh között
8	60	20	jszh	40	jszh
9	61	20 1/3	eh-bszh között	40 2/3	bszh-eh között
10	62	20 2/3	bszh-eh között	41 1/3	eh-bszh között
11	63	21	jszh	42	jszh
12	64	21 1/3	eh-bszh között	42 2/3	bszh-eh között
13	65	21 2/3	bszh-eh között	43 1/3	eh-bszh között
14	66	22	jszh	44	jszh
15	67	22 1/3	eh-bszh között	44 2/3	bszh-eh között

1.3. Táblázat:Ingák helyzetének táblázatos kiértékelése (1/3 illetve 2/3 periódusidőnél).

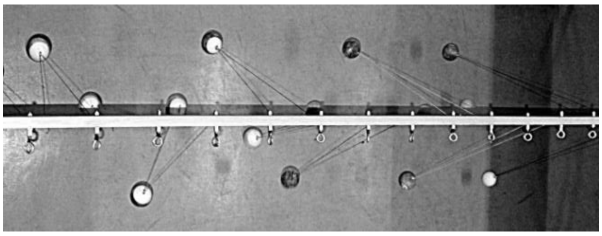


1.8. ábra: 1/3 (30 sec) illetve 2/3 (60 sec) periódusidő utáni állapot elöl- és felülnézetben.

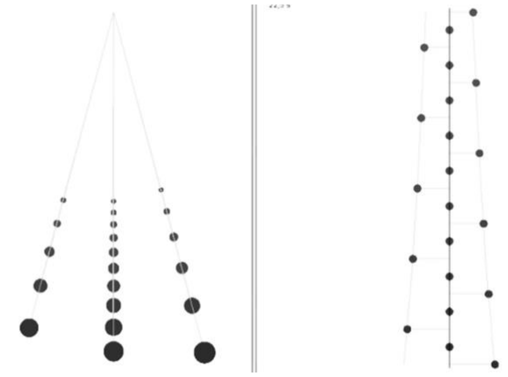
Ebből az is leolvasható, hogy a 30. és a 60. másodperc pillanatfelvétele valóban semmiben sem különbözik egymástól, hiszen a jelenség szimmetrikus. Azonban ezzel az egyszerű gondolatmenettel a táblázatok alapján az is könnyedén észrevehető, ami a kimerevített képeken nem látszik (1.8. ábra). Konkrétan az, hogy adott időpillanatot vizsgálva, amíg az egyik esetben (1/3 periódusidőnél) némely golyó balról jobbra halad, addig a másik esetben (2/3 periódusidőnél) éppen ellenkezőleg, ugyanazon golyó jobbról balra halad, miközben azonos pozíción haladnak keresztül (és természetesen fordítva).

Ehhez hasonlóan vizsgálható bármely időpillanat, főképp a „szép” rajzolatú pillanatnyi állapotoknál. Például az 1/4 periódusidőnél (22,5 sec) történő elemzést elvégezve válnak érthetővé az 1.9.-1.10. ábrák valós, illetve szimulációs felvételei.

Pedagógiailag fontosnak tartom megjegyezni, hogy a szimulációt készítő diákok a folyamatos konzultációink mellett sok szempontból (például a programozás és annak hozadékai tekintetében) lényegében teljesen önálló munkát végeztek.



1.9. ábra: ¼ periódusidő (22,5 sec) utáni állapot felülnézetben valós felvételen.



1.10. ábra: ¼ periódusidő (22,5 sec) utáni állapot elöl- és felülnézetben szimuláción.

1.5. Összefoglalás

Rámutattam, hogy a jelenség vizsgálata ezen projekt révén jól kiegészíti és bővíti a harmonikus rezgőmozgás, ezen belül is az ingamozgás témakörét (szűkebb és tágabb értelemben vett periódusidő, frekvencia kötélhosszfüggése), annak matematikai közelítéssel kapott jellegét és határait, valamint ezen látványos mozgás kialakulásának kevésbé egyértelmű „logikai” hátterét. Egyszerre hasznosítható mind a fizikai, mind a matematikai vonatkozásaiban, nem mellékesen megemlítve az elkészült program informatikai hátterét is, amely későbbi feladatok megoldhatósága és prezentálhatósága kapcsán is alkalmazható tudást szolgáltatott készítőként és szemlélőként egyaránt.

Az iskolánk legfiatalabb és legidősebb két korosztálya közös munkában találkozott, rengeteget fejlesztve ezzel mindhárom korcsoportot (beleértve magamat is).

A kisebbeknek újdonság ennyire precízen építeni, számukra teljesen új témában fizikai és matematikai háttérrel gazdagodni, ámulattal nézik a nagyobbak informatikai munkáját, barkácsötleteit, leleményességét, a közös munka közben más témákról is beszélgetve sokat tanultak tőlük is, ahogy a nagyobbak is türelmükről és segítőkészségükről tehettek tanúbizonyságot.

A nagyobbak az eredeti tervet jócskán meghaladva számtalan saját ötlettel is gazdagították a projektmunkát. Többek között a szimulációjuk segítségével több, a realisztikustól eltávolodó, szélsőséges, a matematikai közelítések érvényességi területén kívül eső jelenségbe is betekintést nyerhetünk. Ezzel a normál osztályokban is módot adhatunk arra, hogy felismerjék és szó szerint láthassák a fizikai / matematikai közelítések lényegét és határait anélkül, hogy ehhez bonyolultabb számításokba bonyolódnánk velük.

Az elkészült szimuláció és eszköz zenei vonalon is hasznosításra került. Édesapám, Lendvai Tamás[7], azóta a Zeneakadémia hangszerkészítést tanuló hallgatóinak, illetve előadásaira is be szokta vinni szemléltetésképp. A projekt bemutatásra került a TPI-15 (*International Conference on Teaching Physics Innovatively*) 2015-ben Budapesten tartott nemzetközi fizikatanári konferenciáján is, ahol a két korosztályból egy-egy tanítványommal való közös előadásunk nyomán került a fiatalabbik diákom később az IYPT (*International Young Physisists Tournament*) világába, ahol végzősként 2018-ban már csapatkapitányként vett részt a Pekingben megrendezett döntőn, majd 2021-ben már egyetemistaként ugyanezen verseny kicsiknek szóló változatának, az IFRT (*Ifjú Fizikusok Regionális Tornája*) egyik főszervezője lett. A nagyobbik diákom pedig részben az említett TPI-15 konferenciakötetébe írt közös cikkünk segítségével lett köztársasági ösztöndíjas másodéves egyetemistaként.

Az elkészült anyagok (internetes videók listája, saját videók, szimulációk, előadásanyagok, projektmunka tervezet, kapcsolódó cikkek stb.) mind megtalálhatók az iskolai weboldalamon. [3]

Ez a fejezet tartalmazza az 1. tézis háttéranyagát.

A fejezethez kapcsolódó saját publikációim: [#1], [#2]

A fejezethez kapcsolódó előadásom: I.

Hivatkozások

1. J. A. Flaten, K. A. Parendo, Pendulum waves: A lesson in aliasing, Am. J. Phys., 69 (7), 2001, 778-782, DOI: 10.1119/1.1349543

2. R. E. Berg, Pendulum waves: A demonstration of wave motion using pendula, Am. J. Phys., 59 (2), 1991, 186-187, DOI: 10.1119/1.16608

3. http://www.berzsenyi.hu/Lendvai

4. Budó Ágoston: Kísérleti fizika I. (mechanika, hangtan, hőtan), Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1968, 24.§. 85-86. o.

[7] bővebben lásd az 5. fejezetben

2. FERTŐZÉSTERJEDÉS GYÜMÖLCSÖSKERTBEN, avagy a „BETEGES KERTECSKE" PROJEKT – egy eddig ismeretlen, újszerű terület a fizikaoktatásban

Egy fertőzés gyümölcsöskertben való terjedésének modellezéssel történő tárgyalását Dr. Néda Zoltán[8] az ELTE TTK Fizika Doktori Iskola Fizika Tanítása Program[9] keretében „Kooperatív jelenségek és interdiszciplináris vonások" címmel tartott előadássorozatához kapcsolódó projektfeladat inspirálta. A téma alkalmasnak bizonyult a fizika egy a középiskolai tananyagban kevésbé előforduló ágazatának, a statisztikus fizikának, valamint egy „újszerű" szemlélet bemutatására, ahol a szokásostól eltérően nem tudunk minden kérdést kielégítő matematikai levezetést produkálni, így az informatikában is jártas diákjaimmal ismét a számítógép segítségét vettük igénybe. Megmutattam, hogyan építhető be a középiskolai fizikaoktatásba egy ilyen bonyolult jelenség hatékony értelmezhetősége akár a normál tantervű osztályokban is egy „egyszerű" számítógépes modell segítségével.

2.1. A konkrét feladat ihletője és annak pontosítása

Az eredeti feladat

Képzeljünk el egy gyümölcsöskertet, amelyben a fák szabályos négyzetrácsban helyezkednek el. Ha egy betegség valamelyik fánál felüti a fejét, akkor az átterjedhet a szomszédos fákra. Az átterjedés véletlenszerű és p valószínűséggel következik be. Ez a p függ a fák egymástól mért távolságától: minél közelebb vannak egymáshoz a fák, annál valószínűbb, hogy a fertőzés átterjed. Hogyan lehet a fákat elég közel ültetni egymáshoz, hogy sok gyümölcsfánk legyen és ugyanakkor elkerülni, hogy az egész kertre kiterjedő járványok keletkezzenek?

Kertész János, KöMaL, 1986, december [1]

[8] http://www.phys.ubbcluj.ro/~zneda/
Néda Zoltán, Boda Szilárd, Káptalan Erna: Rend a rendezetlenségből – játék metronomokkal, Természet világa, 2013/II különszáma (Káosz, Környezet, Komplexitás), 2013, 3-7. o.
Néda Zoltán, Káptalan Erna, A sokaság ritmusa – meglepő szinkronizációs folyamatok, Fizikai Szemle, 2009/szeptember, 301-305. o.

[9] http://csodafizika.hu/fiztan/

A feladat pontosítása

Képzeljünk el egy $(L \times L)$-es négyzet alapterületű gyümölcsöskertet, amelyben egy $(n \times n)$-es négyzet rácspontjaiban, az egész területen egyenletesen gyümölcsfák helyezkednek el. A gyümölcsöskertünkben járvány tör ki. Kezdetben a gyümölcsfák p_0 valószínűséggel betegek. Ha egy betegség valamelyik fánál felüti a fejét, akkor az átterjedhet a kertben lévő többi fára. Az átterjedés véletlenszerű, és minden beteg fa p_i valószínűséggel terjeszti a betegséget, ahol i az i-edik beteg fát jelöli. Ennek értéke (a legegyszerűbb esetet véve) lineárisan változik az adott beteg fától való távolság függvényében. Minél közelebb vannak egymáshoz a fák, annál valószínűbb, hogy a fertőzés átterjed. Ha egy egészséges fa az adott napon bármely beteg fa által megfertőződik, akkor az addig egészséges fa is elkapja a betegséget és a következő naptól kezdve további fákat betegíthet meg. Annak, hogy egy fa az adott napon esetlegesen több fa által is megfertőződik, nincs jelentősége. Továbbá tegyük fel, hogy minden egyes megbetegedett fa a megbetegedést követő minden további napon, de legfeljebb x napon át, adott z valószínűséggel meg is gyógyulhat. Ennek oka lehet valamiféle emberi beavatkozás (pl. permetezés), földrajzi vagy időjárási körülmények (nyári zápor, jégeső, szélvihar), spontán gyógyulás stb. Ha egy fa ezen x nap alatt meggyógyul, akkor egyben immunissá is válik a fertőzéssel szemben, tehát nem kaphatja el ismét a betegséget. Ha azonban egy megbetegedett fa x nap alatt nem tudott meggyógyulni, akkor sajnos a gyümölcstermesztés tekintetében menthetetlen lesz, elpusztul.

Vizsgálatunk tárgya a betegség elterjedése lesz bizonyos paraméterek függvényében. A megvizsgálandó kérdésünk pedig az, hogy legfeljebb hány fát érdemes elültetni az adott területre, vagyis mennyire lehetnek ezen fák egymáshoz közel anélkül, hogy egy járvány túlságosan könnyen elterjedne benne? A járványelterjedés mértékének jellemzésére szolgál majd a q-val jelölt ún. rendparaméter.

A számunkra érdekes – az eredeti feladat szövegezésében szereplő kérdést egy lehetséges módon számszerűsítő – rendparaméter megfelelő vizsgálatához szükség van egy – az eredeti KöMaL feladatban nem említett – gyógyulási mechanizmus beépítésére. Enélkül ugyanis csak idő kérdése lenne, hogy a végére minden fa megbetegedjen. A feladat végiggondolása, kidolgozása, valamint a hozzá készült program készítése közben sok probléma, ötlet, észrevétel felmerült. Ezek többségét sorra implementáltuk a programba.

Szeretném hangsúlyozni, hogy ez egy „egyszerűsített” modell, aminek a legfőbb érdekessége – amellett, hogy középiskolás diákokat mozgató újszerű fizika feladat –, hogy „szép” eredményre vezet, amit viszont előre egyikünk sem tudhatott, csak nagyon „halkan” remélt. Mivel azonban a probléma túl bonyolult ahhoz, hogy teljes egészében analitikusan tanulmányozzuk, ezért Monte Carlo [2] típusú számítógép szimulációt tekintünk a továbbiakban.

2.2. Paraméterek és kezdeti értékek

Méretek, sűrűségi jellemzők:

$L = 1$ *egység* – a négyzet alapterületű kert oldalélének hossza.
n – az egy sorban/oszlopban levő gyümölcsfák száma, ahol $n\epsilon[n_{min}; n_{max}]$.
$n_{min} = 1;\ n_{max} = 20$
Tehát valójában $\frac{n}{L}(= n)$ – a fák (lineáris) sűrűségét jellemzi a kertben.

Betegségterjedés / Gyógyulási jellemzők:

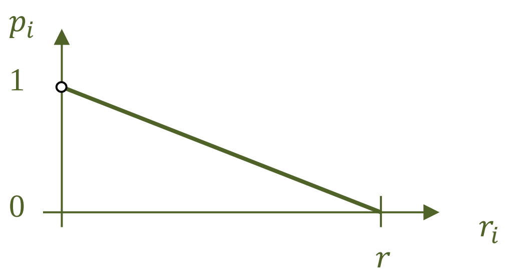
$p_0 = 2{,}5\%$ – kezdeti fertőzöttség valószínűsége.
$p_i(r_i)$ – az adott (még) egészséges fára vonatkozóan a fertőzés elkapásának valószínűsége az i-edik beteg fától, ha az egészséges fa attól r_i távolságban helyezkedik el.

A fertőzés valószínűségének távolságtól való lineáris függését az alábbi módon definiáljuk:

$$p_i(r_i) = -\frac{1}{r}\cdot r_i + 1 \text{ , ahol } r_i\epsilon(0; r] \quad \text{(2.1. ábra).}$$

$r = 0{,}1$ *egység* – a betegség (egy adott megfertőzött fától származó) terjedésének hatósugara.

Tehát az $\frac{r}{L}(= r)$ – dimenziótlanított paraméter megadja, hogy a betegség egy adott fertőzött fától kiindulva milyen messzire terjedhet a kert méretéhez viszonyítva.



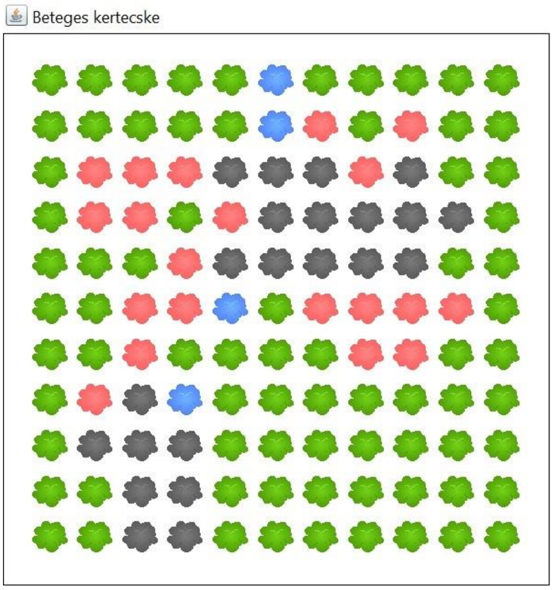
2.1. ábra: A fertőzés valószínűségének távolságtól való lineáris függése.

Ezt a valószínűséget minden lépésben (minden egyes nap) az összes beteg-egészséges fa-párosra meg kell vizsgálni egészen addig, amíg bizonyossá nem válik az egészséges fáink sorsa.

$z = 1\%$ – a megbetegedett fák napi gyógyulási valószínűsége (amennyiben egy fa meggyógyul, immunissá válik a betegségre, nem tud újra megbetegedni, sem fertőzni).

$x = 7nap = 1hét$ – a beteg fák meggyógyulási lehetőségének napszáma (x nap betegséget követően a fa elpusztul, nem tud sem meggyógyulni, sem újra fertőzni).

A fák sorsát illetően néhány esemény lefolyásának menetét önkényesen, ám lehetőleg valamelyest realisztikusan próbáltuk megválasztani (pl.: lineáris betegségterjedés, gyógyulási valószínűség stb.). A modellhez készült – a későbbiekben részletesen tárgyalt – szimulációs programban [3] felsorolt paraméterek (L értékének kivételével, ami a távolságegységet szabja meg) mind változtathatók. A program vizuális megjelenítést és egy grafikus elemzést is tartalmaz. A szimuláció adott (beállítható) kezdeti feltételek mellett egy „napról napra” időben változó ábrán mutatja meg a betegség terjedésének részleteit tetszőleges n értékre. A fák állapotát különböző színekkel jelöltük: zöld – egészséges, piros – beteg, kék – immunis, valamint fekete – elpusztult fa (2.2. ábra).



2.2. ábra: Egy lehetséges állapot n=11 esetén a 22. napon. (szimuláció) (Kezdeti értékek: $p_0 = 2,5\%$; $\frac{r}{L} = 0,1$; $z = 1\%$; $x = 7$ nap)

Ez egy sokparaméteres modell, amelyek közül a konkrét vizsgálathoz (a fentebbiek alapján) többet rögzítettünk és a továbbiakban csak néhány paraméter függvényében tanulmányozzuk a rendszer viselkedését. A változókat mindössze két vizsgálandó paraméterre szűkítettük le: A betegségterjedés q rendparaméterét először csak n – a fák sűrűségének függvényében egy kétdimenziós $q - n$ grafikont szerkesztve vizsgáljuk, majd a z – gyógyulási valószínűséggel együtt egy háromdimenziós $q - n - z$ ábrát is elkészítve. A korábban megadott kezdeti – a szimulációban alapbeállítási – értékek egy konkrét esetre vonatkozó vizsgálathoz lettek kiválasztva a futtatás során tapasztalt észrevételek alapján. A „szép”, valamint nem szélsőséges eredményekhez viszonylag nagy tartományból válogathatjuk a $p_0, z, x, r = r/L$ értékeket. A program megfelelő működéséhez, valamint az eredményeket demonstráló ábrák elkészüléséhez szükséges „munkamennyiséget” tapasztalati úton választottuk meg: a grafikonok jellegében már sem lényegi változást, sem felesleges időkiesést nem okozva állítottuk be az iterációk, illetve lépésközök számát.

2.3. A vizsgált kérdés (különböző megfogalmazásokban)

Mekkora területen (terjedelemben) fut végig a vírus a rendszeren (kerten)?

Legfeljebb milyen „sűrűn” $\left(\frac{n}{L}=n\right)$ *helyezhetők el a fák a kertünkben, hogy a fertőzés következtében a betegség ne terjedjen el benne „túlságosan”?*

Egy hasonló paraméterekkel leírható vírus terjedése során a gyümölcsöskert hányad része válik gazdaságilag hasztalanná a fák sűrűségének függvényében?

Ennek vizsgálatához ábrázoljuk a q rendparamétert az n függvényében!

Mi is az a rendparaméter?

A rendparaméter fogalmát eredetileg a másodrendű (rend-rendezetlenségi) fázisátalakulások esetén a rendezett fázisban való rend mértékének jellemzésére vezették be (mint például a ferromágnesség elvesztése a Curie-pont körül, ugyanis a makroszkopikus rendezettség, pl. a mágnesezettség, a hőmérséklet emelkedésével megszűnhet) [4]. Később ezt a fogalmat kiterjesztették nemegyensúlyi folyamatokra is, ahol a rendparaméter nagy értéke mindig valamilyen koherens viselkedésre utal [5].

A mi esetünkben a rendparaméter (q) értéke azt adja meg, hogy a fertőzés lefutásának végére a fák hányad része halt bele a járványba.

$$\boldsymbol{q}=\frac{\boldsymbol{elhalt\ fák\ száma}}{\boldsymbol{összes\ fa\ száma\ (n^2)}}=\frac{\boldsymbol{fekete}}{\boldsymbol{fekete+kék+zöld}} \qquad \boldsymbol{q\epsilon[0;1]}$$

A feladat jelenlegi megfogalmazása mellett minden esetben beáll egy végállapot, hiszen a fertőzés terjedése addig tart, amíg a beteg fáink el nem pusztulnak, avagy meg nem gyógyulnak (tehát, amíg a piros fák el nem fogynak), ezek valamelyike pedig a gyógyulási idő véges volta miatt mindenképpen bekövetkezik. Ekkorra mindenkinek a sorsa egyértelműen determinálttá válik: egészséges maradt (zöld), kigyógyult (immunis kék fa), avagy belehalt (fekete) a járványba. Ilyenkor a betegséget nincs aki tovább terjessze, és nincs is kinek meggyógyulnia/meghalnia a továbbiakban.

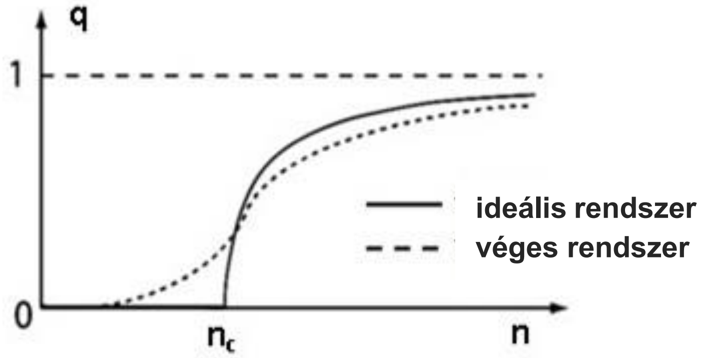
Adott kezdeti feltételek mellett a fák sűrűségét (lényegében n értékét) változtatva megnézzük minden egyes (érdemi) esetben, hogy a betegség hogyan terjed el a kertben. (Érdemi eset alatt azt értjük, hogy a fák számát egy bizonyos ponton túl nincs értelme növelni, mivel túl nagy sűrűség esetén a járvány gyors terjedése miatt egészen biztos, hogy „mindenki” nagyon hamar meg fog betegedni és q értéke maximálissá válik: $q \approx 1$.)

A keresett jelenség

Vajon létezik-e olyan n_c kritikus („fasűrűség”) érték, amelynél kisebb n (kevesebb fa) esetén a q rendparaméter értéke zérushoz közeli, azonban nagyobb n értékekre (több fa) a q rendparaméter értéke drasztikusan megnő? (A ferromágneses anyagokban a Curie hőmérsékleten bekövetkező ferro-para mágneses fázisátalakuláshoz hasonló átmenetet keresünk.)

Összefoglalva (2.3. ábra):

- $ha \quad n \ll n_c \quad => \quad q \to 0 \quad ?$
- $ha \quad n \gg n_c \quad => \quad q \to 1 \quad ?$



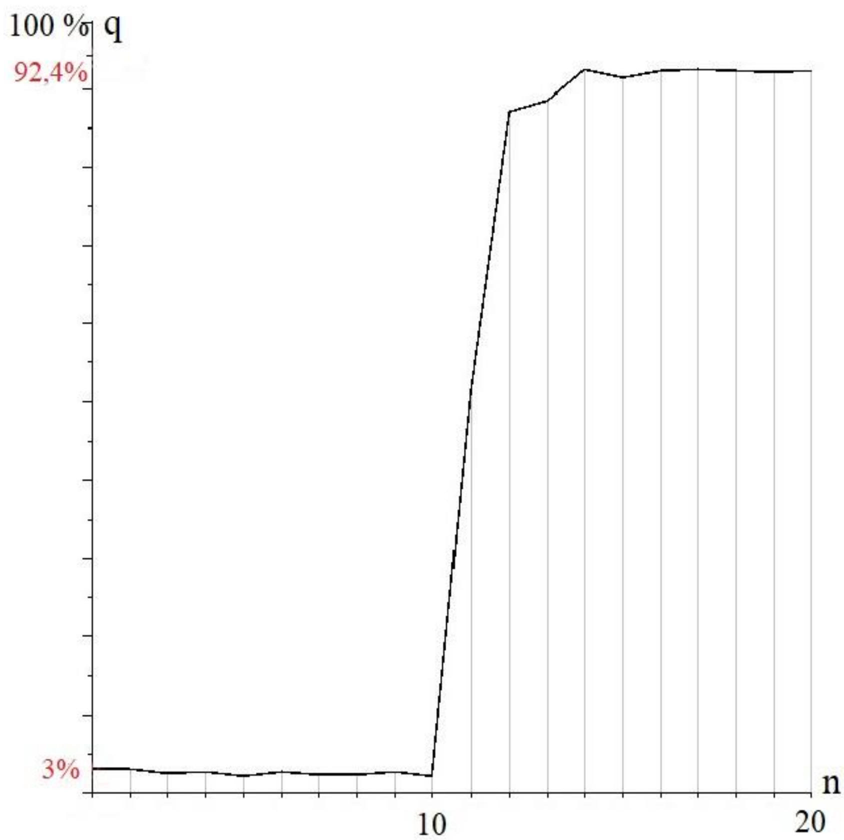
2.3. ábra. A keresett átmenet: a rendparaméter (q) ábrázolása az egy sorban/oszlopban található fák számának (n) függvényében.

Az „elvárás” logikus lehet, hiszen minél több fa van az adott kertben (minél sűrűbben helyezkednek el), a fák annál közelebb vannak egymáshoz és az átterjedés valószínűsége annál nagyobb, míg kevés fa esetén éppen ellenkezőleg történik. (A gyógyulási mechanizmus minden esetben minden egyes fára külön-külön azonos valószínűségű.)

2.4. A számítógépes szimulációval kapott eredmények

A program (és annak forráskódja) letölthető az [3] weboldalról. A program (TreeDisease) egy Java alkalmazás (Java Runtime Environment[10]) segítségével futtatható. A szimuláció tartalmaz egy kiértékelő programrészt is, amely a szükséges grafikont is elkészíti nekünk: Ábrázolja a q – rendparaméter értékét minden egyes $n \epsilon [1; n_{max}]$ – fasűrűségre úgy, hogy minden esetet $f = 100$-szor futtat le, és a rendparaméterekre kapott értékek átlagát ábrázolja a futtatások átlagaként (2.4. ábra). Tapasztalataink szerint nagyobb pontosság (több futtatás) esetén a grafikon alakjában lényegi változás már nem történik.

[10] https://www.oracle.com/java/technologies/downloads/#java8



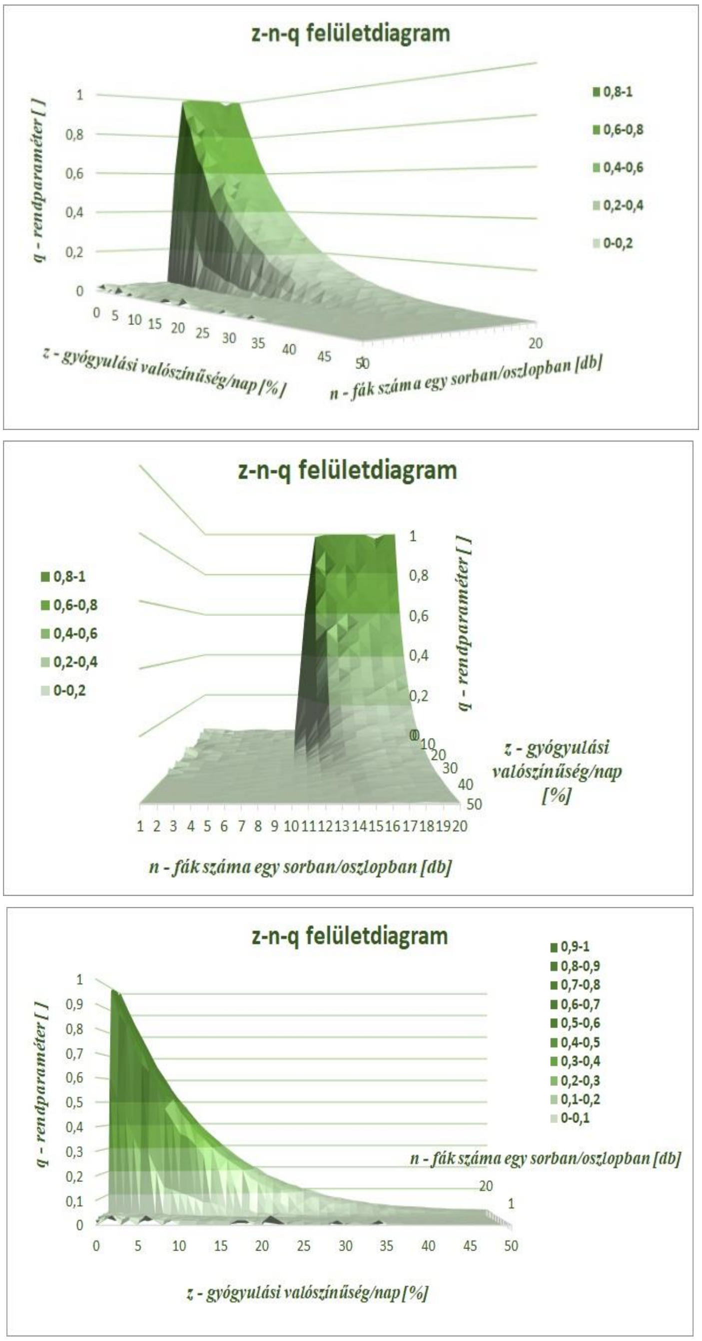
2.4. ábra: Az átlagos q rendparaméter az adott területen lévő fák sűrűségét jellemző n értékének függvényében.

A „sejtés" valósnak bizonyult: valóban úgy tűnik, hogy létezik olyan n_c – kritikus fasűrűség, amely alatt a kert elenyésző része lesz beteg, és amely felett nagyon hirtelen a betegségarány 1-hez közeli értéket vesz fel. Kis n-ekre, amikor a fák elég távol helyezkednek el egymástól, a kert meggyógyul (avagy meg sem betegedik); nagy n-ekre, amikor a fák távolsága csökken, a járvány terjedésének valószínűsége nő, és a kertünk terménye odavész. A köztes helyzetekben, a kritikus n_c érték körül változatosabb az eloszlás. A vizsgált paraméterekre $n_c \approx 11 \pm 1$ körül van.

Megjegyzés: További vizsgálatot igényelne a kritikus pont (n_c) körüli viselkedés, a $q \approx 1$-hez tartó relaxáció hossza. Ez esetünkben egy nem túl széles tartomány (2 – 3 fa / sor), amely a paraméterek állításával nagyon kicsit szélesebb-keskenyebb lesz, azonban általánosságban is elmondható, hogy a függvények alakja (a szélsőséges esetektől eltekintve) úgy tűnik, lényegében nem különbözik egymástól.

Kritikus viselkedés a $z - n$ paramétertérben

A programból extra funkcióként kinyerhetők az adatok egy 3D-s grafikon elkészítéséhez is („Export 3D” gomb), ahol nem csak n függvényében vizsgáljuk meg a rendparaméter változását, hanem a z gyógyulási paraméter függvényében is. A megnövekedett dimenzió a program számolási igényeit megnöveli és akár több percig is eltarthat, ameddig a szerkesztéshez szükséges megfelelően átlagolt rendparaméter értékét megkapjuk, amely egy Jegyzettömbben vagy Excel táblázatban megnyitható. A vizsgálatához a kinyert adatokból ábrázolhatjuk a q átlagos rendparamétert a korábban megadott kezdőfeltételek mellett minden $z \in [0; 0{,}5]$ esetén 0,02 lépésközökkel az $n \epsilon [1; 20], n \epsilon \mathbb{N}$ függvényében egy háromdimenziós ábrán, minden pont esetén $f = 20$ futtatás átlagából. Ezen átlagolás elégségesnek bizonyult ahhoz, hogy aránylag kis fluktuációk legyenek és a futtatási idő se legyen feleslegesen nagy. A 3D grafikon elkészítése már nincs beépítve a Java programba, ehhez például az Excel „háromdimenziós felület” diagram funkciója ajánlott.



2.5. ábra: A rendparaméter vizsgálata a fák sűrűségének és a gyógyulási valószínűség függvényében különböző perspektívákból.
/A felhasznált adatsorhoz beállított értékek:
$n \epsilon [1; 20]$, $z \epsilon [0.0; 0.5]$ 0.01 lépésközzel, $p_0 = 0.025$, $x = 7$, $r/L = 0.1$, pontosság: 50 futtatás./

A 2.5. ábrán különböző nézetekből is bemutatom (az említettnél jobb felbontási/futtatási adatokból) a rendparaméter változását a $z - n$ térben. Habár nem meglepő, mégis észrevehető és egyben „szép” eredmény, hogy a q rendparaméter a z gyógyulási valószínűség függvényében exponenciálisan csökkenő jelleget mutat.

