Szennyeződések terjedésének vizsgálata a középiskolában: Nemlineáris és kaotikus vonások felfedező tanulása

Doktori értekezés

Szatmáry-Bajkó Ildikó

Témavezetők:
Dr. Haszpra Tímea tudományos főmunkatárs
Dr. Tél Tamás emeritusz professzor

Fizika Doktori Iskola
Vezető: Dr. Gubicza Jenő egyetemi tanár

Fizika Tanítása Doktori Program
Vezető: Dr. Nguyen Quang Chinh egyetemi tanár

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2023

Tartalomjegyzék

„Azok a dolgok, amikről az emberek verseket írnak – a felhők, a tűzliliom, a vízesés – meg ami a csésze kávéban történik, amikor belemegy a tejszín – mindez csupa rejtély, éppolyan rejtélyes nekünk, mint amilyen az ég volt a görögöknek. Jobban meg tudjuk jósolni, hogy milyen események várhatóak a galaxis peremén vagy az atommag belsejében, mint azt, hogy fog-e esni mához három hétre a nénikénk kerti ünnepélyén."

Tom Stoppard: *Árkádia*

(Fordította: Várady Szabolcs)

Bevezető

A természettudományok, így a fizika tanítása alapvető fontosságú a világunk megismerésében. Nekünk, fizikatanároknak meghatározó szerepünk van ebben. Küldetésemnek érzem, hogy ezt a tudományt színesen és vonzóan tanítsam. Ennek kulcsa, hogy tanárként – az alapvető feltételen, a mélyreható szakmai felkészültségen túl – szenvedéllyel beszéljek a fizikáról. Különösen lelkesen mesélek azon területekről, amelyek engem is jobban elvarázsolnak.

Ilyen kiemelt terület számomra a káoszfizika. Miért is a káoszfizika? Kolozsvári fizikus hallgatóként nyári egyetemet szerveztünk *Káoszfizika, fraktálok* témában; akkor szerettem bele a káoszfizikába, és ez a szerelem tart azóta is. Miért is a káoszfizika? Mert egyszerűen szép! Szép, mert az életről szól, nem hanyagolja el a kis különbségeket. Szép, mert esztétikai élményt nyújtanak úgy a kaotikus sodródás mintázatai, mint a fázistérbeli attraktorok.

Miért is a káoszfizika? Hisz nem is része a tananyagnak, tudjuk – bár vannak országok, ahol a modern fizika keretében vagy a mechanika fejezetben szó van róla, nem véletlenül. A kaotikus jelenségekről keveset hall az átlag középiskolás tanuló, azonban lépten-nyomon találkozik velük, még ha nem is tudatosul ez számára egyértelműen.

Alaposan körülnézve kiderül, hogy a káosz nem egzotikus kivétel, hanem tipikus. Éppen ezért nagyon fontosnak tartom, hogy halljanak róla a középiskolás tanulók, hiszen megerősíti a bizalmukat a természettudományokban, ezen belül a fizikában: nem csak a pontszerű testekről, lejtőkről, közegellenállást elhanyagoló szabadesésről szól a fizika, hanem képes arra is, hogy leírjon árnyaltabb helyzeteket is. Így nem azzal az élménnyel maradnak, hogy középiskolai fizika ismereteikkel épphogy leírható egy alma szabadesése, de a madártollak vagy a falevelek libegő hullása már jócskán meghaladja a lehetőségeiket.

Nagyon izgalmassá teszi a káoszt a tanulók számára, hogy a kis hatások nem elhanyagolhatóak, és itt is vagyunk a kezdőfeltételekre való érzékenységnél: a pillangó hatásnál. Ez az, ami miatt közel érzik a valósághoz, az élethez. Ami ugyancsak meghökkentő az az, hogy a kezdőfeltételekre való érzékenység egyszerű rendszerekben is gyakran előfordul, olyanokban, melyek mozgását néhány ismert egyenlet határozza meg. Pontosan ezeken az egyszerű rendszereken keresztül a káoszfizika a középiskolai tanulók számára is megismerhető. Ezért is kezdem mindig egyszerű mechanikai kísérletekkel a káosz tanítását, olyanokkal, amelyeket a tanulók maguk is megépíthetnek: mágneses inga, kettős inga, kettős lejtőn pattogó labda.

A festékek keveredése során kialakuló mintázatok különösen látványosak, ezért a márványozás szerves része az én gyakorlatomban a káosztanításnak. Egyrészt alkotni öröm: játszani a festékekkel, technikákat megtanulni, abban egyre jobbnak lenni, másrészt nagyon izgalmas játék a hasonló jelleg felismerése, a hasonló mintázatok keresése. Így ez már át is vezet bennünket a környezeti áramlások témakörére, a szennyeződések terjedésének megismerésére, amivel ugyancsak érdemes és kell foglalkoznunk felelős természettudósként.

Mindezt összefoglalva, a káoszfizika egy olyan terület, ahol együtt van jelen a fizika, a művészetek, a környezetvédelem. A káoszfizika színes élményt ad, szerintem maradandót a diákok számára. Ezért tökéletes terület a fizika iránti szenvedély fellobbantására, és azoknak is nagyon sok lehetőséget nyújt, akik el szeretnének jobban mélyülni: módot ad mérésekre, a mérési eredmények feldolgozására, modellalkotásra, szimulálásra. Ezért ajánlom jó szívvel, felelősen a káosz tanítását.

Szerencsés helyzetben vagyok, mert 14 éve egy tehetséggondozó iskolában, a budapesti Szent István Gimnáziumban tanítok. Az iskolában 6 és 4 évfolyamos osztályok vannak. Előbbi speciális matematika, illetve természettudományos tagozatos osztályok, a 4 évfolyamosak az elmúlt évek során reál-, humán-, illetve most általános gimnáziumi osztályok. Ebből adódóan színes a diákság, akikkel együtt dolgozhatok, és változatos a fizikához való hozzáállásuk, az érdeklődésük, a céljaik.

Tapasztalatom szerint a káosz jellemzői megismertethetőek a középiskolai diákokkal. Ami nagyon megkönnyíti az érdeklődő kollégák és tanárjelöltek dolgát, hogy nagyon sok jó gyakorlat halmozódott fel a témában, nagyon gazdag irodalom áll rendelkezésre, és segítséget is több kollégától lehet kérni. A káoszfizika 70-es évektől kezdődő erős „divatja” mostanra lecsendesedett ugyan, de még nagyon sok kiaknázatlan lehetőség rejlik benne a természettudományos oktatás területén.

A dolgozatban a fejezetek számozása a tézisek számozását követi. Minden fejezet a megfelelő tézis rövid, dőlt betűs idézésével kezdődik.

1. Káoszkísérletek a középiskolai fizika oktatásban

Kimutattam, hogy egyszerű, főleg a mechanika témaköréből választott fizikai kísérletekkel a káosz jelenségének lényegét megértik a középiskolás diákok.

1.1. A vizsgált egyszerű kaotikus rendszerek

Olyan tanítási modulról számolok be, amelyben az elmúlt néhány évben 72 diák vett részt a középiskola utolsó előtti vagy utolsó évében, 11 alkalommal, átlagosan 15 fős csoportokban. Ezek a diákok természettudományos vagy speciális matematika tagozatos osztályokba jártak. A legtöbb tanítási tevékenység tanórán kívüli keretek között, tanulócsoportokban zajlott, de a program egy része beépült a standard tantervbe is úgy, hogy a mechanika vagy a modern fizika fejezetekben néhány órát szenteltem rá. Ez utóbbi esetben a tananyag 4-5 órás keretre csökkent. Az általam elkészített tananyag projektmunkaként is feldolgozható a tanulókkal, ekkor lehetőség nyílik a különböző témákban való elmélyülésre. A modul tökéletesen beilleszthető volt iskolánk évenként megtartott projekthetének keretébe is. Ezenkívül ezt az oktatási egységet sikeresen alkalmaztam távoktatás céljára 2020 tavaszi szemeszterében az online oktatási időszakban.

A modul legelső óráján egyszerű, kaotikus viselkedést mutató fizikai rendszerekkel ismerkedtek meg a diákok: mágneses inga, felfüggesztési pontjában vízszintesen rezgetett inga, kettős inga, két lejtő között pattogó labda. Itt nagyon röviden bemutatjuk az általunk használt eszközöket, amelyek többsége a fizika laborban rendelkezésre álló eszközökből egyszerűen összeszerelhető. Fényképeik az 1.1. és 1.2. ábrán láthatók, elemi matematikai leírásuk a Kaotikus dinamika alaptankönyvben [1] található.

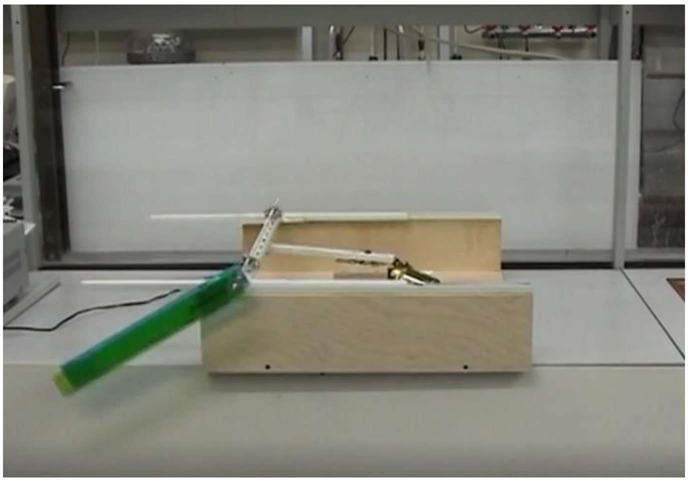
Mágneses inga

Tekintsünk egy ingát, amelynek ingateste egy kis mágnes, és három egyforma mágnes fölött mozog, például egy vízszintes egyenlő oldalú háromszög csúcsaiban (1.1.a ábra). Amikor az inga lengése lecsillapodik, az inga megáll a három mágnes egyikénél. Így három egyszerű attraktor van a rendszerben.

A felfüggesztési pontjában vízszintesen rezgetett inga

Megvizsgáljuk azt az esetet, amikor egy inga felfüggesztési pontját időben szinuszosan mozgatjuk vízszintesen. Az ingatestet egy nagyon könnyű, vékony rúdra rögzítjük, vagy használhatunk vonalzót fizikai ingaként (1.1.b ábra). Kellően erős gerjesztés mellett a mozgás kaotikussá válhat.

a.



b.

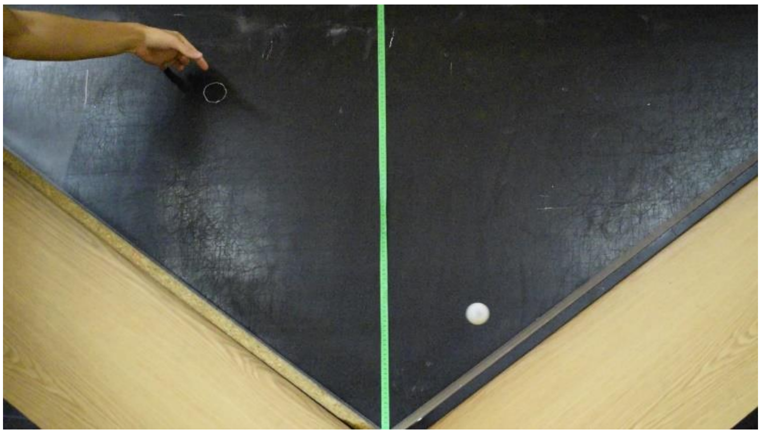
1.1. ábra Egyszerű kaotikus eszközök: a) Mágneses inga b.) Rezgetett inga

Rugalmas inga

Tekintsünk egy l_0 nyugalmi hosszúságú és ω_0 sajátfrekvenciájú rugóból álló ingát. Ez egy rugalmas zsinórhoz rögzített labda modelljeként is szolgálhat, amelyet similabdaként jól ismerhetünk a vásárokból. Egy valódi similabdától eltérően, azt feltételezzük, hogy a zsinór soha nem lazul meg, vagyis a rugó egy merev falú csőben helyezkedik el. Ebben az esetben a mozgás külső gerjesztés nélkül is kaotikus (1.2.a. ábra).

Kettős lejtőn pattogó labda

Egy labda gravitációs térben két azonos dőlésszögű lejtőn pattog egymással szemben (1.2.b ábra). A kaotikus viselkedés abból adódik, hogy a szemközti lejtőről való visszapattanás után a labda nem feltétlenül találja el eredeti helyzetét. A nemlinearitást és az eredendő instabilitást a lejtők közötti töréspont okozza. A kísérlet során a tanulók videóra veszik a labda helyzetét az idő függvényében, és a Tracker programmal (https://physlets.org/tracker/) digitalizálják. Két, közel azonos kezdeti feltételeket tartalmazó idősor összehasonlításával saját kísérletükben (l.2. fejezet) szemtanúi lehetnek a pillangóeffektusnak.

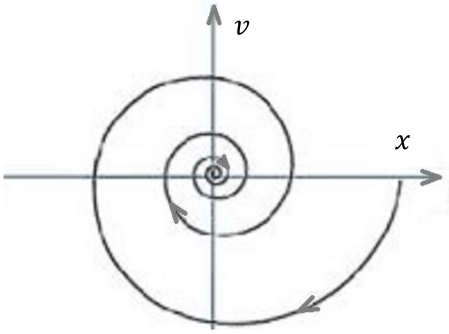
a. **b.**

1.2. ábra Egyszerű kaotikus eszközök: a) Rugalmas inga b) Kettős lejtőn pattogó labda

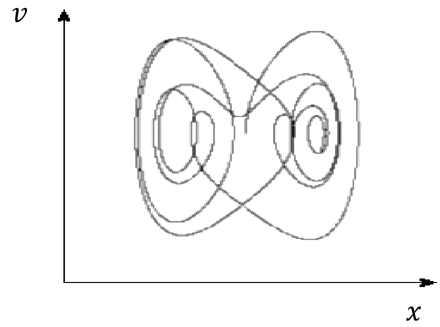
A tanulóknak volt idejük a kísérletek elvégzésére. A legfontosabb felismerés a kísérletezések során azt volt, hogy a káosz nem más, mint időben bonyolultan változó mozgás, és egyszerű rendszerek is képesek váratlanul bonyolultan viselkedni. Ez a káosz definíciójaként is használható [1].

1.2. A fázistér és az abban megjelenő áttekintő ábrázolás

A mozgások új ábrázolásaként és a numerikus vizsgálódások előkészítéseként bevezettük a fázistér fogalmát is. A fázistér a részecske *v* sebességének és *x* helyzetének kétdimenziós grafikonon történő ábrázolását jelenti (1.3. ábra). A részecske egy adott állapotát a fázistér egyetlen pontja, míg a részecske mozgását egymást követő pontok sorozata reprezentálja. Más szóval, minden valós mozgás egy nyomvonalat követ a fázistérben, amelyet fázistérbeli pályának nevezünk. Fontos hangsúlyozni, hogy a valós pályák (azaz azok, amelyeket a fizikai térben látunk) eltérnek a fázistér pályáitól, és nagyon eltérő alakúak lehetnek. Az idő nem jelenik meg kifejezetten a fázistérben: kizárólag a fázistér pályái mentén mutató nyilak ábrázolják, hogy az adott pálya időben milyen irányba fejlődik (lásd pl. az 1.3. ábrán).



1.3. ábra Példa egy (nem kaotikus) pályára a fázistérben, amely egy lehetséges változópárt mutat: v sebesség és x hely (a szerző sematikus rajza). Ez a fázistérbeli pálya egy csillapított rezgésnek felel meg, amely végül $x = 0$ és $v = 0$-nál megáll.



1.4. ábra Példa egy bonyolult kaotikus fázistérbeli pályára, amely szabálytalan, gombolyagszerű, amely egy lehetséges változópárt mutat: v sebesség és x hely (a szerző numerikus szimulációjának eredménye).

A nem kaotikus rendszerek pályája a fázistérben egyszerű görbe, ahogyan például az 1.3. ábrán láthatjuk. A kaotikus rendszerekhez tartozó idősorok nem mutatnak szabályosságot tetszőlegesen hosszú időintervallumban sem. Vizualizálásukhoz a fázistérbeli ábrázolás különösen hasznos, mivel az véges kiterjedésű az eltelt időtől függetlenül. A 1.4. ábra egy ilyen kaotikus pályát mutat be. Bármilyen ismétlődés, szabályosság hiánya jól látható már az itt kirajzolt rövid darabból (a teljes hosszúságú pálya beárnyékolná a sík egy részét).

Meglepő, hogy egy megfelelően megválasztott mintavételi eljárást alkalmazva egy hosszú, kaotikus fázistérbeli pályára szokatlan, de jól strukturált mintázat jelenik meg. Az így kapott objektumok a kaotikus attraktorok. Példát láthatunk rá a 1.5. ábrán.

1.5. ábra Egy megfelelően megválasztott mintavételi eljárást alkalmazva egy hosszú, kaotikus, fázistérbeli pályára egy kaotikus attraktort kapunk (a szerző numerikus szimulációjának eredménye)

A kapott mintázat világosan szemlélteti, hogy a káosz korántsem jelent teljes rendezetlenséget; szigorú geometriai szerkezetet mutat, ha megfelelő módon vizsgáljuk. Ez a mozgást meghatározó dinamika, a Newton-törvények determinisztikus voltának a következménye a mechanikai példákban. Ezek a mintázatok fraktálok [2]. A tanulók felfedezhetik, hogy kaotikus rendszerek esetén a fázistérben mindig megjelenik a fraktálstruktúra.

A kísérletek és a 2. fejezetben bemutatott számítógépes szimulációk segítségével a hallgatók megfogalmazhatják a káosz három legfontosabb jellemzőjét [1]: (i) a mozgás szabálytalansága; (ii) előrejelezhetetlenség, azaz a kezdeti feltételekre való érzékenység; (iii) strukturált geometriai mintázat, azaz egy fraktálszerkezet megjelenése a fázistérben. Ez a lépésről lépésre történő felfedezési folyamat nagy lelkesedést váltott ki a diákokban.

Átbeszéltük az iskolai tananyagban megismert mozgásformákat, és felismerték, hogy az inga szabályos periodikus mozgása néhány mágnes pólusai közé helyezve azonnal szabálytalanná válik. A Föld Nap körüli keringése periodikus, a Plútó pályája a kutatások szerint azonban már kaotikus [3].