A programból kinyerhető egyéb információk

A szimuláció futása közben a program folyamatosan kiírja, hogy az adott napon mekkora a beteg fák aránya (százalékban kifejezve), valamint az addig eltelt napok közül megadja mikor és mekkora részben volt a csúcson a vizsgált populációban a fertőződési arány. Ezekből az értékekből a betegség terjedési mechanizmusára is lehet következtetni.

Az x gyógyulási időkeret véges volta miatt q értéke nagy fasűrűség esetén nem 1-hez tart, azonban tény, hogy minden esetben van valamekkora maximuma (q_{max}), a választott kezdeti feltételeinkkel ez valóban 1-hez közeli (90% feletti). Hasonlóan q minimumértéke (q_{min}) sem 0-hoz tart – p_0 kezdeti betegségarány és a véges gyógyulási valószínűség következtében – azonban ennek szintén mindig van egy minimuma, amelynek értéke a választott kezdeti feltételeinkkel valóban 0 közeli (5% alatti). (A programban készült grafikonokon ezeket az adatokat a függőleges skála melletti piros értékek jelzik.) Mivel ezen értékeknek is van valamekkora szórása, így például néha $q_{min} = 0$ is előfordul. A következő részben ezeket matematikai úton is pontosan kiszámítjuk, némiképp a program helyes működésének „igazolására”.

2.5. Matematikailag középiskolásokkal is kiszámítható információk

Az alább kiszámolt értékeket a korábban megadott paraméterek behelyettesítésével kapjuk.

1. Egy frissen megfertőzött fa halálának valószínűsége:

$$P_{fekete(meghalt)} = (1 - z)^x \approx 0{,}932 \rightarrow 93{,}2\%$$

2. Egy frissen megfertőzött fa gyógyulásának valószínűsége:

$$P_{kék(gyógyult)} = 1 - P_{fekete(meghalt)} = 1 - (1 - z)^x \approx 0{,}068 \rightarrow 6{,}8\%$$

3. A rendparaméter minimum értékének várható értéke $E(q_{min})$:

Határesetben $n = 1$ fa p_0 valószínűséggel beteg az elején. (Ekkor a betegség nincs „hová” terjedjen, nincs kit megfertőzni / nincs ki megfertőzze. Nagyobb n érték esetén a fertőzés terjeszthetőségének lehetőségével csak ronthatunk a rendparaméter minimumán.)

I. Annak a valószínűsége, hogy az egyetlen fa nem beteg: $(1-p_0)$. Ha az egyetlen fa nem beteg, akkor nem is lesz az, ilyenkor 0 a rendparaméterünk.

II. Annak a valószínűsége, hogy az egyetlen fa beteg: p_0. Ha az egyetlen fa beteg, akkor

a) meggyógyul: $1-(1-z)^x$ valószínűséggel és ekkor a rendparaméterünk ismét 0 lesz,

b) meghal: $(1-z)^x$ valószínűséggel és ilyenkor a rendparaméter értéke 1.

Ezek alapján:

$$E(q_{min}) = 0 \cdot (1-p_0) + 0 \cdot p_0 \cdot [1-(1-z)^x] + 1 \cdot p_0 \cdot (1-z)^x = p_0 \cdot (1-z)^x \approx 0{,}023$$

$$\to 2{,}33\%$$

4. A rendparaméter maximum értékének várható értéke $E(q_{max})$:

Határesetben $n \to \infty$, ilyenkor annyira közel vannak egymáshoz a fák, hogy lényegében az összes fa megfertőződik (nem lesznek egészséges/zöld fáink). Ilyenkor a végállapotban csak halott/fekete vagy immunis/kék fáink lehetnek. Ebben az esetben a fekete fák számának aránya adja meg a rendparaméter értékét.

Ezek alapján: $E(q_{max}) = (1-z)^x \approx 0{,}932 \to 93{,}2\%$

5. Érdekesség: Egy frissen megfertőzött, majd meggyógyult fa „betegen töltött" napjai számának (jelöljük w-vel) várható értéke, vagy másképp fogalmazva: azon fák, amelyek meggyógyulnak, várhatóan hányadik napon válnak immunissá a betegségre?

$$E(w) = z \cdot \sum_{k=1}^{x} k \cdot (1-z)^{k-1} \approx 0{,}269 \approx 2{,}7. \text{ napon gyógyulnak meg.}$$

2.6. Összefoglalás

A projekt két speciális matematika tantervű végzős diák programozó tudását hasznosító közös munkaként kezdődött, végül évekkel később egy abszolút közös, egyenrangú, kollegiális viszonyban zárult. Informatika szaktanárral is egyeztetve kialakítottuk a probléma vizsgálatához annak tehetséges középiskolások szintjén való leprogramozhatóságát. A szükséges számítógép szimuláció minden részletét diákjaim írták, mind külcsínben mind technikában ismét jócskán meghaladva az eredeti kívánalmakat. A paraméterek igen sokrétű változtatásával futtatható látványos szimuláció mellé kiértékelő program is készült. A programozásban újonnan tanultak később más területeken is hasznosíthatónak bizonyultak.

Egy komplex, vélhetőleg realisztikus modellt kaptunk egy hétköznapi probléma, egy gyümölcsöskertben terjedő betegség leírására, amely mind a diákok, mind a tanárok számára nagyon tanulságos és izgalmas kihívás tud lenni. Fontos kiemelnünk, hogy a paraméterek változtatásával ugyan változik a $q_{min/max}$ értéke (emiatt az „ugás" mértéke is), n_c kritikus értéke, az átmenet szélessége stb., de maga a fázisátalakulás szerű változás bekövetkezte nem. Lényegi változást a többi paraméterezés esetén sem találunk, inkább csak szélsőséges, úgymond egyértelmű eseteket.

Láthattuk, hogy egy-két érdekes mennyiséget analitikus számításokkal is igazolni tudunk (ezen témák részletezése már főként a tehetséggondozásban kerülhetnek elő), más esetekben kénytelenek vagyunk a statisztikai alapokra támaszkodva számítógép-szimulációs segítséget igénybe venni. A legfontosabb dolgot, a $q(n)$ függvényt például nem tudtuk matematikailag egzakt formulával megadni.

A probléma tanulmányozása módot ad a statisztikus fizika klasszikus mechanikától lényegesen különböző, középiskolai tanulmányainkban igen meglepő, „különc" vonásainak bemutatására. A feladat eredeti KöMaL verziójában nem volt túl konkrét, így már a feladat precíz, helyes és megoldható megfogalmazása is komoly kihívást jelentett. Több szempontot is figyelembe véve jócskán átalakítottuk és kiegészítettük, alkalmat adva ezzel a járványterjedés mértékének jellemzésére szolgáló rendparaméter fogalmának megismerésére, amely a középiskolai tanulmányokból (többségében) kimarad. A kicsit sem könnyű „feladat-megfogalmazás", valamint az informatikai kihívásokon túl a modell szépsége, hogy a program révén kiderül, hogy a rendparaméter a (tagozatos) tananyagban is megjelenő mágneses anyagok témaköréhez kapcsolódó fázisátalakulásokhoz hasonló átmenetet produkál.

A modell bemutatása tehát jól használható a fázisátalakulásokról tanultak átismétlésére, a kritikus pont körüli viselkedés és annak rendparaméterének megbeszélésére. Ugyanakkor alkalmat ad több hasonló, meglepő és izgalmas jelenség felvillantására, mint a pletykaterjedés, csordák vonulása, kelet-ázsiai tűzlegyek (szentjánosbogarak) villogásának szinkronizációja, vastaps kialakulása, idegsejtek működése, kémiai reakciók modellezése, szociológiai rendszerek (pl. pánikhelyzet), földrengés, pénzügyi helyzetek vizsgálata stb.

Állítom, hogy ezen jelenségekkel (mélységtől függően) tetszőleges diák fizika iránti érdeklődése felkelthető. Ezek olyan területek, amelyek egyelőre nem mondhatók szokványosnak a fizikaoktatásban, mégis extrémitásukkal lehetőséget kínálnak más tudományterületekkel való összefonódás felismerésére és tágabb fizikai gondolkodás kialakítására.

Mindannyian sok új dolgot tanultunk a fizika egy kevéssé ismert területéről, programozásról, diák-tanár közös munkájáról, együttgondolkozásáról, egy hosszabbtávú projektmunkáról. A vizsgálódást és a paraméterek további állítgatását, bővítését, finomítását sokáig lehetne még folytatni, mindenki számára nyitott a lehetőség a kész program, illetve annak programkódjának letöltésével.

Ez a fejezet tartalmazza a 2. tézis háttéranyagát.

A fejezethez kapcsolódó saját publikációm: [#3]
A fejezethez kapcsolódó előadásom: II.

Hivatkozások

1. Kertész János: A rendezetlen kapcsolatok fizikája – A perkolációs modell, KöMaL 1986/december, 465-469. o.

2. I. M. Szobol: A Monte-Carlo módszerek alapjai (ford. Győrffy Judit), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981

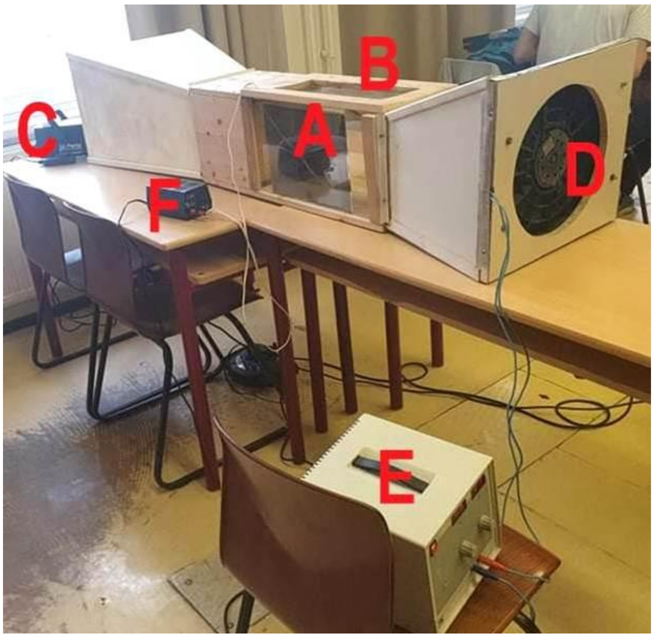
3. https://www.berzsenyi.hu/Lendvai/

4. Kondor Imre, Szépfalusy Péter: Kritikus jelenségek, Fizika 1975 (szerk. Abonyi Iván), Gondolat Kiadó, Budapest, 1975, 85-122. o.

5. H. Haken: Szinergetika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984

3. SZÉLCSATORNA ÉPÍTÉSE - középiskolásokkal

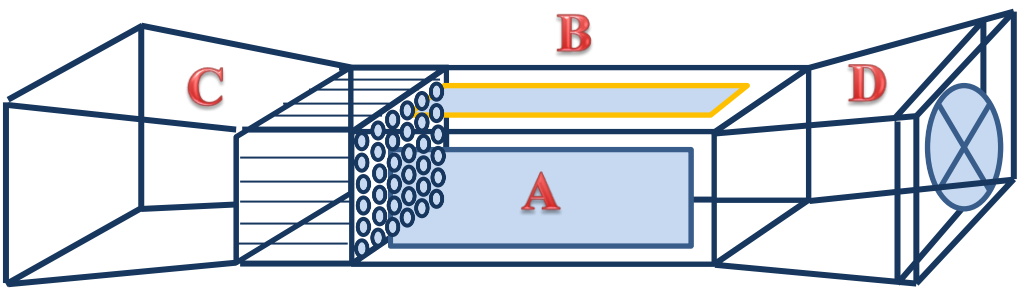
A nem olyan régen még az érettségi követelményekből is (indokolatlanul) kihagyott, hétköznapi életben mégis oly fontos aerodinamikai jelenségek demonstrációs eszközeként sikeresnek bizonyult szélcsatorna diákokkal (saját szabadidőnkben, nyári iskolaszünetben) történő megtervezése és megépítése a fizikatanítás fontos eszközévé válhat. Nemcsak mint kísérleti berendezés válik hasznossá, a projekt tervezési lépései legalább annyi pozitív hozadékkal jártak. (A „házi készítésű" [1] szélcsatornánk a 3.1. ábrán látható.)



3.1. ábra: "Házi készítésű" szélcsatorna: A) Áramlási tér B) Tető LED szalaggal C) Füstgép + bevezető cső végén szívószálakkal D) Kivezető cső + ventilátor E) Ventilátor tápegysége F) Világítás tápegysége.

Mivel a témához kapcsolódó hétköznapi jelenségeket és a hozzájuk szorosan csatlakozó középiskolai tanulmányok során is megismert törvényeket [2] szinte „mindenki" tanítja, így nem a bemutatott jelenségek és mérések részletes fizikai ismertetésére, hanem a szélcsatorna mint demonstrációs- és mérőeszköz elkészítésének lehetőségeire, illetve nehézségeire, kivitelezhetőségére, kiegészíthetőségére szeretném helyezni a hangsúlyt. Az eszközzel való jelenségek bemutathatóságára és a mérési lehetőségekre a teljesség igénye nélkül csak röviden, összefoglaló jelleggel térek ki.

3.1. Az eszköz építése



3.2. ábra: Szélcsatorna vázlata: A) Áramlási tér B) Tető LED szalaggal (sárga rész) C) Bevezető cső + hozzá csatlakozó fütsvezető szívószálak D) Kivezető cső + ventilátor.

A szélcsatorna részei

A) Áramlási tér mindkét oldalon áttetsző fallal (egyik oldala fekete lappal befedhető a másik oldalról való jobb láthatóság kedvéért). Ide helyezzük a megfigyelni / mérni kívánt jelenséghez szükséges tárgyakat. (3.1./A és 3.2./A ábrák)
B) Átlátszó tető LED szalaggal: a belső világítás az áramvonalakat kirajzoló füstöt jobban láthatóvá teszi. (3.1./B és 3.2./B ábrák)
C) Bevezető cső. A lamináris áramlást biztosító szívószálakon át bevezetett füst segítségével az áramlási kép láthatóvá válik. (3.1./C és 3.2./C ábrák)
D) Ventilátor a kivezető nyílás legvégén. Ez szívja keresztül a levegőt az áramlási téren. (3.1./D és 3.2./D ábrák)
E) Ventilátor tápegysége (3.1./E ábra)
F) Világítás tápegysége (3.1./F ábra)

Szükséges hozzávalók beszerzése

A) B) C) D) E)

3.3. ábra: Hozzávalók: A) klímaventilátor B) parti füstgép C) füstfolyadék D) LED szalag E) szélsebességmérő.

1. Fa- és plexilapok

Az áramlási tér (a beépített szívószálakkal együtt) 75 cm x 30 cm x 30 cm méretezésű. Az áramlási tér (szívószál nélküli) két oldallapja és a fatető egy kivágott része plexi lapokból áll. A pontos méretezési terveket, vágásokat, illesztéseket mind a diákok készítették. Az áramlási tér keresztmetszetét a ventilátor mérete határozta meg, hosszát a kísérletek elvégezhetősége, a láthatóság és a könnyen „szállíthatóságra” is alkalmas méret befolyásolta. A be- és kimenő vízszintesen talajra fektethető, csonka gúla alakú, vékonyabb falapokból készült csőrészek elkészítését gondos, papíralapú geometriai szerkesztés előzte meg. Ez ugyanis nem lehet egyszerűen egy négyzet alapú egyenes gúla alaplapjával párhuzamos (eszközbe szerelés után függőleges) síkkal történő csonkolásának eredménye; hanem egy kifelé szélesedő, de vízszintesen az áramlási térrel egy vonalban a talajra fektethető test, emiatt például egy a testmagasságával párhuzamos (eszközbe szerelés után vízszintes) síkkal is csonkolni kell.

Megfelelő méretű fa- és plexianyagot (hobbiüveg / polisztirol) nagyon sokféle árban és minőségben be lehet szerezni. Ideális esetben valakinél otthon is található, már nem használt maradék anyagokból dolgozhatunk. Rosszabb esetben nagyobb barkácsboltokban érdemes beszerezni.

2. Klímaventilátor

Próbálkoztunk a bevezető csövön keresztül működtetett szobaventilátorral, de túl kicsinek bizonyult a teljesítménye. Végül hosszas keresgélés után sorra hívva autószerelő műhelyeket, sikerült egy ismerős által ingyen beszereznünk egy használt (leselejtezett), megfelelő (~130-140 W névleges) teljesítményű, 12 V feszültségforrásról működtethető körülbelül 40 cm átmérőjű (Opel Astra G) szívó hűtőventilátort (3.3./A ábra). Ehhez pontosan illeszkedő kör alakú lyukat tartalmazó falapot (3.4. ábra) vágtunk a szélcsatornánk kimenő csövének végére.

3.4. ábra: A ventilátor hátlapja (alsó köralakú lyukat tartalmazó falap) és a füstgépből a szívószálakba kívülről csatlakozó rézcsövek (még üzemen kívül, készítés közben).

3. Füstgép és füstfolyadék

Viszonylag jó áron vásárolható kisebb 400 W teljesítményű mini party füstgép a töltésére alkalmas nagy sűrűségű füstfolyadékkal együtt (3.3./B és C ábrák). Talán ez az egyetlen olyan elem, amely másképp nehezen beszerezhető, amire kénytelenek vagyunk beruházni, hacsak nem akarjuk folyton kölcsön kérni valakitől, akinek van otthon sajátja, ami persze diákok környezetében nem olyan ritkaság. A füstfolyadékot időnként pótolni szükséges, de ez nem túl drága és az 1 literes kiszerelés viszonylag sokáig kitart.

4. Füstvezető csövek (pl. réz-, szilikoncső)

Szükségünk van egy vastagabb, a füstgép kivezetéséhez csatlakoztatható pl. szilikon füstvezető csőre, amely egy saját készítésű pl. rézcsőhöz csatlakozik, amelyből a rá merőlegesen, egyforma távolságokban forrasztott 4-8 vékonyabb, kisebb átmérőjű rézcső (3.4. ábra) kb. minden negyedik szívószálon át (3.5. ábra) éppen az áramlási térbe vezetődik a vastagabb cső vízszintes avagy függőleges állása szerint (utóbbit célszerűbb használnunk, ha az áramlási teret oldalnézetből vizsgáljuk), de valójában hajlékony, éppen a szívószálakba illeszkedő csövekkel tetszőleges módon elkészíthető.

Mivel a csöveken átáramló füst elég forró, így nem szerencsés egyszerre túl sok füstöt vagy túl sokáig áramoltatni az áramlási térbe, inkább csak rövidebb ideig (nem több percen át folyamatosan), amelyet a füstgéphez kapott tartozékkal, egy nyomógomb segítségével tudunk szabályozni.

5. Szívószálak

Kb. 1000 db („hajlítórész" nélküli) szívószál (3.5. ábra, az extra mintázat csak dizájn elem).

3.5. ábra: A bejövő csőhöz csatlakozó szívószálakból készült áramlási tér keresztmetszete.

6. LED szalag

Kb. 2 méter öntapadós LED szalag a tetőn lévő plexilap oldalára belülről felragasztva (3.3./D ábra), megfelelő (12 V-os) tápegységről működtetve.

7. Szélsebességmérő (anemométer)

Elfogadható árban kapható légcsavaros szélsebességmérő műszer (3.3./E ábra), amelynek rögzítését legalább három különböző helyen érdemes megoldani az áramlási térben (kialakításától függően tépőzárral, kallantyúval stb.). Ennek segítségével mérések is végezhetők (esetenként 15 km/h sebességet is tapasztaltunk).

8. Tápegységek

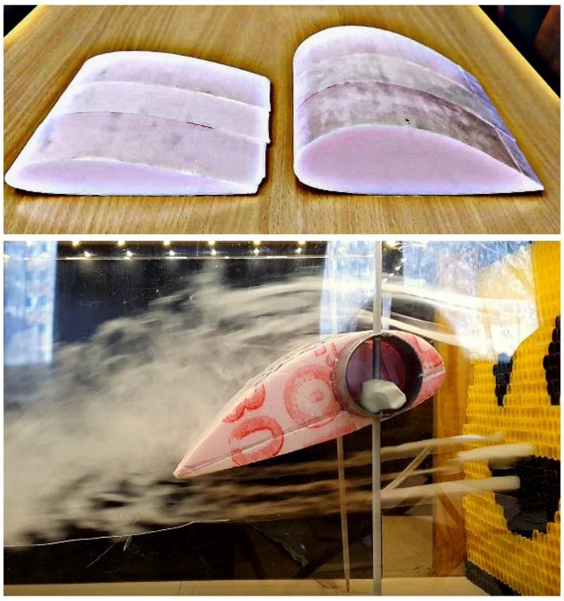
Megfelelő tápegységek (LED, ventilátor, füstgép) többségében az iskolai szertárban fellelhetők.

9. Egyéb kiegészítők

- Kisautók: áramvonalas sportautó, örvények bemutatására is alkalmas autóbusz/kamion. (lásd 3.2./1. alfejezet)

- Különböző alakú testek (pálcára rögzített gömb, félgömb, cseppalak stb.), valamint az áramlási térben a testek rögzítésére alkalmas szerkezet, amelynek kialakítása az eszközöktől és kreativitástól függően sokféle lehet: mélyedés (a testet tartó pálcának megfelelően keresztmetszetű lyuk); avagy csavarral rögzíthető pálca, akár valamilyen módon a testek forgatásra is alkalmas rés. (lásd 3.2./1. és 2. alfejezetek)

- Két kötőtűn függőlegesen könnyen mozgó, saját készítésű (vagy gyárilag lézervágott) könnyű (hungarocell) szárnyprofil



3.6. ábra: Szárnyprofil "reptetése" a szélcsatornánkban.
(felül: különböző alakú szárnyprofilok)

(méretei: 16 cm hosszú, 5 cm magas és 14 cm széles). A hungarocellt a cseppalak legvastagabb részénél két oldalt átfúrva, a kötőtűknél kicsivel nagyobb belső átmérőjű műanyag- vagy fémhengerrel bélelhetjük ki a súrlódásmentesebb, könnyű, mégis stabil mozgathatóság érdekében. Az általunk készített modell (3.6. ábra) esetén – a lézervágott szárnyprofil védelme érdekében – ugyanezt az átfúrást a hungarocell két oldalához ragasztással erősített műanyag hengereken keresztül oldottuk meg. (lásd 3.2./3. alfejezet)

- Alulról az áramlási térbe rögzíthető házikóra légmentesen illeszkedő (a légáramlat segítségével kialakuló nyomáskülönbség hatására felemelhető) könnyű (hungarocell) háztető. A háztetőt saját kezűleg (vagy gyárilag lézervágva) két (13 cm x 9 cm x 1 cm)-es téglatestből készíthetjük el. Az illesztéseket, mélyedéseket, lyukakat, vágásokat a ház talapzatával együtt szintén magunk készítettük. (lásd 3.2./4. alfejezet)
- Könnyen guruló kisautóhoz csatlakoztatott rugós erőmérő, amely a szívószálakon keresztül például egy madzaggal kivezethető és rögzíthető. (lásd 3.2./5. alfejezet)

A folyamatosan alakuló és bővülő eszközünk pontos kialakítását: geometriai elrendezését és belső szerkezeti elemeit; valamint az anyagbeszerzést: mit, honnan, mennyiért stb. mind a diákokkal közösen alkottuk meg, folyamatosan egyeztetve, ötletelve született meg a végső kivitelezési terv sokszor többszöri módosítás és kudarcba fulladt próbálkozás után.

Megjegyzés: A különböző barkácseszközök használatakor mindenképpen ügyeljünk a biztonságra! Fűrésszel és körfűrésszel dolgozni nem egyszerű és nem veszélytelen, mindenképp győződjünk meg róla, hogy tudják használni az eszközöket. Ha nincs ehhez biztonsággal értő diákunk, mutassuk meg vagy csináljuk a veszélyesebbnek tűnő lépéseket magunk!

3.2. Vizsgálható jelenségek

A szélcsatornát különböző áramlási jelenségek vizsgálatára terveztük. Többek között alkalmas:

1. Különböző alakú, az áramlási térben rögzíthető testeket körül áramló közeg okozta áramlási kép bemutatására:
   - áramvonalasság és örvények
   - lamináris és turbulens áramlás.
2. Alaki tényező mérésére.
3. Szárnyprofil nyomáskülönbségből származó felhajtóerő hatására történő függőleges mozgásirányú emelkedtetésére. (3.6. ábra)

4. Házmodell tetejének áramló közeg okozta (Bernoulli-törvényen és a kontinuitási egyenleten alapuló) megemelésére. Megjegyzés: Ehhez a kísérlethez volt szükségünk talán a leginkább a ventilátor elegendően nagy teljesítményére. Egyáltalán nem könnyű a szükséges elemek pontos illesztése és elkészítése sem.
5. Rugós erőmérővel csatlakoztatott kisautóra ható légáramlással szembeni közegellenállásának vizsgálatára. stb.

Megjegyezném, hogy a modellalkotás szempontjából a diákokat nagyon fellelkesíti az a tény, hogy ezen kisméretű szélcsatornákban való vizsgálódásnak valóban nagy gyakorlati hasznuk van a mindennapokban, miszerint a kis méretekben elvégzett kísérleteket és mérési eredményeket megfelelő feltételek mellett összefüggésbe lehet hozni az eredeti méretű testek (repülőgépek, autók stb.) valódi mozgásával. Ennek felismerése Osborne Reynolds (1842-1912) nevéhez kötődik (és a róla elnevezett áramlástanban használt hasonlósági mutatóhoz, az ún. Reynolds-számhoz), amellyel kapcsolatos vizsgálati módszerekről és eredményekről nagy érdeklődéssel kutatnak a diákok. Egy valódi repülőgép kicsinyített másával szélcsatornákban kísérletezve tehát helyesen lehet előre vizsgálni a hozzájuk hasonló, de más (akár lényegesen nagyobb) méretezésű testek légellenállását, a rájuk ható felhajtóerőt és egyéb aerodinamikai jellemzőiket.

3.3. Összefoglalás

Az építés hozománya kétrétű: elméleti és gyakorlati jellegű egyszerre.

Nyilván az aerodinamikai jelenségek – közegellenállási erő, alaki tényező, áramvonalasság/örvényesség, lamináris/turbulens áramlás, Bernoulli-törvény, kontinuitási egyenlet, nyomáskülönbség, felhajtóerő, Reynolds-szám stb. – megértését segítik az eszközzel elvégezhető kísérletek, valamint mérések elvégzése (utóbbiakhoz akár mérési jegyzőkönyvfüzet is készíthető). Azonban különös öröm és büszkeség volt számukra (és számomra is), hogy mindezt a saját maguk által készített eszközzel tehették meg (ezzel sokkal mélyebb tudásra tettek szert), amelynek pontossága és ezzel egyben használhatósága rajtuk (is) múlott. Ennek kapcsán az igazsághoz hozzátartozik, hogy a szélcsatorna első változatát (némi időhiánnyal küzdve) egy fizikatábori projekt kisebb részeként építettük, majd egy évvel később a készítő diákok ötletére a nyári szünetben nem kevés feltuningolással érte el a jelen fejezetben tárgyalt formáját. Éppen a korábbi hiányosságait és hibáit pótoltuk és javítottuk ki utólag.

Úgy tűnik, egy a középiskolákban nem mindennapi kísérleti eszközt is elő lehet állítani nem túl nagy összegekből, tehetséges és kreatív diákokkal, miközben melléktermékként rengeteg dolgot megtanulnak, úgy mint tervezés, csapatmunka, beszerzés, precíz vágások, forrasztás, festés, technikai megoldások, gyakorlatiasság, anyagiak figyelembevétele stb. Több esetben bebizonyosodott, hogy a nyári kis magánprojektünk jó előzménye volt a hasonló kvalitásokat igénylő, akár nemzetközi versenyeknek. Ugyanezen diákok közül később többen sikeresen szerepeltek az IYPT (*International Young Physicists Tournament*), illetve az ESA (*European Space Agency*) CanSat versenyeken alátámasztva ezzel az ilyesfajta munkáink hasznosságát.

Az eszköz bizonyára még mindig finomítható, javítható, további ötletekkel bővíthető, azonban jelen formájában már több éve használatban van az iskolai szertárban mint demonstrációs eszköz. Egyik legmeghatóbb jelenet egy évekkel későbbi fizikatáborban történt, amikor az újonnan érkezett kilencedik évfolyamos fizika tagozatos diákok (egy másik kolléga irányítása alatt) mérési céllal használták az eszközt[11] az eredeti készítőik – akkor már elballagott, de visszajáró berzsenyisek – szeme láttára egy újabb fizikatábori projekt kapcsán. Ez is a kisebbek és nagyobbak munkájának egy újabb közvetett összefonódásának példája.

Ez a fejezet tartalmazza a 3. tézis háttéranyagát.

Hivatkozások

1. Inspiráció – néhány „házi készítésű” szélcsatorna az interneten:

   A) https://www.youtube.com/watch?v=zKK1DwaB39s

   B) https://www.youtube.com/watch?v=BrVWuOoHW-0

   C) https://www.youtube.com/watch?v=qDQncRSlL8c

   D1) https://www.youtube.com/watch?v=NIHNtjFJook

   D2) https://www.youtube.com/watch?v=wAiiYNaUyv8

   E1) https://www.youtube.com/watch?v=GrsXV_zD_Do

   E2) https://www.youtube.com/watch?v=hnOgNeJRWCI

2. Budó Ágoston: Kísérleti fizika I. (mechanika, hangtan, hőtan), Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1968, II. rész / D)

[11] Baranyai Klára vezetésével a 9.B fizika tagozat 2022-es fizikatábori projektmunkája: https://drive.google.com/file/d/1ISczAVq24mK6z6PNUXxj6s5nmuHPX_g7/view

4. HÍDFIZIKAI MODELLEK – középiskolai megközelíthetősége

Bemutatom, hogy a – mélységeit megismerve egyetemi oktatók és gyakorlati kivitelezők által is „nagyon sokrétű, összetett és bonyolult”-ként emlegetett – hídépítés rejtelmeit milyen egyszerűbb, lecsupaszított modelleken át lehet feltérképezni (a teljesség igénye nélkül egy-egy konkrét esetet és részletet kiragadva) önképzőköri keretek között. Célul tűztem ki, hogy mind kvalitatív, mind kvantitatív eredményeket felmutassunk.

A felkutatott elméleti háttérinformációk alapján mélyebben végül a rácsos hidak hídszerkezetét, a függőhidak kábeleinek egyenletes terhelhetőségét, valamint egy egyszerű homogén híd pilléreinek autókkal való terhelését vizsgáltuk.

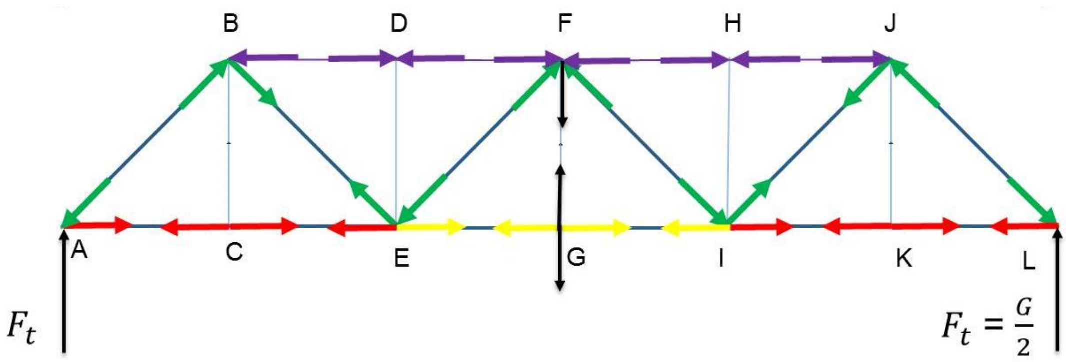
4.1. Rácsos hidak hídszerkezete

A rácsos hidak (4.1. ábra) szerkezeti felépítését tanulmányoztuk elméleti úton [1], [2]: az egyes elemekben ébredő erőhatásokat vizsgáltuk a híd saját súlya alatti terhelése során. A kialakult erőhatások nagyságszerinti sorrendje és szimmetriája is érdekes eredményeket mutat.

4.1. ábra: Összekötő vasúti híd, Budapest.
/forrás:https://www.sulinet.hu/oroksegtar/data/tudomany_es_ismeretterjesztes/A_budapesti_duna_hidak/pages/006_az_osszekoto_vasuti_hid.htm/

4.1.1. Elméleti háttér

Vegyünk egy homogén tömegeloszlású, terheletlen, G súlyú hídtestet, melynek legyen az egyszerűség kedvéért elhanyagolható tömegű, a 4.2. ábrán is látható rácsos szerkezete, és vizsgáljuk meg a tartóelemekben ható erőket. Ehhez írjuk fel az egyes csomópontokban az erőegyensúlyi feltételeket.

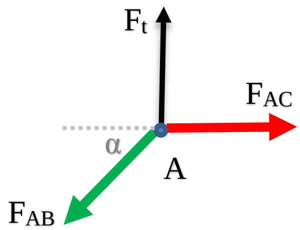


4.2. ábra: Rácsos hídszerkezetben kialakuló erőviszonyok.
(Az azonos színek, azonos nagyságú erőhatásokat jelölnek.)

Szimmetria okokból az alappilléreknél ható tartóerők értéke: $F_t = \frac{G}{2}$.

Az F_{MN} mennyiség az N pontból az M pontba mutató erő nagyságát jelenti, irányát az ábrák nyilai adják meg. A hatás-ellenhatás értelmében: $F_{MN} = F_{NM}$.

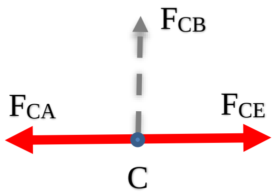
Az A csomópontra:



$F_t = F_{AB} \cdot \sin\alpha$ $\qquad$ $\boldsymbol{F_{AB} = \frac{G}{2\sin\alpha}}$

$F_{AC} = F_{AB} \cdot \cos\alpha$ $\qquad$ $\boldsymbol{F_{AC} = \frac{G}{2} \cdot ctg\ \alpha}$

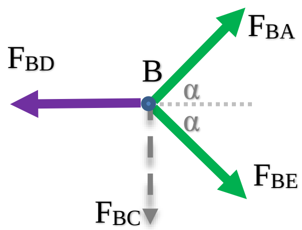
C csomópontra:



$F_{CB} = 0$

$\boldsymbol{F_{CE}} = F_{CA} = \boldsymbol{\frac{G}{2} \cdot ctg\ \alpha}$

B csomópontra:



$F_{BE} \cdot \sin\alpha + F_{BC} = F_{BA} \cdot \sin\alpha$

$\boldsymbol{F_{BE}} = F_{BA} = \boldsymbol{\frac{G}{2\sin\alpha}}$

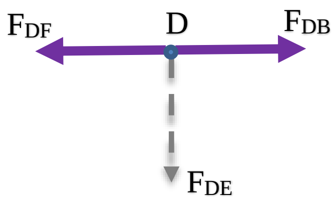
$F_{BD} = F_{BA} \cdot \cos\alpha + F_{BE} \cdot \cos\alpha$

$\boldsymbol{F_{BD} = G \cdot ctg\ \alpha}$

D csomópontra:

$F_{DE} = 0$

$\boldsymbol{F_{DF}} = F_{DB} = \boldsymbol{G \cdot \mathrm{ctg}\, \alpha}$



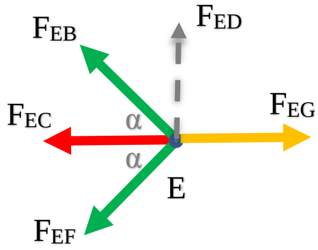
E csomópontra:

$F_{EB} \cdot \sin\alpha + F_{ED} = F_{EF} \cdot \sin\alpha$

$\boldsymbol{F_{EF}} = F_{EB} = \boldsymbol{\frac{G}{2 \cdot \sin\alpha}}$

$F_{EC} + F_{EF} \cdot \cos\alpha + F_{EB} \cdot \cos\alpha = F_{EG}$

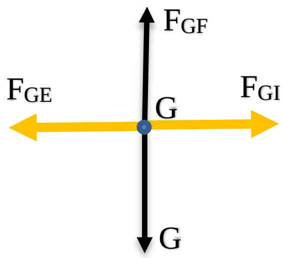
$\boldsymbol{F_{EG}} = \frac{G}{2} \cdot ctg\,\alpha + G \cdot ctg\,\alpha = \boldsymbol{\frac{3}{2} \cdot G \cdot ctg\,\alpha}$



G csomópontra:

$F_{GF} = G$

$\boldsymbol{F_{GI}} = F_{GE} = \boldsymbol{\frac{3}{2} G \cdot ctg\,\alpha}$



F csomópontra:

$F_{FD} + F_{FE} \cdot \cos\alpha = F_{FH} + F_{FI} \cdot cos\alpha$

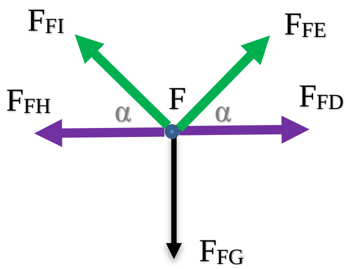
$G \cdot ctg\,\alpha + \frac{G}{2} \cdot ctg\,\alpha = F_{FH} + \frac{G}{2} \cdot ctg\,\alpha$

$\boldsymbol{F_{FH}} = \boldsymbol{G \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha}$

$F_{FE} \cdot \sin\alpha + F_{FI} \cdot \sin\alpha = F_{FG}$

$\frac{G}{2} + F_{FI} \cdot \sin\alpha = G$

$\boldsymbol{F_{FI}} = \boldsymbol{\frac{G}{2\sin\alpha}}$



A további rudakban ébredő erők nagysága szimmetria okokból következnek az előbbiekből a 4.2. ábrán látható módon (az azonos színek azonos erőhatásokat jelölnek).

Eredmények összehasonlítása $\alpha = 45°$ esetén:

$$F_{sárga} = \frac{3}{2} G \cdot ctg\alpha = \frac{3}{2} G > F_{lila} = G \cdot ctg\alpha = G > F_{zöld} = \frac{G}{2 \cdot sin\alpha} = \frac{G}{\sqrt{2}} > F_{piros} = \frac{G}{2} ctg\alpha = \frac{G}{2}$$

A módszer elsajátítása tetszőleges hasonló, mégis más elrendeződésű hídszerkezetekre vagy egyéb építkezési témában is hasznosítható.

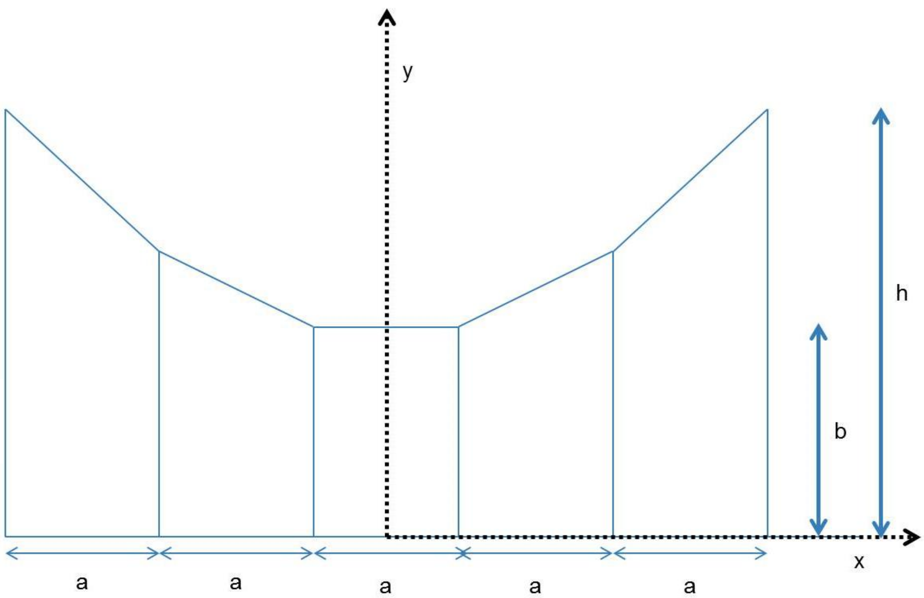
4.2. Függőhidak egyenletes terhelése

4.3. ábra: Golden Gate híd, San Francisco.
/forrás: https://pxhere.com/hu/photo/269/

Egy a Quantum c. angol nyelvű folyóiratban megjelent cikk [3] alapján a szinte láthatatlan erőkkel megtartott, levegőben lebegő építészeti csodák, az ún. függőhidak (4.3. ábra) esetén meghatároztuk, hogy az egyenletes távolságokban vékony acélkötelekkel felfüggesztett híd tartóköteleinek felső végei milyen alakú görbére kell illeszkedjenek, ha azt szeretnénk elérni, hogy a(z egyéb testekkel: autó, gyalogos) „terheletlen” híd minden egyes feszítőkötele azonos mértékben legyen terhelve pusztán a híd saját súlyának hatására. A folyóiratban is megtalálható matematikai számítások mellett a kapott eredményeket kísérletileg is igazolni tudtuk egy egyszerű hídmodellbe beépített, Arduino-vezérelt erőmérő cellák segítségével.

4.2.1. Elméleti háttér

4.4. ábra: Függőhíd modellje.

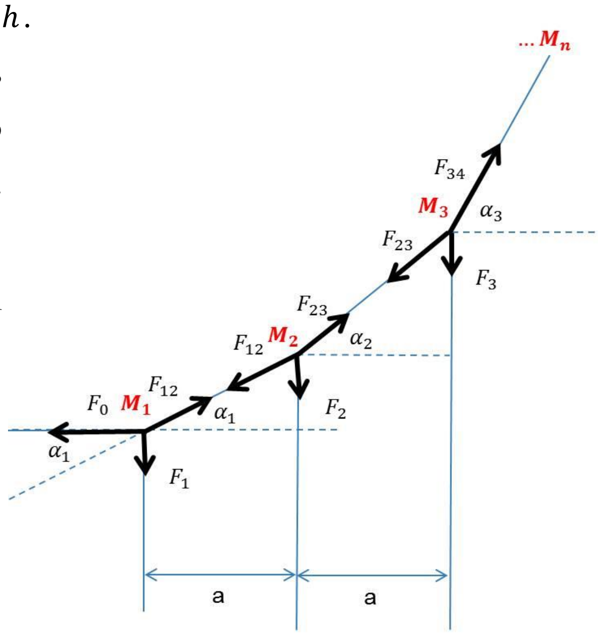


Vegyünk fel (a 4.4. ábrán látható módon) egy Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert, amelynek origója a híd közepén helyezkedik el. A hidat összesen $(2\mathrm{n})$ db kábel tartja szimmetrikusan, egymástól egyforma a távolságban. Így a hídtest teljes hossza $\mathrm{L} = (2\mathrm{n} - 1) \cdot a$. A legrövidebb kábel a hosszúságú és b magasságban helyezkedik el. A híd magassága, vagyis a leghosszabb kábel hossza h.

Az egyenletes terhelés miatt az egyes kábeleket (tartórudakat) függőlegesen húzó erők nagysága megegyezik: $F_1 = F_2 = \ldots = f$. Ennek megfelelően a teljes hídra ható F_g gravitációs erő az egyes kötelekben egyenletesen oszlik el: $f = \frac{F_g}{2n}$.

$M_k(x_k; y_k)$ a 4.5. ábrán látható rögztési pontokat jelöli, ahol $k = 1; 2; \ldots; n$.

$F_{i;i+1}$ az $M_i M_{i+1}$ tartórúdban ébredő erő, ahol $i = 1; 2; \ldots; n-1$. F_0 a középen elhelyezkedő vízszintes rúdban ébredő erőt jelöli.



4.5. ábra: A függőhíd felfüggesztési pontjaiban ébredő erőhatások.

A kábelek (rudak) nem nyúlnak, tömegük az egyszerűség kedvéért legyen elhanyagolható.

Kérdés: Milyen alakú görbére kell illeszkedjenek a tartórudak felső végei, hogy azok egyenletesen legyenek terhelve? Vagyis keressük azon y_k értékeket, amelyekre a megfelelő felfüggesztési pontokban ébredő erők eredője zérus.

M_1-re: $$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{|\boldsymbol{F}_1|}{|\boldsymbol{F}_0|} = \frac{f}{F_0}$$

M_2-re: $$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{|\boldsymbol{F}_{23}|\cdot\sin\alpha_2}{|\boldsymbol{F}_{23}|\cdot\cos\alpha_2} = \frac{|\boldsymbol{F}_2|+|\boldsymbol{F}_{12}|\cdot\sin\alpha_1}{|\boldsymbol{F}_{12}|\cdot\cos\alpha_1} = \frac{2f}{F_0}$$

→ az utolsó lépésben felhasználtuk:

$$\left.\begin{aligned} |\boldsymbol{F}_{12}| \cdot \sin\alpha_1 &= |\boldsymbol{F}_1| = f \\ |\boldsymbol{F}_{12}| \cdot \cos\alpha_1 &= F_0 \end{aligned}\right\}$$

M_3-ra: $$\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{|\boldsymbol{F}_{34}|\cdot\sin\alpha_3}{|\boldsymbol{F}_{34}|\cdot\cos\alpha_3} = \frac{|\boldsymbol{F}_3|+|\boldsymbol{F}_{32}|\cdot\sin\alpha_2}{|\boldsymbol{F}_{32}|\cdot\cos\alpha_2} = \frac{f+2f}{F_0} = \frac{3f}{F_0}$$ stb.

→ itt használtuk, amit M_2 kapcsán láttunk, vagyis $|\boldsymbol{F}_{32}|\cdot\sin\alpha_2 = 2f$.

Ezek alapján általánosíthatunk. M_k-ra: $\operatorname{tg}\alpha_k = \frac{k\cdot f}{F_0}$, ahol $k = 1; \dots; n$.

$x_{i+1} = x_i + a$ $y_{i+1} = y_i + a\cdot\operatorname{tg}\alpha_i$, ahol $i = 1; 2; \dots; n-1$.

$$M_1 = (x_1; y_1) = \left(\frac{a}{2}; b\right)$$

$$M_k = \left(\frac{a}{2} + (k-1)\cdot a; b + a\cdot\underbrace{\frac{f}{F_0}\cdot[1+2+\dots+(k-1)]}_{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \dots + \operatorname{tg}\alpha_{k-1}}\right)$$

A számtani sorozat összegképletének felhasználásával a keresett felfüggesztési pontok $M_k(x_k; y_k)$ koordinátáira kapjuk:

$$x_k = \frac{a}{2} + (k-1)\cdot a \quad ; \quad y_k = \mathrm{b} + \mathrm{a}\cdot\frac{f}{F_0}\cdot\frac{k\cdot(k-1)}{2}$$

Ebből k értékét kiküszöbölve kapjuk: $\boldsymbol{y_k = \frac{f}{2\cdot F_0\cdot a}\cdot x_k^2 + \left(b - \frac{a\cdot f}{8\cdot F_0}\right)}$ parabola egyenletét. Vagyis a keresett felfüggesztési pontok egy parabolán helyezkednek el.

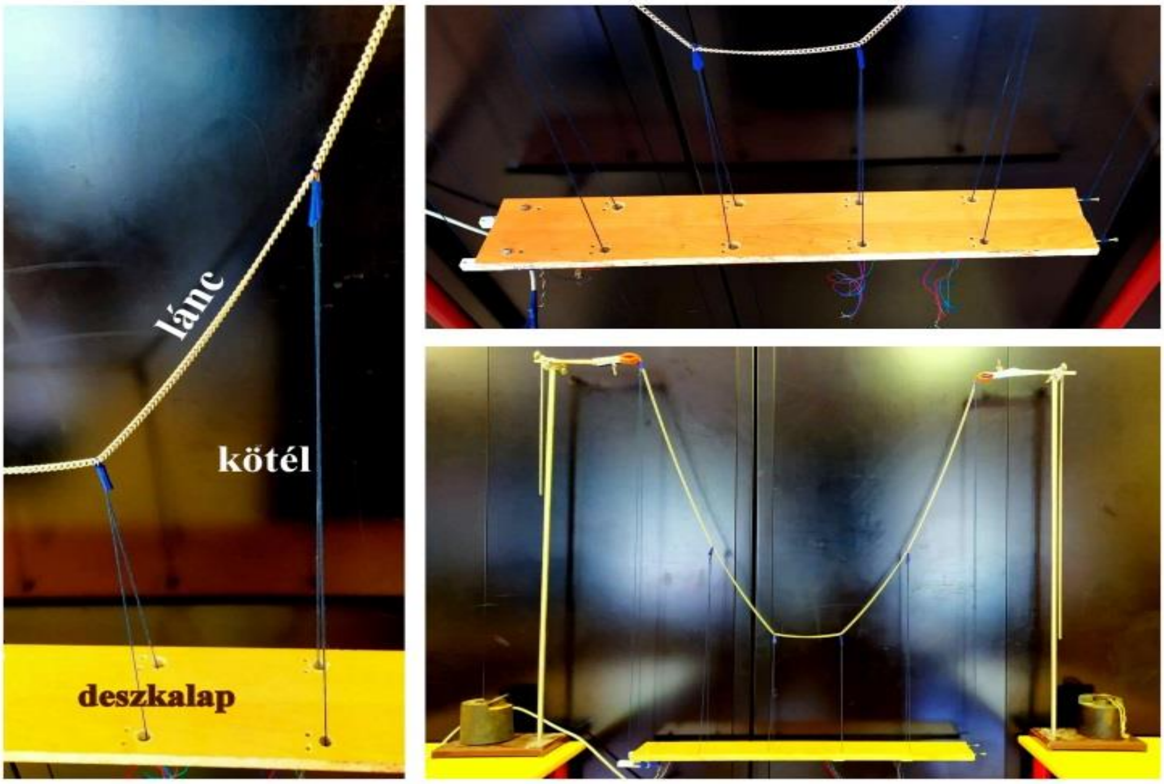
Mivel a híd magassága: $\mathrm{h} = \mathrm{b} + \mathrm{a}\cdot\frac{f}{F_0}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}$, ebből: $F_0 = \frac{a\cdot f\cdot n\cdot(n-1)}{2\cdot(h-b)}$ értéke a kezdetben felvett adatok alapján megadható.

4.2.2. Modellépítés

A 4.6. ábrán látható modellt építettük számításaink méréssel történő ellenőrzéséhez. Egy nagyjából homogén deszkalapot fúrtunk át a láncra fűzött hímzőfonalakkal (kábel) történő felfüggesztéshez.

A méretezést a lehetőségeinkhez mérten (deszkalap hossza, erőmérő cellák száma stb.) az alábbiak szerint választottuk:

$n = 3 \qquad a = 0{,}15\,m \qquad b = y_1 = 0{,}3\,m \qquad h = y_3 = 1\,m$.



4.6. ábra: Függőhíd építése.

Az eszköz készítésénél az egyik legfontosabb szempont a láncról lógó függőleges tartókötelek megfelelő elhelyezése, hogy azok felfüggesztési pontjai az egyenletes terhelés elérésének érdekében valóban a számított parabolára essenek. Mivel a készített modellünk esetén a „parabola”lánc darabjai a deszka (hídtest) súlya hatására megfeszülnek (4.6. ábra), ezek hossza körülbelül megegyezik az egyes felfüggesztési pontok közötti távolságokkal, így a szükséges lánc hosszát ezen távolságok összege adja meg:

$$x_1 = 0{,}075\,m \qquad y_1 = \frac{3}{10}m = y_1 \qquad d_1 = \frac{a}{2} = 0{,}075\,m$$

$$x_2 = 0{,}225\,m \qquad y_2 = \frac{8}{15}m \qquad d_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \approx 0{,}28\,m$$

$$x_3 = 0{,}375\,m \qquad y_3 = 1m = h \qquad d_3 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \approx 0{,}49\,m$$

$L \approx 2 \cdot \sum_{i=1}^{3} d_i = 1{,}685\,m$. Ezen adatok kiszámításával előre bejelöltük a láncon, mely láncszemekbe kell beleakasztanunk a függőleges kábelekként funkcionáló köteleket. Ennek, valamint a tartókötelek hosszának pontossága elengedhetetlen a helyes mérési eredmények biztosításához.

Megjegyzés: A „törésmentes” (valódi) lánc hosszát képező parabola ívhosszának kiszámítását integrálással is meg lehet oldani. Ezt érdekességképpen (a matematika ezen részével is ismerkedve) meg is tettük. Bár a diákok ekkoriban még csak 10. évfolyamba jártak, így ekkor még integrálni nem tanultak, azonban azt hogy mire jó, mire tudják használni, már többször előrevetítettük korábbi tanulmányaik során. Amennyire szükséges, átbeszéltük a módszer létjogosultságát, majd miután tudományos számológép használatával néhány egyszerűbb példán (pl. lineáris egyenes) keresztül „ellenőriztük” az ívhosszszámításhoz szükséges összefüggés „használhatóságát”, a konkrét függvény ívhosszának kiszámítását a WolframAlpha[12] nevű programmal önállóan végezték el.

A felfüggesztési pontok által meghatározott parabola egyenlete:

$$y_k = \frac{f}{2 \cdot F_0 \cdot a} \cdot x_k^2 + \left(b - \frac{a \cdot f}{8 \cdot F_0}\right) \qquad \text{, ahol} \quad F_0 = \frac{a \cdot f \cdot n \cdot (n-1)}{2 \cdot (h-b)} \ .$$

Behelyettesítés és némi rendezés után a függvényünk az alábbi alakban adható meg:

$$f(x) = Ax^2 + B \qquad \text{, ahol} \quad A = \frac{h-b}{a^2 n(n-1)} = \frac{1m - 0{,}3m}{(0{,}15m)^2 * 6} = 5\frac{5}{27}\ \frac{1}{\mathrm{m}}$$

$$B = b - \frac{h-b}{4n(n-1)} = 0{,}3m - \frac{1m - 0{,}3m}{4*6} = \frac{13}{48}\ \mathrm{m}$$

A parabola megfelelő ívhossza tehát az alábbiak szerint adható meg:

$$L_f(-\boldsymbol{x_3}; +\boldsymbol{x_3}) = \int_{-x_3}^{+x_3} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx = \left[\frac{1}{4A} \cdot 2Ax\sqrt{4A^2x^2 + 1} + arsh(2Ax)\right]_{-x_3}^{+x_3}$$

$$L_f(-0{,}375; +0{,}375) = \int_{-0{,}375}^{+0{,}375} \sqrt{4A^2x^2 + 1}\ dx = 1{,}705m$$

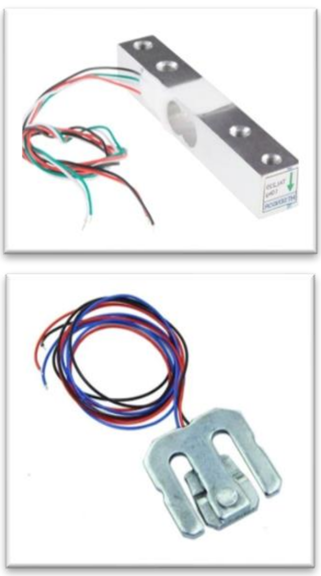
Ez az előző (közelítő jellegű, ámbár a mérés során alkalmazott „megtört” lánc hossza esetén reális) számítási eredményünknél ($L \approx 1{,}685\ m$) valóban kicsivel hosszabb.

---

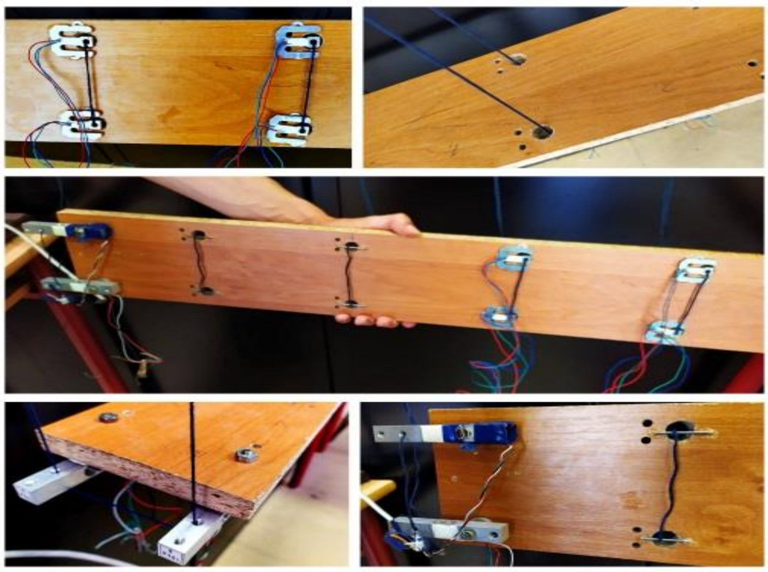
[12] https://www.wolframalpha.com/

Mivel ez a gyerekeket érdeklő és általuk felvetett lehetőség egy igen apró része volt a munkánknak, nem éreztem ennek a némileg szakmailag hiányos rész pedagógiai problémáját. Sőt, többször előfordul hasonló eset. Amikor ilyesmi „szakmai túlhaladásra” kerül sor (nem a korosztályukhoz illeszkedő, matematikából még nem tanult formulát előre vetítünk és ritkábban, de akár használunk is), az a cél, hogy valamelyest halljanak róla, valamire emlékezzenek belőle, mindeközben ügyelnünk kell arra, hogy azért amennyire a korosztályuk engedi szemléletes képük alakuljon ki bennük az adott módszer kapcsán, természetesen ne csak értésnélküli használat. Nagy hangsúlyt fektetek ilyenkor arra is, hogy tisztában legyenek vele, ennek lesz majd bizonyítása, további részletezése is, ami nem csak szerintem nagyon fontos, de ők is várják és igénylik, hogy eljussanak erre a szintre is. Később, amikor ténylegesen tanulják, szépen összefésülődik, emlékeznek, ellenőrzik korábbi számításaikat, amikor még kevésbé volt teljes hozzá a magtematikai háttértudásuk, és nagy örömmel veszik, hogy most már teljességében is értelmezni tudják.

4.2.3. Mérés



4.7. ábra: Felhasznált erőmérőcellák.

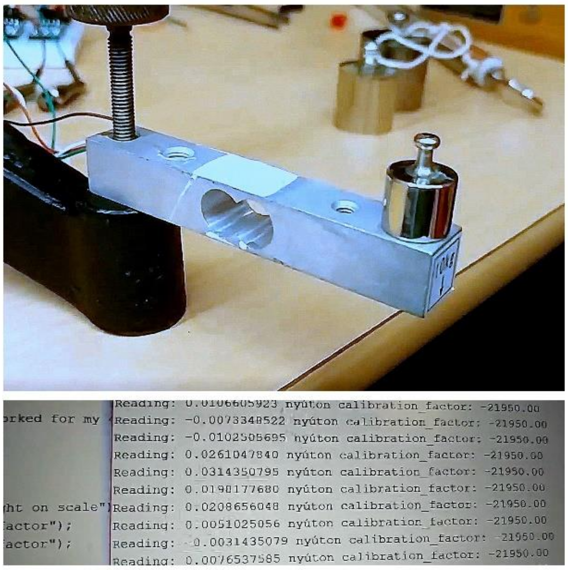


4.8. ábra: A felfüggesztési kötelekhez erősített, a hídtest aljához rögzített erőmérő cellák különböző pozíciókban.
(a három erőmérőcella: balról az első, negyedik és ötödik tartókötélhez rögzítve)

A méréshez erőmérő cellákat[13] alkalmaztunk (4.7. ábra). Ez egy olyan érzékelő, amelyre erőt kifejtve a mért erőhatás egyenesen arányos a kimenő elektromos jellel. Segítségével az

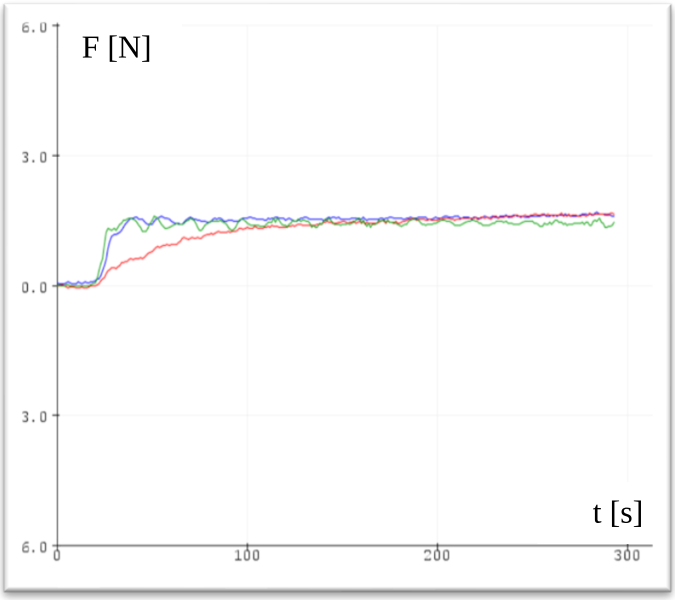
[13] https://hu.wikipedia.org/wiki/Erőmérő_cella

erőhatás időbeli változását tudjuk nyomon követni. Működési elvük alapján többféle létezik, például nyúlásmérő bélyeges vagy piezoelektromos. Mindkettő a terhelés hatására bekövetkező deformáció okozta változások (ellenállás / töltésmennyiség) mérésén alapszik.



4.9. ábra: Pillanatkép a kalibrálás folyamatáról.

Az erőmérők beszerzésének (AliExpress[14]) és beszerelésének (4.8. ábra), valamint az Arduino[15] vezérelt kalibrálásának (4.9. ábra) és működtetésének feladatát a diákjaim maguk oldották meg részben saját tapasztalataik, részben különböző internetes oldalakon talált instrukciók alapján. Ehhez segítségképp találunk magyar nyelvű bővebb szakanyagot is Dr. Piláth Károly weboldalán: „Mérjünk erőt Arduinoval” [4], [5].



4.10. ábra: Az erőmérő cellák által mért erőhatás (az idő függvényében). A három különböző szín a három különböző tartókötélhez rögzített erőmérő cella által mért erőhatást jelöli.

Mérési eredményünk a 4.10. ábrán látható: a hat függőleges tartókötélből háromhoz rögzítettünk erőmérő cellákat (4.8. ábra). Az ezek által mért értékek a vártnak megfelelően lényegében azonosak. A kisebb eltérés az épített modell geometriai tökéletlenségéből származik. A grafikonon látható ugrás előtti szakasz azt jelzi, amikor a hidat még kézzel tartottuk (az erőmérő cellák még 0 N erőt mutatnak), majd óvatosan leengedtük, amikor is megfeszültek a kötelek és lassan megtalálták egyensúlyi állapotukat. Valójában ebben a részben az erőhatás időbeli változásának követésére nem volt szükségünk. Az eszköz felfüggesztésének pontos beállításai időigényesek, ellenben megérte a szép eredményért.

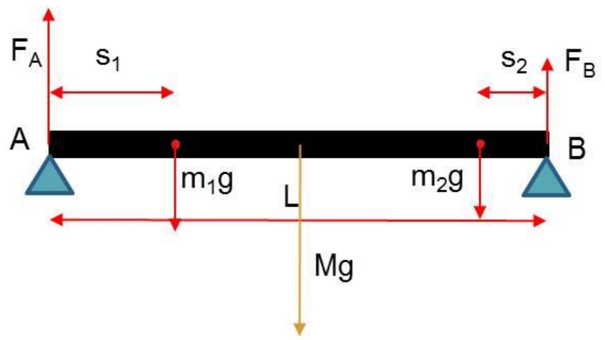
[14] https://aliexpress.com/
[15] https://www.arduino.cc/

4.3. Hidak többlet terhelése LEGO robotokkal

Végül az előbbi erőmérő cellákkal megvizsgáltuk egy a két végén alátámasztott (egyszerű, homogén fémdeszkából álló) híd különböző tömegű és sebességű mozgó kocsikkal (LEGO által fejlesztett NXT robotokkal[16]) történő terhelését. Először elméleti úton megadtuk, majd méréssel igazoltuk az alátámasztásoknál ébredő erőket az idő függvényében. Az adatsorokat felhasználó grafikonábrázoláshoz és függvényillesztéshez készült JavaScript nyelven íródott webes alkalmazást is (önszorgalomból és kíváncsiságból) az egyik diák írta.

4.3.1. Elméleti háttér

Az L hosszúságú, (homogén) M tömegű hídon áthaladó (v_1 illetve v_2 kezdősebességű, egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végző) két – m_1 és m_2 tömegű – kocsi (LEGO robot) által a hídra ható erőhatásokat (egy tetszőleges időpillanatban) a 4.11. ábra mutatja.



4.11. ábra: A két végén alátámasztott hídon áthaladó két kocsi által a hídra ható erőhatások.