A fraktálok világa önmagában is elvarázsolta a diákokat a gyönyörű csikóhalaknak, örvényeknek, szigeteknek és öblöknek köszönhetően, amelyek például a Mandelbrot- és Julia-halmazokban [4] jelennek meg. Örömteli érzés, hogy a természetben oly gyakran előforduló formák, mint például a fák vagy a levelek, leírhatók a tudomány nyelvén [2]. A diákokat meglepte, hogy a hegyeket és a felhőket a számítógépek fraktálokként tudják előállítani. Megbeszéltük azonban azt is, hogy a természeti fraktálok túlnyomó többsége nem kapcsolódik a káoszhoz.

1.3. Alapvető fogalmak

A káoszhoz kötődően természetes, hogy a középiskolásokkal megbeszéljük az előrejelezhetőség kérdését [1]. Már az egyiptomiak meg tudták mondani előre a napfogyatkozás pontos percét, de az időjárás pontos előrejelzése még ma is kihívás. Nemcsak az összetett jelenségek, mint például az időjárás-előrejelzés jelenthetnek problémát, hanem a mágneses inga vagy bármely egyszerű kaotikus rendszer mozgásának előrejelzése is.

Amikor a tanítási modul során mágneses ingával kísérletezünk, az inga pályáját egymást követően kétszer, amennyire lehetséges, azonos pozícióban lévő nyugalmi állapotból indítjuk, és követjük az inga mozgását. Már rövid idő elteltével látható egy kis eltérés a két pálya közt, egy idő után pedig teljesen más lesz a két pálya. A rezgetett inga mozgását vizsgálva hasonló jellemzőket figyelünk meg. Néhány diák ezt azzal magyarázta, hogy a két kiindulási pont nem teljesen azonos. Hozzátették azt is, hogy véleményük szerint ez nem indokol ekkora különbséget néhány másodperc után. Ezért kísérleti megfigyelésünket számítógépes szimulációkkal igazoltuk. Megvizsgáltuk a rezgetett inga mozgását számítógépen. Ezt a leggyorsabban egy jó e-learning weboldalon [5] található Excel programmal tudjuk megtenni [6]. A programot kétszer futtattuk le, két különböző kezdőfeltétellel, amelyek az ötödik tizedesjegyben különböztek egymástól. Kirajzoltattuk az útvonalakat és összehasonlítottuk őket. A szimuláció gyorsan divergáló pályákat adott, noha itt pontosan tudtuk, milyen kicsi a különbség a két kezdeti feltétel között. Bebizonyosodott, hogy a determinisztikus egyenletek ismerete ellenére a rezgetett inga mozgása előrejelezhetetlen.

A pillangóeffektus kifejezést a kezdeti körülményekre való érzékenység szinonimájaként emlegetik, amely Gleick a káosz népszerűsítésére írt könyvének [7] köszönhetően vált közismertté. Az elnevezés utalás arra a népszerűvé vált „definícióra“, hogy egy brazíliai pillangó szárnycsapása is befolyásolhatja, vajon kialakul-e orkán New Yorkban. Ez a kaotikus viselkedés a kezdeti feltétekre való érzékenység sarkított, újságírói túlzás szintű tálalása [8]. A diákok egyetértettek abban, hogy ennek a kifejezésnek a használatában óriási a félreértés veszélye, ami egyfajta nihilizmusra vezethet, ha nem mondjuk ki, hogy a káoszban is vannak jól előrejelezhető állítások (például: az attraktor biztosan el lesz érve, és a rajta lévő mozgás statisztikai jellemzői teljes mértékben megjósolhatók).

Mind a hosszú, mind a rövid tanítási programban az utolsó óra célja a szintetizálás és az összegzés volt. A tanítási program ezen utolsó órájában gyakran heves vita alakult ki: ha ismerjük a mozgásegyenleteket, miért nem lehet megjósolni a rendszer viselkedését. A diákok részéről minden esetben egy nagyon stabil determinisztikus világképpel szembesültem. Ennek gyengítése érdekében megbeszéltük, hogy a rendszert leíró mozgásegyenletekben a nemlineáris tag (például másodfokú tag vagy szinuszos tag) az, amely felnagyítja a kezdetben kis hibákat és bizonytalanságokat. Míg a lineáris egyenleteknél a hiba legfeljebb lineárisan nő időben, addig itt exponenciálisan nő. Ez okozza a kezdeti feltételekre való nagyfokú érzékenységet. Aztán jött a következő kérdés: miért beszélünk káoszról – ami a szó mindennapi használatában rendezetlenséget, összevisszaságot jelent – ha ismerjük a determinisztikus egyenleteket? Erre egyetlen válasz adható: ezt a jelenséget determinisztikus káosznak kell neveznünk. Pontosan a determinisztikus attribútum mondja meg nekünk, hogy ez különbözik a rendezetlenségtől.

Elfogadták ezt a magyarázatot. Az egyik csoport még azt is megfogalmazta, hogy nem segítette elő a megértést, hogy ezt a jelenséget a tudományos szóhasználatban annak idején, a 70-es években, káosznak nevezték el.

1.4. Az oktatási modul és annak két változata

Az 1.1. táblázat bemutatja, hogyan épül fel az oktatási modulunk. A tanítási program előtt és után a tanulók tesztet töltöttek ki, hogy követni tudjuk egyes, a káoszhoz kötődő, jellemző fogalmak változásainak alakulását az oktatást követően. Terítékre került az a kérdés is, hogy mikor hasznos, illetve mikor kerülendő a káosz megjelenése adott esetben egy rendszerben. Levontuk azt a következtetést, hogy a keveredési folyamatokban, mint például a betonkeverő gépek, a káosz nagyon hasznos (bővebben visszatérünk erre a 3. fejezetben), és nagyon sok esetben, például gépek, járművek működése esetén, pedig kerülendő. Az utolsó foglalkozáson szabad beszélgetést folytattunk a tapasztalatokról és összegeztük felfedezéseinket.

óra	téma	tartalom, fogalmak
1.	Bevezető - Egyszerű kaotikus mechanikai rendszerek	Mágneses inga. Rugalmas inga. Kettős lejtőn pattogó labda. Rezgetett inga – felvételről
2.	Fraktálok	Természetes fraktálok, matematikai fraktálok (Cantor-halmaz, Cantor-szálak, stb.)
3.	Példák kaotikus mozgásokra – Számítógépes szimulációk	Számítógépes szimulációk: – valódi térbeli pálya – paraméterek beállítása – érzékenység a kezdeti feltételekre – pillangóhatás – fázistér – kaotikus attraktor
4.	A káoszhoz tartozó fogalmak kísérleteken keresztül	Periodikus – kaotikus mozgás Lineáris – nemlineáris dinamikai rendszerek Előrejelezhetőség – Érzékenység a kezdeti feltételekre Determinisztikus káosz
5.	Kézműves foglalkozás	Márványozás
6.	Hasznos a káosz vagy kerülendő?	Mikor hasznos a káosz? Keveredés – Pék leképezés – Tésztagyúrás – Gyurmázás Stabilitás – Instabilitás
7.	Környezeti szennyeződések terjedése	RePLaT-Chaos-edu program használata
8.	Káosz különböző skálákon	Káoszra jellemző mintázatok összehasonlítása
9.	Ismétlés. Összefoglalás	
10.	Összegző beszélgetés	

1.1 táblázat: Tanmenet a Káoszfizika oktatási modulhoz

Mint már említettem, a programot beépítettem a tanmenetbe is úgy, hogy néhány órát szánok rá. Ennek érdekében a tananyagot 5 tanórás egységre csökkentettem. Öt alkalommal tanítottam a tanórákon, különböző tanévekben, 20-26 fős, azonos korú csoportokban. Az órák felépítését az 1.2. táblázat mutatja. Ez a Mechanika fejezet tanítása során, a Rezgések, hullámok fejezet keretében történt, mindenképp az ingákkal való ismerkedést követően. Elmondtam a diákoknak, hogy lényegében a Modern fizika egy új fejezetével találkoznak. A káosz jellemzőit a kísérletek során, illetve a szimulációk eredményeit megtekintve ismerték meg. Mindkét esetben felhasználtuk a korábbi csoportok eredményeit, melyek a következők voltak: 1. A kísérletek során videóra rögzített mozgást a Tracker segítségével digitalizálták, és ezeket összehasonlították, és így például kimutatták az érzékenységet a kezdőfeltételekre (lásd 2.2.ábra); 2. Excel-alapú szimulációt készítettek, ezzel is igazolták többek között a kezdőfeltételre való érzékenységet (lásd 2.3 fejezet). A káoszfizika tananyagnak ezt a változatát az online oktatásban is sikeresen tanítottam, kevés módosítással, e-learning anyag formájában.

Óra sorszáma	Téma	Tartalom, fogalmak
1.	Bevezető - Egyszerű kaotikus mechanikai rendszerek	Mágneses inga. Rezgetett inga és Kettős lejtőn pattogó labda – felvételről
2.	Fraktálok	Természetes fraktálok, matematikai fraktálok (Cantor-halmaz, Cantor-szálak, stb.)
3.	Példák kaotikus mozgásokra – Számítógépes szimulációk	Számítógépes szimulációk: – valódi térbeli pálya – paraméterek beállítása – érzékenység a kezdeti feltételekre – pillangóhatás – fázistér
4.	Kézműves foglalkozás	Márványozás
5.	Környezeti szennyeződések terjedése. Káosz különböző skálákon	RePLaT-Chaos program röviden Káoszra jellemző mintázatok összehasonlítása

1.2. táblázat: Rövidített tanmenet a Káoszfizika oktatásához

Irodalom

1. Tél Tamás, Gruiz Márton: *Kaotikus Dinamika*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
2. B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, 1983.
3. Diacu, F., Holmes, Ph. *Celestial encounters: The Origins of Chaos and Stability*, Princeton Science Library, 1996.
4. Kecskés Lajos: Egy ölnyi végtelen, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
5. http://theorphys.elte.hu/fiztan/chaosH
6. http://theorphys.elte.hu/fiztan/numH
7. James Gleick, Káosz: Egy új tudomány születése, Göncöl Kiadó, 1999.
8. Tél Tamás: A káosz természetrajza, Természet Világa 129. évf. 9. sz. 386–388. o.1998.

A tézissel kapcsolatos publikációim

I. Bajkó: *Chaos Physics in Secondary School – A Material Applicable in Online Teaching* Horizons of mathematics, physics and computer sciences **50**, 22-34 2021

I. Bajkó *Chaos Physics in High School - Challenges in Multimedia Application* GIREP Conference 2022 J. Phys.: Conf. Ser. 2297 012006

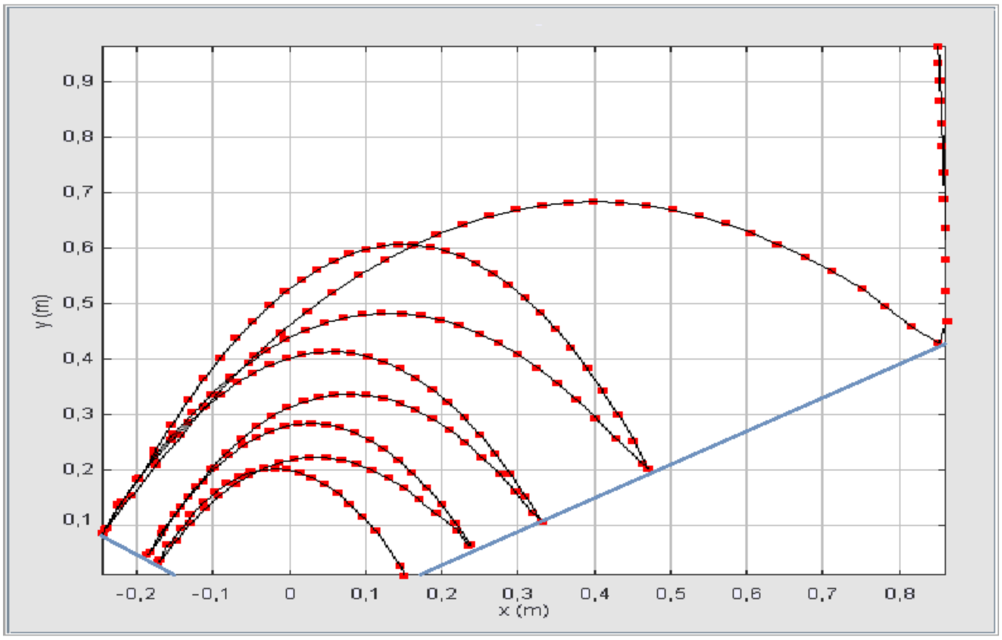
2. Hogyan segíthetik a digitális technológiák a káosztanítást?

Kimutattam, hogy az egyszerű kaotikus mechanikai rendszerek digitális eszközökkel történő tanulmányozása középiskolában elvégezhető. A káosz jellemzőit a tanulók sikeresen tanulmányozzák, a kezdeti feltételekre való érzékenységet felismerik.

2.1. A Tracker használata a kísérletek adatainak rögzítéséhez, megjelenítéséhez

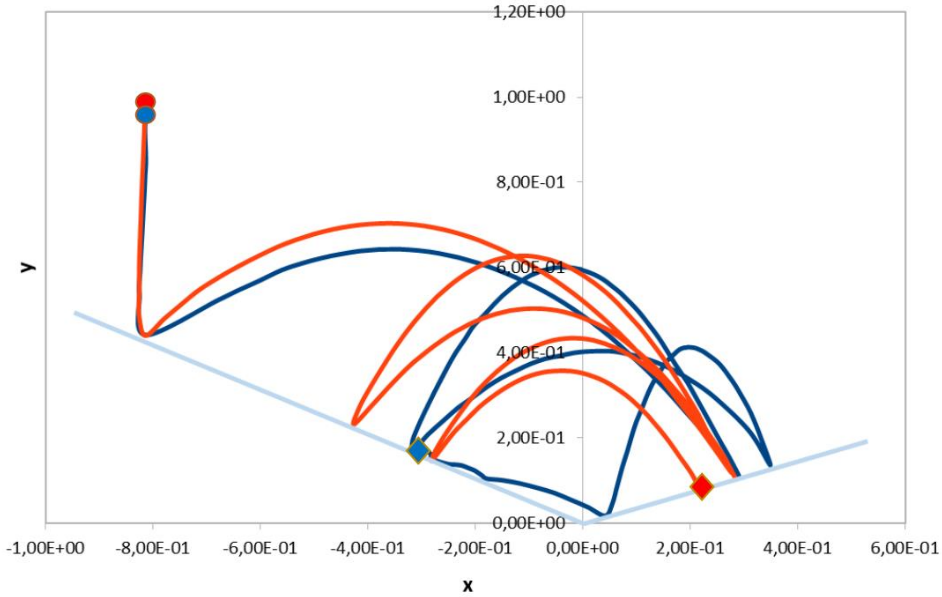
A káoszhoz kapcsolódó mérések értékeléséhez szükségünk van olyan szoftverekre, amelyek a megfigyeléseket adatokká konvertálják. Tapasztalataim szerint a Tracker videóelemző és modellező eszköz (https://physlets.org/tracker/) megfelelő erre a célra. A káosz tanítása során a bevezető kísérletek után ezzel a digitalizáló szoftverrel követtük a kettős lejtőn pattogó labda helyzetét (1.2.b ábra).

Megkértem a tanulókat, hogy a Tracker programmal rögzítsék videóra a pingponglabda mozgását két olyan esetben, amikor a labdákat közel azonosan kezdőfeltételekkel indítottuk, és mindkét esetben rajzoltassák ki a labda helyzetét az idő függvényében. A 2.1 ábrán az egyik eredményt láthatjuk.



2.1 ábra. A kettős lejtőn pattogó labda pályája, a tanulók által Trackerrel digitalizálva (a kezdeti helykoordináták: x = 0,9 m, y = 0,95 m)

Ezt követően a Microsoft Excel szoftverrel olyan pályákat ábrázoltunk grafikusan, amelyeket két, közel azonos kezdeti helyzetből indítottunk. A képből azonnal kiderült, hogy a két ábrázolt pálya meglehetősen eltérő (lásd 2.2 ábra). Így a tanulók saját kísérletükben szemtanúi lehettek a pillangóeffektusnak: láthatták, hogy a kezdeti állapot észrevehetetlenül apró pontatlanságai merőben eltérő forgatókönyvekhez vezethetnek. Más szavakkal, a vizsgálat gyönyörűen bemutatta a kezdeti feltételekre való érzékenységet.



2.2. ábra Két idősor összehasonlítása közel azonos kezdeti feltételek esetén, Excel-ben ábrázolva. A pingpong-labda kezdeti helyzetét mindkét esetben a kis kör jelzi, a mérés végén a helyüket pedig a rombusz.

Figyeljük meg, hogy bár a két ábrázolt pálya közel azonos kezdőhelyzetből indult, az egyik esetben (piros vonal) a labda a megfigyelésünk utolsó pillanatában a jobb oldali lejtőn pattan, míg a másik esetben (kék vonal) a bal oldali lejtőn, így ugyanannyi idő elteltével a két esetben ellentétes lejtőkön pattan a labda.

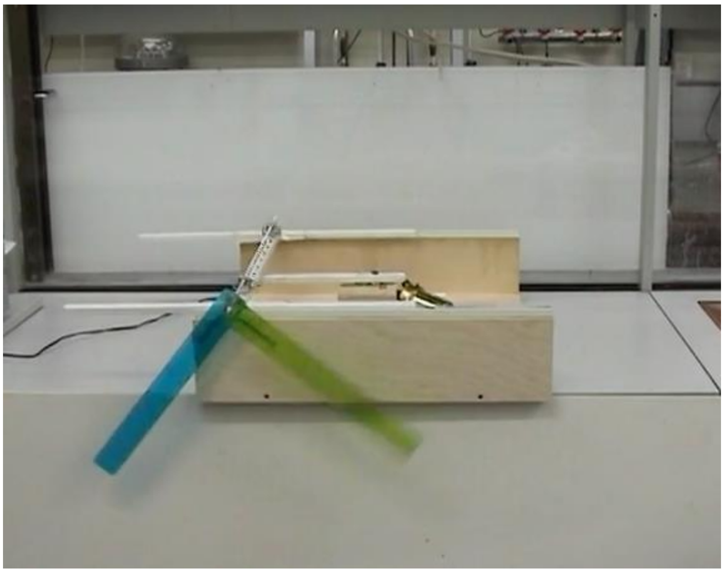
2.2. Multimédiás tananyag a pillangóeffektus gyakorlati jelentőségének alátámasztására

A káosztanítási modulomban teljes multimédiás anyagot is felhasználtam. Külön hangsúlyt helyeztem a kezdeti feltételekre való érzékenység, közismertebb szóhasználattal a pillangóeffektus, a káosz talán legfontosabb jellemzőjének feltárására.