A híd két végén lévő alátámasztásnál ható erők (F_A és F_B) időbeli változását az alábbiak szerint adhatjuk meg: Írjuk fel (például) a híd baloldali (A) végpontjára a forgatónyomatékok eredőjét, majd helyettesítsük be a megfelelő távolságokat a négyzetes úttörvény felhasználásával:

$$\sum M_A = 0$$

$$m_1 g s_1 + m_2 g(L - s_2) + M \cdot g \cdot \frac{L}{2} = F_B \cdot L$$

$$m_1 g\left(v_1 t + \frac{a_1}{2} \cdot t^2\right) + m_2 g L - m_2 g\left(v_2 t + \frac{a_2}{2} \cdot t^2\right) + M g \frac{L}{2} = F_B \cdot L$$

Végül fejezzük ki (például) a jobb oldali hídpillérnél (B pont) ható erőhatást az idő függvényében:

[16] https://en.wikipedia.org/wiki/Lego_Mindstorms_NXT

$$F_B(t) = \frac{(m_1a_1 - m_2a_2)\cdot g}{2L}\cdot t^2 + \frac{(m_1v_1 - m_2v_2)g}{L}\cdot t + (m_2 + \frac{M}{2})g$$

A függvény átláthatósága kedvéért azt teljes négyzetté alakítva kapjuk az alábbi összefüggést, amely a diákok számára egy kis aktuálisan tanult, bonyolultabb matematikai alkalmazást is jelent a másodfokú függvények és azok ábrázolhatósága kapcsán:

$$F_B(t) = \frac{(m_1a_1 - m_2a_2)g}{2L}\left(t + \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1a_1 - m_2a_2}\right)^2 + \left[m_2 + \frac{M}{2} - \frac{(m_1v_1 - m_2v_2)^2}{(m_1a_1 - m_2a_2)\,2L}\right]g$$

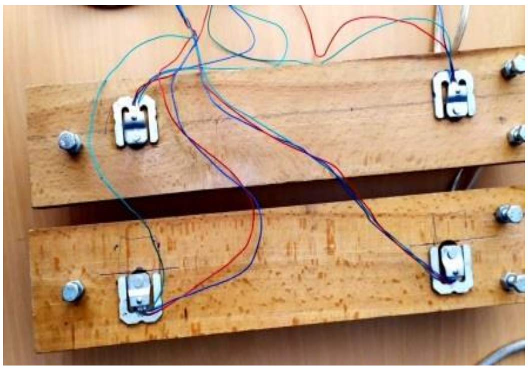
Megjegyzés: Talán vitatható lehet ennek a lépésnek (főként a következő lépésben történő egyszerűsítés előtti) „szükségessége”, de véleményem szerint nagyon fontos, hogy a matematikát és fizikát minél sűrűbben összekapcsoljuk, főleg, ha éppen az aktuálisan tanult tananyagra épít, egészíti azt ki. A gyerekek kifejezetten élvezik a kihívást és a bonyolult, de szép eredményeket, amelyeket fel is tudunk azután használni.

A híd M tömegétől eltekintve, valamint kezdősebesség nélküli gyorsulások esetén a fent kapott összefüggés az alábbi módon egyszerűsödik:

$$F_B(t) = \frac{(m_1a_1 - m_2a_2)g}{2L}\,t^2 + m_2g$$

Hasonlóan megadható a bal (A) végpontban ható (F_A) erőhatás időbeli változása is.

4.3.2. Mérés

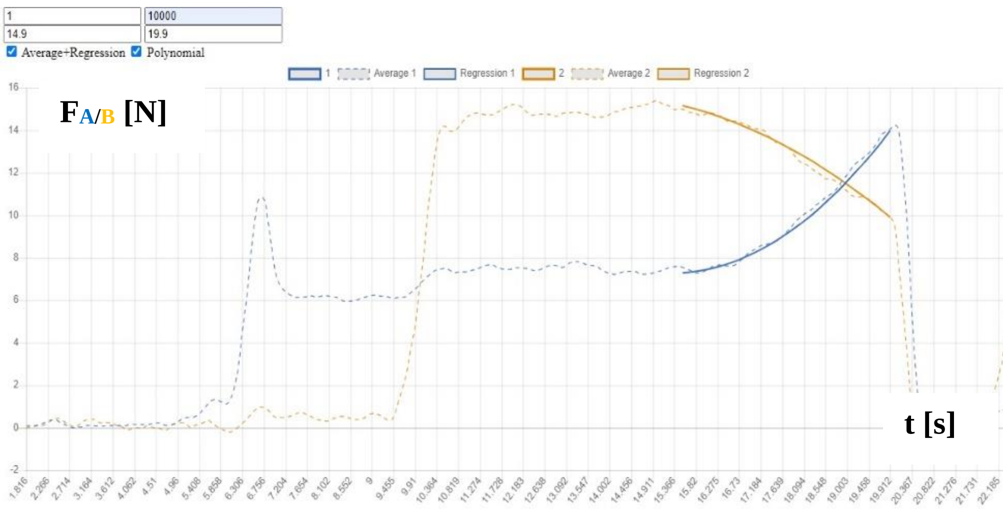


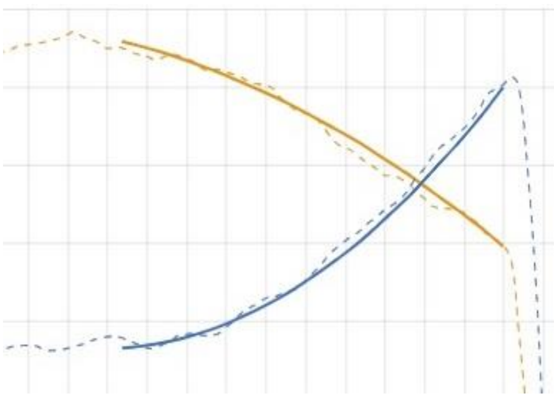
4.12. ábra: A hídpillérekre szerelt erőmérő cellák.

A hídpillérekre szerelt erőmérő cellák a 4.12. ábrán, a mérési elrendezés a 4.13. ábrán látható. Az erőmérő cellákat a híd M tömegével táráztuk (így valóban M = 0 értékkel számolhatunk). Az egyik robot tömegnövelését szigetelő szalaggal rögzített súlyokkal oldottuk meg. Az NXT robotokhoz gyorsulásmérő szenzor csatlakoztatható. A robotok hanghatásra (tapsra) egyszerre indulnak.

4.13. ábra: A LEGO robotokkal történő mérés.

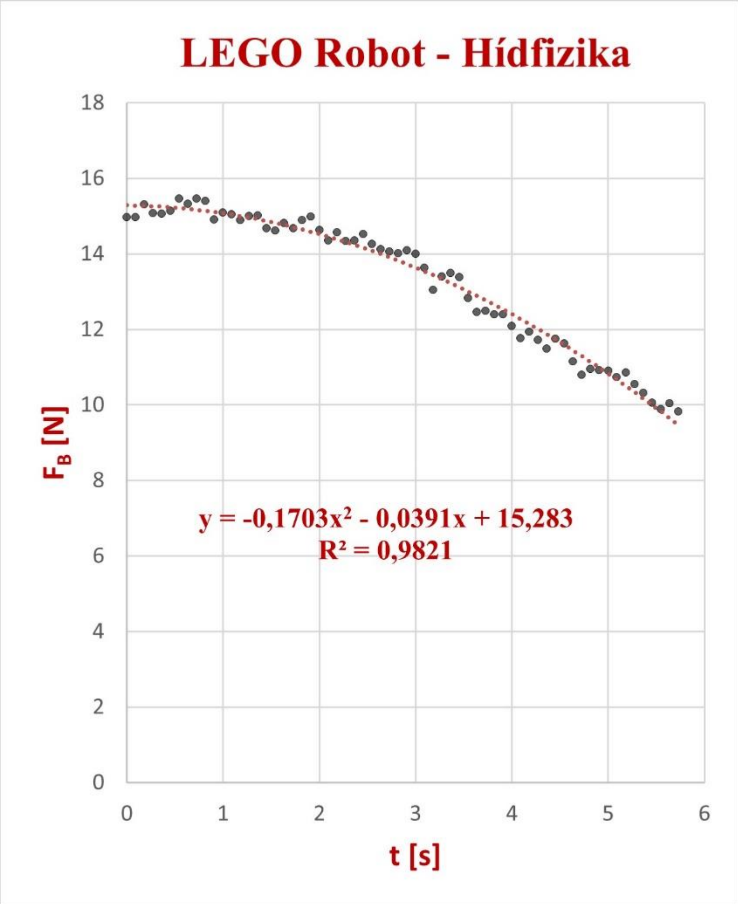
Az erőmérő cellák által mért adatok alapján a diákok által készített saját grafikonábrázoló és -illesztőprogrammal kapott eredmények a 4.14. ábrán lathatók: a kiemelt szakasz jelöli a robotok hídon történő áthaladásának időszakát, a grafikonok elején a robotok felhelyezése történik, a végén pedig látható, ahogy a hídról legördülő robotok már nem terhelik tovább a hídpilléreket. A LEGO robot által mentett adatok közül a mérés szempontjából számunkra lényeges értékek Excel táblázatban is feldolgozhatók (4.15. ábra).





4.14. ábra: A diákok által írt és használt program képernyőfotója a mérési eredményekről, illetve a mérés szempontjából lényeges időintervallum (a robotok hídon történő áthaladásának) felnagyított grafikonrészlete:

az alátámasztási pontokban ható erők nagysága az idő függvényében: sárga $F_B(t)$, kék $F_A(t)$.



Mért adatok:

$L = 0{,}92$ m

$m_1 = 0{,}845$ kg

$m_2 = 1{,}601$ kg

$a_1 = a_2 = 0{,}05\ m/s^2$

4.15. ábra: A hídpillérnél ébredő F_B erőhatás az idő függvényében.

A mért adatok behelyettesítésével kapott függvény egyenlete:

$$F_B(t) = \mathbf{-0,2054}\ N/s^2 \cdot\ t^2 + \mathbf{16,01}\ N$$

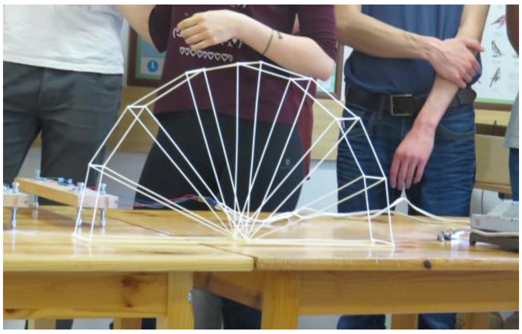
A grafikonra illesztett parabola egyenlete és annak teljes négyzetté alakított formája:

$$y = -0{,}1703x^2 - 0{,}0391x + 15{,}283 = \mathbf{-0,1703} \cdot (x + \mathbf{0,1148})^2 + \mathbf{15,285}$$

A mérési eredmények ismét jó közelítéssel visszaadják a várt (számolt) eredményeinket.

4.4. További lehetőségek a témában

Ezen fizikatábori munka további terméke lett egy saját kezűleg épített tésztahíd is (4.16. ábra). Ezen építmények további vizsgálata (tésztavastagság, üregesség, tömege, anyagi minősége, különböző rácsszerkezetek, teherbíróképesség stb.) már nem fért bele a projektbe, a jövő zenéje lehet majd.



4.16. ábra: Tésztahíd modell építése.

4.5. Összefoglalás

Ahogy láthattuk, az érintett témák lehetőséget adnak a középiskolai fizikatanulmányok érdekes kiegészítéseként az egyensúly, erők vektori felbontása/összegzése, forgatónyomaték, Arduinoval és LEGO robotokkal történő ismerkedés és mérés, grafikonábrázolás, matematikai készségek (sorozatok, bonyolultabb függvények, elemzés) hasznos gyakorlati alkalmazhatóságának bemutatásra. Ezen készségek legtöbbje sok más projektben is hasznunkra válhatnak a későbbiekben.

Ez a fejezet tartalmazza a 4. tézis háttéranyagát.

Hivatkozások

1. Horváth Mónika: Mérnöki alkotások tegnap és ma (szakdolgozat), Szeged, 2007, 2.5. Hidak/18-26. o.
http://titan.physx.u-szeged.hu/modszertan/oktatas/szakdolgozatok/07Szkd_Fiz-Mat_HorvathMonika.pdf

2. Sia Hong Rui, Lim Chee Siang, Thuang Huah Jiunn, Clinton Tham Vun Khee, Joseph Wong Shun Hua, Eric Kwan Zheng Hao: Fettuccine Truss Bridge, Taylor's University, 2013, 4.2/18-24. o.
https://www.slideshare.net/leeyiangsiang/fettucine-truss-bridge

3. Y. S. Petrov: Suspending Belief (Name the shape of that incredible curve), Quantum**:** The Student Magazine of Math and Science, 1993. Jul/Aug., 28. o. (At the Blackboard)
http://static.nsta.org/pdfs/QuantumV3N6.pdf

4. Piláth Károly: Mérjünk erőt Arduinoval: https://pilath.wordpress.com/merjunk-erot-arduinoval/

5. Erőmérő cellákkal való méréshez segédanyag (HX711):
https://learn.sparkfun.com/tutorials/load-cell-amplifier-hx711-breakout-hookup-guide

5. A ZONGORAHANGOLÁS BERMUDA-HÁROMSZÖGE – avagy miért nem tanítunk a fizikát/matematikát (fizikusokat/matematikusokat) és a zenét (zenészeket) oly sokrétűen összekapcsoló hangolásról bővebben is a középiskolákban?

A válasz nagyon egyszerű: Mert rendkívül bonyolult tud lenni!

Külön kihívást jelentett az akusztika olyan részét és mélységét megtalálni, amely valamilyen szinten újdonság, mondhatni a hangtani anyag egyik gyakorlati csúcsaként tekinthető, de mégis emészthető középiskolai szinten is. Végül a hangolástan vívmányai kapcsán elkészült egy olyan tematikájú projektmunka, amely egységet alkot, kellőképpen részletes, de még feldolgozható (akár a zene iránt érdeklődő, normál tantervű csoportokban is). Bemutatom annak fizikai alapfogalmakon nyugvó, egy lehetséges történeti áttekinthetőségét, hogyan és milyen fizikai avagy egyéb okokból alakultak ki az egykori és mai hangolási formák, kitérve arra, hogy ennek milyen előnyeik/hátrányaik, illetve nehézségeik voltak/vannak.

A „Bermuda-háromszög" kifejezés nagyon találó, miszerint a hangolás alappillléreit (a háromszög csúcsait) képezik a tisztaság – a kiegyenlített hangolás – és az inharmonicitás, amelynek „szépsége", hogy ha az egyik „tökéletesen működik", akkor a másik kettő biztosan nem, úgymond „lerontják" egymást. Egy zongorahangoló feladata, megtalálni valahol az arany középutat ebben a Bermuda-háromszögben, mi pedig megpróbálkoztunk ugyanezzel a saját „fizikatanítása-háromszögünkben".

A magyarázatokhoz a zongorát – mint mindkét végén zárt húrozattal rendelkező hangszer – vettük alapul, mivel ennek billentyűzetét sokan ismerik, így ezen keresztül, ábrák segítségével történt a magyarázatok jó része. A felépítés során érintett fogalmak jól illeszkednek a középiskolai tanulmányokhoz: rezgés, rezonancia, lebegés, hullámok, állóhullámok, felhangrendszerek. Valamint kiegészítik azokat a követelményrendszerben csak érintőlegesen szereplő témakörökkel, úgymint hangközök, hangsorok, hangolástípusok (tiszta hangközök, diatonikus skála, kromatikus hangsor, jóltemperált hangolás, egyenletesen temperált / kiegyenlített hangolás, pitagoraszi hangolás és egyéb történelmi temperatúrák), pitagoraszi komma, farkaskvint, az egyenletes és a pitagoraszi hangolás összehasonlítása Lissajous-módra, „problémák kiküszöbölése", tisztaság, inharmonicitás / felhangeltolódás stb.

Az egyik legnagyobb nehézséget a zenei háttértudás (hiánya) jelentette. Egyik fő feladatomnak tekintettem, hogy ez a fajta feldolgozás lehetőséget adjon ezen témakör könnyed megértésére anélkül, hogy mélyebb szolfézs ismereteket igényelne és belebonyolódnánk a zenei jelölésekbe és szakkifejezésekbe. Erre megfelelő módszertani lehetőségeket fejlesztettünk ki (például számozott / színezett zongorabillentyűzet). Azonban mindenhol fontosnak tartottam, hogy azok számára, akik jártasak ezen fogalmakban, segítségként megemlítsük, feltüntessük azokat. A feldolgozás során használatos fogalmak több ponton kapcsolódnak a középiskola elvárt (mechanikai rezgések és hullámok) követelményrendszeréhez. Örömteli, amikor a zenei világ még érthetőbbé válik a fizika által… és fordítva.

Diákjaimmal az anyaggyűjtés során a projektre készülve órákat beszélgettünk Lendvai Tamással [1], a Liszt Ferenc Zeneművészeti Egyetem - Hangszerészképző Szakközépiskolájának címzetes igazgatójával, hangszerismeret szakoktatóval és hangszerészmesterrel (a hangolással kapcsolatos „Bermuda-háromszög" kifejezés is tőle származik); előadást hallgattunk Dr. Pap János [2],[3], a Liszt Ferenc Zeneművészeti Egyetem - Zeneelmélet Tanszék zenei akusztika tanárától, jártunk a Zeneakadémián is gyakorlati tapasztalatokat szerezni, sokat kutakodtunk az interneten, majd összegeztük tudásunkat a téma sokrétűsége miatt annak teljesség igénye és teljes mélysége, részletessége nélkül, kiemelve néhány számunkra meglepő / érdekes jelenséget.

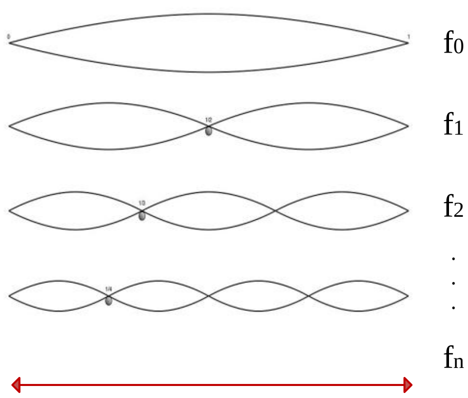
5.1. Alapozó hangtan

Ismertnek tekintjük a rezgések, hullámok középiskolában részletesen tárgyalt alapfogalmait és -jelenségeit: frekvencia, hullámhossz, terjedési sebesség, állóhullámok keletkezésének frekvenciafeltételei, lebegés; továbbá a hangtanban tanult: tiszta zenei hang, zenei hang, hangerősség, hangmagasság, hangszín, felhangok fogalmait [4],[5].

5.1.1. Alapfogalmak

Az 5.1. ábra alapján értelmezve megmutatható, hogy a mindkét végén rögzített (zongora)húr n-edik részhanjának frekvenciája: $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \cdot f_0$ (n pozitív egész), ahol $f_0 = \frac{c}{2L}$ az alaphang frekvenciája, L a húr hossza, c a terjedési sebesség, λ a hullámhossz.

- Tehát az **alaphang** frekvenciája: f_0, az n-edik **felhang** frekvenciája: $f_n = (n+1) \cdot f_0$, a k-adik **részhang** frekvenciája: $f_k = k \cdot f_0$. Vagyis az első részhang megegyezik az alaphanggal, a második részhang az első felhanggal és így tovább.
- **hangsor (skála)**: egy dallam hangjainak magasság szerinti sorbarendezése
- **hangnem:** alaphang + alaphangra épülő hangsor (amelyből az adott zenemű építkezik)
- **hangköz:** két hang frekvenciaaránya
- **transzponálás:** az adott zenei mű hangnemének megváltoztatása
  - más alaphang, de azonos skála (hangközök) és ezzel a dallam is azonos marad
  - más lehet a hangulata, más lehet a játszhatósága
- **konszonáns** (konszonancia): két vagy több zenei hang együttes megszólalását kellemesnek találjuk: „szép”
  - hangközök konszonánsak, ha kis egész számok hányadosaként írhatók fel (pl.: oktáv 1:2, kvint 2:3 stb.), minél több felhang esik egybe
  - már a püthagoreusok is: kis természetes számokkal leírható hangözök
  - ellentéte: disszonáns (disszonancia)
- **akkord**: egy skála több konszonáns hangja egyszerre szólal meg.
- **hangolás:** zenei hangsor frekvencia-viszonyainak megválasztása (szűkebb értelemben a hangmagasság beállítása).



$$L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}$$

5.1. ábra: A mindkét végén rögzített húr alaphangjának és a hozzá tartozó felhangjainak (részhangjainak) frekvenciáit szemléltető ábra.

5.1.2. Szolfézs gyorstalpaló

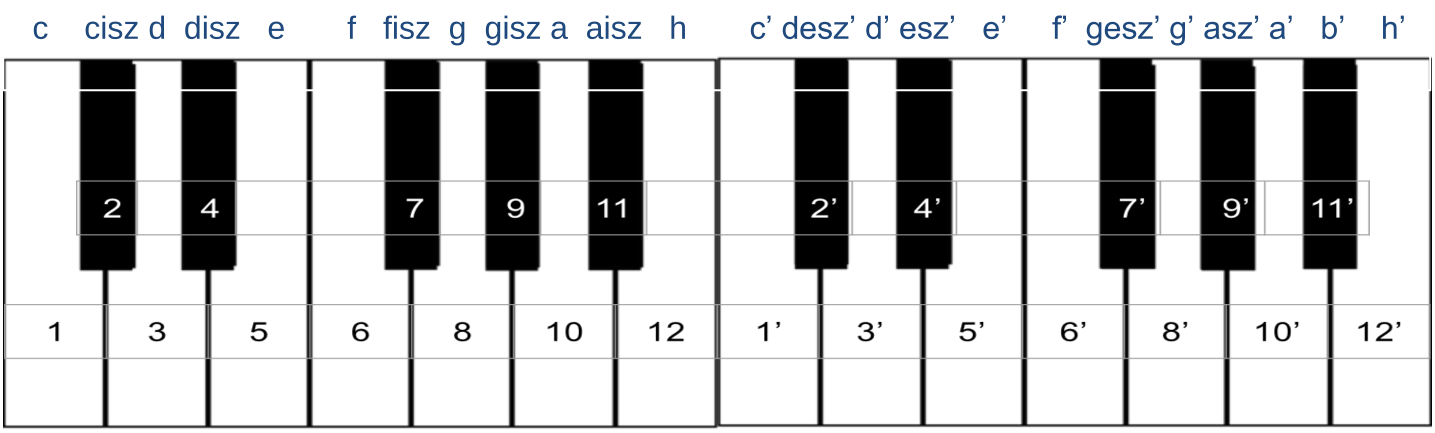
Az emberi érzékelés olyan természetű, hogy az egymás után megszólaló hangokat akkor érezzük azonos “távolságra” egymástól, ha az alaphangok aránya (hangköz) - és nem pedig a különbsége - egyezik meg. Pl. a 660 Hz-es hangtól a 440 és a 990 Hz-es hang van ugyanolyan messze: 990:660 = 660:440. Ezért a továbbiakban csak frekvenciaarányokat vizsgálunk.

Két hang összege, illetve különbsége: Mivel csak frekvenciaarányokat nézünk, két hang “összege” (1→2 + 2→3 = 1→3) valójában szorzást eredményez: $\frac{f_1}{f_2} \cdot \frac{f_2}{f_3} = \frac{f_1}{f_3}$, két hang „különbsége” (1→3 – 2→3 = 1→2) pedig valójában osztást: $\frac{f_1}{f_3} : \frac{f_2}{f_3} = \frac{f_1}{f_2}$.

A legfontosabb hangközöket az 5.1. táblázatban (és az ehhez tartozó, értést segítő 5.2. ábrán) foglalom össze:

HANGKÖZÖK elnevezése	FREKVENCIAARÁNY (alaphanghoz képest)	FÉLHANGTÁVOLSÁG (általános használat szerint)	PÉLDÁK
OKTÁV	**2:1**	**12F**	**1 - 1’ (c – c’)**
KVINT	**3:2**	**7F**	**1 – 8 (c -g)**
kvart	4:3	5F	1 – 6 (c -f)
nagy terc	5:4	4F	1 – 5 (c – e)
kis terc	6:5	3F	1 – 4 (c – disz)

5.1. táblázat: Legfontosabb hangközök.



5.2. ábra: A hangközök megértését segítő számozott zongora billentyűzet.

5.2. Hangolástípusok története és vívmányai

A hangolásnak két fő vonala van. Az egyik, amikor ragaszkodunk a racionális frekvenciaarányokhoz (tiszta hangolás); a másik, amikor az oktávon belül a hangközök egyenletes felosztását tartjuk szem előtt (kiegyenlített hangolás). Hogy a kettő miért nem létezhet egyszerre, mikor melyiket használják / használták, arra szeretnénk fényt deríteni.

5.2.1. Tiszta (harmonikus) hangközök

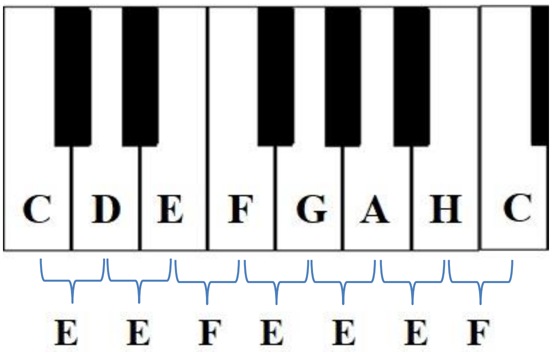
A tiszta hangolás az egész számok hányadosaként felírható hangközöket használja: 2:1 (oktáv), 3:2 (kvint), 4:3 (kvart), 5:4 (nagyterc), 6:5 (kisterc), 9:8 (nagy egészhang), 10:9 (kis egészhang) és 16:15 (diatonikus félhang). A 7,11, 13 és 14 részhangokat nem használja.

A diákok (teljes joggal) kérdezték Lendvai Tamás hangszerkészítő mestert, mégis miért? A válasz pedig igen meglepő volt: “Mert így szép!”. Ezzel a válasszal azért egy a fizikát szakszerűnek tekintő diáksereget még nem igazán sikerül meggyőzni, így tovább kutakodtak a témában.

Az alaphangnemen belül tökéletes, egészszámú frekvenciaviszonyok találhatók. Ebből következően abszolút tisztán szól, de csak egyetlen hangnemben. Mint azt később látni fogjuk, amint más hangnembe akarnánk transzponálni, a frekvencia-viszonyok “elromlanak”. Egyesek szerint TÚL tiszta! - hiányoznak a sajátosságok, finomságok.

Diatonikus hangsor – csak a fehér billentyűzet

Hétfokú hangsor, amely egy oktávot foglal magába. Öt egész- és két félhang van úgy elhelyezve, hogy a félhangok a lehető legmesszebb legyenek egymástól. Hangközök (5.3. ábra): (nagy) Egész – (kis) Egész – Fél – (nagy) Egész – (kis) Egész – (nagy) Egész – Fél. Ez a nyugati zenében leggyakrabban használt hangsor.

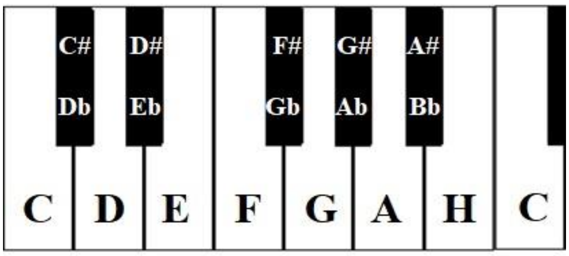


5.3. ábra: Diatonikus hangsor: egész(E)-egész(E)-fél(F)-egész(E)-egész(E)-egész(E)-fél(F).

“Miért pont így?” – kérdezték a diákok ismét. A válasz ugyanaz volt: “Mert így szép!”, de azért erre még mondunk valami kézzel foghatóbbat a későbbiekben (lásd 5.2.7. alfejezet). Hasonlóan arról is, hogy mi a különbség a nagyon közeli, de mégsem tökéletesen egyforma kis, illetve nagy egész hangközök között (lásd 5.2.3. alfejezet). Ahogyan ezen leírásból is érezhető, a diákoknak kutatóként rá kellett döbbenniük, hogy az egész téma megértése nem annyira egzakt, a gondolkodásmód pedig nem annyira lineáris, mint megszoktuk. A hangolástan vívmányai nagy vonalakban egészen jól érthetők, de minél inkább próbáljuk pontosabban értelmezni és megérteni, annál több (kezdetben megválaszolatlan) kérdés merül fel. Ezek közül többre is sikerült fényt deríteni, de próbáljuk ezt az alapok megértésének sérülése avagy hiánya nélkül, a későbbiek során csupán egy-egy kardinális esetben kifejteni.

Kromatikus hangsor + fekete billentyűzet

A diatonikus hangsor hét foka ki van egészítve öt olyan közbenső fokkal, amely annak egész hangközeit két-két félhangközre osztja (5.4. ábra). Ezeket a közbenső fokokat a diatonikus hangközök „elszínezésével", fél hanggal fel- vagy lefelé történő módosításával lehet elérni (felfelé: Cisz - C# = lefelé: Desz - Db).



5.4. ábra: Kromatikus hangsor (12 félhang).

⟹ Tehát az oktávot 12 részre osztották.

5.2.2. Kiegyenlített (egyenletesen temperált) hangolás

Nyugati zenében ma (is) ezt használják. Az oktáv 12 matematikailag pontosan egyenlő nagyságú félhanglépésre van felosztva, de nem egészszámú viszonyban állnak egymással. Mivel „az oktáv (1:2) a „szent állat", ezt nem szabad „bántani", ezt kell 12 egyenlő részre „osztani", így az egymást követő tagok hányadosa (alaphangköz): $\sqrt[12]{2}$, a többi hangköz (alaphanghoz képest) ennek egész kitevőjű hatványa: $f_i = a' \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^i$, ahol $a' = 440$ Hz a kamarahang – másnéven "normál A" vagy "egyvonalas a" hang – alapfrekvenciája (egy abszolút hangmagassághoz viszonyítja a további frekvenciaarányokat), i pedig az a'-től való távolság félhanglépésekben. Így a frekvenciák egy mértani sorozatot adnak. Ezzel megsérül a tisztaság (konszonancia/kellemesség érzet), de az eltérés olyan kicsi, hogy nem zavaró.

Mennyire "tiszta" az egyenletes hangolás?

Az OKTÁV (2:1) tiszta, hiszen így vesszük fel (minden más bővíthető/szűkíthető). A kvint (3:2) például már kevésbé: $(3:2) = 1{,}5 \approx \left(\sqrt[12]{2}\right)^{\mathbf{7}} \approx 1{,}49831$, valóban kb 7 félhang.

Akkor mégis miért kell nekünk az egyenletes?

Ahhoz, hogy a hangszeren több hangnemben is tudjunk játszani, tehát egy dalt a skála más pontjából kiindulva is el lehessen játszani (hangnemváltás), a hangsort át kell alakítani az adott kezdőhanghoz illeszkedően. A tiszta hangsort valamiképpen egymáshoz kell igazítani (el kell "rontani"). Kompromisszumok árán: minél tisztábban szól egy hangnem, annál hamisabb a többi, illetve minél több hangnemben akarunk egyszerre játszani, annál inkább el kell térnünk a tiszta hangolástól.

5.2.3. *Jóltemperált hangolás*

Történetileg az egyenletesen temperált hangolás előtti időszakra tehető. Többféle hangolási módot érthetünk ezalatt, amelyekben közös, hogy az egyenletesen temperált hangolással ellentétben megmaradnak a hangnemek sajátosságai (mivel a hangközök nem azonos mértékben temperáltak), miközben minden hangnemben elfogadhatóan (viszonylag tisztán) lehet játszani (eltérő félhangviszonyok mellett), valamint a tiszta hangolástól bármely hangköz csak kis mértékben tér el. (Korábban több olyan hangolási mód is létezett, amely egyedi vonásokat tartalmazott ugyan, de alkalmatlan volt más hangnemben való játékra.)

Itt érdemes megemlíteni Johann Sebastian Bach (1685-1750) Das woltemperierte Klavier *(A jóltemperált zongora)* két kötetes gyűjteményét, amelyek tanítási céllal készültek éppen a különböző hangnemek közötti hangulatkeltésbeli különbözőségek bemutatására, valamint a jóltemperált hangolás (akkoriban használatos hangolási módokkal szembeni) különböző hangnemekben való játszhatóságának előnyeire. Minden hangnemben írt kötetenként egy-egy (összesen 24) rövid kis darabot: egyet dúrban és egyet mollban. Bemutatta a különböző (dúr-moll) skálák közötti stilisztikai és hangulatbeli különbözőségeket. A dúr skála általában vidámabb, lelkesítőbb; a moll hangsor szomorkásabb, komorabb hangulatot kelt. Mindkettő hétfokú hangsor, minden alaphanghoz létezik dúr és moll skála is, a különbség a hangközökben van. A dúr skálák hangközei megfelelnek a diatonikus skálánál említett (egész-egész-fél-egész-egész-egész-fél) hangközöknek. Például D-dúr skála esetén (az 5.2. ábrát felhasználva): 3-5-7-8-10-12-2'-3' (d-e-f#-g-a-h-c#'-d'). Megfelelő alaphangú moll skálát kapunk, ha a dúr skála 3., 6. és 7. hangját egy félhanggal leszállítjuk (egész-fél-egész-egész-fél-egész-egész). Például D-moll skála: 3-5-**6**-8-10-**11**-**1'**-3' (d-e-**f**-g-a-**b(a#)**-**c'**-d'). Ha a dúr skálát annak 6. hangjától kezdjük (folytatva azt a következő oktávban), más alaphangú moll-skálát kapunk. Minden dúr skálának van moll párja, például: D-dúr – H-moll.

Egyéb „bonyodalmak": Korábban már említettük (lásd 5.2.1. alfejezet), hogy a diatonikus skála egészei sem ugyanazok az egészek. Az elnevezés csaknem azonosságára az ad okot, hogy az ún. kis- és nagy egészek közötti különbség elenyésző. A különbség okozója:

- nagy egész hang $\text{"7F} - \text{5F"} = \text{kvint} - \text{kvart} = \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$
- kis egész hang $\text{"4F} - \text{2F"} = \text{nagy terc} - \text{nagy egész} = \frac{5}{4} : \frac{9}{8} = \frac{10}{9}$

=> nagy egész csak ≈ kis egész: $9:8 = 1{,}125 \neq 10:9 = 1{,}\dot{1}$.

Hasonló okokból kifolyólag további anomáliákat is felfedezhetünk. Például a diatonikus félhang (5.2. ábra alapján: 5-6 (e-f)) is csak körülbelül egyezik meg a kromatikus félhanggal (6-7 (f-f#)):

- diatonikus félhang $\text{"5F} - \text{4F"} = \text{kvart} - \text{nagy terc} = \frac{4}{3} : \frac{5}{4} = \frac{16}{15}$
- kromatikus félhang $\text{"7F} - \text{F} - \text{5F"} = \text{kvint} - \text{diatonikus félhang} - \text{kvart} = \frac{3}{2} : \frac{16}{15} : \frac{4}{3} = \frac{135}{128}$

=> diatonikus félhang csak ≈ kromatikus félhang: $16:15 \approx 1{,}067 \neq 135:128 \approx 1{,}055$.

Az egyenletes hangolás során ez épp az iménti két érték számtani közepe lesz.

Érdekesség, hogy léteznek olyan „régi-zenéléshez” használatos tört-billentyűs klaviatúrák (a fekete billentyűk ketté osztásával), amelyeken más volt az 5.2. ábra szerinti 1 (c) hang fél hanggal való felemelésével (cisz) és a 3 (d) hang fél hanggal való leszállításával (desz) kapott 2 (cisz≈desz) hang.

A fentebb említett „anomáliák” ügyében valahol kompromisszumot kell tudni kötni. Részben a túlbonyolítás elkerülése végett, hiszen az egyenletes hangolás problematikájától függetlenül is kiderül, hogy ami „tisztán” egész / fél, az sem ugyanaz az egész / fél.

5.2.4. *Az egyenletes temperatúra és tiszta felhangrendszerének lebegése*

Koherens hullámok találkozásakor interferenciajelenség lép fel. A létrejövő eredő hullám találkozási pontban kialakuló kitérését a két interferáló hullám adott pontban vett pillanatnyi kitérésének összegeként kapjuk meg (egyirányú rezgések összetétele):

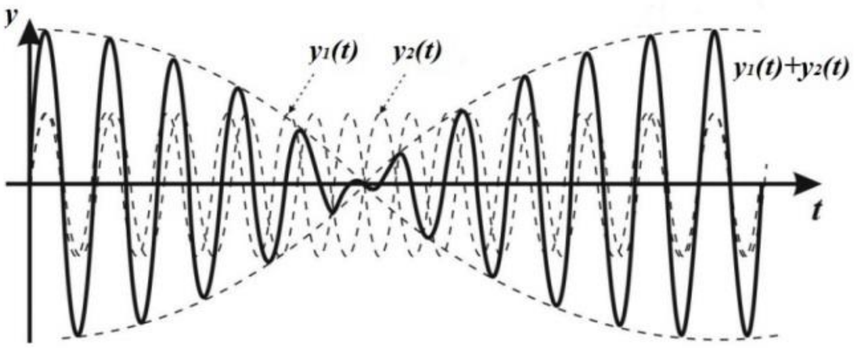
$$y(t) = A_1 \cdot \sin(2\pi f_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2).$$

Speciális esetben: $f_1 \neq f_2,\ f_1 \approx f_2$, vagyis Δf kicsi $\Longrightarrow$ ilyenkor lebegés jön létre. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $A_1 = A_2 = 1$, valamint $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Ekkor felhasználva a körfrekvencia (szögsebesség) és a frekvencia közötti $\omega = 2\pi f$, valamint a szinusz függvények összegére vonatkozó $sin\alpha + sin\beta = 2sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ összefüggéseket az eredő hullám alakja:

$$y(t) = \sin(\omega t) + \sin\big((\omega + \Delta\omega)t\big) = 2\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{2\omega+\Delta\omega}{2}t\right),$$

ahol $\omega_1 (= 2\pi f_1) =: \omega,\ \omega_2 (= 2\pi f_2 = 2\pi(f_1 + \Delta f)) = \omega + \Delta\omega$.

Ez egy olyan szinuszhullámot ír le, amelynek körfrekvenciája a két hullám körfrekvenciájának számtani közepe: $\frac{\omega_1+\omega_2}{2} = \frac{2\omega+\Delta\omega}{2}$, miközben amplitúdója (időben lassan: $\Delta\omega \ll \omega_1 + \omega_2$) periodikusan változik: $2cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right) = 2cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$. (5.5. ábra)



5.5. ábra: Lebegés ábrázolása.

Az eredmény körfrekvencia helyett a hangtanban sűrűbben használt frekvenciára vonatkozólag is igaz. Amikor két hang frekvenciája csak kicsit tér el egymástól, lebegést hallunk (lüktet): a fenti egyenletnek megfelelően periodikus erősítések, majd gyengítések (halkulások) követik egymást, amely az emberi fül számára is hallható.

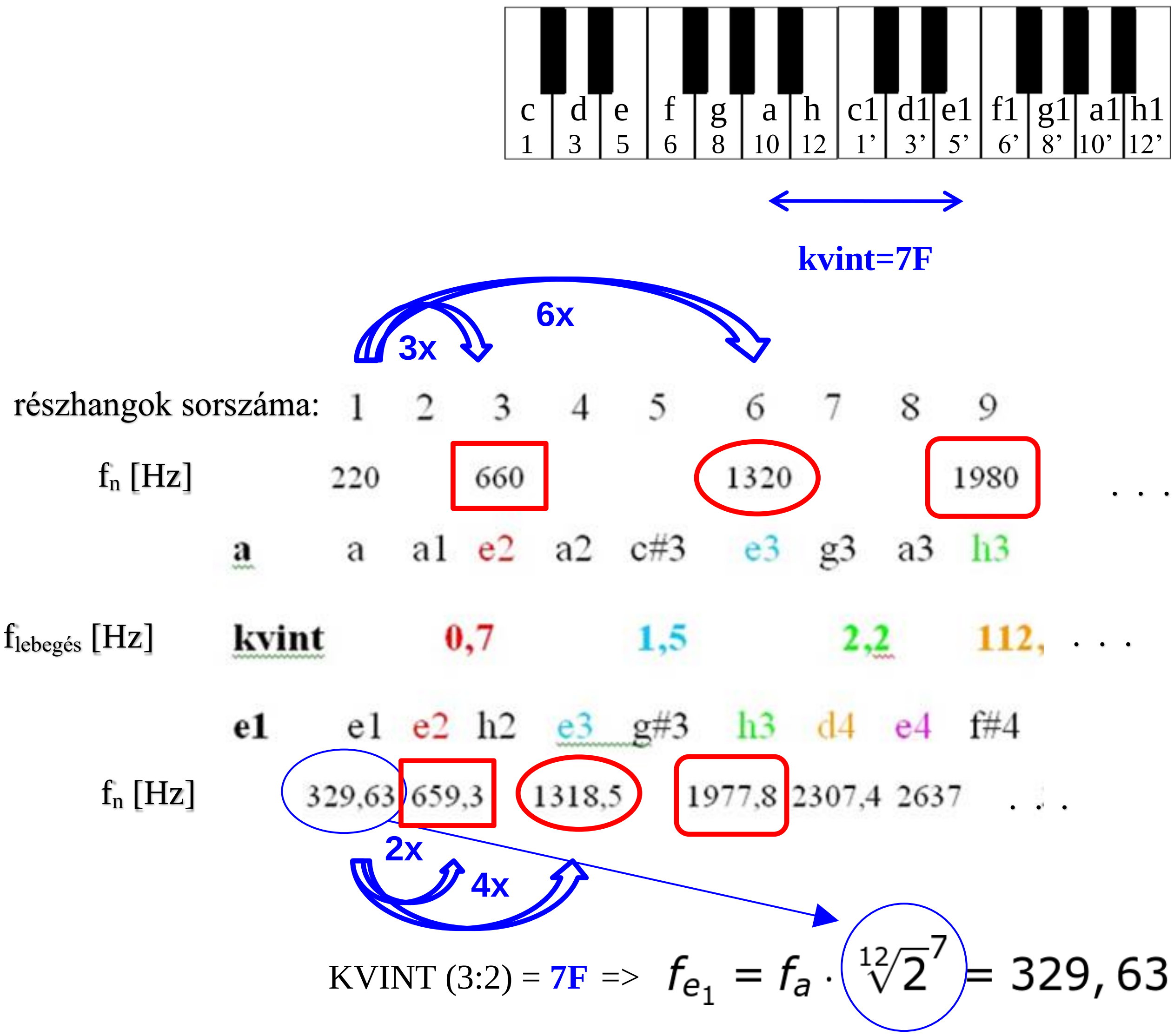
A lebegés frekvenciája a két hang frekvenciakülönbsége: $f_{lebegés} = \Delta f$.

Példa: $f_1 = 440$ Hz és $f_2 = 442$ Hz => $f_{lebegés} = 2$ Hz .

Ez 440 Hz körüli hangmagasság esetén körülbelül 10-20 Hz-nyi különbségig hallható. Ha $\Delta f > 20$ Hz, akkor már két különböző hangnak halljuk. (Azt a legkisebb frekvenciakülönbséget, amelyet az emberi fül hangmagasság szerint még megkülönböztetni képes különbségi küszöbnek / hallásunk felbontóképességének nevezzük. Ez az érték 2-3 kHz körüli tartományban a legérzékenyebb, mélyebb hangok esetén rohamosan csökken, hallásunk felbontóképessége romlik.)

Lebegés-áradat a kiegyenlített hangolás során

Az egyes (egymástól különböző) alaphangok közös (közel azonos frekvenciájú) részhangjai lebegést eredményezhetnek. A jelenséget részletesen az 5.6. ábra segítségével egy példán keresztül mutatom be kvint (3:2) esetére.



5.6. ábra: Az egyenletes temperatúra és tiszta felhangrendszerének lebegése.
/Lendvai Tamás: Fókuszban a zongora c. könyvének (69.o.) ábrája alapján/

Az ábrán feltüntetett egyenletes temperatúra frekvenciáit az $f_n = a \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^n$ összefüggés alapján számíthatjuk ki, ahol $a = 220\ Hz$. A további részhangok (felhangok) frekvenciáit pedig az alaphang egész számú többszöröseiként kapjuk.

A különböző alaphangok különböző sorszámú részhangjai lebegést eredményezhetnek: lásd az 5.6. ábrán azonos színnel jelölt részhangok frekvenciaértékét, valamint a sorok között számított kicsiny frekvenciakülönbségeket, vagyis a lebegések frekvenciáját ($f_{lebegés}$).

A fenti példa alapján “a” és “e1” közös felhangjai a következő lebegéseket eredményezik: Az “a” **harmadik**, **hatodik** és **kilencedik** részhangjának frekvenciája ≈ “e1” (rendre) **második**, **negyedik** és **hatodik** részhangjának frekvenciájával. Külön szépség, hogy az összelebegő részhangok sorszámának aránya minden esetben éppen 3:2 (kvint).

Számtalan hasonló lebegés fordul elő különböző alaphangok közös részhangjai esetén. Az imént említett részhangsorszám-arányok pedig kvart esetén 4:3, nagy terc esetén éppen 5:4 stb. Cél, hogy ezen lebegések a lehető legkevésbé legyenek érzékelhetők. Szinte lehetetlen feladat. Az egyes “összelebegések” különböző erősségűek, az erősebbeket kell “megszüntetni”.

5.2.5. A felhangrendszer gyakorlati bemutatása

Egy megfeszített, rugalmas húrban az alaphang és azok felhangjainak rezgése egyszerre van jelen (ez adja a hang színezetét: az alaphang mellett mely felhangok és milyen intenzitással szólalnak meg). Ezeket a rezgési módokat (felhangrendszer) a húr valamely egész számú osztópontjában történő finom megérintésével (nem lefogásával) csomópontot keltve, majd mindeközben (az ettől különböző pontjában történő) megpendítésével tudjuk bemutatni. Ezeket nevezzük üveghangnak. Ilyenkor a húr alaphangjának csak az egyes (megfelelő osztópont előidézésével történő) felhangjai lesznek hallhatók az alaphang nélkül (felezőpont esetén egy oktávval feljebb az első felhang, harmadolópont esetén a második felhang stb.). Az üveghangok bemutatására ismert iskolai kísérlet a monochord[17] (rezonátordobozon található két nyereg között kifeszített egy szál húr) használatával történik, de egy gitár segítségével még látványosabbá tehető (amelyről az interneten videón keresztül történő demonstrációt és magyarázatot is találunk[18]).

Megjegyzés: Amikor valóban lefogunk egy húrt, akkor ezzel megrövidül a húr hossza (csak a megpengetett felében alakul ki rezgés), ilyenkor az alaphangján szól, de például a felezőpontjánál lefogva fele olyan hosszú húr alapfrekvenciája kétszer akkora lesz (oktáv). Amikor csak hozzáérünk, akkor nem lesz rövidebb a rezgő húrrész, viszont ilyenkor csak azon részhangokat „engedélyezzük”, amelyekben az érintés helyén csomópont található, ilyenkor tehát az első felhang fog megszólalni (szintén oktáv), ezt nevezik üveghangnak. A hangmagasság ugyanaz, a hangzás mégis más (kissé "üveges").

Talán kevésbé ismert azonban, hogy egy (többségében iskolai énektermekben is fellelhető) hagyományos – húros, nem digitális – zongorával is lehet hasonló, de még meglepőbb jelenségeket bemutatni.

Ha zongorához ülve (röviden, de erősen) leütünk egy mély hangot keltő billentyűt (a rövidsége miatt visszakerül a hangtompító a húrra, ezzel elnémítva az alaphangot), hallhatjuk annak saját felhangjait is megszólalni más húrokban, amennyiben a megfelelő (várhatóan

---

[17] http://demlabor.elte.hu/540-hur-monochord-rezgeseinek-vizsgalata

[18] https://rakbela.hu/gitaroktatas/gitaroktato-video-kezdoknek-uveghangok

felhangokon megszólaló) húrokhoz tartozó billentyűket előtte sorra (de egyszerre csak egyet) finoman lenyomva felemeljük azok hangtompítóját, ezzel szabad rezgést engedélyezve a megfelelő húroknak. Ilyenkor a megszólaltatott mély hang felhangjainak frekvenciáival megegyező alaphangú húrokat (azon rövid idő alatt, amíg leütjük a mély hangot) a rezonanciaelv alapján begerjeszti.

Hasonlóan, ha csak egy adott mély hang hangtompítóját tartjuk felemelve (és ezzel a húrját szabadon hagyva) a billentyű finom lenyomásával (és nem megszólaltatásával), akkor valamely felhangjával azonos alaphangú húr megszólaltatásakor (a megfelelő billentyű rövid, de erős leütésével) az előbbi mély hang megfelelő felhangjait is hallhatjuk. Különlegesen szép, amikor egyetlen húr többféle hangmagasságú részhangjain szólal meg másik, megfelelő húrok megpendítése által.

Röviden összefoglalva: Egyetlen húr is meg tudja szólaltatni máshol a saját felhangjait és egyetlen húrban is meg tudnak szólalni annak saját felhangjai.

5.2.6. Pro-kontra lista: kiegyenlített (egyenletesen temperált) hangolás

PRO	KONTRA
Kb. 1800 után írt bármely zenéhez alkalmas.	Régebbi zenék korhű előadásmódja elvész (pl.: orgonajáték, gregorián egyházi zene).
Minden hangnemben játszható.	Egyik sem tökéletesen tiszta.
	Elveszik a különböző hangnemek sajátossága / karakterisztikája (vidám, szomorú, erőteljes stb).*
	Lebegések “kioltásának” szükségessége.

5.2. Táblázat: Pro-kontra lista a(z egyenletesen temperált) kiegyenlített hangolásról.

*Fontos kiemelni, hogy a különböző hangnemek sajátossága a nem egyenletesen temperált (például: jóltemperált) hangolások során nem keverendő a korábban az egyenletesen temperált hangolás esetén is említett dúr- és moll-skálák okozta hangulatbeli különbséggel. A nem egyenletesen temperált hangolás ez utóbbin felül sokkal érzékenyebb karakterisztikákat is képes megjeleníteni, amelyeket főként a “régiidők” zenéiben (például barokk korszak) használtak.

DE! Nem mindig volt ilyen “egyszerű”!

5.2.7. *Egyéb történeti érdekességek: Pitagoraszi hangsor – avagy a feltuningolt diatonikus*

Az első elméletileg kidolgozott és leírt hangolási rendszer a pitagoraszi hangolás volt, amely oktávból és kvintekből építkezik - lényegesen bonyolultabb, de matematikailag igen szép, hiszen a tisztaság áll a főszerepben. Ezt használtál a rómaiak és a középkori Európában is.

Fel lehet építeni az egész rendszert csak oktávból (2:1 = 12F) és kvintből (3:2 = 7F) – a legegyszerűbb hangközökkel. Például a kvart (4:3) az oktáv (2:1) és a kvint (3:2) "különbségeként" adódik: $\frac{2}{1}:\frac{3}{2}=\frac{4}{3}$.

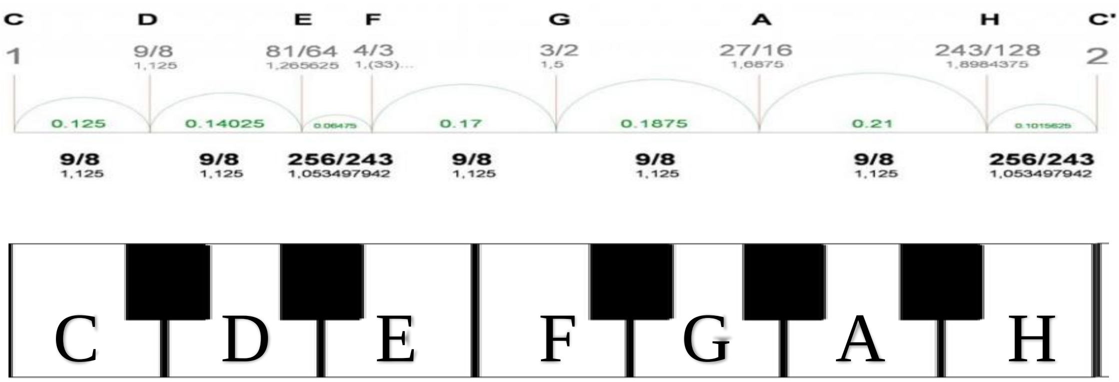
A Pitagoraszi skálában (hétfokú skála) kétféle hangköz létezik (5.7. ábra):

- $egész\ hang$: $\text{"7F} - \text{5F"} \;=\; \text{kvint} \;-\; \text{kvart} = \frac{3}{2}:\frac{4}{3}=\frac{9}{8}$
- $félhang$: $\text{"7F} - 3\cdot(\text{2F})\text{"} \;=\; \text{kvint} \;-\; 3\ \text{egészhang} = \frac{3}{2}:\left(\frac{9}{8}\right)^3 = \frac{256}{243}$

A már-már "szokásos" sajátosság:

2 félhang csak ≈ 1 egész : $(256:243)^2 \approx 1{,}10986 \;\neq\; 9:8 = 1{,}125$

Pitagoraszi hangsor felépítése: *Miért pont így??? – Mert így SZÉP!*



5.7. ábra: A Pitagoraszi hangsor hangközeinek felépítése.
/forrás: https://docplayer.hu/14515580-Pythagoraszi-hangkozok.html/

Pitagorasz hétfokú skálát alkotott úgy, hogy egy kiinduló hangra kvinteket épített, majd a kapott hangokat közös oktávba transzponálta.

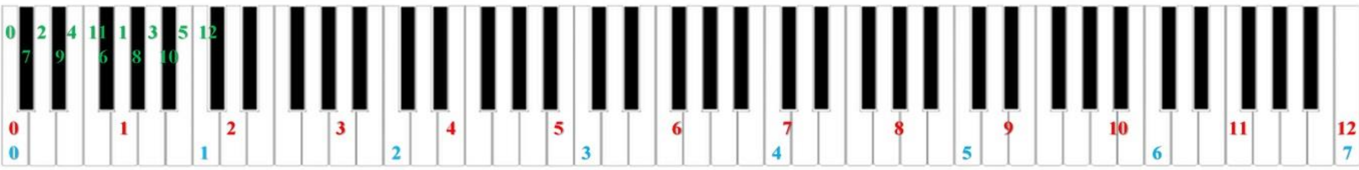
Mit jelentett az, hogy szép a diatonikus skála? – Itt a válasz a korábbi kérdésünkre (lásd 5.2.1. alfejezet – Diatonikus hangsor): Vegyünk 7 darab kvintet (7F) egymás után (5.2. ábra alapján $6 = f$-ről indítva), majd transzponáljuk mindegyiket az első oktávba. Ez kiadja a fehér billentyűzet mind a hét hangját, vagyis a diatonikus skálát, de csak egyszer és nem ciklikusan – ellentétben a következő bekezdésben tárgyalt esettel.

Most vegyünk 12 darab kvintet (7F) egymás után, majd transzponáljuk ezeket ismét az első oktávba. Azt tapasztaljuk, hogy a kapott hangok mind a 12 félhangon végigmennek: mindegyiken pontosan egyszer, valamint ciklikusan – lásd a fejezet későbbi részében mint kvintkör. (Emiatt ebben az eljárásban a kiindulási hang tetszőlegesen választható.) Ennek igazolásához nézzük az $1+7k,\ k \in \{0,1,2,3,\dots,11\}$ alakú számok 12-vel való osztási maradékait sorra:

	Maradék
$\mathbf{1+0\cdot 7=1=0\cdot 12+1}$	1 = c
$\mathbf{1+1\cdot 7=8=0\cdot 12+8}$	8 = g
$\mathbf{1+2\cdot 7=15=1\cdot 12+3}$	3 = d’
$\mathbf{1+3\cdot 7=22=1\cdot 12+10}$	10 = a’
$\mathbf{1+4\cdot 7=29=2\cdot 12+5}$	5 = e’’
$\mathbf{1+5\cdot 7=36=3\cdot 12+0=2\cdot 12+12}$	0 (12) = h’’
$\mathbf{1+6\cdot 7=43=3\cdot 12+7}$	7 = fisz’’’
$\mathbf{1+7\cdot 7=50=4\cdot 12+2}$	2 = cisz’’’’
$\mathbf{1+8\cdot 7=57=4\cdot 12+9}$	9 = gisz’’’’
$\mathbf{1+9\cdot 7=64=5\cdot 12+4}$	4 = disz’’’’’
$\mathbf{1+10\cdot 7=71=5\cdot 12+11}$	11 = aisz’’’’’
$\mathbf{1+11\cdot 7=78=6\cdot 12+6}$	6 = f’’’’’’
$\mathbf{1+12\cdot 7=85=7\cdot 12+1}$	1 = c’’’’’’’

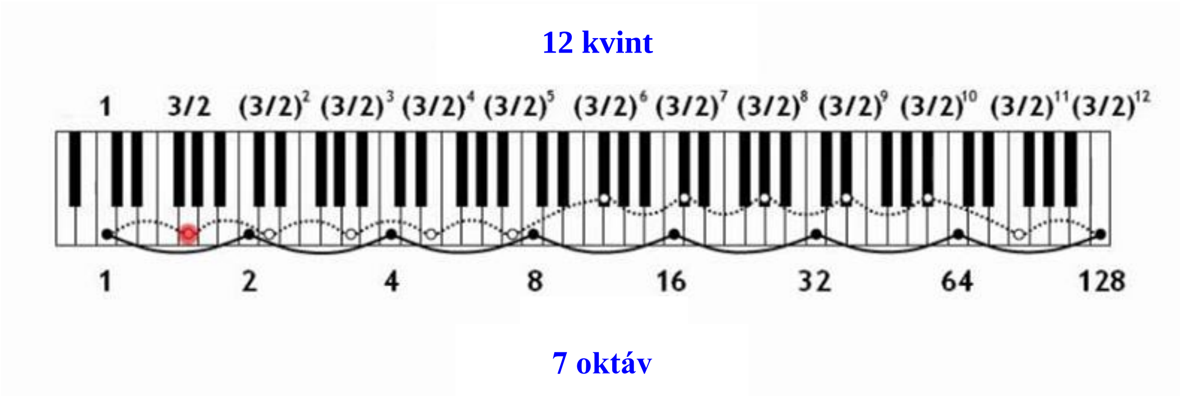
5.3. Táblázat: 12 kvintből felépített hangsor magyarázatához (pl. $1 = c$-ről indítva).

Az 5.3. táblázatban kapott eredményeinket az 5.8. ábra szemlélteti: pirossal az egymást követő 12 db kvint, zölddel az első oktávba való transzponálásuk eredménye.



5.8. ábra: A pitagoraszi hangsor kialakulásának és a pitagoraszi komma magyarázatához: pirossal az egymást követő 12 db kvint, zölddel az első oktávba való transzponálásuk eredménye, kékkel 7 db egymást követő oktáv.

Pitagoraszi komma – *Ugyanoda érkezünk, vagy mégsem??*



5.9. ábra: A pitagoraszi komma értelmezéséhez: 12 kvint ≠ 7 oktáv.

Pitagoraszi kommának nevezik a zeneelméletben azt az eltérést, ami 12 egymásra épített tiszta kvint és 7 egymásra épített tiszta oktáv között található. Az 5.8.-5.9. ábrák alapján is látható, hogy ezen hangoknak (azonos alaphangról indított 12. kvint és 7. oktáv) meg kellene egyezniük, de úgy tűnik, még sincs így:

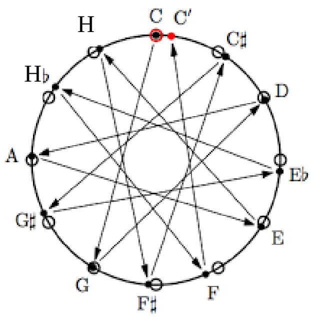
$$\text{Pitagoraszi komma} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{\left(\frac{2}{1}\right)^{7}} \approx \frac{129{,}75}{128} \approx 1{,}014 \neq 1\,.$$

Látható, hogy a két szám nem egyezik meg, a 12 tiszta kvint valamivel több, mint a 7 tiszta oktáv. A pitagoraszi komma létezése a hangolás alapproblémája: a különféle hangolási rendszerek ezen eltérést kívánják különböző módokon felszámolni.

Farkaskvint

A farkaskvint bizonyos hangolásokban keletkezett nagyon hamisan szóló, de „különös” hatások elérésére alkalmas kvint. A “legfülbetűnőbb” eltérés a pitagoraszi hangolásnál van:

$$7\text{ oktáv} - 11\text{ kvint} = \frac{2^7}{\left(\frac{3}{2}\right)^{11}} \approx 1.4798 \neq \frac{3}{2}$$



5.10. ábra: Farkaskvint szemléltetése (piros rész): nem záródó kvintkör.

Ahhoz, hogy az ún. kvintkör bezáródjon (5.10. ábra), fel kell áldoznunk az egyik kvint tisztaságát, így lesz az utolsó (tizenkettedik) farkaskvint nevéből adódóan is farkasordítóan hamis.

A pitagoraszi komma kiküszöbölései – tisztaság

Ha megelégszünk azzal, hogy csak egy hangnemben játszunk, akkor alkalmazhatjuk a tiszta hangolást, ami az alaphangnem tekintetében teljesen tiszta hangközökkel dolgozik. Ez ugyanakkor nem azt jelenti, hogy minden kvint tiszta, hanem az alaphangnem intervallumai mindenképpen tiszták, a többi hamisan szól.

Ha a kvintek tisztaságát tartjuk a legfontosabbnak, a terceké és más hangközöké nem érdekes annyira, a pitagoraszi hangolás a legjobb. Azonban itt is szükség van az egyik kvint beszűkítésére ahhoz, hogy a kvintkör bezáruljon => egyetlen kvint küszöböli ki a pitagoraszi kommát, a többi tiszta marad.

Emlékeztetőül: A korábbi rendszerek egyike sem teszi lehetővé azt, hogy minden hangnemben elfogadhatóan játszhassunk. Ehhez a jóltemperált hangolások valamelyikére van szükség, amelyekben a pitagoraszi komma több részre lesz elosztva, így lehetővé téve a hangnemek használatát.

5.2.8. *Az egyenletes és a pitagoraszi hangolás összehasonlítása Lissajous-módra*

Középiskolai fizika tanulmányokból ismert (lehet), hogy ha két egymásra merőleges rezgés $\frac{f_1}{f_2}$ frekvenciaaránya racionális szám, akkor az eredő rezgés eredménye periodikusan zárt görbe. Minél "szebb" / "egyszerűbb" a frekvenciaarány (1:1, 1:2, 1:3, 2:3, 3:4, …), annál egyszerűbb ábrákat kapunk. Ezeket Lissajous görbéknek nevezzük.

Pitagoraszi nagy terc

Temperált nagy terc

5.11. ábra: Lissajous görbék a pitagoraszi és temperált nagy terc különbözőségének szemléltetésére.
/forrás: https://docplayer.hu/14515580-Pythagoraszi-hangkozok.html/

A korábbiak látványos, oszcilloszkóppal készített kísérleti ábrázolása látható az 5.11. ábrán a nagy terc $\left(\frac{f_1}{f_2} = \frac{5}{4}\right)$ esetére: A pitagoraszi hangolás Lissajous ábrája (tiszta és stabil) zárt hurok; az egyenletesé ("zajosabb", folyamatos lassú mozgásban lévő) nem záródó, a síkot besatírozó görbe. [6] Ez jól mutatja a tényt, miszerint a temperált hangközökben – a pitagoraszi hangolás tökéletesen tiszta hangközeivel szemben – a frekvenciaarány irracionális. A mechanika nyelvén ezek kváziperiodikus mozgásokat írnak le. Az ilyen mozgások fontosságával és fizikai jelentésével Meszéna Tamás doktori értekezése [7] foglalkozik.

Ilyen (és ezekhez hasonló) ábrákat (sok esetben az iskolai szertárban is megtalálható) oszcilloszkóppal a tanórákon is bemutathatunk (mozgás közben lényegesen látványosabb). Oszcilloszkóp hiányában a Lissajous görbék tiszta, álló kép formájában történő bemutatására szimulációk állnak rendelkezésünkre.[19] Végül talán kevésbé ismert, hogy a zongora (lézerrel vagy mobiltelefonos applikációval kiegészítve) mint kísérleti eszköz is alkalmas a hangközök Lissajous görbékkel történő vizuális megjelenítésére.[20]

A hangolástípusok témáját Pap János szavaival zárom:

„Az európai kultúra azért tudott közel 2600 év alatt ilyen magaslatokra jutni a zenében, mert Pythagoras felfedezését, hogy összefüggés van a geometriai méretek és arányok, valamint a hangmagasság között, rendszerré tudta szervezni."

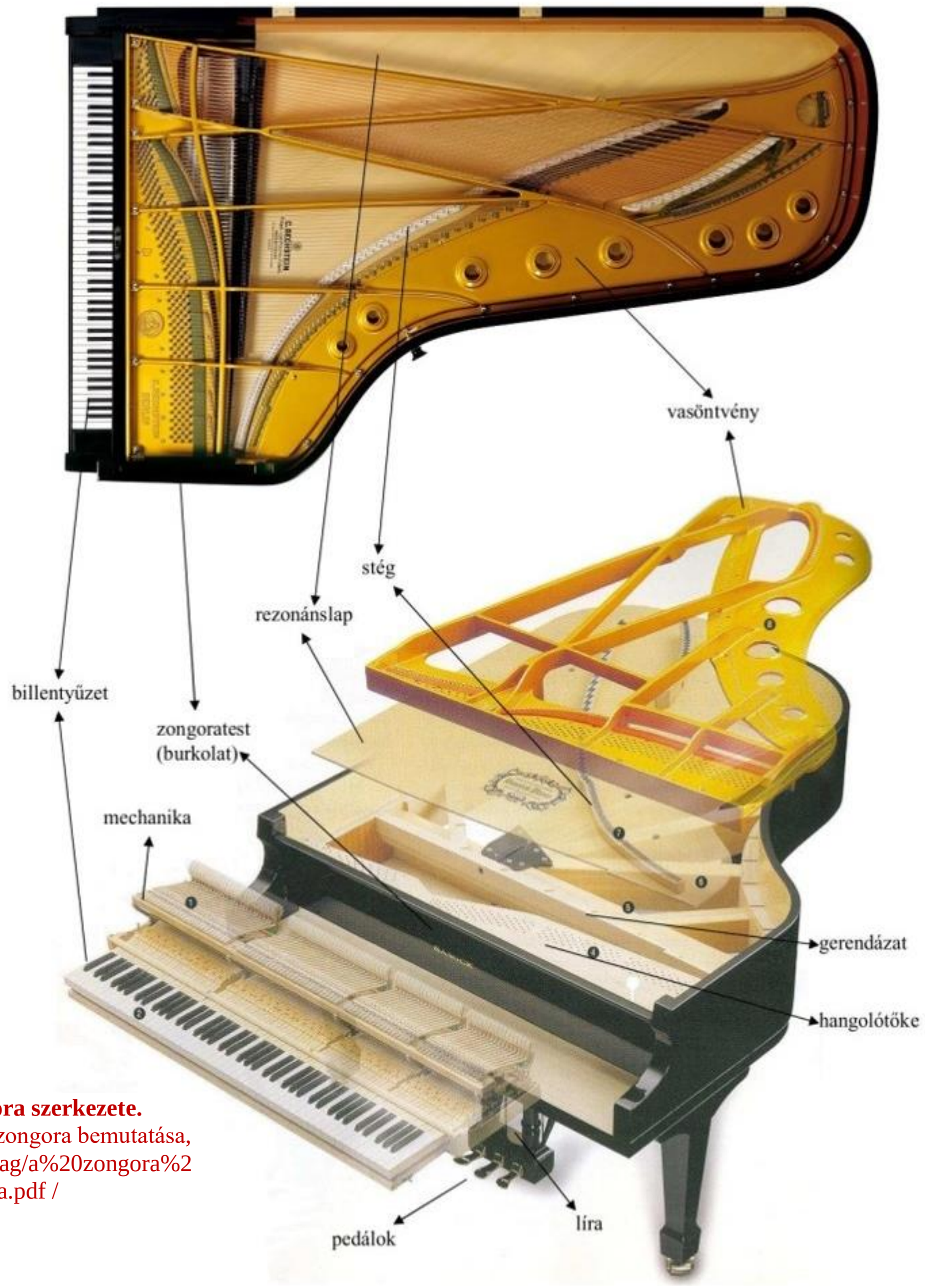
5.3. Az inharmonicitás (felhangeltolódás) – avagy a szükséges "rossz"

5.3.1. A zongora legfontosabb részei

A zongora számunkra (jelen részben tárgyalt jelenségköre szempontjából) legfontosabb részei (5.12. ábra): húrozat, vasöntvény és hangolótőke (amelyekhez a húrok végei feszítve vannak: tartást és merevítést biztosít), rezonánslap (felerősíti a zongora hangját, valamint ennek anyaga, formája, illetve elkészítésének módja adja a hang színezetét).