Az általunk használt e-learning anyag [http://theorphys.elte.hu/fiztan/chaosH/] a káosz fontos tulajdonságai szerint épül fel (szöveges bemutatása Tél Tamás *Chaos physics: what to teach in three lessons?* cikkében [2] olvasható). A korábban is említett: 1. időbeli szabálytalanság, 2. előrejelezhetetlenség, 3. a jól megválasztott reprezentációban, a fázistérben megjelenő strukturált mintázatok mellett és – talán legnehezebben felismerhető tulajdonságként – a tananyag hozzáteszi 4. a valószínűségi értelemben vett tökéletes előrejelezhetőséget. Az e-tananyag lehetőséget kínál a káosz strukturált feltárására e négy fő jellemző mentén. A fentebb leírtak szerint modulomban az előrejelezhetetlenségre, a pillangóeffektusra helyeztem a hangsúlyt.

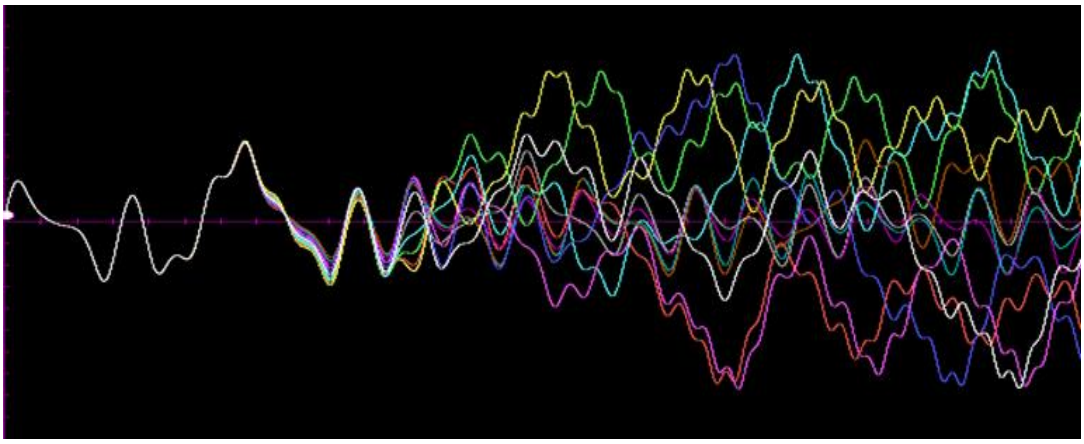
A tanítási modulban korábban már szerepelt a rezgetett inga (1.1.b ábra), melyben az inga felfüggesztési pontját vízszintesen, időben periodikusan mozgatjuk.

Az e-learning weboldalon [1] először az ezzel a rezgetett ingával végzett kísérletek videófelvételeit néztük meg. További kísérletezéshez két, gyakorlatilag egyforma vonalzót ugyanarra a periodikusan rezgetett tengelyre rögzítettek, így a vonalzók két párhuzamos síkban mozognak ütközés nélkül. Még abban az esetben is, ha a két vonalzó mozgása hasonló módon indul, mozgásuk rövid időn belül teljesen különbözővé válik, amint azt a 2.3. ábra mutatja. A jelenség magyarázata ezúttal is a pillangóeffektus, amely jelen esetben jól megfigyelhető a videófelvételen.



2.3. ábra Két azonosan rezgetett fizikai inga (kék és zöld vonalzó) az [1] weblapon található videó pillanatfelvételén kevéssel a szemmel azonosnak tűnő kezdeti állapotokból történő indítás után

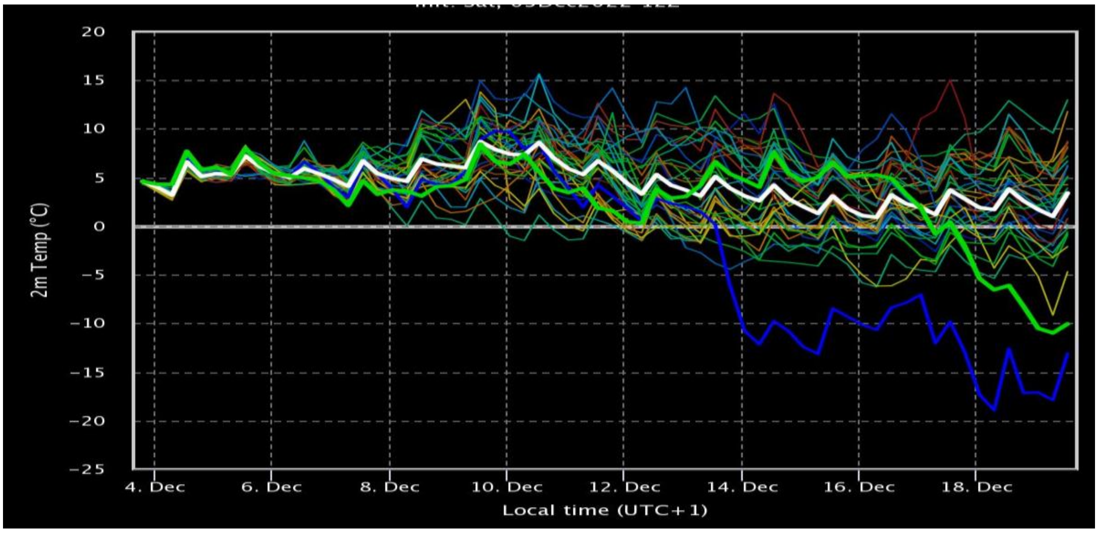
A kísérletekről készült filmek mellett a weboldal szimulált eredményeket is bemutat. Egy ilyen kép látható a 2.4. ábrán, amely 11 azonos, rezgetett vonalzó szögsebességének időbeli változását ábrázolja különböző színekkel. A 11 vonalzó végpontjai ugyanabban a pozícióból indultak, kissé eltérő kezdeti szögsebességgel. Eleinte a kirajzolt vonal főleg fehérnek tűnik, a színes görbék jó közelítéssel egybeesnek. Néhány rezgetési periódus után azonban a színek gyorsan szétválnak. A tanulók ismét megfigyelhetik a pillangóeffektust, ezúttal precíz numerikus szimuláció során. Azt is meg tudják fogalmazni, hogy a grafikonok szétválása azt jelenti, hogy a mozgás néhány periódus után már nem jelezhető előre.



2.4. ábra Rezgetett inga: szimuláció 11 egyforma fizikai ingával kissé eltérő kezdeti szögsebességekből indulva (a kép az [1] oldalról származik)

A modern meteorológiai előrejelzésekben hasonló diagramokkal találkozunk, amelyek a légkör közel azonos állapotaiból kiinduló különböző szimulációk eredményeit mutatják be. Az ajánlott e-learning anyagot tartalmazó oldalról elérhetjük a Német Meteorológiai Szolgálat nyilvános oldalát [4]. Könnyedén kiválaszthatjuk a kívánt földrajzi helyet, és a következő két hétre megadja az oldal az adott hely hőmérsékleti vagy csapadék-előrejelzésének grafikonjait.

Példaként a 2.5. ábrán a 2022. december 3-i időjárás-előrejelzést mutatjuk be, Budapestre. Eleinte a görbék együtt mozognak, ami azt jelenti, hogy a várható időjárás jól kiszámítható. Attól a ponttól kezdve, ahol a színek élesen elkülönülnek, a kicsit különböző kezdeti feltételek függvényében az időjárás egészen eltérő módon alakul. Ez azt jelenti, hogy a meteorológiai előrejelzések csak néhány napig megbízhatóak: példánkban 3 napig.



2.5. ábra A felszíni hőmérsékletre vonatkozó előrejelzés két hétre 2022. december 3.-tól kezdődően, Budapestre: 50 különböző szimuláció együttese, amelyek a légkör közel azonos állapotaiból indulnak ki (letöltve a Német Meteorológiai Szolgálat oldaláról [4]). (A vastag fehér görbe a színes szimulációk átlagát mutatja, a vastag zöld egyetlen, a többinél nagyobb felbontású előrejelzés.)

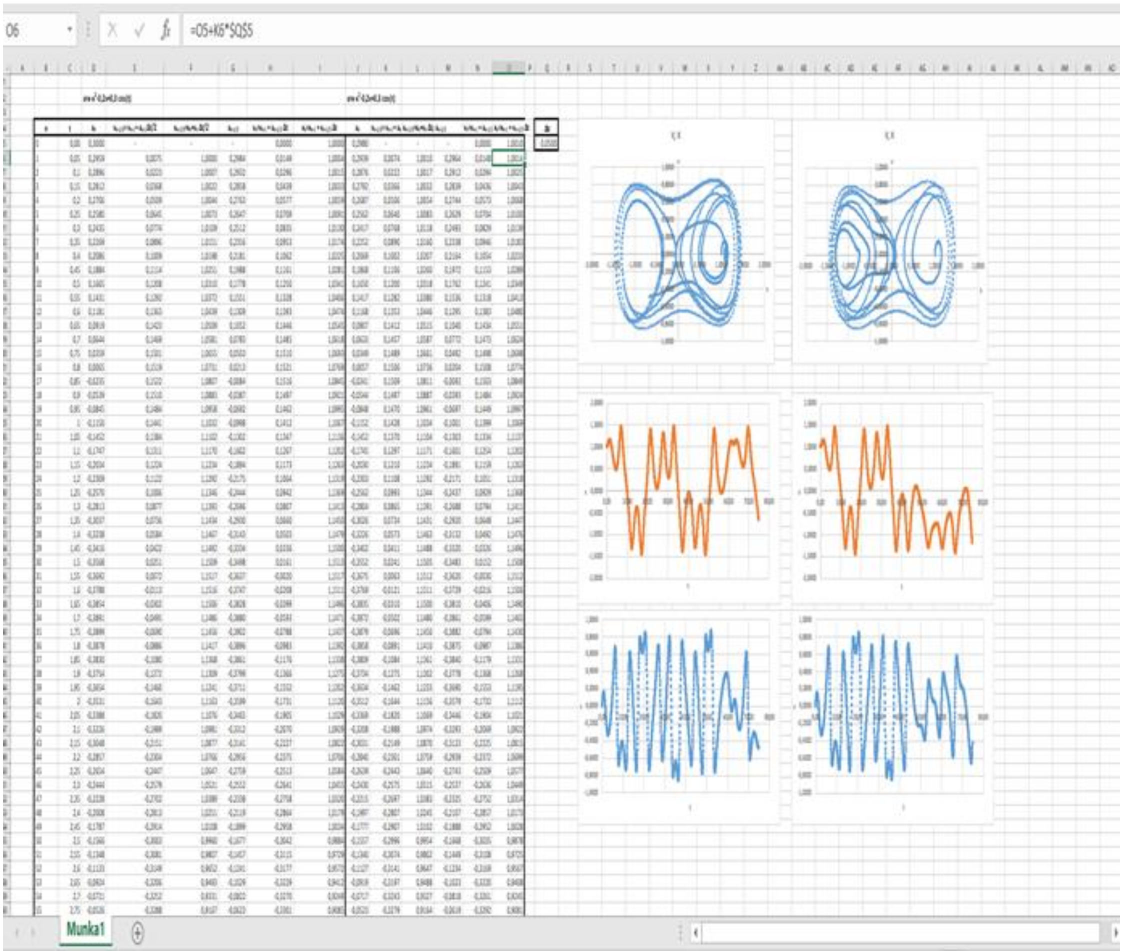
A tanulók sokkal mélyebben megértik a természeti jelenségeket, ha összehasonlítják a várható felszíni hőmérsékleti grafikont a 11 vonalzó szögsebesség-szimulációjának grafikonjával, és felfedezik a két ábra közös jellemzőit. Mindkét esetben a görbék rövid ideig együtt mozognak. A diákok megfigyelhetik, hogy az inga mozgását sem lehet sokáig megjósolni, akárcsak az időjárást. Tehát ismét találkoznak a pillangóeffektussal, itt különösen az előrejelezhetetlenség összefüggésében. Mivel az időjárásban 1 nap tekinthető a gerjesztés periódusidejének, mindkét rendszer néhány periódusig jelezhető csak előre. A diákok meglepetten veszik észre, hogy annak ellenére, hogy az időjárás sokkal bonyolultabb rendszer, mint a rezgetett inga, előrejelezhetetlenségi szempontból nagyon hasonlóak.

2.3. Számítógépes szimulációk, Excel munkalapok

A káosz oktatásban az is fontos, hogy a tanulókat bevonjuk a modellalkotásban, a számítógépes szimulációkba. Ez, már a káosz hazai középiskolai tanításának kezdetén, a 90-es években is megfogalmazódott, s elsősorban Gruiz Márton nevéhez fűződik. Ő az [5] könyv 8.2-8.4 függelékében közérthető módon összefoglalta a mozgásegyenletek numerikus megoldásának alapgondolatát, s az akkor széleskörűen elterjedt Turbo Pascal nyelven írott rövid programokat is bemutatott. A könyv minden szimulációs ábrája ilyen programok eredményein alapul. Hasonló szellemben született meg a Kaotikus mozgások szimulációs programok [6] programcsomag, mely nagyszámú kaotikus mozgás szimulálásának futtatását tette lehetővé, az eredmény grafikus ábrázolásával együtt, szabadon változtatható paraméterekkel és kezdőfeltételekkel. A programcsomag MS-DOS operációs rendszerben működött, s magam is sokszor és szívesen használtam óráimon, amíg az operációs rendszer támogatása meg nem szűnt.

Az Excel munkalapokon alapuló szimulálások lehetővé teszik a diákok közvetlen részvételét a mozgáskövetésben, hiszen – nem túl nagy pontossági igény esetén - néhány utasítás beírására van csak szükség, melyre maguk is képesek. Hazánkban az ilyen típusú iskolai szimulálások talán első sikeres használója Jaloveczki József volt. A részletek megtalálhatók doktori dolgozatában [7] és tanítványával írt cikkeiben [8, 9].

Tanítási modulomban a modellalkotással, a szimulálással való ismerkedéshez a diákok a [10] oldalon található, szabadon elérhető, jól felépített Excel alapú e-learning anyagot használják. Az interaktív bevezetés után, amely megérteti a tanulókkal a mozgásegyenletek numerikus felgöngyölítését, modellek listáját kínálja, fokozatosan haladva az egyszerű esetektől a bonyolultabb kaotikus mozgások felé. Vizsgálatunkhoz a gerjesztett csillapított anharmonikus rezgés modelljét választottam. Először a mozgás numerikus megfigyelésével ismerkedtek meg a diákok, megtapasztalták, hogy a kaotikus rendszerekben az időbeli fejlődés nem mutat semmilyen ismétlődést, nem figyelhetünk meg szabályosságot, így előrejelezhetetlenek ezek a rendszerek. Következő lépésben két olyan kezdeti feltétel választható, amelyek csak a 4. tizedesjegyben különböznek egymástól. A 2.6. ábra középső sorának grafikonjai mutatják, hogy az $x(t)$ kitérés-idő görbék különbözőek lettek. A diákoknak így lehetőségük volt a pillangóeffektus megfigyelésére saját szimulációikban. Különböző ábrázolásokat kipróbálva a tanulók azt is megtanulták, hogy a pillangóeffektus minden, a káosszal kapcsolatos mennyiségben megjelenik, például a sebesség (v) idősorában (a legalsó görbék a 2.6. ábrán) és a fázistérbeli diagramokban is (legfelső görbék).



2.6. ábra Numerikus szimulációval kiszámított trajektóriák Excel munkalapok (bal oldali táblázat) és grafikus ábrázolások (jobb oldali görbe-párok) segítségével: kaotikus oszcillátorok két különböző kiindulási állapottal (eltérés csak a 4. tizedesjegyben van).

2.4. Fejlettebb ingyenes szoftvercsomagok

Ingyenes szoftvercsomagok is elérhetők az interneten. A káosz szemléltetése szempontjából különösen alkalmas a Dynamics Solver (http://tp.lc.ehu.es/jma/ds/ds.html). Ennek felismerése, a tanári PhD oktatásba történő beépítése és folyamatos népszerűsítése Nagy Péter nevéhez kötődik(http://csodafizika.hu/ds/). A Dynamics Solver ingyenesen letölthető szoftver, amelyet kifejezetten dinamikus rendszerek pontos szimulálására és grafikus ábrázolására terveztek azoknak, akik nem rendelkeznek programozási ismeretekkel [11]. Azt tapasztaltam azonban, hogy a diákoknak hosszabb időre van szükségük a szoftver használatának elsajátításához, ezért csak akkor javasolható az alkalmazása, ha nincs időbeli korlát, vagy ha különösen elkötelezett, pl. informatikai érdeklődésű tanulókról van szó. A tanár kollégák által készített Dynamics Solver programok azonban kiváló eszközként szolgálhatnak a káosz különböző megnyilvánulási formáinak tanórán történő bemutatására. Értékes anyagok születtek, így például a nem forgásszimmetrikus tálban guruló golyó [12], az anharmonikus oszcillátor rezgései [13], a forgó mágneses térben mozgó iránytű [14], vagy a kölcsönható Fidget Spinnerek [15] kaotikus tulajdonságainak illusztrálására.

Átlagos tanulók számára a Dynamics Solver helyett más, kevésbé időigényes demonstrációs anyagokat választottam, elsősorban a szakköri csoportokban a tanulókkal közösen készített anyagokat, vagy például egy Geomag-ből megépített mágneses ingát bemutató anyagot [16].

A tanítási modul digitális szakaszában a felfedezés szabadsága és a tanári irányítás egyaránt szerepet kapott, míg a kísérletezés idején utóbbira nem volt szükség, a tanulók számára nagyfokú szabadságot biztosíthattam a felfedező tanulás szellemében.

2.5. A hatékonyság növeléséhez szükséges tanári digitális kompetenciák

Hazánkban széleskörűen elterjedt a Tracker használata: a tanulóknak tudniuk kell használni a Tracker programot az emelt szintű érettségi szóbeli részében, így az a tanárképzésnek is része. A magyar tanárképzésben megjelennek a programozáshoz kapcsolódó tárgyak, az ELTE-n például a „Matematikai módszerek fizikatanároknak II” és „A számítógépek használata”. Előbbiben a differenciálegyenletek megoldásának numerikus módszereivel ismerkednek meg, és alkalmazzák azokat Excel munkalapokon, míg utóbbiban a Python programozás elemeit tanulják meg.

Tapasztalataink alapján nem könnyű a tanároknak és a tanárjelölteknek megérteni a szimulációkban alkalmazott véges lépések módszerét. Ezzel együtt sok hallgató megtanul programozni az egyetemi évei alatt, de ez a tudás, mivel nem használják, tanulmányaik végére feledésbe merül. Nagyon hasznos lehet a tanárok számára, ha részt vehetnek a témával foglalkozó konferenciákon, workshopokon, továbbképzéseken. Ezeknek a workshopoknak gyakorlatorientálnak kell lenniük. A tanárképzésben egy lehetséges megoldás lehet az, hogy a záróvizsga témalistáját új kérdésekkel egészítsék ki, így számonkérésre kerülnének digitális technológiával kapcsolatos ilyen típusú kompetenciák is.

Nagyon hasznos a fizikatanároknak ezen technológiák használatának képessége, az Internet hatékony használata és a videofeldolgozó programok használatának kompetenciája. A tanárnak ismernie kell a megfigyeléseket (vagy videókat) adatokká, grafikákká alakító szoftvereket, mint például a Tracker vagy bármilyen más hasonló program, és tudnia kell kész szoftvereket használni. Egy tanárnak előnyt jelent, ha programokat is tud írni, pl. Excel, Python vagy C++ nyelven. Ha nem tud, akkor ezen a területen a nemlineáris dinamikai rendszerek tanulmányozására a Dynamics Solver is nagyon jó lehetőség.

Irodalom

1. http://theorphys.elte.hu/fiztan/chaosH
2. T. Tél, Chaos physics: what to teach in three lessons? Phys. Educ. **56**, 045002(8) (2021)
3. http://fiztan.phd.elte.hu/letolt/konfkotet2015.pdf
4. https://www.wetterzentrale.de/en/
5. Tél Tamás, Gruiz Márton: *Kaotikus Dinamika,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
6. Gálfi László, Gruiz Márton, Hóbor Miklós, Tél Tamás: Kaotikus mozgások szimulációs program. ELTE TTK Elméleti Fizika Tanszék. (2001)
7. Jaloveczki József: Nemlineáris jelenségek vizsgálata diákköri-szakköri munkában (ELTE 2015)
8. Eichhardt Iván, Jaloveczki József: „Fizikázzunk egyszerűen, számítógéppel" Fizikai Szemle, No.9, 311-315 (2008)
9. Eichhardt Iván, Jaloveczki József: Numerikus módszerek a diákköri munkában, Fizikai Szemle, No.10, 348-351 (2009)
10. http://theorphys.elte.hu/fiztan/numH
11. Nagy Péter, Tasnádi Péter: Dynamics Solver - egy hatékony eszköz a káosz kutatásában és tanításában, *Matematikát, fizikát és informatikát oktatók (MAFIOK) 41. országos konferenciája, Konferenciakötet,* szerk: Talata I., Szent István Egyetem, Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest, 2017., pp. 169-17tt
12. Tóthné Juhász Tünde, Gócz Éva: Káosz egy tálban, Fizikai Szemle 2014/12, pp421–425, (2014)
13. T. Meszéna: Chaos at High School Scientia in Educatione 8, 238-246, 2017
14. Csernovszky Zoltán: Az iránytű harmonikus rezgésétől kaotikus mozgásáig, Fizikai Szemle 2017/6., pp. 198.-204.
15. Végh Péter, Izsa Éva: Egy apró játék kaotikus kalandjai - 1. rész, Fizikai Szemle 2022/8 pp. 248-255, - 2. rész, Fizikai Szemle 2022/9 pp. 281-284.

16. Magnetic pendulum – Dynamic Geomag
https://www.youtube.com/watch?v=Qe5Enm96MFQ

A tézissel kapcsolatos publikációm

I. Bajkó *Chaos Physics in High School - Challenges in Multimedia Application* GIREP Conference 2022 J. Phys.: Conf. Ser. 2297 012006

3. A kézművesség a káosztanításban

Jó gyakorlatot fejlesztettem és próbáltam ki a káoszfizika megismerésére kézműves tevékenységek – például a márványozás – segítségével.

3.1. Miért használjuk a kézművességet a káoszfizika megismertetésére?

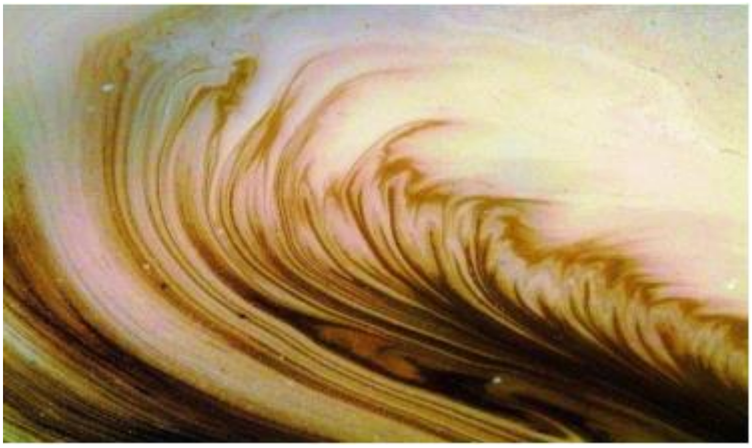
A káosztanítási modulom legegyedibb eleme egy mindenképp megosztásra érdemes jó gyakorlat: a kézműves tevékenység beemelése a káosz középiskolai megismertetésébe. Az érdeklődés felkeltése, az alkotás örömének megtapasztalása mellett a kézműves tevékenységek segítik a tanulókat a káoszfizika megértésében, elvezethetnek az elmélyülés igényéhez, és lehetőséget adnak a káosz jellemzőinek feltárására is. Az általam fejlesztett tananyagon belül számos környezeti vonatkozású téma terítékre kerül, ezekhez is szorosan kötődik mindaz, amivel alkalmuk van megismerkedniük a diákoknak a kézműveskedés során.

A kézművességen alapuló egység az aktuális tananyagot kiegészítő tartalmakat foglal magába. Az 1. fejezetben bemutattam egy hosszabb és egy rövidebb változatot, annak függvényében, hogy hány tanítási órát tudunk rászánni a témára egy adott helyzetben, egy adott osztályban. Most tömören a rövidebbet idézem fel (1.2. táblázat). Első lépésként a tanár bevezeti a diákoknak a káoszfizika alapjait, valamint a káosz jellemzőit: az előrejelezhetetlenséget, ahogy az előző fejezetekben mutattuk, továbbá a fázistérben megjelenő rendet, a fraktálszerkezeteket [1, 2]. Második lépésként a hallgatók megismerkednek a matematikai fraktálokkal. Következő lépésként a tanár bemutatja, hogy a kaotikus keveredés során fraktálszerkezetek válnak láthatóvá. A tanulók fraktálmintázatokat figyelhetnek meg keveredés közben (tejszín kávéba, szirup vízbe, tinta vízbe keverése vagy különböző festékek keverése). Ennek az oktatási egységnek a középpontjában a kézműves tevékenység, egészen pontosan a márványozás áll [3]. A kézműves foglalkozások során a tanulók megtapasztalják a minták kialakulásának folyamatát. A gyakorlati foglalkozások után kitérünk a környezeti áramlások témájára. A tanulók képesek lesznek felismerni a hasonló mintákat, amikor például a környezetszennyezéssel találkoznak, ahogyan majd látni fogjuk a 4. fejezetben.

A kézműves foglalkozások hangsúlyos megjelenésének oka a kaotikus sodródás sajátossága: A fraktálstruktúrák minden kaotikus folyamatban megjelennek, de rendszerint egy absztrakt térben, a fázistérben [4], ezért közvetlen megfigyeléskor nem válnak láthatóvá. Kivételt képez a kaotikus keveredés, például a szennyeződések terjedése, a kávéba öntött tejszín, a festékek keveredése. Ezekben a folyamatokban a fázistér megegyezik a valódi térrel, a fraktálszerkezet a valós térben jelenik meg, vagyis szabad szemmel, ill. fényképeken közvetlenül megfigyelhető. Ennek lehetünk szemtanúi a márványozás során is.

Szinte minden keveredési folyamat, melyben a diffúzió hatása nagyon csekély, kaotikus. Bármely kezdetben koncentrált festékcsepp követése során ugyanis azt tapasztaljuk, hogy a csepp anyaga rövid idő után összehajtogatott, szálas szerkezetet vesz fel. A szálasság erős megnyúlásra, a kezdetben közeli pontok gyors eltávolodására utal. Az ilyen minták megjelenése tehát közvetlenül bizonyítja a kezdeti feltételekre való érzékenységet, az előrejelezhetetlenséget, vagyis a pillangóeffektust, mindazt, amiről az előző fejezetekben szó volt. A megnyúlás fontossága itt látszik a legjobban, ezért itt érthető meg leginkább az az állítás is, hogy fraktálszerkezet fázistérbeli megjelenése mindig káoszra utal.

A 3.1. ábra kaotikus keveredési mintára mutat példát a hétköznapokból: olaj eloszlása pocsolya felszínén. Nagyon jól látható a szálas szerkezet a felvételen.



3.1. ábra Olaj a víz felszínén (Traian Antonescu felvétele). A szálasság megjelenése a keveredési folyamat kaotikusságának közvetlen bizonyítéka.

3.2. Alkalmazott technikák - kaotikus keveredés

3.2.1. Márványozás

A tanítás során festettünk papírt, gyertyát, tojást márványozó-technikával. A márványozó technika volt a legfontosabb, az alapvető technikánk, hiszen ez kaotikus keveredés két dimenzióban, azaz festékek keveredése a víz felszínen, ahol egyrészt jól követhető a mintázat kialakulása, másrészt ennek a mintázatnak egy-egy adott állapotát rögzíteni tudjuk.

A márványozási technika [5, 6] lépései a következők: 1. Kis mennyiségben két vagy három különböző márványozó festéket öntünk a víz felszínére. 2. Összekeverjük a festékeket egy hurkapálcával (3.2.a ábra). 3. Egy papírlapot helyezünk óvatosan a felületre (3.2.b ábra). 4. A lapot gyors, de határozott mozdulatokkal a felülethez simítjuk, hogy teljes érintkezésbe kerüljön a felületen lévő festékkel, ahogy a 3.3.a ábra mutatja. 5. A lapot egyik szélénél megfogjuk és lassan, óvatosan felemeljük, ahogyan az a 3.3.b ábrán látható, hogy a festékfelület nehogy elszakadjon a hirtelen mozdulat során, szépen egyben maradjon a mintánk a papírlap felületén, így levonjuk a papírlapra a mintázatot. 6. Ennek eredményeként szép, szálas fraktálszerkezet válik láthatóvá, amelyet lakkal rögzíthetünk is.

a. b.

3.2. ábra a) Összekevert festékek a víz felszínén b) Ráhelyezzük a lapot a víz felszínére

a. b.

3.3. ábra a) Alaposan rásimítjuk a lapot a víz felszínén levő festékekre, hogy mindenütt érjen hozzá és simuljon teljesen rá a papír a festékre. b) Lassú, óvatos mozdulattal leemeljük a papírt, azaz levonatot készítünk, hogy a festékfelület egyben maradjon, a lapra ragadva.

Érdekességként megjegyezzük, hogy a márványozási technika egyáltalán nem új, a könyvek, iratok egyediséget biztosította már régebbi időkben is [7], például Japánban a 9-12. században (3.4.a ábra) vagy a Közel-Keleten a 15-16. században (3.4.b ábra). Ahol a determinisztikus káosz megjelenik, ott az előrejelezhetetlenséggel karöltve nagyon nagy változatosságot is találunk, mint például a kaotikus sodródás esetében is, ez is az oka, hogy nagyon alkalmas technika ez egyedi mintázatok létrehozására.

a. **b.**

3.4. ábra a) A 9-10. század környékén készült ez a márványozás Japánban, vaka (ősi japán versforma) van ráírva https://en.wikipedia.org/wiki/Paper_marbling b) Márványozott papírra írt vers a Koránból https://en.wikipedia.org/wiki/Paper_marbling Az ábrák mutatják, hogy a kaotikus sodródással kapcsolatos szálas szerkezet megjelenése már a történelmi időkben is ismert volt.

3.2.2. Gyurmázás

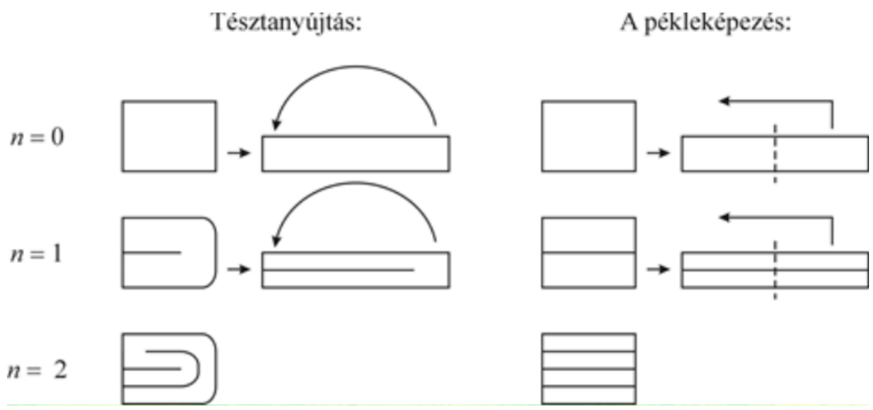
A márványozás mellett a másik fontos kézműves technika az óvodából is ismert és sokak által kedvelt gyurmázás [8]. Ekkor is keveredésről beszélhetünk, itt három dimenzióban, és ez a tésztagyúrás hétköznapi folyamatával hozható kapcsolatba.

Az eddigiekhez hasonlóan látványos mintázatokat szül két vagy három különböző színű gyurmarúd hajtogatása és nyújtogatása (3.5. ábra). Még a középiskolás tanulóknak is nagy örömére szolgál a szép fraktálszerkezetek saját kezű kialakítása. Az is kiderül a tanulók számára, hogy nagymamáik nem hiába hajtják össze és nyújtják a tésztát (a tészta nem más, mint sűrű folyadék), hiszen ők már rég tudják azt, amit az utóbbi időben a tudomány is megfogalmazott, hogy az egyik legjobb keveredést az ismételt nyújtás-összehajtás algoritmusa adja. A diákok felismerik, hogy tésztagyúrás lényegében kaotikus keveredés három dimenzióban.

a. b.

3.5. ábra a) Két, jól elütő színű gyurma b) Ezek ismételt összefonása, nyújtása és visszahajtása után látható fraktál mintázat: a két különböző színű gyurma kanyargó, szálas szerkezete

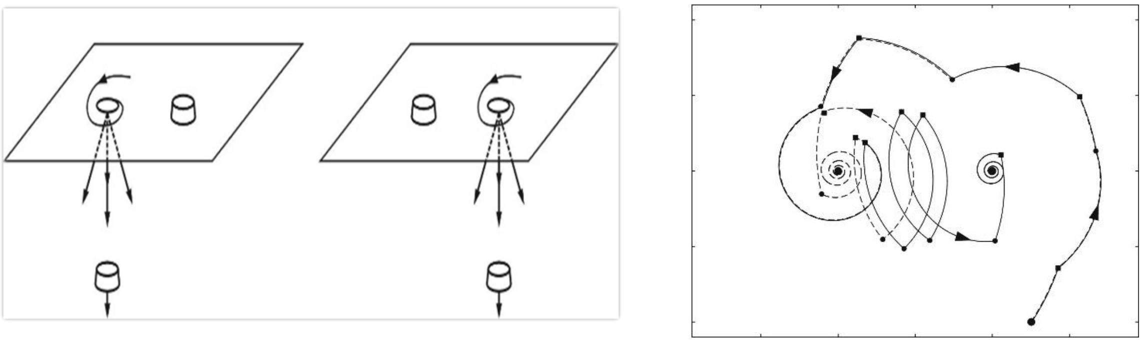
Ahogyan a 3.6. ábra bal oldalán is láthatjuk, a levelestészta készítésekor az összenyomott és egyszer megnyújtott tésztát visszahajtjuk. Az így kialakult kétrétegű darabot ismét megnyújtjuk, majd visszahajtjuk, és mindezt ismételjük. Ugyanezt tesszük az ún. pék leképezés követése során, ahogyan a 3.6. ábra jobb oldalán is megfigyelhető [4]. A keveredés a leghatékonyabb akkor, ha a folyamat kaotikus – így a káosz egyik gyakorlati hasznosítását is megismerjük.



3.6. ábra A tésztanyújtás sematikus ábrázolása és a pék leképezés alkalmazási folyamata egy négyzet alakú területre. (A kép forrása [4], szerzői engedéllyel)

3.3. Hogyan segíti a kézműves tevékenység a kaotikus sodródás lényegének megértését?

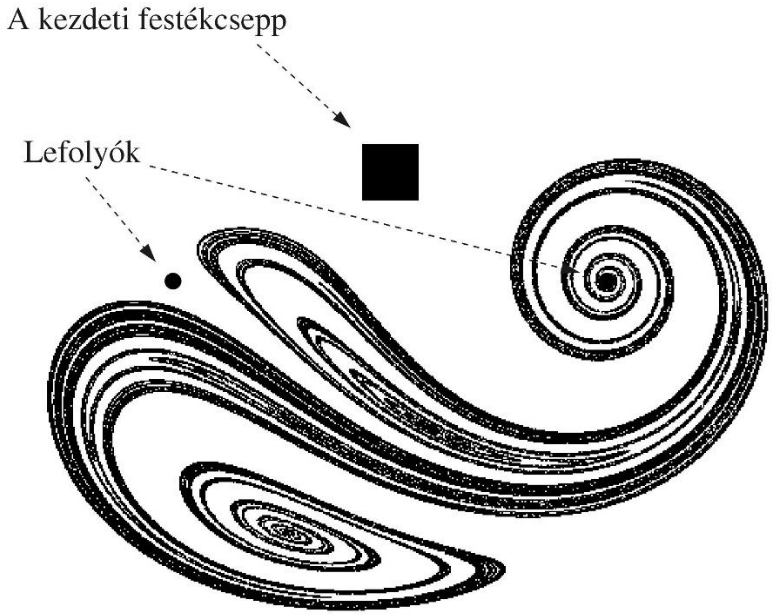
A kaotikus keveredés a káosz egyik legismertebb és leglátványosabb jelensége. Az egyik bevezető órán egy festékcsepp terjedését vizsgáljuk szimulálással egy két leeresztőnyílású tartályban (3.7. ábra), ami egyben alkalmas a kaotikus sodródást szemléltetésére is.



a. b.