[19] Lissajous görbék bemutatása szimuláción:
https://vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?f=kv_lissajousovy_obrazce&l=hu
https://www.geogebra.org/m/dMgsYqwk

[20] Hangközök Lissajous görbékkel történő vizuális megjelenítése zongorán:
- lézerrel: https://www.youtube.com/watch?v=yOYVDm3Ymuk
- phyphox mobilalkalmazással: https://phyphox.org/news/lissajous-curves/



5.12. ábra: A zongora szerkezete.
/forrás: Asztalos Rita: A zongora bemutatása, http://szinti.uw.hu/tananyag/a%20zongora%20bemutatasa.pdf /

A hangolótőkében lévő (minden egyes – kb. 230 darab – húrhoz külön-külön tartozó) hangolószögekre helyezhető hangolókulcs (5.13. ábra) segítségével megfelelően szabályozható az egyes húrok feszessége és ezáltal azok hangmagassága. Érdekességképpen a vasöntvény mintegy ≈ 200.000 N feszítőerő megtartását biztosítja.

5.13. ábra: Hangolókulcs.
/forrás: https://pianovox.hu/pianovox-zongora-kepek-galeria//

5.3.2. *Inharmonicitással kapcsolatos összefüggések*

A „Bermuda-háromszögünk” harmadik alappillére az inharmonicitás (felhangeltolódás). Inharmonicitásnak nevezzük annak tényét, hogy a valóságban a felhangok frekvenciája kissé különbözik az alapfrekvencia egész számú többszöröseitől: minél rugalmatlanabb, merevebb a húr, annál nagyobb az eltérés [1],[8],[9],[10],[11],[12]. Ennek következményeképp újabb lebegések lépnek fel. Az inharmonicitás fontos a hangzás szempontjából: életet ad a hangnak, miközben a túlságosan zavaró hatásoktól a hangolók azért megpróbálnak megszabadulni.

A középiskolai tanulmányokból ismert és a fejezet elején (5.1.1. Alapfogalmak) már bemutattuk, hogy a mindkét végén rögzített húrban kialakuló állóhullám frekvenciafeltétele (és egyben a k-adik részhang frekvenciája): $f_k = k \cdot \frac{c}{2L}$ (k pozitív egész), ahol L – a rezgő húr hossza, c – a terjedési sebesség. Az alaphang (első részhang) frekvenciája $f_0 = \frac{c}{2L}$, a további részhangok (felhangok) frekvenciája ennek egész számú többszörösei.

A megfeszített (tökéletesen rugalmas / merevség nélküli) ideális húrban haladó transzverzális hullám terjedési sebessége: $c = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ (ahol ρ – a húr anyagának sűrűsége, F – a húrt feszítő erő, A – a húr keresztmetszete) [13].

A fentiek ismeretében egyszerű behelyettesítés után kapjuk az akusztikában *Taylor-Mersenne formula* néven ismert $f_0 = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ összefüggést. /Marin Mersenne (1588-1648), Brook Taylor (1685-1731)/

Eszerint az alaphang frekvenciája (hangmagasság) fordítottan arányos a húr L hosszával, egyenesen arányos a húrt feszítő F erő négyzetgyökével, valamint fordítottan arányos az anyagi minőségtől (ρ sűrűség) is függő $\mu = \frac{m}{L} = \rho A$ egységnyi hosszra jutó húrtömeg négyzetgyökével.

Megjegyzés – mérési lehetőségek:

I. A hang (gázokban való) terjedési sebességének iskolai keretek között történő mérésére többféle lehetőségünk is van. Többek között emelt szintű érettségi mérés: az ismert frekvenciájú hangvillával (egyik végén nyitott, másik végén zárt) megfelelő hosszúságúra beállított csőben megrezgetett levegő által állóhullám kelthető, amely kísérlet során az adott frekvenciájú hangra rezonáló levegőoszlop hosszának mérésével a hang levegőben való terjedési sebessége meghatározható[21]. Másik lehetőség lehet egy modernebb változatban okostelefonnal és az ahhoz tartozékként kapható (fülhallgatóval és mikrofonnal ellátott) headsettel (a számítógépes feldolgozáshoz Audacity programot használva) hangsebességet (és más érdekességeket, pl. felhangok frekvenciáit) mérni, amelyhez a részletes mérési leírást megtaláljuk Dr. Piláth Károly weboldalán[22]. További számos lehetőséget találhatunk még a mérésre (pl. Kundt-féle csővel[23]).

II. A fenti összefüggések kapcsán is végezhetünk iskolai méréseket a kötélen kialakuló állóhullámok vizsgálatával. Többek között a terjedési sebesség anyagi minőségtől való függésének részletes mérési leírását is megtalálhatjuk az ELTE Anyagfizikai Tanszékének weboldalán[24].

Ha a húr merevségét is figyelembe vesszük (aminek mérőszáma az E – Young-modulus), akkor felhangeltolódás (inharmonicitás) lép fel, azaz a részhangok frekvenciája kissé megnő (magasabban szól) az ideális $f_k = k \cdot f_0$ (k pozitív egész) értékhez képest. Ennek számszerű leírását az alábbi – a hangszerészek körében – *Benade-formula* [1],[10] néven ismert összefüggés [8],[9] adja meg:

- az n. felhang frekvenciája: $f_n = n \cdot f_0 \sqrt{1 + B \cdot n^2}$, ahol $B = \frac{\pi^3 \cdot E \cdot d^4}{64 \cdot F \cdot L^2}$

/Arthur H. Benade (1925-’87)/

f_0 – az ideális húrra számolt alaphang frekvenciája

B – a (mértékegység nélküli) elhangolódási (“rácsodálkozási”) tényező

E – (a húr) anyag(á)ra jellemző Young-modulus

d – a húr átmérője (körkeresztmetszetű húr esetén: $A = \frac{d^2 \pi}{4}$).

Hangsebesség mérése:
[21] Emelt szintű érettségi mérések (7. mérés): https://tovabbkepzes.itk.ppke.hu/content/Fizika/2016/01.pdf
[22] Piláth Károly weboldala (okostelefonnal): https://pilath.wordpress.com/hangsebesseg-merese/
[23] Kundt-féle csővel:
https://tetudod.bjg.hu/phocadownloadpap/fizika/9_evf/Hangsebess%C3%A9g_Kundt_cs%C5%91vel_Fizika_9.pdf

Rugalmas kötélen kialakuló állóhullámmal kapcsolatos mérések:
[24] http://metal.elte.hu/fiz_lab/uj/a_k/allohullam_kotelen_A.pdf

A képletben is megjelenő E – rugalmassági-/Young-modulus (anyagi minőségre jellemző) fizikai mennyiséggel a diákok a középiskolai tanulmányaik során a rugalmas megnyúlás témakörében a Hooke-törvény kapcsán már találkozhattak /Robert Hooke (1635-1703)/. Ugyanez a mennyiség érdekes, új szerepben fordul itt elő.

Megjegyzés: A fenti összefüggésnek a szakirodalomban számos változata megtalálható. A levezetések során különböző közelítéseket alkalmazva ezek legfeljebb konstans szorzóban térnek el egymástól. Kutatásaim alapján a fent ismertetett változattal találkoztam a legtöbbször (levezetett formában), így a későbbi számításaim során ezen alakjában fogom használni.

5.3.3. Következmények az inharmonicitás fokozásával kapcsolatban

- nagyobb sorszámú felhangok frekvenciája egyre jobban eltér (n^2-es tag)
- kevésbé megfeszített / alacsonyabb hangon szóló húrok ($f_0 \sim \sqrt{F}$) inharmonicitása nagyobb ($B \sim 1/F$)
- ha a húrvastagságot növeljük, egyre drasztikusabb az eltolódás mértéke (B$\sim d^4$)

Van, ahol mégis a vastagabb húr bizonyul hasznosnak!

Hiszen ki látott már 6 méteres zongorát?

5.14. ábra: Kereszthúrozás.
/forrás: https://zongora.info/termek/bosendorfer-zongora-3//

A zongoránál alapvetően probléma, hogy a mély hangokhoz túl hosszú húr kellene ($f \sim 1/L$), de egy zongora kialakításának komoly méretkorlátai is vannak. Ezen problémára a rövidebb, de vastagabb (ezáltal nagyobb tömegű és merevebbé váló) húrok jelentik a megoldást ($f \sim \sqrt{1/A}$), ekkor azonban nő az inharmonicitás mértéke, amely lényeges lesz az „összelebegések” szempontjából is. A különböző hosszúságú zongorák felhangeltolódásának mértéke (és ezzel felhangrendszere is) különböző, így egy két-zongorás darab két esetlegesen különböző zongorájának összehangolása különösen bonyolult.

Ennek egyik gyakorlati “megoldása” (a probléma mértékének csökkentése) a kereszthúrozás (5.14. ábra), amely hosszabb húrokat bír el, ráadásul a zongoratest rezonanciája is jobban működik.

Egy hangoló számára az “ideális” felhangeltolódás megtalálása (beállítása) komoly feladat. Ettől lehet egy hangszer jobb vagy rosszabb minőségű, mindamellett ez adja meg a hangszer “ízét” és egyben befolyásolja annak hangszínét is: mely felhangok milyen intenzitással vannak jelen (lágyabb, melegebb vagy éppen keményebb, élesebb). Ez az, amitől nem lesz “túlzottan steril” a hangzás, miközben a felesleges “zavaroktól” mentesül.

5.3.4. *Az inharmonicitással kapcsolatos számítások és példák*

Számítsuk ki az $f_0 = 440$ Hz-es alapfrekvenciájú „egyvonalas a hang” (a') harmadik, illetve nyolcadik részhangjának inharmonicitás-mértékét különböző vastagságú acél húrok esetén! Milyen frekvenciájú lebegéseket okozhat ez a felhangeltolódás?

A számításokat összefoglaló 5.4. táblázatban található adatokat a valóságban is előforduló értékeknek megfelelően választottuk. Például az egyik legnépszerűbb *Steinway model B* zongora a' hangjának húrhossza éppen 41 cm; a zongorahúrok vastagsága 0,625 mm – 1,7 mm között mozog. (Utóbbi nem jelenti azt, hogy egy zongora adott hangmagasságú és hosszúságú húrjának vastagsága tetszőleges lehetne, lásd Taylor-Mersenne formula.)

A húr merevségét is figyelembe véve az inharmonicitás mértékének megállapításához az alábbi (korábban ismertetett) összefüggéseket használjuk:

Taylor-Mersenne formula: $f_0 = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$, ahol $A = \frac{d^2\pi}{4}$ $\rightarrow$ $F = \pi d^2 L^2 f_0^2 \rho$

Benade-formula: $f_n = n \cdot f_0\sqrt{1 + B \cdot n^2}$, ahol $B = \frac{\pi^3 \cdot E \cdot d^4}{64 \cdot F \cdot L^2}$

A feladat feltételeinek megfelelő, szemléltetésképp különböző húrvastagságok mellett számított inharmonicitás okozta lebegések tiszta és egyenletes hangolás esetén:

acél	E $[N/m^2]$	$2{,}109 \cdot 10^{11}$		vékonyabb	**húr** – – – →	vastagabb
	ρ $[kg/m^3]$	7850	d $[m]$	$7{,}5 \cdot 10^{-4}$	$9{,}5 \cdot 10^{-4}$	$1{,}15 \cdot 10^{-3}$
	L $[m]$	0,41	F $[N]$	451,5	724,3	1061,4
a'	f_0 [Hz]	440	B [ ]	$4{,}260 \cdot 10^{-4}$	$6{,}835 \cdot 10^{-4}$	$1{,}002 \cdot 10^{-3}$
részhang sorszáma	$k = n$	**3**	f_n [Hz]	**1322,5**	**1324,1**	**1325,9**
3. részhang e'''	f_k [Hz] (tiszta)	1320	Δf_{tiszta} [Hz]	2,5	4,1*	5,9
	$f_{e'''i=19}$ [Hz] (egyenletes)	1318,5	$\Delta f_{egyenletes}$ [Hz]	**4,0**	**5,5**	**7,4**
részhang sorszáma	$k = n$	**8**	f_n [Hz]	**3567,7**	**3596,2**	**3631,1**
8. részhang a''''	f_k [Hz] (tiszta)	3520	$\Delta f_{tiszta} = \Delta f_{egyenletes}$ [Hz]	**47,7**	**76,2**	**111,1**
	$f_{a''''i=36}$ [Hz] (egyenletes)	3520,0				

5.4. Táblázat: Inharmonicitással kapcsolatos számítások adatai és eredményei.

*Az 5.4. táblázatban összefoglalt számolási eredmények alapján például az a' harmadik részhangjának ($f_{k=3} = 3 \cdot f_0 = 1320$ Hz) frekvenciája egy közepesen vastag húr esetén az inharmonicitás következtében 4,1 Hz-cel tolódik el. Ennek köszönhetően az a' harmadik részhangjának frekvenciája a felhangeltolódás következtében kissé megnövekedett ($f_n = n \cdot f_0\sqrt{1 + B \cdot n^2}$) értékével lebegést eredményezhet például a (19 félhanggal magasabban lévő) „háromvonalas e hang” (e''') alapfrekvenciájával (első részhangjával), amelynek értéke tiszta hangolás esetén éppen 1320 Hz, egyenletes hangolás esetén ettől kicsit eltér: ≈ 1318,5 Hz.

Megjegyzés: Ahhoz, hogy meg tudjuk mondani, az a' adott sorszámú részhangja mely alaphanggal képes összelebegni (Δf kicsi), megnézzük, körülbelül hány (az egyenletes hangolás során értelmezett) félhang (i) távolságra van a' alapfrekvenciájától annak k-adik részhangjának frekvenciája:

$$f_k \approx f_i, \text{ vagyis } k \cdot f_0 \approx f_0 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^i, \text{ amelyből } i = 12 \cdot \log_2 k\,.$$

- $k = 3$ (harmadik részhang) esetén $i \approx 19{,}02$ adódik, ekkor az a'-től 19 félhang távolságra lévő e''' alapfrekvenciájára $f_{i=19} = 440\text{ Hz} \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{19} \approx 1318{,}5$ Hz értéket kapjuk;

- $k = 8$ (nyolcadik részhang) esetén $i = 36 = 3 \cdot 12$, ez éppen a 3 oktávval (12 félhang = 1 oktáv) magasabban szóló a'''' alaphanggal való lebegést jelenti: $\mathrm{f_{k=8}} = \mathrm{f_{i=36}} = 3520$ Hz (ebben az esetben a tiszta és egyenletes hangolás között nincs különbség).

Az itt bemutatott példák során keletkező lebegések frekvenciáját az eltolódott részhang (f_n) és az egyenletes hangolás mellett megfelelő hangtávolságban lévő alaphang (első részhang) kicsiny frekvenciakülönbsége adja: $\Delta f_{lebegés} = f_n - f_i$.

Megjegyzés: Természetesen ez csak egyetlen (könnyen kikövetkeztethető) példa a létrejöhető lebegésekre, azonban különböző alaphangok különböző sorszámú (mégis egymáshoz közel eső frekvenciájú) részhangjai is okozhatnak hasonló lebegést (ahogyan azt már korábban is láthattuk).

Eredményeink is mutatják, hogy a húrvastagság avagy a részhang sorszámának növelésével az inharmonicitás mértéke drasztikusan nő. Akár olyan mértékben, hogy példánkban a nyolcadik részhang esetén létrejövő akár $\Delta\mathrm{f} \approx 50 - 100$ Hz körüli érték már különbségi hangnak – két hang különbségének – minősül, amely gyors változása miatt az emberi fül számára már lebegésként nem érzékelhető, azonban többnyire disszonáns, zeneileg nem oda illő érzetet kelt.

Hasonló értékek adódnak akár hosszabb, vagy akár rézből készült húr esetére is. Az eredményekből levonható következtetések nem különböznek. A réz anyagára jellemző adatok: $E_{réz} = 1{,}25 \cdot 10^{11}\ N/m^2$, $\rho_{réz} = 8960\ kg/m^3$.

Láthatjuk azt is, miért ilyen fontos a hangszerész számára a felhangeltolódás ténye, hiszen a számítások alapján az inharmonicitás következtében létrejövő lebegések $\Delta\mathrm{f}$ frekvenciája lényegesen nagyobb a tiszta hangközök és egyenletes hangolás során már elemzett frekvencia-különbségekből eredő lebegéseknél.

5.4. Összefoglalás

Egy zongorahangoló feladata lényegében „mission impossible” (lehetetlen küldetés). Ugyanis (ahogy a fejezet elején említettem és) amint láthattuk, a hangolás alappilléreit (a „Bermuda-háromszög” csúcsait) képező tisztaság – kiegyenlített hangolás – és inharmonicitás némiképp „egymás ellen” dolgoznak. Ha a skála bizonyos hangközei tökéletesen tiszták (cserébe más hangközök biztosan nem – lásd a pitagoraszi komma esetét), nem lehet bármely hangnemben játszani. Ha a hangnemek közötti transzponálás könnyedén biztosított (lásd az egyenletes temperatúra esetét), akkor a hangközök nem lesznek sehol sem tökéletesen tiszták. Ezenkívül mivel a felhangrendszerek „összefüggnek" (a különböző alaphangok közel azonos frekvenciájú részhangjai „találkoznak"), „zavaró" lebegések lépnek fel, amelyet az inharmonicitás ténye csak fokoz; miközben, ha lehetséges is lenne ezen lebegések teljes megszüntetése, akkor eltűnnének a hangnemek karakterisztikái és ezzel a hangszert jellemző apró finomságok is. Elveszne a hangzás „íze", sajátossága. Ezeket a fizikai feltételeket és emberi igényeket próbálja a hangszerész megfelelően harmonizálni.

„A zongorahangolás a kompromisszumok művészete, de a kompromisszum nem megalkuvás!"
(Lendvai Tamás) [1]

Fizikatanárként ezen téma tárgyalása során az volt a fő motivációm, hogy elég meglepő módon 12 évig zenéltem egy zenész családban nevelkedve anélkül, hogy valaha is szolfézs órára jártam volna. Ennek okán tökéletesen át tudtam érezni a diákok azon problémáját, hogy bizony nehéz az irodalmakat nyomon követni a hemzsegő szakkifejezésektől. (Iskolai keretek között akár az ének tanárral is konzultálva – az ének- és fizika tananyagot összehangolva – ugyanez a jelenségkör még színesebbé, a diákok számára még érthetőbbé tehető.)

Diákjaimmal szerettük volna megérteni hogyan/miért úgy működik ahogy, miért ezt (vagy azt) találjuk „szép"-nek, hogyan alakultak ki a különböző hangsorok, hangnemek. Ahogy sorra kaptunk válaszokat a kérdéseinkre, úgy merültek fel újabb megválaszolatlan kérdések. Volt benne valami rendkívülien szép, miközben egyre bonyolultabbá vált a látkép, míg végül kaptunk valami tiszta, emészthető egységet. Legalábbis erre törekedtük.

A témának a fejezetben tárgyalt feldolgozása egy több hetes / hónapos projektmunka keretén belül zajlott ugyan, de amint azt korábban is említettem, véleményem szerint alkalmas lehet a hétköznapi alapórai tanításba is bevinni, ha van rá igény és érdeklődés mind a szaktanár, mind a diákok részéről. Hogy ezt pontosan milyen formában, milyen szakmai mélységig, óraterjedelemben, csak elméleti és/vagy gyakorlati megközelítéssel tesszük, az abszolút rajtunk és a hallgatóság érdeklődésén (valamint részben eszköz- és időbeli lehetőségeinken) múlik.

Lehet ezen témákat (vagy egy részüket) csak megemlíteni, néhány érdekességet kiemelni szakszerű levezetések / magyarázatok nélkül is akár egy fél szakóra keretében. Figyeljünk azért arra, hogy a megfelelő részekhez kapcsolódó alapvető háttértudás már meglegyen; javaslom mindenképpen a hangtan megfelelő részei után érdekességképp megemlíteni; valamint sokat segít a kronológiai átgondoltság, mit mi után tervezünk kiegészítésképp ismertetni. Avagy lényegesen részletesebben egy egy-másfél órás előadás keretében: előzetesen kivetítésre alkalmas előadásanyagot készítve lényegesen gyorsabb és közérthetőbb tud lenni, ábrákkal, fotókkal, zenei bejátszásokkal, videókkal kiegészítve. Azonban ha a diákok önálló érdeklődését szeretnénk kihasználni, akkor a megfelelő alapfogalmak (frekvencia, hullámhossz, terjedési sebesség, állóhullámok, lebegés, (tiszta) zenei hang, hangerősség, hangmagasság, hangszín, felhangok stb.) ismertetése után kulcsszavakat (hangsor/skála, hangnem, hangköz, transzponálás, konszonáns/disszonáns, hangolás, diatonikus, kromatikus, egyenletesen temperált / kiegyenlített, pitagoraszi hangolás és -komma, farkaskvint, inharmonicitás / felhangeltolódás) megadva projektmunka keretében egészen változatos és akár meglepő információkkal egészíthetik még ki diákjaink önállóan is az addigi elképzeléseinket. Az érdeklődők a (bármely szinten történő akár tanár-, akár diákelőadás során) közzétett anyagok birtokában továbbgondolhatják, utánanézhetnek részletesebben is.

Az általam vezetett projektmunka keretében a folyamatos visszajelzéseket lesve talán megtaláltam ezen témakörnek a (saját) diákjaim általi befogadóképességét. Megalkottuk (végül közösen) a témának egy olyan felépítését, amely összhangot teremt az előzetes tanulmányai(n)k, kutatásu(n)k, előadások és konzultációk során kapott rengeteg információ között. Némi előzetes alap fizikai háttértudás ismertetését követően kronológiai sorrendben végig haladtunk a hangolás történetén, ami rengeteg érdekességet tartogatott. A témában rejlő további „szépségek” felfedezése, értelmezése, és a tudományok különböző területeivel történő összefonódása lényegében kimeríthetetlen.

„…hogy a zenében mi szép, csakis azon múlik, hogy mi mit fogadunk el szépnek. Tudom, ezt nehéz elfogadni, míg élvezettel hallgatjuk a zenét, de azt gondolom, hogy a zenében az egyszerűség és komplexitás kontrasztját szeretjük. Ha túl egyszerű, előbb-utóbb unalmassá válik. Ha túl komplex, idegenszerűnek érezzük. Amikor egy szonáta ugyanazt a témát különböző skálákon mutatja be, és azokat éppen csak észrevehető módon fűzi össze, akkor örömet okoz, hogy a kapcsolatok felfogása érdekében oda kell figyelnünk. A zene olyan játék, ami az emberi megismerés folyamatát példázza.” (Teller Ede) [14]

Ez a fejezet tartalmazza az 5. tézis háttéranyagát.

Hivatkozások

1. Lendvai Tamás: Fókuszban a zongora (zongora és csembaló hangszerismeret), Budapest, 2021

2. Pap János: A hangszerakusztika alapjai, Liszt Ferenc Zeneművészeti Főiskola Hangszerészképző Iskola, Budapest, 1994

3. Pap János: A zenei akusztika alapjai, Liszt Ferenc Zeneművészeti Főiskola Debreceni Konzervatóriuma, Debrecen, 1992

4. Tarnóczy Tamás: Zenei akusztika, Zeneműkiadó Budapest, 1982

5. James Jeans: Zene és természettudomány (ford. Szabolcsi Bence), Franklin Társulat, Budapest, 1941

6. Muzsai István: Aranymetszés és pythagoraszi zenei hangközök, MOME Budapest, 2010, https://docplayer.hu/14515580-Pythagoraszi-hangkozok.html

7. Meszéna Tamás: Nemlineáris jelenségek tanítása a középiskolában, ELTE TTK Fizika Doktori Iskola Fizika Tanítása Doktori Program, Budapest, 2021 http://fiztan.phd.elte.hu/kozkincs/doktorik/ertekezesek/meszena.pdf

8. Fiala Péter: A hangszerek fizikája, jegyzet, BME VIK, 2015, 55-59.o. https://last.hit.bme.hu/sites/default/files/documents/hangfiz.pdf

9. H. Fletcher, E. D. Blackham, R. Stratton: Quality of piano tones, J. Acoust. Soc. Am. 34, 1962, 749-761, DOI: 10.1121/1.1918192

10. Arthur H. Benade: Fundamentals of musical acoustics, Oxford University Press, New York, 1976

11. W. Trow Goddard: A handbook on the strings of the pianoforte and other keyboard instrument with design formulae Cleveland, England, 1985

12. Ulrich Laible: Fachkunde Klavierbau, Verlag Erwin Bochinsky, Frankfurt am Main, 1993 Ulrich Vornehm: Formelsammlung Klavierbau, Stuttgart, 1994

13. Tasnádi Péter, Skrapits Lajos, Bérces György, Litz József: Mechanika II., Hőtan, Dialóg Campus Kiadó, Pécs - Budapest, 2001

14. Fizikusok és a zene: https://www.momus.hu/article.php?artid=4384

6. FIZIKATÁBORI PROJEKTJEIM pedagógiai- és szakmai munkatervezete

Röviden összefoglalom a Berzsenyi Dániel Gimnázium fizikatáborának felépítését, amely hátteret biztosított a nagyjából egy évtized alatt összegyűlt, diákokkal megvalósított projektjeimnek. Tapasztalataimból építkezve az általam kidolgozott módszer alkalmasnak bizonyul nagyobb projektmunkák (sok apró részletére kiterjedő) lebonyolítására, amelyet bárki szabadon felhasználhat hasonló diákfeladatokhoz.

Meg kell említenem, hogy a tehetséggondozás eme formájában történő alapgondolatának, az említett projektmunkára épülő fizikatábor[25] megálmodója Dr. Baranyai Klára munkaközösség-vezető, aki doktori munkájának 6. fejezetében [1] és 7. tézispontjában [2] ezen tábor felépítéséről, programjainak részleteiről, valamint a projektmunkára épülő fizika önképzőkör és tábor mint két különböző munkaforma ötvözetéről részletesen beszámol, hangsúlyozva, hogy ezen tézisben nem célja ezen projekt típusú munkaforma részletes pedagógiai elemzése. Ebben a fejezetben a cél éppen ennek igen részletes kifejtése, amellyel segítséget kívánok nyújtani a kollégáknak nem csak egy általánosságban értelmezett projektmunka kivitelezéséhez, hanem bemutatni egy több hónapos előzetes munkát igénylő, kifejezetten a fizika szakhoz szorosan kötődő, abban specifikusan megjelenő módszertanokat (kutatás, kísérletezés, mérés, kiértékelés stb.) is tartalmazó munkatervezet teljes körű folyamatát.

A tábor mai változatának kialakulásához a teljes fizika munkaközösség sok éves tapasztalata nagyban hozzájárult. A főszervező munkaközösség-vezetőn kívül az egyetlen vagyok, aki az eddig eltelt évek minden egyes (immáron 12 év alatt 10 alkalommal megrendezett) táborának szervezésében és lebonyolításában is részt vettem. A tevékenység egy nem elhanyagolható hátterét képezi a projektmunka keretét adó tábor jellege, így erről is szót kell ejtenem, de a fő irányvonalat mégis az általam vezetett projektmunkák teljes folyamatára kiterjedő személyes pedagógiai és szaktanári tapasztalataim adják. Lehetőséget mutatok, hogyan lehet egy nagyon motiváló és hosszútávon is kamatoztatható tudást és élményt adó, szinte a teljes tanévet felölelő programot véghez vinni.

[25] https://sites.google.com/berzsenyi.hu/bdgfizikatabor

Egy projekt három fő részből áll. Egy hosszabb előzetes felkészülésből: ötletelés, témaválasztás, időbeosztás-készítés, kutatás, anyaggyűjtés, megértés, számolás, mérés, kivitelezés, eszközök/programok/bemutatók elkészítése, előadásra való felkészülés; majd a projektek nagyközönség előtti bemutatásából; végül az értékelés-összefoglalás folyamatából. Mindhárom folyamathoz szabadon és a saját csoportunkhoz illeszkedően könnyedén átalakítható, előre elkészített anyagokat osztok meg: időbeosztási táblázat, technikai információk: „prezentációkészítés szabályai”, „hogyan építsünk fel és tartsunk előadást”, értékelő lapok stb.

6.1. Eddigi fizikatábori projektjeim

Az alábbi 6.1. táblázatban található néhány eddigi fizikatábori projektem témája, (ajánlott) korosztály-megjelöléssel, valamint az elkészült diákanyagokkal, néhány esetben forrásmegjelöléssel a korábbi évek során elkészített tábori munkáimból:

FIZIKATÁBORI PROJEKTJEIM TÉMÁJA	ÉVFOLYAM (KÉSZÍTÉS ÉVE)	ELKÉSZÜLT DIÁKANYAGOK	FORRÁSOK
Elektromágneses eszközök	9. (2022)	https://docs.google.com/presentation/d/1yzsxiURbkYO-O9_BXoQPXc4rH6myypbP/edit?rtpof=true&sd=true	https://www.youtube.com/watch?v=0_8Xhzt5YQI
*Hídfizika	10. (2018)	https://docs.google.com/presentation/d/1hT5MKyoLdHr-feh46T7K7jM_Wr1diUl-/edit?usp=sharing&ouid=106151604723017675706&rtpof=true&sd=true	Y. S. Petrov: Suspending Belief (Name the shape of that incredible curve) Quantum: The Student Magazine of Math and Science, 1993. Jul/Aug., 28.o. (At the Blackboard)
Aero- és hidrodinamika	9. (2017)	https://docs.google.com/presentation/d/1N_6iVVy6Gy8EAILyk7JzEayPLtv4qDnc/edit?rtpof=true&sd=true	
*Hangolástan	10. (2016)	https://drive.google.com/file/d/1S7-OcoVIUA0j1mLQh3NFuMWUhDAHKX-U/view	Lendvai Tamás: Fókuszban a zongora (zongora és csembaló hangszerismeret), Budapest, 2021

Versenyfeladatok szimulációja FIZIKA programmal	9. (2015)	https://drive.google.com/drive/folders/1KMNLvKO9SNfXYv_3Yc-4UjbeIOTYhFtM	http://fizikaapp.com/
*Pendulumhullám	8. és 12. (2014)	https://www.berzsenyi.hu/Lendvai/Pendulumhullam/Pendulumhullam.html	
Héron eszközök	7. (2013)	https://drive.google.com/file/d/1Vnw3EgF7RtWQfm-5yzJjqDMpvNNuEr1i/view	
Konyhafizika	11. (2012)	https://drive.google.com/file/d/195nC6G1zHBxBNfgm0CYE9N0n7F-Ng2I1/view	
Olimpiai rekordok	10. (2011)	https://drive.google.com/file/d/12ZyHjCb_E-umcu413P1XTYSFT1ZN5Qa8/view	Horváth Gábor, Juhász András, Tasnádi Péter: Mindennapok fizikája. ELTE TTK Hallgatói Alapítvány, 1989
Vitorlázás fizikája	10. (2011)	https://drive.google.com/file/d/1y8YcMXW4NZnJPdq77iD8WAw6bf6WrYBW/view	

6.1. Táblázat: Fizikatábori projektjeim listája.
(*-gal a korábbi fejezetekben már részletesen kifejtett témák vannak megjelölve)

A felsorolt témák egy részével a korábbi fejezetrészekben már részletesen találkozhattunk (a 6.1. táblázatban *-gal jelölve), a többi témáról itt rövid áttekintést adok.