3.7. ábra a) A kétlefolyós kád: egy széles, lapos edényben a felváltva nyitva tartott lefolyók következtében kialakuló áramlás kaotikus sodródást okoz. b) Két, közelről induló festékrészecske pályája kétlefolyós kádban (egyiket folytonos, másikat szaggatott vonallal jelöltük). A fekete pontok a bal oldali lefolyó nyitási pillanataihoz tartozó helyzetek, a négyzetek a jobb oldali lefolyó nyitási pillanatait jelölik. (Képek forrása [4], szerzői engedéllyel)

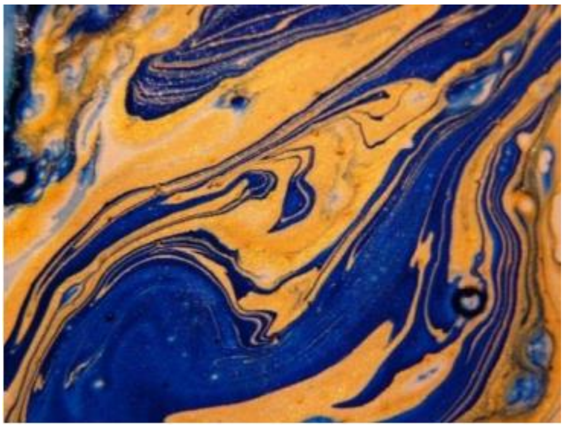
Meglepő, hogy a kezdetben négyzet alakú fekete csepp nagyon rövid idő alatt megváltoztatja eredeti alakját oly módon, hogy egy jól körülhatárolható fraktálstruktúra válik láthatóvá (3.8. ábra), miközben minden részecske leírja a saját kaotikus pályáját.



3.8. ábra Egy festékcsepp kezdeti és a lefolyók 5 egymást követő nyitása-csukása utáni alakja a kétlefolyós kádban. (A kép forrása [4], szerzői engedéllyel). A két fekete pont a lefolyók helyét mutatja. A kisméretű kezdeti alakzat hosszú, feltekeredett szállá történő megnyúlása a káosz, a pillangó effektus következménye.

Az így kialakult minta nagyon hasonlít a tanulók által a kézműves foglalkozások alatt a festékek keveredése során tapasztalt mintázatokra (3.9.a. ábra).

A 3.9.a ábrán a víz felszínén festékek eloszlását láthatjuk, amelyet a kaotikus keveredés hozott létre, a 3.9.b ábra a tanulók által készített fraktál szálas mintázatú levonat egy részét mutatja egy papírlapon.



a. **b.**

3.9. ábra a) Festékek a víz felszínén: kaotikus keveredés, b) Fraktál szálas mintázatú lap: kaotikus keveredés lenyomata, márványozó technikával készült (a szerző felvételei)

A bemutatott kézműves tevékenységek hozzásegítik a tanulókat, hogy megértsék a káoszfizika sodródással kapcsolatos aspektusát. A megfigyelhető fraktálszerkezetekhez hasonló mintázatok jelennek meg a környezeti áramlásokban, például szennyeződések terjedésekor, ahogyan ezt majd látjuk a 4. fejezetben.

Célunk az is, hogy a tanulók képekben való gondolkodásának képessége fejlődjön: képesek legyenek felismerni a különböző jelenségekben a hasonló mintázatokat (lásd 6. fejezet). Nagyon fontos megjegyezni, hogy nem egy virtuális világ képeivel dolgozunk, hanem a természeti környezetben előforduló mintázatokkal. A jelenséggel kapcsolatos érdekes tapasztalatok arra sarkallják a diákokat, hogy elmélyüljenek a témába: az élmény hatására megtörténik, hogy valaki elköteleződik, például szimulációs programot ír, amivel modellezhető az adott jelenség. Azt tapasztaltuk, hogy ez az élmény motiválhatja a tanulókat a jelenség mélyebb megértéséhez szükséges további ismeretek megszerzésére.

3.4. Egyéb alkalmazások: tojás és gyertya festése márványozó technikával

A kaotikus folyamatokhoz kapcsolódó más lehetséges kézműves tevékenységek, ugyancsak a márványozó technika használatával, a tojásfestés és a gyertyafestés. A tojás- és a gyertyafestés lépései a következők: 1. A fehér héjú tojásba egy pálcát rögzítünk, hogy az stabil maradjon (kifújt fehér héjú tojást, vagy fehér műanyag tojást használunk). Gyertya esetén a fehér vagy világos gyertyát a kanócánál, vagy a kanócánál és az aljánál tudjuk fogni, illetve mozgatni. (A következőkben csak a tojásfestés lépéseit követjük, ugyanúgy járunk el ugyanis a gyertyával is.) 2. A tojást egy elég mély edényben lévő víz alá merítjük teljesen. 3. Kis mennyiségű festéket (két vagy három különböző színűt) öntünk a víz felszínére, majd összekeverjük, hogy szép, fraktálszálas mintázatot kapjunk. 4. A tojást rögtön emeljük ki a vízből, nagyon lassan, hogy eközben a festék szépen, egyenletesen oszoljon el a felületén. 5. Óvatosnak kell lennünk a tojások szárításakor, ahogy a 3.10. ábra jobb oldalán és a 3.11.a ábrán is látható, hogy ne érjenek hozzá semmihez a festett felületek. Végeredményként fraktálstruktúra válik láthatóvá szép szálakkal, amint azt a 3.11.b ábra is mutatja. Mindenképp érdemes lakkal rögzíteni a festéket, ami ugyanakkor szép fényt is ad a festett tojásoknak (a célra tökéletesen megfelel a kereskedelemben kapható hajlakk is).

3.10. ábra Készülnek, illetve száradnak a káosz-mintás tojások (a szerző felvétele)

a. **b.**

3.11. ábra a) A tojások szárítása, b) Diákok által készített húsvéti tojások. Ez a két fotó hungarocell tojásokkal készült. A hungarocell tojásokon is látszanak a mintázatok (a saját struktúrájuk egyáltalán nem rontja le az összképet) (a szerző felvételei)

Az 3.12. ábrán tanulók által festett ünnepi szálas mintázatú gyertyákat láthatunk száradni.

3.12. ábra A gyertyák szárításánál is vigyáznunk kell, ugyanis könnyen sérül a festék felülete, ha bármihez hozzáér a száradás első fázisában (a szerző felvételei)

3.5. Ünnepi fizika órák fraktálokkal, színekkel

Rendszeresen ünnepi fizika órákkal teszem színesebbé a fizika tanítását és lelkesebbé, motiválttá a tanulóimat. Sikeresnek és nagyon népszerűnek bizonyultak ezek az órák az elmúlt években. Ebben a fejezetben bemutatom, hogyan tettem ünnepekkor fizika óráinkat különlegessé, emlékezetessé a kaotikus sodródáshoz kötődő fraktálokkal, illetve színekkel. Az ismertetett technikákon túl más lehetőségeink is vannak, amelyek ugyancsak kötődnek a kaotikus jelenségekhez, mint például fénykép készítése a karácsonyfagömbök egymáson való tükröződésének fraktálképeiről, vagy a gyermeknapi óriásbuborékfúvás, amikor a klasszikus témákon túl – mint a vékonyréteg interferencia a szappanhártyán, felületi feszültséget, valamint a gömbtükrök képalkotása – itt is megfigyelhetjük a kaotikus sodródást.

Az ünnepi fizika órák ötlete úgy született, hogy ünnepek környékén már nagyon nehéz megragadni a tanulók figyelmét, nagyon máshol jár az eszük, ezért sokkal többet, szebbet kell mutatni nekik, hogy be lehessen vonni őket az órába. Ez annyira jól sikerült, hogy az ünnepi órák fénye a hétköznapokra is átsugárzott. Célommá vált, hogy az ünnepi alkalmakat megragadva, a fizika órákat ilyenkor a hétköznapokból kiemeljük, emlékezetessé, interaktívabbá tegyük.

3.5.1. Ünnepi tanmenetek

Bemutatom ünnepi tanmenetem (3.1. táblázat), amely egy a lehetséges ötletek közül, bátran bővíthető további foglalkozásokkal.

Óra	Ünnep	Foglalkozás	Téma	Technika
	Karácsony	Gyertyafestés Üdvözlőlap és díszpapír készítése	Kaotikus sodródás	Márványozás Márványozás
		Fotópályázat	Kaotikus szórás	Fotózás
	Húsvét	Tojásfestés	Kaotikus sodródás	Márványozás
	Gyermeknap	Óriás szappanbuborék	Interferencia vékonyrétegen	Buborékfúvás Fotózás
	Családi ünnepek	Melírozott gyurmaékszerek készítése Fraktál-mintázatos fagylalt vagy sütemény készítése	Pék leképezés Kaotikus sodródás	Tésztagyúrás Tésztakeverés

3.1. táblázat Az ünnepi fizikaórák programja

Ha olyan osztályban vagyunk, ahol nem volt lehetőség több órát fordítani a kaotikus jelenségek témakörére előzőleg, röviden beszélek a káoszról, a fraktálokról. Ugyanez a helyzet, amikor a szülőket meghívjuk közös alkotásra. Ezt követően ismertetem az alkalmazható technikák közül azt, amit a foglalkozáson használunk, amelyek közül a két legfontosabb a márványozás és a gyurmázás.

Karácsony

A karácsony az első alkalom a tanév során ünnepi fizika órára. Karácsonyra különleges gyertyákat készítünk (3.13. ábra) az 3.4. fejezetben bemutatott márványozó technikával.

3.13. ábra Karácsonyra festett, márványmintás gyertyák (a szerző felvételei)

A karácsonyi órán sok tanuló a gyertyafestés mellett vagy helyett inkább képeslaphoz vagy díszítéshez papírt fest (3.14. ábra).

3.14. ábra Márványozó technikával készült díszpapírok (a szerző felvételei)

Karácsonyi fotópályázatot hirdettem *Kaotikus szórás karácsonyfagömbökön* témában. Ha három vagy négy karácsonyfadísz érintkezik, a fénysugarak úgy verődnek vissza a gömbök felületéről, hogy számos újabb visszaverődést szenvednek, mielőtt a szemünkbe jutnak. Az érintkező karácsonyfagömbök egymáson való tükröződésének fraktálképeit, a kaotikus szórás [4] hétköznap is megfigyelhető esetét kellett megörökíteni a diákoknak. Gyönyörű fotók érkeztek be (3.15. ábra), az egyik első helyezett fotót bemutatja a 3.15. a ábra.

a. **b.**

3.15. ábra Kaotikus szórás karácsonyfagömbökön. Jól láthatóak a kaotikus szórás alkotta fraktálok a.) A pályázat díjnyertes fotója, készítette Németh Roland (11. osztály) b.) Rósa Katalin 11. osztályos tanuló fotója

Húsvét

A tanév során a következő ünnepi óra lehetősége húsvétkor adódik. A húsvéti tojás igazán személyre szabott és változatos lehet, amint a 3.4. fejezet bemutattam.

Az ünnepi fizika órákat szülőkkel együtt is tarthatjuk. Ekkor nagyon röviden, ismeretterjesztő szinten és stílusban, sok képpel számukra is bemutatjuk a káoszfizikai hátteret, példákkal segítve a gyors megértést.

3.16. ábra Közös tojásfestés szülőkkel

A szülők a reméltnél is jóval nagyobb lelkesedéssel fogadták nemcsak a közös tojásfestés lehetőségét, hanem a káoszfizika- és fraktál témájú bemutatónkat is. A 3.16. ábrán is láthatjuk, hogy nagyon érdeklődve figyeltek, és hamarosan aktívan bekapcsolódtak ők is az alkotómunkába, kérésre irodalmat [5] is kaptak az alkotás otthoni folytatásához.

Gyermeknap

A tanév vége felé közeledve a gyermeknap ismét jó alkalmat ad egy rendhagyó fizika órára. Ilyenkor jót tesz a megcsappanó figyelemnek, hogy kimegyünk az udvarra óriásbuborékot fújni. Pálca párosainkra spárgát kötünk, jó szappanoldatot készítünk mosogatószerrel, kis olajjal, pici cukorral és természetesen vízzel, és miután vízbe mártották a gyerekek a spárgát, lehet rohanni az óriásbuborék kialakítása érdekében kettesben, vagy jó esetben hagyni, hogy a szél elvégezze a munkát.

A téma kapcsán a klasszikus fizika és kaotikus sodródás egyaránt a terítékre kerül. Már az előkészítő órán megbeszéljük mindig, mi mindenre tanít bennünket a szappanhártya: az optika témakörében a vékonyréteg interferenciára, a gömbtükrök képalkotására, ugyanakkor felelevenítjük a felületi feszültség fejezetet is. A 3.17. ábrán szép példákat láthatunk a kaotikus sodródásra, a vékonyréteg interferenciának köszönhetően az enyhén változó buborékvastagság következtében a színek sodródnak. Ezekre a fizika órákra évek múltán is emlékeznek a tanítványaim.

a.

b.

3.17. ábra a) Óriásbuborék felületén jól látható a kaotikus sodródás szálas szerkezetű mintázata a vékonyréteg interferencia színeinek köszönhetően b) PET-palackkal készült óriásbuborék felszínén sodródnak a színes fraktál szálak

Családi ünnepek

A tanulóknak ajánlom, hogy a családi ünnepeket is szépítsék, színesítsék a megismert technikák segítségével. Jól jöhet például a gyurmázás, hőre szilárduló gyurmából készíthetünk egyedi, fraktál szálas ékszereket. Több színű gyurmát együtt nyújtunk, majd összehajtunk többször egymás után, amíg szép szálas mintázatot kapunk (3.18.a ábra). A technikát melírozásnak [8] nevezik.

a.

b.

3.18. ábra a) Cantor-szálas gyurmaékszerek, melírozással készületek, majd ki lettek égetve (fotó: szerző) b) Ünnepi desszert fraktál szálakkal (fotó: szerző)

Fraktálmintázatos fagylaltot „varázsolhatunk”, ha világos fagylaltalapanyagba, például tejszínalapúba, élénk színű gyümölcszselét vagy sűrű gyümölcsszörpöt keverünk (3.18.b ábra). Ugyanez a módszer alkalmazható sütemények, pudingok készítésénél is.

3.6. Következtetések

A bemutatott káosztanítási modulban a kézművesség használatának előnyei a következőkképpen foglalhatók össze: a kézműves foglalkozás alkalmas eszköz a tanulók fizika, pontosabban a kaotikus jelenségek iránti érdeklődésének felkeltésére. A kézművesség lehetőséget ad a szálas mintázat, a pillangóeffektus közvetlen bizonyítéka felismerésére. A diákok érdeklődésének sikeres felkeltését bizonyítja, hogy a káoszfizika óráimon való részvételt követően többen választották iskolai projektként a káoszfizikát, még olyan diákok is, akik nem tervezték, hogy fizikából fakultálnak majd. További bizonyíték, hogy volt több diák is, aki a fraktálgeometriát vagy a káoszfizikát választotta tanulói előadása témájául a fizika órán.

A kézműves tevékenység az érdeklődés felkeltése mellett hatékony motivációs eszköznek bizonyult a mélyebb megismerésre törekvő tanulók körében: voltak, akik a kaotikus rendszerek matematikai leírását szerették volna megismerni, vagy számítógépes programot írni adott kaotikus jelenség szimulálására (2.3., 2.4. fejezetek). Amint már megfogalmaztuk, a kézműves foglalkozások során szerzett esztétikai élmény alkalmas a tanulók érdeklődésének felkeltésére, motiválására. Ugyanakkor az órai kézműves tevékenység, maga az alkotás fejleszti a tanulók vizuális és esztétikai szemléletét.

A képzőművészeti alkotások létrehozása, a keveredés és a minta kialakulásának megtapasztalása segíti a tanulók megértésének elmélyítését, fejleszti többek között a képekben való gondolkodás kompetenciáját. Az esztétikai élmény növeli a motivációt, ami a hétköznapi fizika órákra is kiterjed. Ugyanakkor tapasztaltuk, hogy ezeken az órákon nagymértékben erősödik a diákok interdiszciplináris szemlélete (bővebben l. 6. fejezet).

Irodalom

1. B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, 1982.
2. Nagy Péter, Tasnádi Péter: Fraktálok világa - Játékos tudomány http://real.mtak.hu/109404/1/2019_4_CSC_010_Nagy.pdf
3. I. Szatmáry-Bajkó: Handicraft and aesthetic experience in teaching chaos physics in: A. Király, T. Tél Teaching Physics Innovatively, ELTE, Budapest, p. 15. (2016) http://fiztan.phd.elte.hu/letolt/konfkotet2015.pdf
4. Tél Tamás, Gruiz Márton: *Kaotikus Dinamika*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
5. Hannelore Otto: *Márványozás*, CSER Kiadó, Budapest, 2004.
6. E. Gaisser, *Marmorieren*, Frech-Verlag, Stuttgart, 1981.
7. https://en.wikipedia.org/wiki/Paper_marbling
8. Hegyessy Mari: *Gyurmaékszerek*, Cser Kiadó, Budapest 2004.

A tézissel kapcsolatos publikációim

I. Bajkó: *Inquiry-based Science Teaching – The Use of RePLaT-Chaos Application,* proceedings of TIM Conference 2022, közlésre elfogadva

Bajkó I.: *Felfedező tanulás a középiskolai természettudományokban a vulkáni hamu terjedése alapján,* Fizikai Szemle 2022/9 pp. 291-296.

4. Felfedező tanulás a középiskolai természettudományokban a vulkáni hamu terjedése alapján

Kimutattam, hogy a RePLaT-Chaos-edu program sikeres, eredményes kísérleti eszköz a tanulók számára a környezeti szennyeződések terjedésének vizsgálatában és a káosz jellemzőinek megismerésében.

4.1. Új lehetőség a szennyeződésterjedés fizikájának megismerésére

A RePLaT-Chaos-edu nevű program [1] nagyon jól alkalmazható a szennyeződésterjedés vizsgálatának területén [2], másrészt új perspektívát nyit a középiskolai fizika és akár a fizikai földrajz oktatásában, különös tekintettel a környezeti áramlásokra [3, 4, 5]. A RePLat-Chaos-edu-t Haszpra Tímea fejlesztette ki [3, 6] középiskolai diákok számára, a vulkánkitöréseket követően a hamufelhők légköri terjedésének nyomon követésére. A program a felhasználó által kiválasztott földrajzi helyen és magasságban kibocsátott szennyeződésfelhők légköri terjedését szimulálja az Eyjafjallajökull vulkán izlandi kitörésének 2010. április 14–24. időintervallumában, megfigyelésen alapuló meteorológiai adatok, például a földgömb légkörének egészét lefedő, különböző magasságú szél- és hőmérsékletmezők segítségével (a program tartalmazza a szükséges meteorológiai adatokat is).

Az ingyenesen letölthető programmal [1] különböző vulkáni hamufelhők légköri terjedése szimulálható többféle beállítási lehetőség mellett. A felhőt alkotó részecskék mérete, száma, egyéb tulajdonságaik és kezdeti elhelyezkedésük megadhatóak. A program a Newton-egyenlet alapján követi minden egyes részecske mozgását, minden egyes időlépésben a meteorológiai adatok alapján kiszámítja a szennyeződésfelhő részecskéinek új helyét, és 6 órás időközönként az adatokat fájlba is kiírja. Emellett meghatározza a hamufelhő kiterjedését és a légkörből még nem távozott részecskék arányát. Ezek két, a terjedés kaotikusságát leíró mennyiségnek, a kiterjedést jellemző nyúlási ütemnek, valamint a részecskék kiülepedésének gyorsaságát leíró élettartamnak a meghatározásához szükségesek.

4.2. A RePLaT-Chaos-edu program használata a középiskolában

A korábbi középiskolai tapasztalatokról angolul olvashatunk [6]: kisebb létszámban ismerkedtek a diákok a programmal a Berzsenyi Dániel Gimnáziumban, és egy *Káoszfizika: környezetfizika* projektem keretében a Szent István Gimnáziumban (ez utóbbiról lesz még szó bővebben a 7. fejezetben). Ez a fejezet a program rövid bemutatása után egy tanítási kísérlet eredményeit összegzi, amikor nagyobb létszámban ismerkedtek a tanulók a programmal a Szent István Gimnáziumban egyetlen tanórai időkeretben.

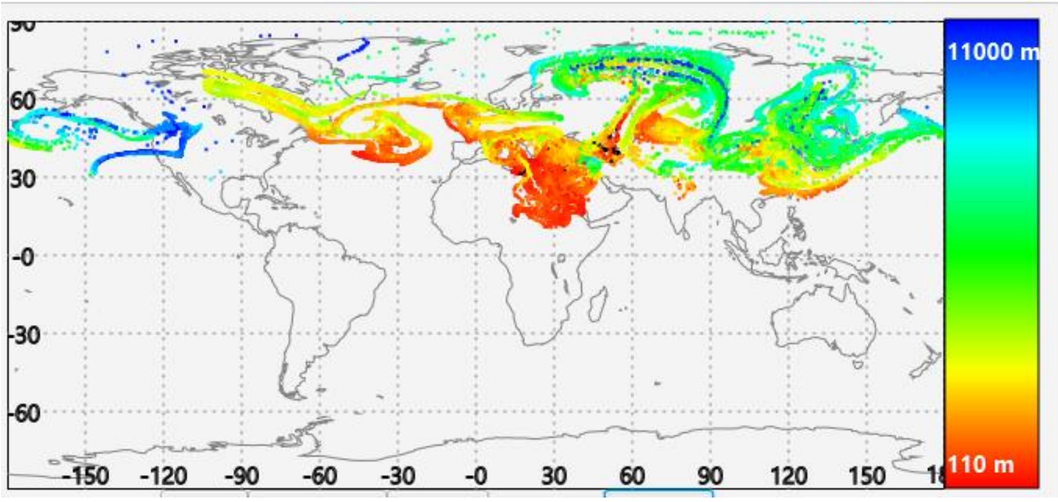
Megvizsgáltam, hogyan tudják a diákok önállóan, útmutatás nélkül használni a programot. 123 főt, 9., 10., 11. és 12. osztályos tanulókat vontam be a kutatásba. A diákoknak egy 45 perces fizika óra keretében kellett felfedezniük a program használatát. Lehetőségük volt arra, hogy két-három fős csoportokban együttműködjenek.

A tanulók a következő feladatokat kapták: 1. Ismerkedjenek meg a programmal, 2. Tervezzenek saját vulkánkitörést (erre is lehetőséget ad a program bármely földrajzi helyen), 3. Jellemezzék a vulkáni hamufelhő mintázatának alakulását, 4. Keressenek hasonló mintázatokat a természetben. Arra kértem őket, hogy írásban mutassák be tapasztalataikat, felfedezéseiket, képekkel illusztrálva. Az eredmények a következők:

1. A tanulók behatóan felfedezték a programot, a beépített vulkánkitörések megismerésének lehetőségét alaposan kiaknázták.

2. 123 diákból 118-an mutattak be képet a terjedési mintázatról vagy videót a mintázat kialakulásáról. Erre a 4.1, 4.2. ábrán látható példa.

4.1. ábra Bottka B. 9. osztályos tanuló tervezte vulkánkitörés indító panelje. Az indítás 2010. április 14-én, 5,5 km-es magasságban- egy 100 km x 100 km x 10 km-es nagyságú téglatest alakú felhővel (a részecskék sűrűsége 500 kg/m^3, részecskeátmérő 0,1 μm).



4.2. ábra A felhő alakja a 4.1. ábrán látható adatokkal indított vulkánkitörés után 10 nappal, 2010. április 24-én. A színek a magasságot jelzik (sötétkék a legmagasabb).

3. A tanulók meglepődtek, milyen messzire és milyen mintázat mentén terjed a vulkáni hamu. Felismerték, hogy a hamufelhők nem tintafolt- vagy festékfolt-szerűen terjednek a légkörben, hanem egy kezdetben kicsi, kompakt szennyezőfelhő hamarosan erősen megnyúlik, miközben szálassá, visszakanyarodó szerkezetűvé válik. Ennek az az oka, hogy a tintafoltot mikroszkopikus diffúzió szabályozza, míg a szennyezőanyag szétszóródását erős légköri szelek, amelyek nem egyenletesen fújnak. Ezekkel a szimulációkkal szemléletessé vált, hogy a vulkáni hamufelhők néhány napon belül bonyolult, de jól szervezett fonalas szerkezetekben terjednek a légkörben, amelyek a félteke nagy részét lefedik. Így érthetővé válik, hogy ez a jellemzőjük a felelős azért, hogy a bekövetkezett vulkánkitörések után a légi forgalmat bizonyos időre szükséges lehet leállítani kiterjedt földrajzi régiókban (mint, ahogy az Eyjafjallajökull kitörése esetében történt). A tanulók rájöttek, hogy még egy nagyon kisméretű vulkáni felhő inicializálása esetén is gyorsan növekszik a kiterjedés és így a lefedett földrajzi terület, és a kezdetben közeli részecskék rövid időn belül távol kerülnek egymástól. A tanulók közül sokan (több mint 30%) észrevették és bemutatták a szelek hatását.

4. A tanulók nagyon izgalmasnak találták a hasonló mintázatok keresését. A vulkáni szennyeződés légköri terjedéséhez hasonló, általuk talált leggyakoribb mintázatok a következők voltak: olajszennyezés terjedése a víz felszínén, különböző festékek keveredése, színes folyadék terjedése vízben, elfújt gyertya füstje – ezek mind jó példák a kaotikus keveredésre. A környezeti áramlásokkal kapcsolatos folyamatok is szép számban megjelentek a hasonló mintázatok keresésekor: időjárás előrejelzés esetén látható képek, szennyeződések

terjedése a tengerekben vagy óceánokban, radioaktív szennyeződések terjedése. Sok esetben az internetről vett fotókkal illusztrálták megállapításaikat. Erre a témára bővebben visszatérek a 6. fejezetben.

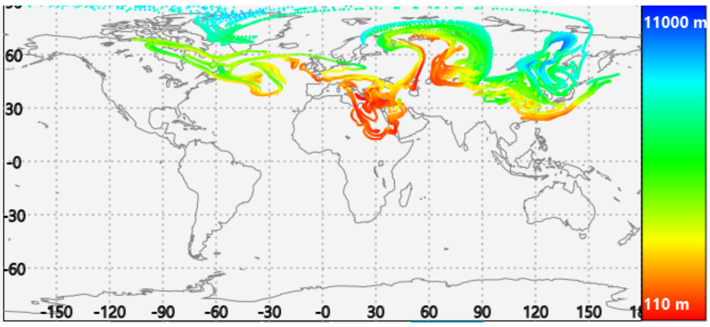
4.3. A tanulók felfedezései

A tanulók játszva fedezték fel a program lehetőségeit: változtatták a különböző paramétereket, kísérleti eszközként használva a programot. Számomra központi fontosságú volt, hogyan boldogulnak a tanulók a káosz jellemzőinek meghatározásával, hiszen eddigi kutatásaim központi kérdése volt a káosz középiskolai tanítása, ahogy az előző fejezetek is mutatják.

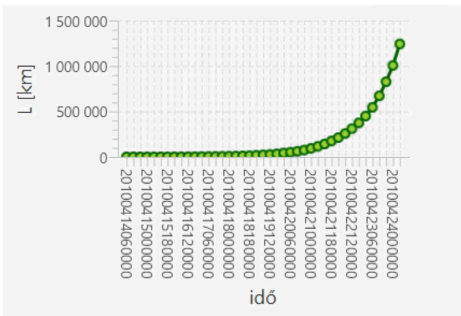
Sok diák meghatározta a nyúlási ütemet. Ez a mennyiség azt a tényt tükrözi, hogy a szennyezőanyag-felhő L hossza exponenciálisan növekszik a t idővel, azaz

$$L(t) \sim 10^{ht},$$

ahol a h kitevőt nevezzük a nyúlási ütemnek [1-6]. Ez a szám az eredetileg közeli pontok eltávolodási sebességét jellemzi, vagyis a pillangóeffektus [7] egyfajta mérőszáma a folyamatban. A nyúlási ütem meghatározására egy diák által benyújtott példa látható a 4.3 ábrán.



(a)



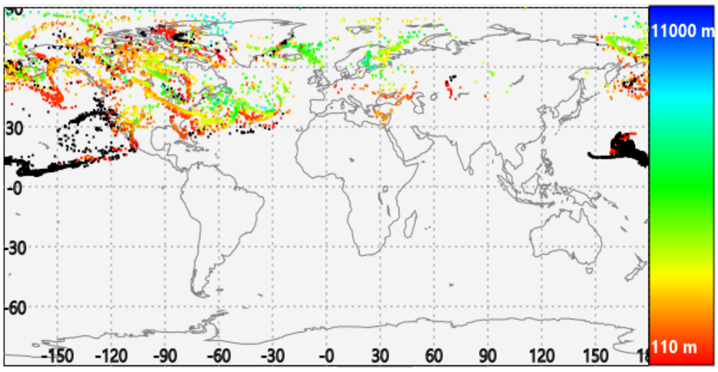
(b)

4.3. ábra. Vonalnyúlás: (a) Keresztély Zs. 9. osztályos tanuló által generált kitörés. Kezdeti feltételek: a magasság 5500 m, a kezdeti hossz 400 km. (b) A grafikon a felhő L hosszát mutatja az idő (vízszintes tengely) függvényében. A szimulálás szerint 10 nap alatt kb. 3000-szeresére nő a kezdeti hossz.

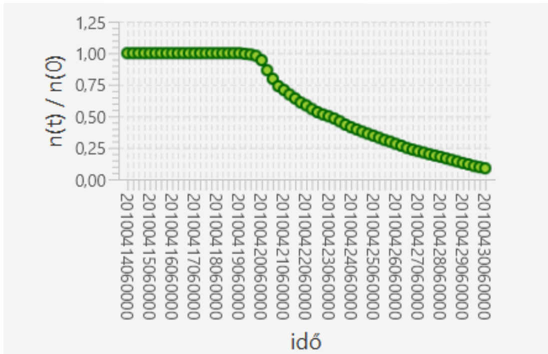
Érdemes megemlíteni, hogy noha a diagramot a tanulók egyharmada elkészítette, nem mindenki számította ki közülük a nyúlási ütemet. Mindenképpen siker, hogy sokan megértették a nyúlás exponenciális jellegét, és becslést adtak ennek mértékére. Érzékelték, hogy a kezdeti hossz 10 nap után többezerszeresére nő. Tanári útmutatást követően, a diagram alapján az illesztés után a program a nyúlási ütemre 0,353 1/nap értéket számolt. Az útmutatásra szükség volt, mivel merültek fel nehézségek az önálló munka során az eredmény megfelelő értelmezésében.

A RePLaT-Chaos-edu segítségével mérhető a részecskék élettartama [1-6], ami jellemzi azt a sebességet, amellyel a szennyező hamufelhők ülepedő részecskéi elhagyják a légkört. Ehhez a még levegőben lévő hamurészecskék arányának időfüggését kell vizsgálni. A 4.4. ábra szemlélteti, hogy a légkörből még le nem ülepedett részecskék száma t_0 idő után exponenciálisan csökken. Ez az $n(t)$ szám t_0-ig alig változik, de utána gyorsan, exponenciálisan csökken:

$$n(t) \sim 10^{-(t-t_0)/T},\ t > t_0\text{-ra.}$$



(a)



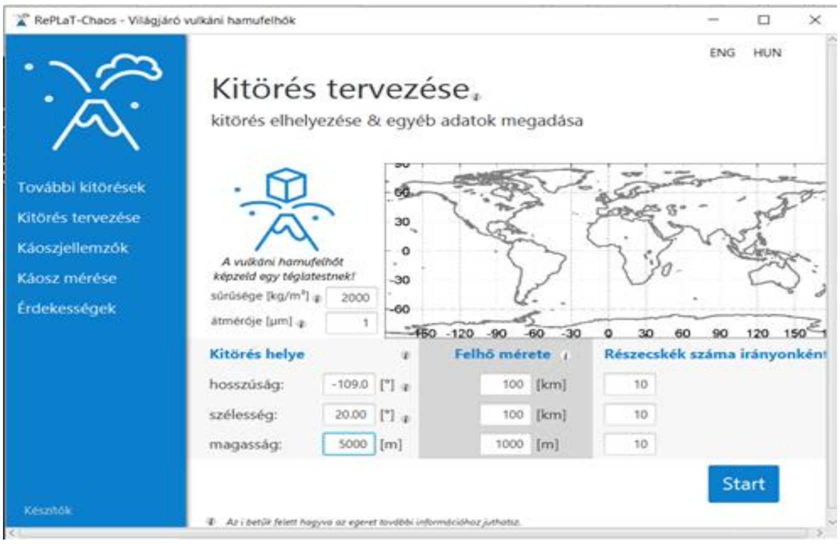
(b)

4.4. ábra Kísérlet az élettartam meghatározására (a) Horváth Zs. 9. osztályos tanuló által generált kitörés (fekete jelöli a felszínt már elért részecskéket). (b) A grafikon a légkörből még le nem ülepedett hamurészecskék számának a kezdeti részecskeszámhoz viszonyított arányát mutatja az idő (vízszintes tengely) függvényében

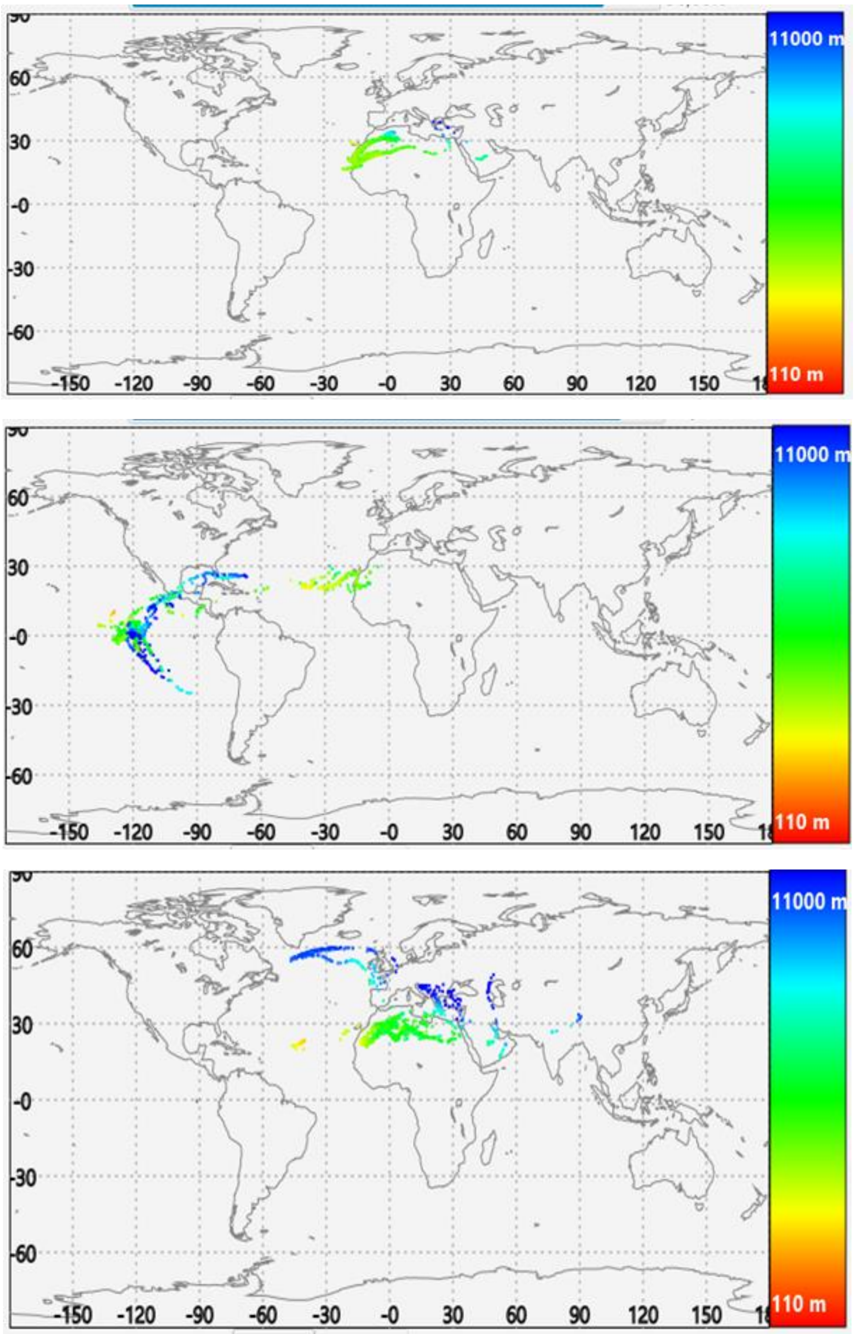
A grafikon alapján t_0 = 6 nap, T = 10 nap. Ez azt jelenti, hogy a hamurészecskék (sűrűségük 1000 kg/m^3 és átmérőjük 5 μm) tizede több mint két héttel a kitörés után is még a légkörben van. A tanulók azt is láthatták, hogy a felszínt elért részecskék mintázata szintén szálas fraktálszerkezetű. Volt olyan tanuló, akinek nehézségei voltak az illesztéssel, a teljes intervallumra exponenciális illesztést alkalmazott, és megfeledkezett a t_0 létezéséről.