6.1.1. Elektromágneses eszközök

A 9. évfolyamos matematika tagozatosokkal nagy érdeklődésükre való tekintettel saját kérésükre foglalkoztunk ezzel a témával annak tudatában, hogy a COVID időszak miatt a nyolcadikos tananyagból éppen ezt a témakört „kellett” kihagynunk. Jó példa ez arra, hogy így is lehet: teljesen új, számukra idegen témát feldolgozni. Ez azt is jelentette, hogy a mágnesesség elméleti alapjait (az elektromosságtanban tanultakra építve) is át kellett venni velük. Az alapgondolat az internetes videókon (link a 6.1. táblázatban található) is megtalálható Thor pörölyének (a Marvel-sorozatbeli képregényhős fegyverének) megépítése volt, amelyet egy beépített elektromágnes felhasználásával csak az áramkör – speciálisan ujjlenyomat-olvasóval történő – megszakításával lehetett fémfelületről felemelni (a sorozatban a pörölyt csak az arra méltó személy képes felemelni). A Thor projektből kiindulva további elektromágneses eszközöket kerestünk. Építettünk még különféle homopoláris motorokat; guruló „mágneses vasutat”; kollégák jószándékú előzetes figyelmeztetése ellenére próbáltunk levitront (lebegő játék) készíteni (kevés sikerrel); kísérletileg méréssel és számítással is alátámasztva vizsgáltuk mágneses dipólusok közötti erőhatásokat (ennek matematikai levezetésének megértése ezen korosztály számára nem egyszerű, de nem lehetetlen például az elektromos dipólusokra alkalmazott analógia felhasználásával [3]); patkómágnes belsejébe megfelelően helyezett áramjárta izzó dróton állóhullámokat mutattunk be (ennek sikeres bemutatása komoly kísérletezői feladat [4]). Minden kísérlet bemutatása során nagy hangsúlyt fektettünk arra, hogy a saját szintjükön a bemutató elején elhangzó előzetes (általános) elméleti összefoglalóban elhangzottakra építve magyarázatot is adjanak a látottakra.

6.1.2. *Aero- és hidrodinamika*

Vizsgáltuk a testek körüli lég- és folyadékáramlást; szélcsatornát építettünk az áramlási képek bemutatására (3. fejezet); a Pohl-féle áramlási készülék mintájára ahhoz hasonló eszközt (részben színezett, nagy viszkozitású, szilikon csövekbe fúrt lyukakon át beáramló folyadékkal működtetett, felül nyitott, kis emelkedésű áramlási tálat) terveztünk a folyadékokban kialakuló áramlási képek szemléltetésére; mértünk közegellenállási tényezőt; foglalkoztunk repülőgépekre ható felhajtóerővel; versenyautókra ható leszorító erővel; valamint előkerült a Magnus effektus elméleti- és kísérleti bemutatása is.

6.1.3. *Versenyfeladatok szimulálása FIZIKA programmal*

A FIZIKA nevű szimulációs program használatának rövid ismertetése mellett annak segítségével elkészítettük különböző ismert számolási feladatok (Moór Ágnes Középiskolai fizikapéldatár, Mikola versenyfeladatok, Galilei-lejtő stb.) szimulációval történő demonstrálását, valamint a programmal elvégeztük a végeredmények számszerű igazolását is. Minden feladat megoldását elsőként a szokásos levezetés módszerével ismertettük, majd bemutattuk a hozzájuk készített programokat. Sokszor a mozgásokat jellemző grafikonok programban való elkészítésével további elemzéseket is végeztünk. A program kisebbeknek is való kreatív formában történő (kvalitatív és kvantitatív vizsgálatokra egyaránt alkalmas) használata a 7-8. évfolyamosok csoportos méréseként egy későbbi fizikatáborban is helyet kapott.

6.1.4. *Héron-eszközök*

A hetedik évfolyamosokkal Héron életének, munkásságának és jó néhány találmányának bemutatása mellett megépítettük néhány ismert, hidrosztatikai elveken működő eszközét (6.1. ábra): Héron szökőkútját, Héron borautomatáját (hárompalackos, kétféle folyadékot szolgáltatni képes változatban) és Héron automata szentélyajtó-nyitószerkezetét (a teljes szentély és környezetének kisméretű makettként történő megépítésével). Az eszközök elkészítésének fontos szempontja és tanulsága volt, hogyan lehet szép, maradandó, igényes eszközöket készíteni, amelyek még éveken át szolgálatot tettek a fizikaszertárban más osztályokban történő demonstrációs eszközként. Ezen kívül természetesen itt is lényeges szerepet kapott a fizikai törvények aktuális eszközök működése során fellépő értelmezésére, valamint a részletes jelenség-magyarázatok egyszerűsített ábrák segítségével történő szakmailag helyes ismertetésére. Amennyiben a projekt bemutatása a tanév második felére esik, a témakör abszolút egybe tud esni a hetedik évfolyamosok aktuális alapórai tanulmányaival.

6.1. ábra: Héron-eszközök. (Fizikatábor 2013)
balra fent: szentélyajtó-nyitó balra lent: borautomata
jobbra fent: szökőkút és szentélyajtó-nyitó
középen- és jobbra lent: szökőkút

6.1.5. *Konyhafizika*

Foglalkoztunk különböző sűrűségű folyadékok egymásra rétegzésével, valamint rétegzett koktélokban úszó koktéldíszekkel (6.2. ábrán balra), amelyhez kapcsolódóan erőegyensúlyi feltételeket vizsgáló számolási feladatokat is megoldottunk; a kuktafazék (Papin-fazék) működésével, amelyben nyomással kapcsolatos egyszerű mérést és számítást is végeztünk; megvizsgáltuk a sörös dobozok vízben való úszásának okait és feltételét; meghatároztuk egy régi típusú merülőforraló hasznos teljesítményét; vizsgáltuk egy trükkös (6.2. ábrán jobbra: önmagában – teli borosüveg nélkül – nem stabil) bortartó egyensúlyi feltételét; valamint kísérleteket végeztünk régi (már nem használt) mikrohullámú sütővel.

6.2. ábra: Konyhafizika (Fizikatábor 2012).
balra: rétegzett folyadékban (koktél) úszó tárgyak (koktéldíszek), jobbra: trükkös bortartó

6.1.6. *Olimpiai rekordok és Vitorlázás fizikája*

Lényegében Horváth Gábor, Juhász András, Tasnádi Péter: Mindennapok fizikája című könyvének megfelelő fejezeteit dolgoztuk fel. Az Olimpiai rekordok témában a különböző sportágak (úszás, futás, magas- és távolugrás stb.) technikai kivitelezése mellett – ahol előfordul – azok versenyhelyzetben történő időmérésével kapcsolatos túlzott pontosságának létjogosultságát vizsgáltuk: Van-e értelme pontosabban mérni? Mi mennyire befolyásol (közegellenállás, sűrűség, hőmérséklet stb.)? Összemérhetők-e az eredmények évről évre ilyen pontossággal?; kiegészítve a saját kutatásaink során talált adatokkal, elemzésekkel, példákkal. A vitorlázással kapcsolatos alapvető fogalmak tisztázása után a hangsúly a vitorláshajók irányítására került: a hajótest kívánt haladási irányát figyelembe véve a vitorla különböző szélirányok melletti „használatával" (állása/dőlése, felületének mérete stb.) elérhető legnagyobb sebességének feltételeit és lehetőségeit vizsgáltuk. Vizsgálódásaink abszolút hasznosak a gyakorlatban történő vitorlázás (sőt akár repülés) során is.

6.2. A fizikatáborról röviden

A Berzsenyi Dániel Gimnázium fizika munkaközössége által 2011 óta megrendezésre kerülő fizikatáborában [#4] az iskola körülbelül 40-50 tanulója (osztályonként 4-8 fő) vesz részt. A 13-18 éves tanulók meghívásos alapon juthatnak be a négy napos táborba, amely komoly előzetes munkát és felkészülést igényel. A szaktanárok válogatják be a diákokat az addigi teljesítményük alapján, főként a fizika, matematika és biológia-kémia tagozatokról (az iskolában humán és nyelvi tagozatok működnek még). A korosztálybeli és tagozatspecifikus változatosság az összes szakmai programtervezés szempontjából erős odafigyelést igényel. Az előzetes felkészítés során szaktanári irányítás mellett 3-6 fős csoportokban egy-egy projekten dolgoznak. A munkafolyamat végén ezeket a diákok a táborban mutatják be egymásnak egy körülbelül csapatonként 30 perces bemutató során. A tábor helyszíne legtöbbször egy előadótermekkel/tantermekkel felszerelt erdei iskola.

A tábort a bemutatott projektmunkákon kívül egyéb programok is tarkítják: vegyes korcsoportos (táborfoglaló) feladatmegoldó csapatverseny; szaktanárok által vezetett csoportfoglalkozások (többségében évfolyamonkénti bontásban mérési feladat, amely túlmutat az alapórákon tanultakon); meghívott előadók (kísérleti bemutató, fizikatörténet, szakmai érdekességek különböző témákban); utolsó napi kreatív vetélkedő az egykori – már elballagott – diákjaink szervezésében (tésztahíd építése és teherbírása, papírrepülő reptetése, tutaj építése meghatározott kellékekből, LEGO labirintus tükrökkel és lézerrel stb.); az egész tábor ideje alatt megoldhatók szorgalmi, úgynevezett „túrórudi feladatok", amelyek helyes megfejtéséért a diákok túrórudit kaphatnak (feladatlap kihívást jelentő, többségében számolási feladatokkal; avagy egy eszköz kipróbálása, majd működésének megfejtése); éjszakai csillagvizsgálás; rövid túrázás; stb. A tábor végén elsőként a tanárok egymás közt, majd a táborban részt vevő összes diákkal közösen is értékeljük a bemutatókat, a tartott csoportfoglalkozásokat. Lezárásként ezen értékelések tükrében, valamint a projektbemutatókról esetlegesen készült videóanyag megtekintésével a tábort követő héten a csoportok külön-külön, a vezető tanárukkal is értékelik a csoport több hetes közös munkáját.

6.3. A projektmunka folyamata

A tanulóknak egy közösen kiválasztott fizikai téma keretében kell kisebb csoportokban dolgozniuk. A projektnek nincsen előre kötött formája. Lehet ez egy adott témában egy vagy több kísérlet, kísérleti eszköz építése, mérés és a hozzá kapcsolódó kiértékelés bemutatása, számítógépes szimuláció vagy mérőprogram használata, illetve akár elkészítése is, történeti háttérrel, a hozzá kapcsolódó szűkebb témakör elméleti tanulmányozásával, levezetések és számítások bemutatásával egybe kötve. A diákok a szaktanárral együtt találják ki a témát, amin részben önállóan, illetve a projekt nehézségétől, bonyolultságától és életkori sajátosságoktól függően megfelelő mértékű tanári segítséggel munkálkodnak a tábort megelőző félévben (néhány hétben vagy akár hónapban).

Előzetes felkészülés

Témaválasztás

Témaötletet adhat egy idegennyelvű cikk vagy versenyfeladat [5], internetes videó, de születhet akár a diákoktól is egyéb érdeklődés ihletése nyomán. Nagyon fontos az életkori sajátosságok figyelembevétele, a fizika- és matematika tudásszintjüknek megfelelő témaválasztás, valamint lehetőség szerint tartalmazzon a kisebbek számára is megérthető vagy legalább látványos elemeket, a nagyobbak számára újdonságokat és érdekességeket, hosszútávon töprengeni valót: legyen kihívásokkal teli, de nem lehetetlenül nehéz. A táborozók vegyes korosztálya és eltérő tudásszintje valamilyen formában nehezíti a témák kiválasztását, de nem is cél és nem is elvárható, hogy a kisebbek is mindent megértsenek a nagyobbak előadásaiból, mégis tapasztalat szerint hosszútávon is sokat kamatoztatható, amit ezen előadások meghallgatása által kapnak. Sokszor évekkel később is emlegetik, felismerik, visszaemlékeznek, már a megfelelő tudás birtokában utánajárnak egy-egy témából megmaradt jelenségnek, kísérletnek, elméletnek vagy számításnak.

Többször előfordult már olyan projekt is, ahol a kisebbek és nagyobbak együtt dolgoztak a választott projekten (pl. 1. fejezet). A tapasztalatok alapján azonban a nehézségek mellett jóval több haszonnal is jár az ilyesfajta szerveződés. Kicsik és nagyok egy projekten munkálkodva, vagy akár csak a táborban beszélgetve, csapatokban dolgozva segítik, tanítják egymást, fejlesztik képességeiket. A legtöbb esetben nem csak a kisebbek tanulnak a nagyobbaktól! A tábor hozománya igen sokrétű lehet.

Időbeosztás

Az időbeosztás és heti óraszám teljesen fakultatív lehet és a tanév során változhat is, de fontos a rendszeres és folyamatos konzultáció. Az órarendektől, téma nehézségétől, gyerekek „ügyességétől", motiváltságától, korábbi projekttapasztalataitól, életkori sajátosságaitól függően szükségszerűen kialakul. Mi többségében heti 1-3 alkalommal találkozunk közösen iskolai tanítás után 1-4 órákra (rendszerint a projekt elején kevesebbet, a vége felé pedig sűrűbben), de ezt lehet konkretizálni is állandó szakköri időpontként. Ezen felül sokszor iskolaidő után a szertárban, hétvégente egymásnál önállóan is dolgoznak a diákok, azonban ezen önálló munkákhoz megfelelő instrukciókra és ellátandó feladatokra van szükségük, úgymond háttérirányításra. Ugyan a „rutinos" fizikatáborozók egyre kevesebb (vagy másfajta) segítséget igényelnek, mégis mindehhez elengedhetetlen a szaktanár és a diákok elköteleződése és kompromisszumkészsége is, de elég nagy a mozgástér abban, hogy milyen mélységű és minőségű projektek születnek a folyamat végén. Az elvégzendő munkálatokat részfolyamatokra bontjuk, egyéni időbeosztási tervezetet készítünk. Ennek megfelelően kell a feladatokat időben elvégezni (ne essünk pánikba, mindig van csúszás). A tanári segítség itt abban rejlik, hogy a tanár összeállítja a munkafolyamatok reális, egyenletes felosztását, figyelembe veszi az iskolai egyéb elfoglaltságokat, valamint tekintettel arra, hogy nem mindenki vesz részt minden munkafolyamatban, így feltétlenül szükséges a személyre szabott munkabeosztások elkészítése is. Mivel sokszor könnyebb csapatban dolgozni, érdemes 2-3 fős munkacsoportokat is kialakítani az egyes ellátandó feladatkörökhöz.

Célok

- önálló- és csoportmunka készségének elsajátítása, felelősségvállalás
- saját időbeosztás (elkészítése tanári segítséggel)
- eszközkészítés és barkácsolás (saját ötletek és tanári útmutatás alapján)
- szertárismeret, szertárhasználat és rendbetétele (kezdetben tanári felügyelettel)
- eszközhasználat elsajátítása (pl.: mikrométer, forrasztópisztoly, Arduino stb.)
- fizikai (elmélet, levezetés, mérés, számítás, fizikatörténet stb.), matematikai és informatikai készségek fejlesztése, új módszerek megismerése
- kb. 60 fős „közönség” (50 diák + 10 tanár) előtti előadói, kísérletezői készségek elsajátítása (tanári instrukciók mentén)
- prezentációkészítés (PowerPoint, Prezi stb. – tanári instrukciók mentén)
- kreativitás, önállóság, precizitás, pontosság, egymásra való odafigyelés

Egy témaválasztástól független fiktív projekten keresztül részletesen kidolgozva is bemutatom tapasztalati eredményeimet, amelyet ilyen formában bátran tudok ajánlani a közoktatás bármely szintjén. A kollégák hasonló keretek között sikeresen alkalmazhatják.

Projektmunka lépései heti lebontásban

A 6.2. táblázatban egy lehetséges csoportos időbeosztás táblázati elrendezését láthatjuk. A mintában feltüntetett címszavak csak lehetséges példák, hogy pontosan ki és mit csinál ezen részfolyamatok közül az nagyban függ attól is, kinek mihez van affinitása, kedve, tehetsége, lehetősége – például otthoni barkácsműhely stb. Eszközöket mindenképpen 2-3 fős csoportokban érdemes készíteni, egyrészt izgalmasabb, másrészt sokszor két kéz kevés az egyes munkálatok elvégzéséhez, de leginkább több szem többet lát alapon sokszor szükség van kreatív helyzetmegoldásokra.

CSOPORTOS IDŐBEOSZTÁS	Név1	Név2	Név3	…
1. hét	ötletgyűjtés			
2. hét	önálló kutatómunka, részfolyamatok átgondolása stb.			
3. hét	eszközkészítési ötletek	vizsgálandó paraméterek átgondolása*	működés elméleti háttere	fizikatörténet
4. hét	anyagbeszerzés	mérésekhez kivitelezési terv készítése*	vázlatkészítés	vázlatkészítés
5. hét	eszközkészítés	eszközkészítés	mérés*	prezentációkészítés
…	mérési eredmények kiértékelése*	mérési eredmények számítással történő alátámasztása*	mérés*	prezentációkészítés

6.2. Táblázat: Csoportos időbeosztási mintaterv.
(A táblázatban *-gal a jelenségek releváns paraméterekkel kapcsolatos vizsgálódási folyamatai vannak jelölve.)

A 6.2. táblázatban *-gal jelölt részfolyamatokkal való ismerkedést el lehet kezdeni már kisebb korban is, de itt is fontos betartani az életkori sajátosságok figyelembevételének fontos elvét: ne essünk túlzásba sem gyakorlati, sem elméleti szinten! Lényegében ilyen stilisztikával dolgozik a kisebbeknek szóló IFRT (*Ifjú Fizikusok Regionális Tornája*), illetve a nagyobbaknak szóló IYPT (*International Young Physicists' Tournament*). Több, bármely korosztálynak megfelelő témában volt már kiadott probléma (pl. Héron szökőkútja: IYPT 2018 [6], IFRT 2021). Azonban, ha a kisebbeknél megmaradunk a fizikatörténet-eszközkészítés-elméleti magyarázat vonalon és nem kutatunk ennél mélyebbre vagy mérünk mást, az is bőven elegendő projektfeladat lehet. Ebben a szépséget az jelentheti, mennyire szépen kivitelezik az elkészítendő eszközöket.

1. hét – A téma kiválasztása

Ötletgyűjtés: internet, cikkek, könyvek, videók, egyéb helyről hozott témaötletek.

Az első hét végén közösen összegyűlik a csoport, megbeszélik, ki mit talált, majd a legjobb ötletek továbbgondolásával, végül egy konkrét témát választunk. Érdemes már hét közben arra kérni a diákokat, hogy egy közös internetes fórumra gyűjtse mindenki címszavakban videók, linkek feltöltésével, milyen érdekes témákat talált. Ez másoknak is ötletül szolgálhat, valamint a projektvezető tanárnak is szükséges, hogy körvonalazódjanak benne a lehetőségek. Ugyan az alapötlet ideális esetben (de nem feltétlen) a diákoké, azonban azt, hogy mely témában milyen lehetőségek rejlenek, azt a szaktanár tudhatja a legjobban megítélni. Ahhoz, hogy az első hét után valóban döntés születhessen, a szaktanárnak is végig kell gondolnia az ötleteket, hogy megossza elképzeléseit a tanulókkal.

Számomra talán a legjobban a Classroom fórum vált be. Egyrészt az iskolai keretek között is ezt használjuk, valamint a feltöltött anyagokat könnyű címkékkel ellátni, mappákba rendezni, átlátni ki mit csinál éppen; valamint az éppen aktuálisan készülőben lévő Word-dokumentumok / Excel-táblázatok / PowerPoint-bemutatók akár közösen is szerkeszthetők, szaktanár által lektorálhatók, megjegyzésekkel, kérdésekkel könnyen elláthatók. Egyszerűen hozható létre bármikor távolról is online csoportos vagy egyéni konzultáció. Érdemes a projekt minden résztvevőjét „tanárként” az adott Classroom-csoporthoz adni, így úgymond minden a csoportban elérhető funkció adminisztrátorává tenni. (A diákok feltöltési és egyéb lehetőségei máskülönben korlátozottak.)

A témaválasztáshoz fontos felmérnünk az adott témában lévő háttértudás ismeretét is. Könnyebb és sokszor az alapórát is megtámogató, ha már az iskolai órákról jól ismert témákkal dolgozunk, de adott esetben a projekt elkészítésének része is lehet a téma elméleti hátterének megismerése.

2. hét

Kutatás és anyaggyűjtés már a választott témakörben, célok megfogalmazása, kisebb részfeladatok kiosztása.

- történeti háttérkutatás
- elméleti háttér
- eszközelkészítéshez ötletek: internetes videók keresése, megvalósíthatóság átgondolása
- kreatív/egyedi ötletek (pl. szimuláció készítése akár magasabb évfolyamra járó diákokkal)
- mérések: releváns paraméterek keresése, a vizsgálat módja, elméleti igazolása (ahol lehetséges)

Háttérinstrukciók nélkül a diákok hajlamosak kissé összecsapni az ilyen jellegű munkát, ezért kell ott lenni és mindig segíteni, utat mutatni nekik, még ha emiatt egy-egy részfolyamatot néha újra és újra is kell csinálniuk. Évről évre jobban érzik az igényességben rejlő kihívást, büszkék arra, hogy az ő projektmunkáikat később mások is használják. További szempont lehet, hogy a fizikában jártasabbak számára jól ismert jelenségeket, kísérleti eszközöket is kreatívan, esetlegesen új köntösben mutassuk be, más szempontokból közelítsük meg. Természetesen ez nem szükséges, de sokszor már „unjuk” ugyanazokat a fizikai problémákat, ezzel valamelyest önmagunk továbbképzése is zajlik.

3. hét

Feladatok kiosztása, személyre szabott időbeosztás elkészítése és a részfeladatok megkezdése.

Az, hogy ki és mely részfolyamat(ok)ban vesz részt függ az egyéni készségektől (valaki jobban ért a számítógépekhez, másvalaki viszont barkácsolni szeret, stb.), valamint a feladat bonyolultságától, időigényétől. Lényeges szempont azonban az is, hogy olyan feladatokat is kapjanak, ami nem kifejezetten az erősségük, hiszen így tudnak igazán fejlődni. Fontosnak tartom, hogy magán az előadáson mindenki egyenrangúan részt vegyen, mindenkinek „meg kelljen szólalnia”, így tud valódi csapatmunka létrejönni.

- feladatok kiosztása és határidejének megvitatása
- eszközök elkészítésének első fázisa: ki, hogyan, mit miből:
  - eszközkészítés megvalósításának ötletei
  - anyagszükséglet felmérése
  - „bevásárlás” – anyagbeszerzési feladatok kiosztása és elvégzése

Megjegyzés: az eszközkészítés folyamata számomra azért kerül ennyire előtérbe, mert tapasztalataim szerint ez a leghosszadalmasabb folyamat, a legtöbb buktatóval. Ha valami mégsem sikerül, elképzelhető, hogy újra kell tervezni részben, sőt néha teljes egészében a projektet.

Egyéni időbeosztás 6.3. táblázata (a mintában feltüntetett címszavak csak lehetséges példák):

Tanuló neve:		
Részfolyamat megnevezése	**Határidők**	**Teljesítve**
témával kapcsolatos anyaggyűjtés, ötletek		
kísérleti eszközökhöz anyagbeszerzés		
kísérleti eszközök elkészítése		
prezentáció elkészítése		
stb.		

6.3. Táblázat: Egyéni időbeosztás mintatáblázata.

Sokszor a projekt során ezen támpontok módosulnak, bővülnek. Ettől nem kell megijedni, a folyamat természetes része (ezért is érdemes ezeket online formában kiadni a könnyebb módosíthatóság érdekében). Viszont fontos, hogy ezeket valamilyen módon kordában tartsuk, a túlzottan sok változást kerüljük.

4-5. hét

Eszközkészítési, valamint a prezentációval kapcsolatos munkálatok. Elméleti és gyakorlati háttértudás elsajátítása, szükséges átbeszélése.

Ezen szakaszban önállóbb munkafolyamatok következnek, azonban nagyon lényeges a folyamatos konzultáció a szaktanárral. A felmerülő problémákra sokszor ott és azonnal kellene válaszolni, megoldást találni, ezért figyelembe véve a valószínűsíthető rutin hiányát, az alsóbb évfolyamokon az eszközöket – amennyiben ez lehetséges – előre egyeztetett időpontban, az iskolai szertárban tanári felügyelet mellet készítsék.

A prezentációkészítővel való folyamatos egyeztetés is lényeges mind a csoporton belül, mind a szaktanárral. Sűrűn előforduló felesleges művelet, hogy mindent azonnal teli akarnak tűzdelni animációval (mert az vagány). Hagyjuk, ez is fejleszti az informatikai készséget (még ha felnőttfejjel sokszor sok is), de hívjuk fel a készítő(k) figyelmét arra, hogy ezt csak az utolsó időszakban tegyék, különben minden módosítás alkalmával kezdhetik elölről sok felesleges munkát okozva ezzel maguknak. A prezentációt érdemes folyamatosan aktualizálni ahhoz, ahol éppen tartanak a részfolyamatokban. Amit lehetséges, már érdemes gépre vinni, még ha nem is végleges vagy tökéletes, mert különben nagyon hosszadalmas munka (akár csak egy hosszabb levezetés képletszerkesztővel történő elkészítésére gondolva). Ennek egyik lehetséges módja, hogy egyetlen egy valaki fogja össze a prezentációt, egy stílusban, egyeztetve a jelenséget bemutató és előadó résztvevőkkel, hogy mi szerepeljen a diákon. Másik opció, hogy mindenki önállóan készíti el az előadás rá vonatkozó részét, de ekkor is érdemes közös sablont (színek, formák, betűtípusok) előre egyeztetni.

6. hét

Végső fázisok: folyamatos konzultáció a szaktanárral; eszközök / prezentáció elkészítésének utolsó simításai, lektorálása és befejezése, ki-/elpróbálása; a különböző részek / eszközökkel kapcsolatos munkák összehangolása (sorrend, egymásra épülés stb.).

7. hét

„Forgatókönyv” írása és főpróba.

Tekintettel arra, hogy a többség ebben az életkorban még nem készített, vagy nagyon kevés alkalommal készített hasonlóan nagyszabású projektmunkát, valamint nem, vagy még kevésszer állt 50-60 fős „nagyközönség” előtt, ahol sokakra még idősebb korban is rátör a „pánik”, szükséges lehet előre megírni, ki-mit-mikor-hogyan fog cselekedni a „színpadon”, úgymond csapatra és azon belül is személyre szabott „forgatókönyvet” írni (egészen a bemutatkozástól, a jelenségek bemutatásán át, a részletes fizikai magyarázatokig lényegében mindenről). Ennek hiányában gyakran tapasztalható makogás, szakmai pontatlanság, sorrendiségbeli logikátlanság, felépítésbeli rendezetlenség. A szakmai magyarázatokat kifejezetten fontos konkrét mondatokban saját szavaikkal megfogalmazni, amit szaktanárként még lehetőleg a főpróbák előtt lektorálni, kiegészíteni, módosítási javaslatokat tenni; átbeszélni az esetleges hibákat, buktatókat, pontatlanságokat. Ennek szükségességét eleinte sokszor maguk sem látják be, de utólag nekik is magabiztosságot ad. Nagyon sokszor az előadáson (vagy szerencsésebb esetben annak főpróbáin) döbbennek csak rá, mennyire nem volt elég átgondolt a mondanivalójuk (akár csak olyasmire gondolva, hogy nem mondott el valamit, ami az értéshez szükséges; avagy elmond olyasmit is, amit már az előtte lévő elmondott; stb.). Meglehetősen sűrű jelenség, hogy ezt a feladatot halogatják, ellenállnak a kérésnek, de mikor végül javítva és átbeszélve látják, mennyi hiányosságuk, „hibájuk” van egy-egy ilyen írásban vagy előadásban, akkor utólag már nagyon hálásak, valamint legközelebb már pontosan érzik ennek fontosságát. Ha van rá kapacitásunk, ne engedjük el a folyamat ezen részét! Ráadásul ezeket akár az előadás előtti este, reggel újra átolvashatják, valamint az előadás során a biztonság kedvéért maguknál tarthatják. Azonban ügyeljünk rá, hogy ne „papírból olvasás” váljék belőle. Természetesen a nagyobbaknál erre már jobb esetben nem lesz ilyen mélységekig szükség, de az írás-lektorálás-főpróba talán már csak a legnagyobbaknál és az évek óta táborozó rutinosabbaknál hagyható el. A „forgatókönyvírás” legfontosabb szempontjait röviden az 1. mellékletben foglalom össze. (A dolgozat végén található 1-4. mellékletek az adott témában önmagukban is teljesértékűek.)

A végleges prezentációk elkészítése hasonló munkafolyamat, csak már korábban szükség lehet a tanári útmutatásra mind formai mind tartalmi részben. Erről szól a prezentációkészítés „szabályai” című 2. melléklet. Természetesen vannak mindig kifejezetten hozzáértő diákok, de legtöbbször néhány számunkra nagyon triviális gondolat sem mindenkinek az.

A főpróba, amely néha 2-3 alkalommal is szükséges, történhet csak magunk között (ez előfordult már idő hiányában online videochat formájában is – „összeolvasás”), avagy osztálytársak, más osztályba járó (de nem fizika táborba készülő) iskolatársak előtt. Érdemes felhívni a hallgatóság (akár a saját csapattársak) figyelmét, hogy írják fel menetközben a kérdéseiket, amiket aztán a végén fel is tesznek. Ezekkel is sok minden apró hiányosságra még fény derülhet, ráadásul szokják a közönséget. Szokták mesélni a szülők, hogy otthon még tábla előtt is felmondják nekik a gyerekek (nem csak a legkisebbek), valamint hogy micsoda családi program és büszkeség ez nekik. A diákoknak ez a tábor presztízskérdés is. A főpróbán van lehetőség a csapat összehangolódására is. Tudni kell, ki, ki után, mikor, mit csinál: egyik kísérletet mutat be, míg a másik magyaráz, harmadik előkészíti / eltakarítja csendesen a következő / előző kísérlet tartozékait, stb., de mindeközben ne történjen túl sok minden egyszerre, mert nem tudnak a nézők annyi felé egyszerre figyelni. A csapatoknak az időbeosztást is nagyjából be kell tudni tartani (ez sokszor külön gyakorlást igényel, mert a 30-40 perc néha igencsak kevés tud lenni). A főpróba után természetesen újabb helyzetelemzést teszünk az előforduló hiányosságokra, javítani- és módosítani valókra.

A projekt bemutatás és az értékelés

Hogyan építsünk fel és tartsunk előadást?

Pedagógusként fontosnak tartom tudatosan és hatékonyan felkészíteni a diákokat nem csak szakmailag, hanem előadóként is. Gondolva itt olyanok apróságokra, mint hogy egy gyermek legtöbbször nem tudja, milyen ennyi ember előtt kint állni a pulpituson, nem csak az eddig leírtakra gondolva, hanem olyan egyszerűnek tűnő dolgokra, mint hogy éppen hol áll: nem a táblaképet / kísérletet eltakarva; hogyan mutat be kísérletet helyesen; mikor jön a magyarázat; folyamatosan fenntartani a közönség figyelmét; hogyan kommunikál és esetleg kérdez tőlük; szakmailag és előadóként is átgondoltan. Az igényes munkához szintén hozzátartoznak a bemutató-készítés vívmányai (képletszerkesztő használata, grafikonok, táblázatok, színek, feliratok), ami sokszor a nagyobbak számára éppúgy kihívás, akárcsak a „beleérző képesség” egy-egy felépítés során: mennyire érthető azok számára, akik az adott jelenségről először hallanak. Ezeket tapasztalat hiányában sokszor nagyon nehezen érzékelik, mi tanárok pedig sokszor magától értetődőnek tekintjük, pedig legtöbbször nem az. Az ezekről készült részletesebb leírást, amelyeket a tapasztalataim alapján gyűjtöttem össze, a 3. melléklet – előadástartás „szabályai” – tartalmazza.

8. hét

A projekt táborban való bemutatása, majd a projektmunkánk értékelés.

Az értékeléshez érdemes az előadásról videofelvételt készítenünk, amelyet később közösen visszanézhetünk. Értékeljük az előzetes munkánkat egyénileg és csoportosan is, az elkészült produktumokat: kísérleti eszközöket és bemutatásukat, a prezentáció(ka)t, elméleti háttértudásunk gyarapodását és hogy mindezen újonnan szerzett tudásunkat, hogyan tudtuk átadni a közönségnek, az előadás folyamatát, a csoportmunkát és csapatdinamikát, valamint nem utolsó sorban a szaktanári segítő munkát (ez utóbbi a jövőre nézve nekünk nagyon hasznos, főleg, ha kritikusak és őszinték tudnak lenni a diákjaink).

Azt a technikai „trükköt" még érdemes megemlíteni, hogy bizony az eszközökről működés közben érdemes előzetesen alkalmas videót készíteni és a prezentációba is beilleszteni. Sajnos nem egyszer fordult már elő, hogy az eszköz az utolsó pillanatban, netán a táborba szállítás során megsérült. Ilyenkor nem okozunk akkora csalódást sem a közönségnek, sem az azokat elkészítő diákoknak. Ilyen esetben értékeljük a videó elkészítését, vágását, netán feliratozását is.

Ezeken kívül értékelhetők még a többi csoport által bemutatott projektek, a tábor maga egészében és annak programjai külön-külön is. Ezek szintén hasznos visszajelzések a következő évi táborok szervezéséhez.

Az értékelések elolvasása után is levonható egy végső konklúzió, amely a táborban résztvevő diákok, tanárok és a csoport egyéni visszajelzései alapján tartalmazza az esetleges jövőbeni terveket, változtatni valókat, kinek miben érdemes egyénileg és csapat szinten is fejlődni, és természetesen azt is, ki miben volt nagyon ügyes, talpraesett, kreatív. Egyfajta reflexió a diákok számára is a szaktanáruktól.