A tanulók 30%-a használta a RePLaT-Chaos-edu-t eszközként a káosz jellemző diagramjainak, az élettartam- és a nyúlásiütem-diagramok meghatározására (volt, aki illesztés nélkül, vagy nem teljesen jó illesztéssel).

A diákok körülbelül 30%-a készítette el az élettartam- és a vonalnyúlás-diagramot is. Az illesztési nehézségeket látva, a következő alkalomkor mindenképp előzetes tanári útmutatást tervezek a káosz jellemzőinek meghatározását megelőzően. Most annak a felmérése volt a célom, hogy önállóan hogyan boldogulnak a program adta lehetőségekkel. Néhányan (7 tanuló) találtak meggyőző példákat a pillangóeffektusra, azaz a kezdeti feltételekre vonatkozó érzékenységre. Idézek egy diák beadványából: „… egy viszonylag kis változás, ezért meglepőnek tartom, hogy elég intenzíven befolyásolta az eredményt.” Ez nagyon fontos lépés volt, nem kértem, hogy keressenek ilyet. Az egyetlen kérésem az volt, hogy kísérletezzenek a paraméterekkel. Tanárként nagy örömömre szolgált, hogy beküldött munkáikban láthattam ezeket a felfedezéseket. Példaként álljon itt a 4.5. és a 4.6. ábra.



4.5. ábra. Hajas Á. 11. osztályos tanuló három közel azonos kezdőfeltétellel indított vulkánkitörést. Az ábrán láthatjuk azokat a bemeneti adatokat, amelyek mindhárom esetben teljesen megegyeztek, kivételt képeztek ez alól a a földrajzi szélességek (Lásd 4.6. ábrán: (a) 20° É, (b) 22° É, (c) 17°É).



a.

b.

c.

4.6. ábra. Részlet Hajas Á. 11. osztályos-tanuló dolgozatából. A kezdeti földrajzi szélesség kis eltérése nagyon nagy különbséget eredményez a gázfelhő méretében is, és a szennyezett területek kiterjedésében is, amint azt a (a)-(c) képek szemléltetik. Minden más bemeneti adat teljesen megegyezik mindhárom esetben az 4.5. ábrán feltüntetettekkel. Az (a)-(c) vulkánkitörések esetében az egyetlen eltérés a földrajzi szélességekben van: (a) 20° É, (b) 22° É, (c) 17°É.

Az előző fejezetben bemutatott káosztanítási moduljaim során kézműveskedtünk, a kaotikus sodródást vizsgáltuk a márványozással, azaz festékeket kevertünk össze a víz felszínén, és a mintákat levontuk papírra vagy más hordozóra. A folyamat során a tanulók tapasztalhatták, hogyan alakulnak a keveredési mintázatok. Ezt követően az így kapott mintázatokat összevetettük a környezeti áramlások során látható mintázatokkal, erre visszatérünk a 6. fejezetben.

Irodalom

1. http://theorphys.elte.hu/fiztan/volcano/#edu
2. T. Haszpra: *RePLaT*-Chaos-edu - A légköri szennyeződésterjedés kaotikus vonásainak szemléltetésére Elméleti háttér és felhasználói dokumentáció (2018) http://theorphys.elte.hu/fiztan/volcano/RePLaT-Chaos-edu_hu.pdf
3. T. Haszpra: A simple educational application to discover the chaotic nature of atmospheric advection Atmosphere 11, 29 (2019)
4. T. Haszpra, T. Tél: Topological entropy: a Lagrangian measure of the state of the free atmosphere. J. Atmosph. Sci, **70**, 4030-4040 (2013)
5. T. Haszpra, T. Tél: Escape rate: a Lagrangian measure of particle deposition from the atmosphere. Nonlin. Proc. Geophys. **20**, 867-881 (2013)
6. T. Haszpra, M. Kiss, É. Izsa: RePLaT-Chaos-edu: an interactive educational tool for secondary school students for the illustration of the spreading of volcanic ash clouds J. Phys.: Conf. Ser. **1929**, 012079 (2021)
7. James Gleick, Káosz: Egy új tudomány születése, Göncöl Kiadó, 1999.

A tézissel kapcsolatos publikációim

Bajkó: Inquiry-based Science Teaching – The Use of RePLaT-Chaos Application, proceedings of TIM Conference 2022, közlésre elfogadva

Bajkó I.: Felfedező tanulás a középiskolai természettudományokban a vulkáni hamu terjedése alapján, Fizikai Szemle 2022/9 pp. 291-296.

5. Diákok visszajelzései a RePLaT-Chaos-edu vulkáni szennyeződésfelhő terjedését szimuláló program használatáról

Vizsgáltam a diákok tapasztalatait a RePLaT-Chaos-edu vulkáni szennyeződésfelhő terjedését szimuláló program egyéni feltérképezése, használata során. Kérdőív-kitöltések alapján kimutattam, hogy a tanulók többsége érdekesnek, hasznosnak tartotta a RePLaT-Chaos-edu vulkáni szennyeződésfelhő terjedését szimuláló programot.

5.1. A tanulók visszajelzései

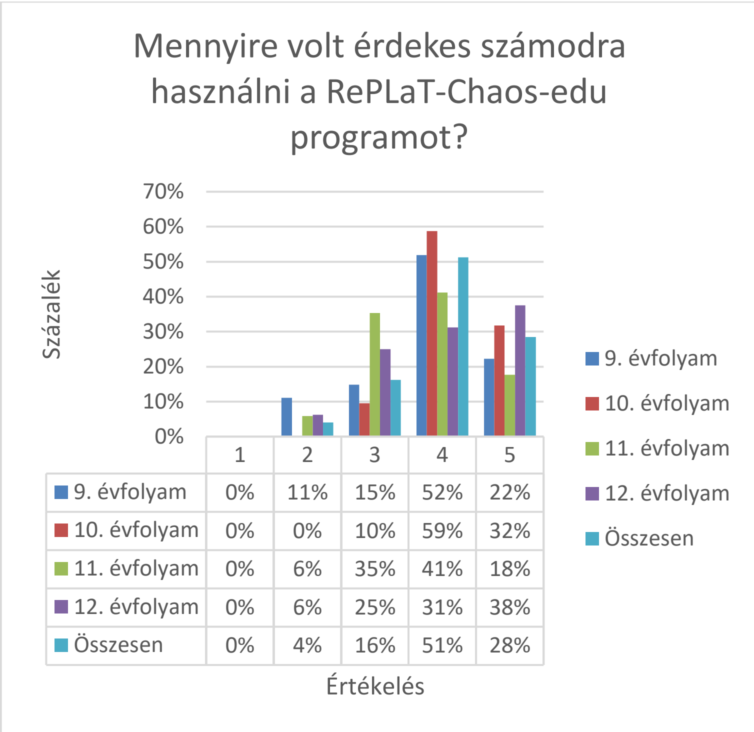
Célunk volt, hogy megtudjuk, mennyire volt érdekes és hasznos az RePLaT-Chaos-edu alkalmazás a diákok véleménye szerint. A program megismerése előtt és azt követően kérdőívet töltettem ki a tanulókkal.

Az alkalmazás felfedeztetése előtt megkérdeztem a tanulókat, hogy milyen mintázatokra számítanak a vulkáni felhő szétterjedésekor. A 123 tanulóból

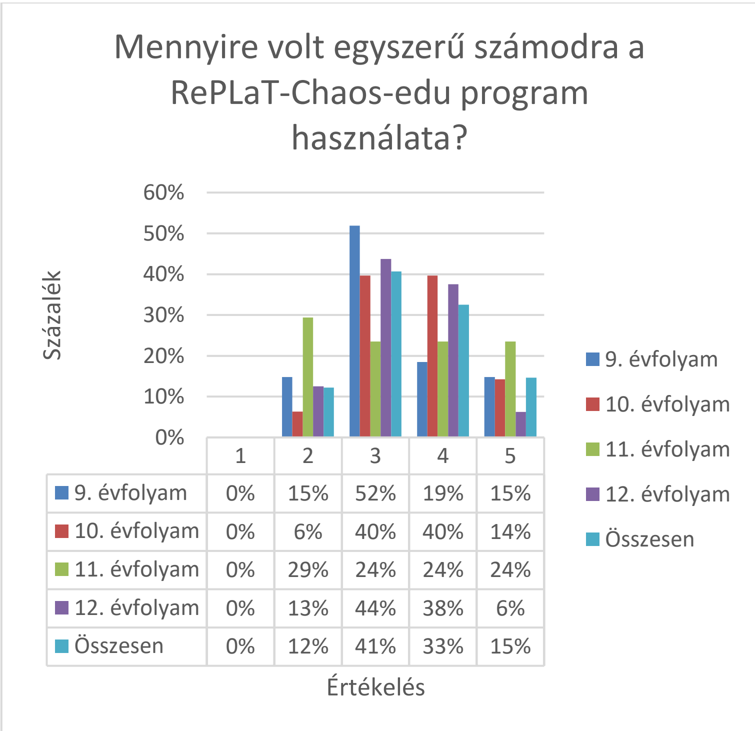
- 92-en számítottak a szennyeződés foltszerű terjedésére, és
- 31 válaszadó jelezte, hogy más jellegű mintázatot vár,
- köztük volt 8 tanuló, aki megnevezte, vagy körülírta, hogy szálas jellegűt (olvasott róla, hallott róla vagy filmet látott a jelenségről).

A program megismerését követően nyitott kérdéseket tettem fel a diákoknak, melyekkel az volt a célom, hogy megtudjam, mi volt az, ami a leginkább meglepő volt számukra. Képet szerettem volna kapni az alapvető kérdéseken túl (mennyire volt érdekes, hozzáférhető, hasznos a program) arról is, hogy mi az, amitől más, szokatlan, új volt, azzal a céllal, hogy ebből derüljön ki számomra, mi ragadta meg őket, mi hagyott mélyebb nyomot bennük.

A „*Mennyire volt érdekes számodra a RePLaT-Chaos-edu alkalmazás felfedezése?*” kérdésre a következő válaszokat adták: 28% jelölte meg, hogy nagyon érdekes (5 az 5-ös skálán), és 51% azt, hogy érdekes (4 az 5-ös skálán), amint az a 5.1 ábrán látható. Egyik diák sem válaszolta, hogy nem volt érdekes az alkalmazással dolgozni.



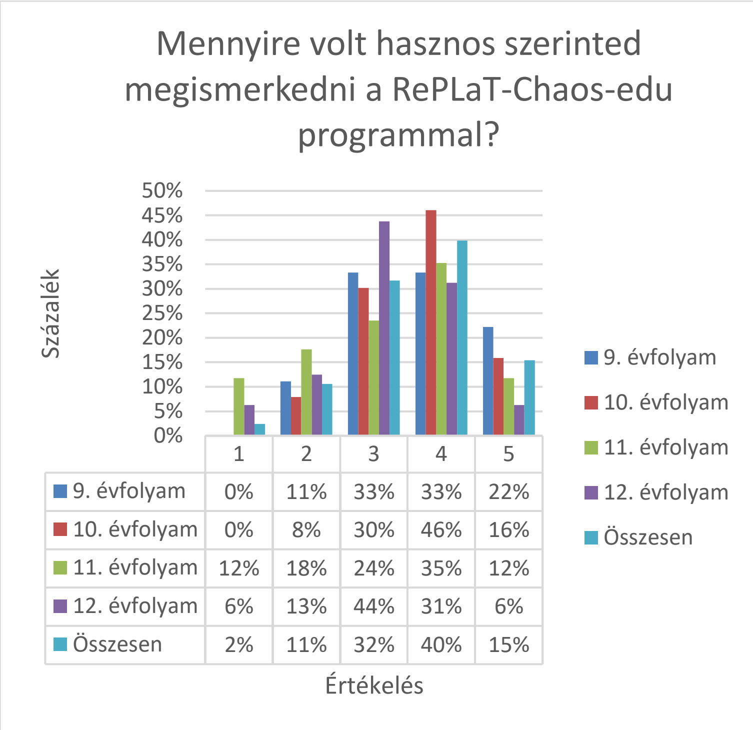
5.1. ábra Válaszok a „Mennyire volt érdekes számodra a RePLaT-Chaos-edu alkalmazás felfedezése” kérdésre évfolyamok szerinti bontásban (*nagyon érdekes* – 5)



5.2. ábra Válaszok a „Mennyire volt egyszerű számodra a RePLaT-Chaos-edu használata?” kérdésre évfolyamok szerinti bontásból (A skálán az 5 a *nagyon egyszerű volt* választ jelöli)

A „*Mennyire volt egyszerű számodra a RePLaT-Chaos-edu használata?*” kérdésre a válaszokat az 5.2. ábra grafikonján és táblázatában foglalom össze, ahol a skálán az 5 a *nagyon egyszerű volt* válasznak felel meg.

A „*Mennyire volt hasznos szerinted a RePLaT-Chaos-edu használata?*” kérdésre a válaszokat az 5.3. ábrán és táblázatában foglalom össze.

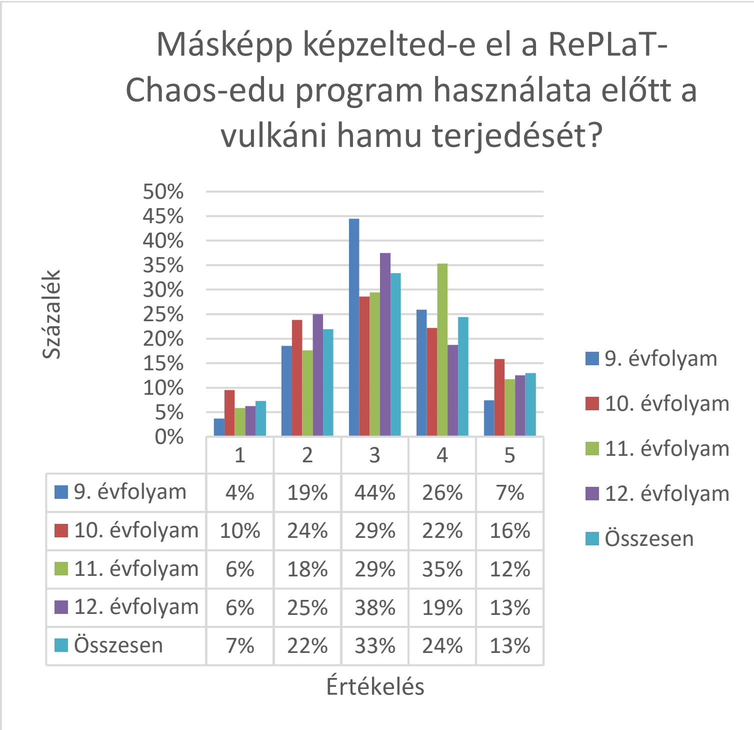


	1	2	3	4	5
9. évfolyam	0%	11%	33%	33%	22%
10. évfolyam	0%	8%	30%	46%	16%
11. évfolyam	12%	18%	24%	35%	12%
12. évfolyam	6%	13%	44%	31%	6%
Összesen	2%	11%	32%	40%	15%

5.3. ábra Válaszok a „Mennyire volt hasznos szerinted megismerkedni a RePLaT-Chaos-edu programmal?” kérdésre, évfolyamok szerinti bontásban (A skálán az 5 a *nagyon hasznos* választ jelöli)

Ha összehasonlítjuk az 5.1. ábra táblázatát, amely az érdekességre vonatkozó válaszokat foglalja össze, az 5.3. ábra táblázatával, feltűnő, hogy nagyobb a programot nagyon érdekesnek nevezők részaránya, mint a nagyon hasznosnak megjelölők részaránya. Ennek oka nagy valószínűséggel abban rejlik, hogy a diákok annak alapján ítélik meg, hogy mi mennyire hasznos a tanultakból, hogy mennyire hasznos ez számukra az érettségi, a továbbtanulásuk szempontjából. Ezt támasztja alá az is, hogy a válaszok évfolyam szerinti bontását vizsgálva, a *nagyon hasznos* válaszok részaránya a 9. évfolyamtól a 12. évfolyam felé haladva csökken, ahogy egyre közeledik az érettségi időpontja. Utólag megkérdeztem a tanulókat, hogy jól értelmeztem-e a hasznosságra vonatkozó válaszaik okát; azt a választ kaptam, hogy igen, kiegészítve azzal, hogy nem csak az érettségi szempontjából nem hasznos, hanem az életben sem fogják ezt használni, hacsak nem lesznek tudósok, viszont érdekesnek érdekes tudni róla.