Mondanom sem kell, hogy ne felejtsük el megdicsérni őket! Nem csak a projekt végeztével, hanem menet közben is erősítsük meg bennük, hogy büszkék vagyunk rájuk, elégedettek vagyunk a munkájukkal. Ezt néha hajlamosak vagyunk elfeledni, pedig a sok „hajcsárkodás", javítani / újrakezdeni való és kritikai észrevételek mellett nagy szüksége van a diákoknak a bíztatásra és támogatásra is.

Az értékelőlap-minták a 4. mellékletben találhatók, amelyek akár online változatban (pl. Google Űrlap) is elkészíthetők. Az értékelőlapok online változatainak megvannak a maga előnyei: a válaszok kérdésenként is rendezhetők, az értékelési pontokból témakörönként statisztika készíthető, némely szempontok alapján jobban áttekinthetők.

6.4. Összefoglalás

A diákok a fizikai tartalmakhoz szorosan kötődően matematikai és informatikai készségeket, kísérletezési és mérési módszereket is elsajátítanak. A tantárgyhoz köthető ismereteken túl pedig együttműködést, időbeosztást, szertárismeretet és rendet, precizitást, igényességet, háttéranyagok gyűjtése során idegen nyelvi ismereteket, a csoportmunkához elengedhetetlen egymáshoz való alkalmazkodást, toleranciát, egymás tanítása által segítőkészséget, önálló kutatómunkát, anyagbeszerzői-készségeket, kézügyességet, a barkácsolás mindenféle formáját, kreativitást, problémamegoldást is tanulnak.

Egy-egy ilyen projektnek nagyon sokféle, egyéb hozománya is lehet. Egyes – diákokkal közösen készített – munkáim részben vagy egészében végül akár más környezetben (külföldi, illetve magyar konferenciákon, valamint cikkekben; versenyeken, évfolyam-bemutatókon, fizikaszertári alkalmazásban, szakórákon) is „hasznosításra” kerülnek.

Ezek a fizikatábor nyújtotta lehetőségek és kialakuló készségek nagy segítséget nyújtanak a diákok számára az egyetemi továbbtanulásaik folyamán, valamint később a munkahelyeiken is. Erről én magam is évről évre meggyőződöm, de rengeteg visszajelzést is kapok tőlük. A 3-4-5 évet megjárt fizikatáborosaink nyugodtan kijelenthetem, nem véletlenül lesznek kiváló előadók. A szakmai kihívások mellett erre (természetesen egyén és korosztályfüggően) szintén nagy hangsúlyt fektetek. Aki diákként életében először készül ilyesmire, ahhoz, hogy jó előadóvá váljon és pozitív élményekkel távozzon, sok mankóra van szüksége. Ez azonban rengeteg munkát és odafigyelést igényel mindenki részéről. Sokszor úgy gondoljuk, ezek „maguktól” megtörténnek (sokszor így is van), azonban pedagógusként törekednünk kell tudatosan is készíteni a diákjainkat a rendkívül tág „jó előadó”-i készségek elsajátítására, fejlesztésére. Ehhez kínálok eszközöket. Ez valóban egy szakmailag kölcsönösen motiváló vállalkozás.

Miközben egyre nehezebb felkelteni diákjaink figyelmét, megfelelni a mai elvárásoknak, mind a diákjaink, mind a szülők, mind a felkészítésük tekintetében, úgy tűnik ez egy hosszútávon is igazán kamatoztatható projektforma mind a diákok, mind a szaktanárok szempontjából. Bátran ajánlom mindenkinek a kipróbálását, egy hasonló, saját arculatra formált program megvalósítását. A nem tagozatos jellegű, vagy akár kisebb fizikatanári létszámú iskolák is megtalálhatják céljaikat, motivációjukat, saját módszereiket, feladatstílusukat és témáikat a diákjaik számára.

Ez a fejezet tartalmazza a 6. tézis háttéranyagát.

A fejezethez kapcsolódó saját publikációim: [#4], [#1], [#2]

Hivatkozások

1. Baranyai Klára doktori értekezése: Nem-hagyományos értelemben vett modern fizika a középiskolában (témavezetők: Dr. Néda Zoltán és Dr. Tél Tamás), ELTE TTK Fizika Doktori Iskola Fizika Tanítása Doktori Program, Budapest, 2015, 6. fejezet
http://fiztan.phd.elte.hu/kozkincs/doktorik/ertekezesek/bk.pdf

2. Baranyai Klára doktori értekezésének tézisei: Nem-hagyományos értelemben vett modern fizika a középiskolában (témavezetők: Dr. Néda Zoltán és Dr. Tél Tamás), ELTE TTK Fizika Doktori Iskola Fizika Tanítása Doktori Program, Budapest, 2015, 7. tézis
http://fiztan.phd.elte.hu/kozkincs/doktorik/tezisek/baranyai.pdf

3. Budó Ágoston: Kísérleti fizika II. (elektromosságtan és mágnességtan), Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1968, 156.§.2.a) 25. o.

4. Juhász András (szerk.): Fizikai kísérletek gyűjteménye 2. – Elektromosságtan, mágnességtan, Arkhimédész Bt., Typotex Kiadó, Budapest, 1995, ISBN:9637546707

5.
Quantum Magazine: https://www.nsta.org/quantum-magazine-math-and-science
HYPT (Hungarian Young Physicists' Tournament): https://hypt.elte.hu/
IYPT (International Young Physicists' Tournament): https://www.iypt.org/
OKTV:
https://www.oktatas.hu/kozneveles/tanulmanyi_versenyek_/oktv_kereteben/versenyfeladatok_javitasi_utmutatok/tartalomjegyzek
KöMaL (Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok):
https://www.komal.hu/lap/archivum.h.shtml

6. Gyulai Márton, Kadlecsik Ádám, Vavrik Márton, Hömöstrei Mihály, Ispánovity Péter Dusán, Vincze Miklós, Jenei Péter: Ifjú fizikusok nemzetközi versenye 2018 – magyar szemmel – 2. rész. Fizikai Szemle 2019/9. 316-318

ÖSSZEGZÉS

Doktori munkámmal reményeim szerint sikerült létrehozni egy olyan projektmunkákon alapuló színes csokrot a fizika középiskolákban némiképp elhanyagolt izgalmas témáiból, amely rengeteg (akár további) ötlettel szolgálhat a diákok sokrétű fejlődésének elősegítését illetően. Értek ezen nem csak szakmai (fizikai-, matematikai- és informatikai) területeken alkalmazható tudást; hanem a mindennapi életük megkönnyítésére irányuló, illetve személyiségfejlődésüket szolgáló kompetenciákat is. A felsorakoztatott jelenségek mind-mind valamilyen módon (legyen az szakmai vagy pedagógiai) számomra is különlegesek.

1. A pendulumhullám jelenségének szépsége fogott meg először engem, majd a projektben résztvevő diákokat, végül rajtuk keresztül a közönséget is. Az eszközkészítés vívmányai mellett a szimuláció elkészítése, valamint a „kicsik” és „nagyok” közös munkája mind nem várt eredményességeket is hozott.

2. A „beteges kertecske” problémája nagyon izgalmas volt mindannyiunk számára, mivel nem szoktunk hozzá, hogy olyan fizikai „feladatokkal” foglalkozzunk, aminek a szokásos matematikai módszerekkel nem tudjuk a megoldását prezentálni. Azonban a statisztikus fizika módszereinek alkalmazása („némi” programozási tudás birtokában) egy egészen új színfoltot és lehetőséget szolgáltat a megoldhatóságra, amelyen keresztül számtalan, a diákok számára is meglepő jelenség matematikai megközelíthetősége válik figyelemre méltó, új területté.

3. A szélcsatorna építése – egy ilyen nagyszabású eszköz saját elkészítése – nem kis feladat. A precíz tervezés és barkácseszközök használata, a kreatív problémamegoldás, az összehangolt csapatmunka mind elengedhetetlen feltételek voltak. Az eszköz használata által pedig a kapcsolódó fizikai ismeretek is mélyebbé váltak.

4. A hídfizika mechanikai vizsgálatával egy igazán változatos projektmunka készült: elméleti, gyakorlati, építési és főként programozási kompetenciákat igénylő mérési eljárásokkal (Arduino, LEGO robot) tarkítva. Mindig szerencsés látni, ha az elméleti számításaink összhangban vannak a mérési eredményeinkkel.

5. A zongorahangolás rejtelmei egy egészen más „műfaj” az eddigi kutatási témáink között. Sokkal inkább rendszert szerettünk volna látni a laikusok számára kissé kaotikusnak tűnő zeneelméleti szakkifejezések között. Ehhez sikerült áttekintenünk a különböző hangolástípusok történeti alakulását keresve az okokat és matematikai / fizikai magyarázatokat, miközben elméleti úton értelmezhettük a hangolók igazán nehéz feladatait, ezzel többrétűen alkalmazva és jócskán kiegészítve a fizika tantervben fellelhető hangtani tanulmányainkat.

Tapasztalatom, hogy bármilyen érdeklődésű gyermek motiválható jól kitalált és strukturált egyéni vagy csoportos projektfeladatokkal. Meg kell találni mindenkihez a témában, műfajban, szintben hozzá illeszkedő feladatokat, amivel színesíthetjük óráinkat, látókörüket, és egyben saját látókörünket is.

Az igazsághoz hozzátartozik, hogy miután az első pár év projektjei sorra nőtték túl az azt megelőzőket (egyre sokrétűbb problémákat, egyre nagyobb feladatokat tűztünk ki célul), kissé elfáradtam… Ilyenkor a gyerekek kreativitására és a régi vagy éppen „újdonsült” csoportok lelkesedésére támaszkodva jutottunk előbbre. Az egész fizikatábornak és projektekben való részvételnek kialakult egy presztízse. A diákok büszkék rá, hogy a részesei lehetnek. Amikor – akár a mindennapi élet nehézségei miatt is – éppen kicsit nehezebben indultunk, akkor is erőt adott az előző évi sikerek és mosolyok emléke, és az ember egy idő után tudta, most is mennyire jó érzés lesz utána. (A több egymást követő évben résztvevő diákok sokszor hasonló gondolatokon mehettek keresztül.) A konklúzió, hogy a sok befektetett energia végül megtérül. Hihetetlenül jó élmény volt az egyes csoportjaimnál évről évre látni a fejlődésüket. Kicsiként még minden lépésnél fogni a kezüket, majdan a végére szinte teljesen önállóan is képesekké váltak olyan előadásokat tartani, hogy még a tanár kollégákkal is ámulatba estünk többször. Mind szakmailag, mind emberileg. Többet ad ez nekik és nekünk is, mint valaha sejteni mertem volna. Ahogyan a táborokban a nagyobbak a kisebbeket segítik, támogatják; a kisebbek a nagyobbakra felnéznek; ahogy a felkészülések során együtt tudnak gondolkozni, dolgozni, kiosztani maguk között a feladatokat, szebbnél szebb diasorokkal, szakszerűen felépített előadásokkal, hihetetlen szakmai tudással színes csokrokat készítenek maguk is, miközben rácsodálkoznak a fizika szépséges és kimeríthetetlen jelenségeire. Ezek a diákok – mire 4-6 év után kilépnek a gimnáziumból is – sokszor visszajárnak a táborunkba segítőként; továbbtanulásuk során lenyűgöző egyetemi előadásokat tartanak, elképesztő projektekben, nemzetközi versenyeken vesznek részt, vagy éppen már szerveznek hasonlókat. Jó érzés a tudat, hogy visszajelzéseik alapján az ezekhez szükséges kulcskompetenciákat is jórészt ezen projektfeladatokban munkálkodva sajátították el, és micsoda haszon és lehetőség számukra, hogy ezekkel a típusú „kihívásokkal” nem az egyetemen / munkahelyükön találkoztak először. Ezek azok a pillanatok, amikért megéri évről évre újból belevágni.

Egyszerűen észre kell venni a fizika megannyi szépségét, kihasználni a diákjaink fékezhetetlen kíváncsiságát, és a már jólbevált „régi”, valamint a megváltozott környezetünk igényeihez alkalmazkodó új módszertani- és technikai lehetőségeket ötvözni, amelyekkel mind-mind színesíthetjük a fizikaoktatás mindennapjait és motiválhatjuk diákjainkat, ahogy ezzel ők is motiválnak minket.

SUMMARY

Hopefully I have managed to work out in my thesis a colorful bouquet of exciting project-based themes neglected in secondary school context, which might provide further ideas regarding students' diverse development. I mean not only professional knowledge (applicable in physics, mathematics and IT), but also competencies helping students' personality development. The phenomena I am elaborating on are extraordinary even for me both professionally and regarding methodology.

1. First, both me and my students were intrigued by the beauty of the phenomenon of the pendulum wave, which, then, had the same effect on the audience when hearing the presentations. Making the necessary devices and the simulation as well as the joint cooperative work of younger and older students brought along unexpected results.

2. The problem of the "sick little garden" turned out to be very exciting for all of us, for we were not used to doing physics exercises that were impossible to solve with the traditional mathematical methods. However, the methods of statistical physics along with some IT programming skills provide a novel way of solving the exercises, which also helps students discover and approach numerous surprising phenomena from a mathematical perspective.

3. Building a wind tube, making such a grand-scale device on their own, students were faced with not an easy task. The difficulty of the task made it essentially important for them to learn precise planning and the use of DIY tools as well as creative problem-solving and cooperative teamwork. Using the device also helped them deepen their knowledge of the relevant theme.

4. The mechanical observations in the theme of bridge-physics resulted in a truly diverse project work with measuring techniques requiring theoretical, practical, constructional and mainly programming (Arduino, LEGO robot) competencies. It is always most fortunate to find that the results of the measuring process match the theoretical calculations.

5. The secrets of piano tuning can be considered as a completely novel and different perspective concerning our research themes. We meant to find a system of music theory terms, which seem too chaotic for the layman. We overviewed the history of tuning techniques, via which we were searching for mathematical and physics explanations, while theoretically interpreting the difficult tasks of the tuning profession. As a result, students were made to apply additional knowledge not included in the curriculum regarding acoustics.

Based on my experience I firmly believe that any kid can be motivated with well-made-up and structured individual or team project tasks. One should find the appropriate exercises matching students' level regarding the theme, which might make the lessons more colorful, not to mention the benefits of widening both students' and our own horizons.

The projects of the first few years were followed by new ones that included more and more complicated problems as well as far-fetched goals, which, honestly, wore me out. In such cases I could count on students' creativity and the enthusiasm of old and new groups, which helped us get ahead. Both the physics camp and the chance of participation in my projects have become prestigious for students. They truly are proud of being given the opportunity to participate. In case everyday difficulties made it hard to start a project, the memory of past success and smiles reminded me how great it would feel at the end of the process. I guess students participating in the projects year after year might also have gone through the same mental process. What I want to emphasize is that hard as it may be, the huge amount of work is worthwhile. It was an incredibly good feeling to see the gradual development of students in certain groups year by year. Being very young at the beginning, students needed very much guidance, however, later in the process they became capable of giving presentations that amazed all my colleagues. Both professionally and personally. This gives both them and us much more than I have ever expected. Thanks to older students helping and supporting the younger ones, they have them look put to them. While preparing for the presentations they think and work together, share the tasks and produce a really colorful project work based on high-level professional knowledge with professionally built-up presentations with a set of amazingly beautiful slides. In the meantime they discover the surprisingly beautiful and limitless phenomena of physics. By the end of their 4-6-year-long secondary school studies these students have returned to the camp as helpers several times. Already as university students, they give amazingly high-level, university-lecture-like presentations. They also participate in extensive projects, international competitions or even organize similar high-level events. It is an incredible feeling to hear from them that they gained the necessary competencies to do so by working in the projects at our school and how lucky and beneficial it proves to be that it is not the university or work place that they meet with such challenges for the first time. These are the moments which make it worthwhile to start and restart this work year by year.

One should simply find the beauties of physics, take advantage of students' limitless curiosity and combine the traditional methods and techniques with the novel ones, which match the new transformed environment of today's world, making teaching physics more colorful and motivating for students, as a result of which we, teachers get motivated.

A DOKTORI ÉRTEKEZÉSHEZ KAPCSOLÓDÓ SAJÁT PUBLIKÁCIÓIM és ELŐADÁSAIM

Publikációk

#1. Lendvai Dorottya, Czövek Márton, Forrás Bence: Pendulumhullám, avagy szerelem első látásra. Fizikai Szemle 2015/5. 171–177
https://berzsenyi.hu/Lendvai/Pendulumhullam/Pendulumhullam.html

#2. Dorottya Lendvai, Márton Czövek: Pendulum wave or love at first sight. Conference: Teaching Physics Innovatively (TPI-15, p. 275-280), Budapest
http://parrise.elte.hu/tpi-15/papers/LendvaiD_p.pdf

#3. Lendvai Dorottya, Czövek Márton, Forrás Bence: Beteges kertecske. Fizikai Szemle 2019/10. 352–357
https://berzsenyi.hu/Lendvai/Betegeskertecske/betegeskertecske.html

#4. Baranyai Klára, Lendvai Dorottya, Csernovszky Zoltán, Izsa Éva, Csonka Dorottya, Gál Györgyné, Vidra Ágnes, Virág Miklós, Varga György: Tehetséggondozás a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium fizikatáborában. Fizikai Szemle 2021/4. 135-140

Előadások

I. Dorottya Lendvai, Márton Czövek, Márton Vavrik: Pendulum wave or love at first sight. Conference: Teaching Physics Innovatively, 2015 (TPI-15)

II. Lendvai Dorottya: Beteges Kertecske, Erdélyi Magyar Fizikatanári Ankét, 2018

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni elsősorban Tél Tamás témavezetőm kitartó biztatását, nélkülözhetetlen instrukcióit, és azon sok éven át tartó áldozatos munkáját és türelmét, amelyet a doktori iskolában végzett tanulmányaim során, a cikkeim, valamint különös tekintettel a doktori munkám elkészítése kapcsán végtelen precizitásával időt és energiát nem sajnálva annak utolsó mozzanatáig nyújtott.

Köszönöm a Fizika Tanítása Doktori Program tanárainak és hallgatóinak, hogy általuk gazdagabb lett mind a szakmai-, mind pedagógiai tudásom, nem mellesleg új kollégákra és barátokra is leltem ezáltal. Kölcsönös segítőkészségükre azóta is bizton számíthatok.

Külön köszönet Néda Zoltánnak a „Beteges kertecske” probléma részletesebb kidolgozása során tett javaslataiért, kritikai észrevételeiért és minden további segítségéért, amelynek köszönhetően a modell tárgyalása jelenlegi formát ölthetett.

Hálás köszönet Családomnak és Barátaimnak, amiért mindvégig támogattak és mellettem álltak (leginkább elviseltek) a doktori iskolában való tanulmányaim ideje alatt. Külön köszönet Édesapámnak, Lendvai Tamásnak, aki a zongorahangolás iránti érdeklődésemet a diákjaimmal együtt felkeltette, valamint szakmai segítségével is nagyban hozzájárult a „Zongorahangolás Bermuda-háromszöge” projekt megvalósításához. Különösen szeretettel gondolok Nagymamámra, Tusa Erzsébet zongoraművészre, aki élete végéig büszkén szorgalmazta a doktori fokozatom megszerzését, valamint Édesanyámra, aki a doktori tanulmányaim utolsó lépéseit már csak *odafent*ről szurkolhatja végig.

Továbbá köszönettel tartozom Bérces György egykori szakdolgozati konzulensemnek és Czimmermann-né Rácz Lilla legjobb barátnőmnek, amiért indítványozták és segítették a doktori iskolába történő jelentkezésemet.

Végül, de messze nem utolsó-, sokkal inkább elsősorban kollégáimnak és DIÁKJAIMNAK, akik nélkül a doktori munkám tartalmi része létre sem jöhetett volna. A diákjaim fizika iránti szeretetüket, mérhetetlenül sok energiájukat, idejüket, ötleteiket, kreativitásukat, valamint a közös munka során a fizika és egymás iránt tanúsított odaadásukat. Külön szeretném kiemelni a „Pendulumhullám” projekt kardinális résztvevőit: Vavrik Márton Bendegúz, illetve ugyanezen téma és egyben a „Beteges kertecske” probléma szimulációs programjainak készítőit: Czövek Márton és Forrás Bence; a szélcsatorna és hídfizika projekt fizika tagozatos főszereplőit: Balázs Artúr László, Sisák Botond, Takács Árpád, Túri Zoltán és Véber Tamás; valamint minden egyéb általam vezetett eddigi fizikatábori projekt nélkülözhetetlen közreműködőit: a 2009-2013B biológia-kémia, 2012-2018C matematika és a 2016-2020B fizika tagozatosaim, akik közül többen több ízben is hozzásegítettek az elkészült projektekkel kapcsolatos szakmai-, módszertani- és pedagógiai tapasztalásaim megszerzéséhez, és egyben a doktori munkám létrejöttéhez. A teljes névsor meghaladná ezen dolgozat lehetséges kereteit. Mindemellett hálás köszönet a Berzsenyi Dániel Gimnázium teljes fizikamunkaközösségének – különösen Baranyai Klárának, a fizikatáborunk megálmodójának – baráti támogatásukért, türelmükért, szakmai tanácsaikért és a közösen eltöltött időért.

MELLÉKLETEK a 6. fejezethez

1. melléklet: A projekt bemutatásának „forgatókönyve”

Minden tanuló maga készíti el a saját szövegét, amelyet aztán a szaktanár olvas át, javítja, tesz módosítási / kiegészítési javaslatokat, majd közösen átbeszélik, végül a főpróbákon ennek alapján gyakorolják a bemutatót.

Támpontok, melyekre érdemes figyelni:

- Mire a „forgatókönyv” íródik, már tudni érdemes, ki, mikor, mit csinál; miről, ki után beszél avagy épp kísérletezik, diasort kezel, elpakol (helyet csinálva a következő kísérletnek) stb.
- A tartalmi rész legyen ehhez mérten átgondolt, összekapcsolódjon a már elhangzottakkal, van eleje és vége: bevezető, tartalmi rész, összefoglalás; lényeges a figyelemfelkeltő részek megfelelő tagolása, a legfontosabb fizikai tartalmak hangsúlyozása, diasoron való elhelyezése és kiemelése.
- A szakmai részek helyességének ellenőrzése az egyik legfontosabb szaktanári feladat.

Felépítés:

- Állandó „narrátor” szerepe (nem minden esetben szükséges): az egyes részek között egy valaki fogja össze az előadást, a „narrátornak” érdemes jelölnie azt is, hol, ki fog beszélni, mi fog történni.
- Diavetítés összehangolt kezelése: hacsak nincs kézi prezentációs távirányító, lehetőleg más kezelje, mint aki éppen beszél, de ismerje a sorrendiséget.
- Bevezető: a projekt témájának, esetlegesen történeti háttérének ismertetése.
- Eszközök bemutatása: az egyes csoportok (kísérletező + magyarázó) összehangolása, sorrendje.
- Előbb bemutatja a kísérletet, utána megpróbálja kitaláltatni a közönséggel az eszköz működését, végül összefoglalva részletes magyarázatot ad annak működési elvére.
- A releváns paraméterek vizsgálati módszereinek és eredményeinek ismertetése (amennyiben volt ilyen).
- Fizikai és matematikai háttér (életkori sajátosságok figyelembevételével): szakmailag helyes megfogalmazások, levezetések ismertetése stb.
- Helyesírás és formai követelmények a „forgatókönyv” írásakor: ez akkor is fontos, ha csak szóban fognak előadni, ugyanis ez is fejleszti az írást, fogalmazást, precizitást.

2. melléklet: A prezentációkészítés „szabályai”

Mire érdemes a prezentáció készítésénél figyelni?

- Lehetőleg formailag egységes legyen (a kevesebb néha több elvet követve).
- Láthatóság, olvashatóság: betűméret, betűtípus, színek (pl. nem írunk zöld háttérre pirossal – nem olvasható).
- Csupán vázlat legyen! Nem szabad túl sok szöveget írni (a közönség minden valószínűséggel nem tud egyszerre olvasni és figyelni is az újonnan elhangzottakra / látottakra), a szöveg csak támpont az előadónak, kiemeli a fontosabb részeket a hallgatóságnak. Az előadások után a prezentáció felkerül az internetre, így egyben emlékeztető a nézőknek és a készítőknek is a későbbiekben. Esetleg a legfontosabb dolgok mondatokba is foglalhatók, kiemelhetők, ezzel részben megkönnyítjük a szakmailag precíz beszédet, miközben azért előzzük meg, hogy az előadó felolvasást tartson a prezentációból, helyette törekedjünk az önálló beszédre.
- A flash-ek használatával módjával kell bánni (a kevesebb néha több).
- Elrendezés, méretek, kiemelések.
- Képletírás képletszerkesztővel (igényesség!).
- Táblázatok, grafikonok, feliratok szakmailag helyes kivitelezése. (Az Excel táblázat megfelelő használatával kapcsolatban érdemes az informatika tanárral egyeztetni, bevenni az alapórai fejlesztendő feladatok közé.)
- A levezetések részlépéseinek részletessége mindig átgondolandó, legyen követhető, de sokszor olyan hosszadalmas, hogy csak a kiindulási és végeredmények (esetlegesen a felhasznált törtvények, összefüggések) feltüntetésére van kapacitás. A részletesség és későbbi visszatekinthetőség mellett a fontosabb lépések kiemelhetők méretben és színekkel.
- Az animációk, szimulációk, videók és hangok működésének / lejátszásának ellenőrzése a megfelelő eszközön (érdemes saját laptopot használni).
- Biztonsági másolat készítése: e-mailben, pendrive-on, felhőben.

3. melléklet: Az előadástartás „szabályai”

Figyelembe kell venni, hogy a kisebbek minden valószínűséggel még nem rendelkeznek kellő rutinnal és tapasztalattal az ilyesfajta bemutatókhoz, azonban jól felkészíthetők, ha kellő odafigyeléssel vagyunk nem csak az eszközök készítésénél, hanem az előadásra való előkészületeknél is. Érdemes rákészülni, hogy ez időben szintén nem kevés munka. A diákok ugyan sokszor nem értik, erre miért van szükség, ahogyan a „forgatókönyvre” sem. A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy utólag nagyon is megértik, sőt, a későbbiek során saját maguk megnyugtatására is készítenek ilyet akár más eseményekre is.

Mire érdemes a bemutató előadás során figyelni?

- Előre átgondoltan, lassan, hangosan, érthetően fogalmazni.
- Csak olyasmit mondjanak el és úgy, ahogyan ők maguk is megértik.
- Úgy magyarázzanak, hogy az is megértse, aki még soha nem hallotta / látta ezelőtt (ez nehéz!).
- Nem papírból olvasunk fel, az előre megírt vázlat segítség, de nem helyettesíti az „élő előadást”, a közönséggel való szemkontaktust, az önálló beszédet.
- Elakadás esetén a PowerPoint bemutató készítésnél van lehetőség „előadói nézet” megjelenítésére – amikor is az előadás közben a monitoron a diasor mellett megjelenik egy kis „súgó ablak” az előre bekészített jegyzetekkel, azonban ez a kivetített diasoron nem látszik.
- Nem áll háttal, sem a kísérleti eszköz, sem a projektor / jegyzetelésre használt tábla elé.

Ezeket természetesen gyakorolni kell, lehetőleg kisebb közönség (osztálytársak, iskolatársak, szülők) előtt már a főpróbákon is.

4. melléklet: Értékelőlapok (minták)

Mivel nem minden tanuló vesz részt minden egyes munkafolyamatban, ezért az értékelés nem csak csoportszinten, hanem személyre szabottan is történik. Az értékelés szempontjait, valamint a teljes projektet több szempontból is körüljáró kitöltendő véleményezőlap-mintákat készítettem, melyek természetesen személyre / csoportra és adott projektre szabhatók.

A) „Kilépő cédula”

A fizikatábori projektmunkától azt vártam, hogy ____

____

____.

Csoportmunkában ______________________ dolgozott a leghatékonyabban.

A hirtelen felmerülő problémákat csoportunkban ________________ oldotta meg a legjobban.

Nálunk ________________________-nak/nek kellett volna többet dolgoznia.

Mit valósítottatok meg a tervezésből? ____

____.

A legjobbak a következő munkafolyamatban voltunk: ___________________________________

____.

Mit nem tudtatok megvalósítani? ____

____.

Mi volt ennek az oka? ____

____.

Milyen új, váratlan kérdések merültek fel a munka során? Hogyan oldottátok meg? _________

____

____.

A munka során a legtöbbet _______________________ -tól/től tanultam.

Jól tudtunk együttműködni, mert ____

____

____.

Nem tudtunk jól együttműködni, mert ____

____

____.

Szerintem eleget tettem azért, hogy a csapat jól szerepeljen, például: _____________________

____

____ .

Többet is tehettem volna annak érdekében, hogy csapatunk jól szerepeljen, például: ________

____

____.

Értékeld a saját munkádat (1-től 10-es skálán, 10 a legjobb munkát jelenti): _____________ .

Értékeld a csoport munkáját (1-től 10-es skálán, 10 a legjobb munkát jelenti): ____________.

Értékeld a segítőtanárod munkáját (1-től 10-es skálán, 10 a legjobb munkát jelenti): _______ .

Miben kellett volna többet/kevesebbet tennie (segítségadás, irányítás, „beleszólás”): _______

____

____ .

Milyen új ismeretekkel gazdagodtál? ____

____

____

____ .

Milyen új élményekkel „gazdagodtál” (lehet negatív is)? ______________________________

____

____.

Utólag mit csináltál volna másképp? (Szervezés, csoportmunka, témaválasztás, anyag feldolgozása, kérdések feltevése, módszerek stb.) ______________________________________

____.

A fizikatáborban a ____________________________ program tetszett a legjobban.

A fizikatáborban a ____________________________ program tetszett a legkevésbé.

Szerintem, hasznos volt a fizika tábori munka, mert ___________________________________

____

____ .

Szerintem nem volt sok értelme a fizika tábornak, mert ________________________________

____

____ .

Hogyan értékeled a csoport produktumát (1-től 10-es skálán, 10 a legjobb munkát jelenti): __.

Mennyiben teljesültek a fizika táborral kapcsolatos elvárásaid? __________________________

____

____.

Min változtatnál a fizika táborral kapcsolatban? (Szervezés, csoport-összeállítás, témaválasztás, lebonyolítás, időkeret, segítő tanárok szerepe, módszerek stb.) _____________

____

____.

Egyéb észrevételek: ____

____

____.

B) Csoporttársaim munkájának egyéni értékelése

Skála értelmezése: 1 – nem teljesítette
2 – hanyagul teljesítette
3 – elfogadhatóan teljesítette
4 – jól teljesítette
5 – kiválóan teljesítette

Értékelő tanuló neve:					
Értékelendő csoporttárs neve	1	2	3	4	5

Csoportos értékelőlap (minta).

C) A tanuló értékelési lapja (vezetőtanár tölti ki)

Tanuló neve:					
Értékelés szempontjai	1	2	3	4	5
téma kiválasztását megelőző „kutatómunka”					
témával kapcsolatos adatgyűjtés					
időbeosztás, határidők betartása					
eszközkészítés, szertárhasználat					
prezentáció készítés					
„forgatókönyv” megírása					
csoportmunkában való részvétel					
önálló munka					
bemutatón való szereplés					
mások által kapott értékelések átlaga					

Tanulói értékelőlap (minta).

D) Bemutatók értékelése

Értékeld a fizika táborban bemutatott, többi csoport által készített projektmunkákat!

Az értékelés ötfokozatú skálán történik, ahol az 5-ös a lehető legpozitívabb visszajelzés.

Bemutató címe: ____________________________

- Mennyire volt jó szerinted a témaválasztás: ________.
- Mennyire volt számodra érdekes
    - az elmélet: ________.
    - a kísérlet/mérés: ________.
    - egyéb: ___________________ ________.
- Mennyire volt érthető számodra
    - az elmélet: ________.
    - a kísérlet/mérés: ________.
    - egyéb: ___________________ ________.
- Mennyire tetszett az előadásmód ________.
- Mennyire volt jól használható, követhető
  a segédanyag (pl.: PowerPoint, feladatlap stb.): ________.
- Mennyire volt számodra hasznos ez a bemutató: ________.
- Egyéb észrevételek: ____

____

____

____.

E) Csoportfoglalkozások értékelése

Értékeld a csoportfoglalkozást, amin részt vettél!

Az értékelés ötfokozatú skálán történik, ahol az 5-ös a lehető legpozitívabb visszajelzés.

Csoportfoglalkozás címe: ___________________________________

- Mennyire volt jó szerinted a csoportfoglalkozás témája: _________.
- Mennyire volt számodra érdekes
    - az elmélet: _________.
    - a kísérlet/mérés: _________.
    - egyéb: ____________________ _________.
- Mennyire volt érthető számodra
    - az elmélet: _________.
    - a kísérlet/mérés: _________.
    - egyéb: ____________________ _________.
- Mennyire volt számodra hasznos ez a csoportmunka: _________.
- Mennyire segített kellő mértékben a tanár:
    - 1. túl keveset segített – 5. túl sokat segített _________.
- Miben segíthetett volna többet:____
  ____
  ____.
- Miben nem kellett volna annyit segítenie:______________________________________
  ____
  ____.
- Egyéb észrevételek:____
  ____
  ____
  ____.