Nagyon fontos volt számomra, hogy hogyan fognak válaszolni a „*Másképp képzelted-e el a RePLaT-Chaos-edu program használata előtt a vulkáni hamu terjedését?*” kérdésre, hiszen ezek a válaszok jelzik, mennyire sikerült helyes képet kialakítani a szennyeződések terjedésének jellegéről. Az előzetes kérdésre, hogy milyen mintázatra számítanak, a válaszok mutatták, hogy a domináns kép a tanulók körében a szennyeződések terjedését illetően a paca-szerű terjedés volt. A célunk az volt, hogy ez átalakuljon a realitásoknak megfelelően. A válaszokat az 5.4. ábra táblázatában foglalom össze.

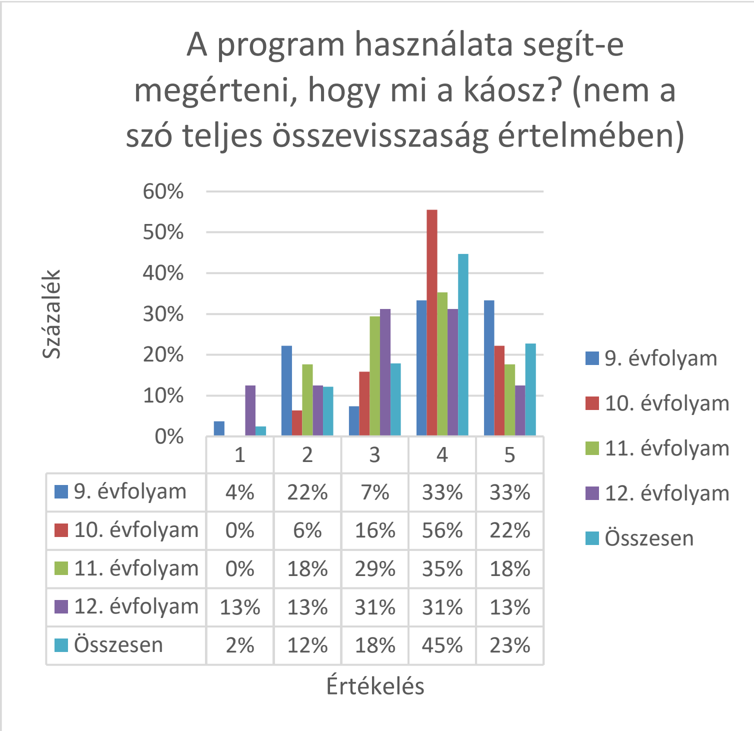


	1	2	3	4	5
9. évfolyam	4%	19%	44%	26%	7%
10. évfolyam	10%	24%	29%	22%	16%
11. évfolyam	6%	18%	29%	35%	12%
12. évfolyam	6%	25%	38%	19%	13%
Összesen	7%	22%	33%	24%	13%

5.4. ábra Válaszok a „*Másképp képzelte el a vulkáni hamu terjedését a RePLaT-Chaos-edu alkalmazás használata előtt?*” kérdésre (A skálán az 5 a *nagyon másképp* választ jelenti) – évfolyamok szerinti bontásban

Elnézve az összesített eredményeket, és olvasva a „*Mi volt a legmeglepőbb számodra a program használata során?*” nyitott kérdésre egyenként adott válaszaikat (ezt az 5.2 fejezetben részletesen bemutatom), úgy ítélem meg, hogy a vulkáni szennyeződések terjedésekor kialakuló mintázatok jellegéről kialakult a reális kép. Ez különösen fontos számunkra, mert ezek a mintázatok jellemzőek általában is a káoszra, és ez át is vezet bennünket a következő kérdésre.

A „*RePLaT-Chaos-edu program használata segít-e megérteni, hogy mi a káosz*?” kérdés központi fontosságú, hiszen a válaszokból kiderül, hogy a mechanikai példák és a sodródás, márványozás mellett van-e egy másik út, a vulkáni hamu követése, amelynek segítségével meg tudjuk mutatni a diákoknak a káosz lényegét (5.5 ábra).



	1	2	3	4	5
9. évfolyam	4%	22%	7%	33%	33%
10. évfolyam	0%	6%	16%	56%	22%
11. évfolyam	0%	18%	29%	35%	18%
12. évfolyam	13%	13%	31%	31%	13%
Összesen	2%	12%	18%	45%	23%

5.5. ábra A „*RePLaT-Chaos-edu program használata segít-e megérteni, mi a káosz?*” tesztkérdésre adott válaszok évfolyamok szerinti bontásban (A skálán az 5 a *határozottan segít* választ jelöli)

A tesztkérdésre adott válaszok megerősítenek abban a tapasztalatomban, hogy a RePLaT-Chaos-edu hatékonyan használható a káosz érzékeltetésére és alapvető tulajdonságai egy részének megismertetésére. A program használata lehetőséget ad a pillangóeffektus felismerésére egy másik módon is, mint a már jól bejáratott, eddig bemutatott utak: az egyszerű kaotikus mechanikai példák megismerése vagy a sodródás tanulmányozása a márványozás során.

5.2. Mi volt a tanulók számára a legmeglepőbb?

A „*Mi volt a legmeglepőbb számodra a program használata során?*” nyitott kérdésre a válaszok nagyon eltérőek voltak. Ezért itt nemcsak a statisztikát mutatom be, hanem előbb a legjellemzőbb választípusokból idézek is: „A hamu terjedésének mintázatai voltak a legérdekesebbek és a legmeglepőbbek.”; „Egy nagyobb kitörés az egész világot érintheti.”;

„Mennyire gyorsan terjed a hamu.”; „A vulkáni szennyezés nagyon hosszú ideig a légkörben maradhat.”

Korunk tanulóira egyre jellemzőbb kezd lenni a következő válasz, mindenképp idézem: „Nagyon nem lepett meg semmi, inkább csak nagyon érdekes volt.” Egy számomra figyelemre méltó válasz a következő is: „A legérdekesebb a márványszerű mintázat volt.”, és ez a válasz is megerősített abban, hogy a kaotikus sodródás-márványozás útja mellett a vulkáni szennyeződések terjedésének vizsgálata hasonlóan hatékony tud lenni a káoszra jellemző mintázatok fejlődésének megismerésében.

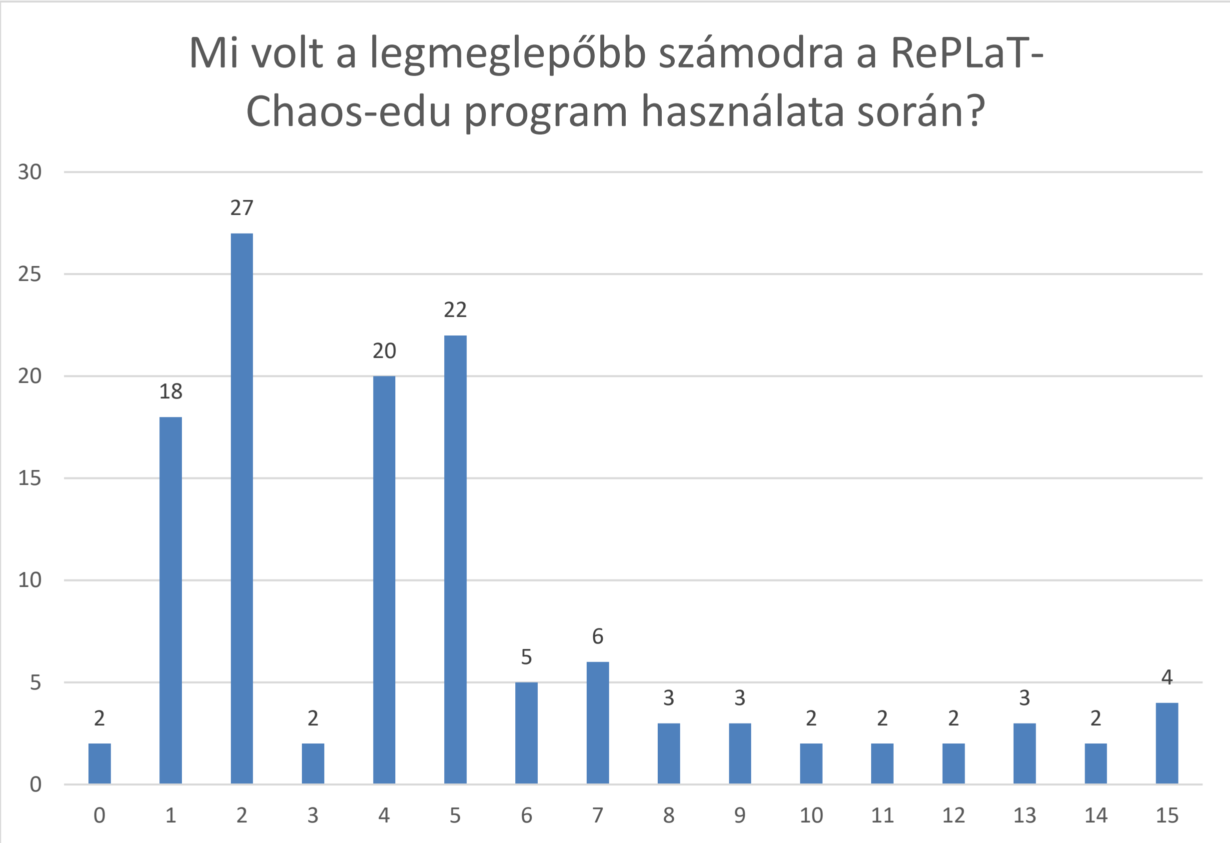
Figyelemre méltó a következő válasz is a feltett kérdésre: „A káosz kiszámíthatatlansága ellenére közel szabályos alakzatok kialakulása, például volt egy olyan modellünk, amely sokáig hasonlított egy spirálgalaxis formájára.”

A nyitott kérdésre: „*Mi volt a legmeglepőbb számodra a RePLaT-Chaos-edu program használata során?*” a válaszokat csoportokra bontottam, s ezeken belül a jellegzetes állításokat összefoglaltam az 5.1. táblázatban.

0	Nem válaszolt
1	Az érintett területek nagy kiterjedése
2	Nagyon nagy távolságra eljut a szennyeződés, nagyon gyorsan terjed
3	A nagy változatosság
4	A mintázat szálas jellege („nem pacaszerűen, hanem csíkokban terjed”)
5	A kezdőfeltételekre való érzékenység
6	Mennyire mutatja a szeleket („Milyen szépen kirajzolja az uralkodó szeleket a légkörben”)
7	Milyen lassan ülepedik le a vulkáni hamu/Milyen sokáig van a levegőben a vulkáni hamu
8	Az előrejelezhetetlenség
9	A program lehetőségei nagyon érdekesek (pl. bárhol lehet vulkánkitörés)
10	Nem lehetett azt a területet szennyezni könnyen, amelyiket elterveztem
11	Az egész világot szennyezheti adott esetben egy kitörés
12	Tudjuk szimulálni és meg lehet jósolni a vulkáni hamu terjedését ennyi tényező ellenére is
13	Nagyon izgalmas volt a program
14	A vulkáni hamu terjedését milyen sok tényező befolyásolja
15	Egyéb

5.1. táblázat A „*Mi volt a legmeglepőbb számodra a RePLaT-Chaos-edu program használata során?*” nyitott kérdésre adott válaszokat a fenti kategóriákba soroltam be

A választípusok gyakoriságát az 5.6. ábra diagramján ábrázolom.



5.6. ábra A „*Mi volt a legmeglepőbb számodra a RePLaT-Chaos-edu program használata során?*" kérdésre adott válaszok összesítése

A legmeglepőbb az összesítő diagram alapján az volt a tanulók számára, hogy milyen nagyon nagy távolságra jut el a szennyeződés, milyen gyorsan terjed. Ugyan folyamatosan hallják, hogy mennyire felelősek vagyunk a Földünkért, hogy ne szennyezzük, de sokukban a program használata közben tudatosult igazán, hogy ez a felelősségünk nemcsak a szigorúan vett szűk környezetünket érinti, hanem adott esetben a teljes Földre kiterjedő következménye is lehet akár egy szennyező eseménynek, pl. egy balesetnek.

A második és a harmadik helyezést a meglepetés-versenyben a kezdőfeltételekre való érzékenység és a mintázat szálas jellege érte el. Mindkettő a káosz jellemzője. Ebből is egyértelmű, hogy a program használata erősen alkalmas a káosz jellemzőinek a feltárására, megtapasztalására, tudatosítására. A vezető válasz is – milyen messzire eljut, milyen gyorsan terjed – ugyancsak a káosz jellemzőjéhez, a nyúlási rátához köthető.

A kérdésekre adott válaszok lehetőséget adtak arra is, hogy esetleges félreértéseket megbeszéljünk. A „Milyen szépen kirajzolja az uralkodó szeleket a légkörben” megfigyelés ugyanis pontosítandó, hiszen nem a pillanatnyi szélsebességek tükröződnek pl. a felhők alakjában, hanem a szélsebességek egész története. A felhők kb. egyhetes élattartama alatt ugyanis időben különböző pillanatnyi szeleknek voltak kitéve, s végső alakjuk ennek az egész *folyamatnak* köszönhető. A mondat tehát így lenne helyesebb: „Milyen szépen kirajzolja az uralkodó szelek „ujjlenyomatát“ a légkörben.” A szabályos alakzatokra és a spirálisgalaxisok formájára vonatkozó idézet kapcsán azt érdemes végiggondolni, hogy a spirális alak a ciklonok „ujjlenyomata“, hiszen az örvények, mint ahogy arról a 6. fejezetben is szó lesz, magukban tartják a festéket, és forgatják. Az egyszerű, egy helyben álló örvényekben nincs megnyúlás, a mozgás bennük előre jelezhető. Az ilyen szabályosság tehát azt is kifejezi, hogy ezeken a helyeken nincs káosz, a terjedés csak rajtuk kívül kapcsolatos a pillangóeffektussal.

Amint a kérdőíves felmérést követően a tanulókkal való beszélgetések során kiderült, többségükben tudatosult, hogy mennyire nagy, komplex rendszer a Földünk és légköre, mennyire nem lehet önzően csak a magunk kis szegletére gondolni a természet, a környezet óvásakor, mennyire felelősek vagyunk érte: nem tehetjük meg, hogy csak a saját szűk környezetünk jólétére fókuszálunk. Különösen meggyőző számomra a következő idézet: „Megbizonyosodott bennem, hogy ha valahol a nagyvilágban egy katasztrófa történik, az egész világra kihat. Az elején csak Észak-Amerikát szerettem volna, hogy sújtsa a vulkánkitörés, de végül egész Európa és Ázsia is szenvedett.”

A szimulálás megismerése, a numerikus követés lehetősége sok diákban megerősítette a természettudományokban vetett hitet, amint ez a következő válaszból is kiderül: „Szerintem az a legmeglepőbb, hogy egyáltalán ki lehet következtetni a vulkáni hamu és a szennyeződések terjedését. Mármint eddig nem is gondoltam rá, hogy ilyen pontossággal is meg lehet határozni ezt.”

A tézissel kapcsolatos publikációim

I. Bajkó: *Inquiry-based Science Teaching – The Use of RePLaT-Chaos Application,* proceedings of TIM Conference 2021. *közlésre elfogadva*

Bajkó I.: *Felfedező tanulás a középiskolai természettudományokban a vulkáni hamu terjedése alapján,* Fizikai Szemle 2022/9 pp. 291-296.

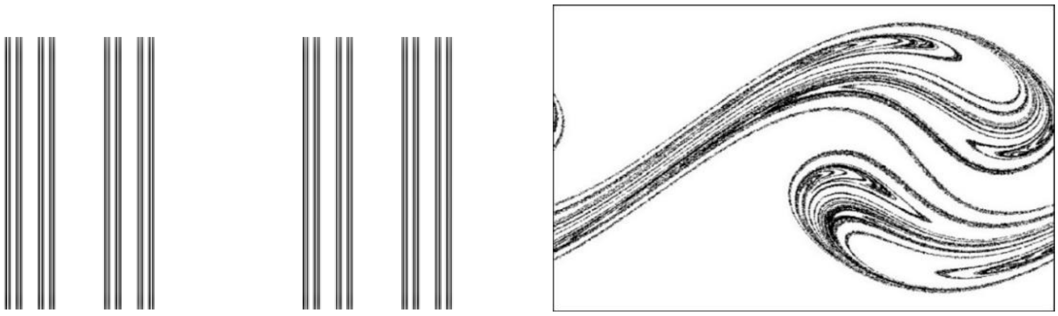
6. A káosz esztétikája, mintázatok különböző skálákon

Megmutattam, hogy a tanulók felismerik a különböző skálákon, különböző folyamatok során a káoszra jellemző mintázatokat, meglátják köztük a hasonlóságot. A káosz előfordulását kísérő deformált Cantor-szálak nyúló-visszahajló formái esztétikai élményt nyújtanak, ezáltal erős a motiváló hatásuk.

6.1. Deformált Cantor-szálak és esztétika

A diákokat megismertettem a fraktálok fogalmával [1, 2]. A matematikai vonatkozások és példák bemutatása keretében hangsúlyosan érdemes tárgyalni a Cantor-szál (6.1.a ábra) esetét, mely egyenes szakaszok olyan elrendezése, melynek keresztmetszete egy Cantor-halmaz. A diákok felismerik, hogy a káosszal kapcsolatos mintázatok megnyújtott, deformált és visszahajtogatott Cantor-szálaknak tekinthetők. Ezt illusztrálja a 6.1.b ábrán látható kaotikus attraktor képe, a rezgetett kaotikus inga (lásd 1.1. fejezet) attraktoráé. A 6.1.b ábra bal oldalán mintha csak a Cantor-szálak elforgatott képét látnánk, amely a jobb oldalon kiszélesedik és visszakanyarodik. Ilyen minták alakulnak ki a márványozás és a kaotikus sodródás során is. Éppen ez a matematikai szerkezet áll az univerzális előfordulás hátterében.

A diákokkal megbeszéltük, hogy az ilyen rajzolatok a káosz lényegének grafikus visszatükröződései: a pillangó effektus, a kezdetben közeli pontok gyors eltávolodása vezet a szálak megjelenéséhez, a visszahajtogatás pedig a véges térrészre történő kiterjedés következménye. Ugyanakkor, mivel a káosz hosszú ideig tart, mindez sokszor ismétlődik, és így egyre finomabb és finomabb skálán jelennek meg a mintázatok, melyek ezért fraktál jellegűek.



a. **b.**

6.1. ábra a.) Cantor-szálak (https://hu.wikipedia.org/wiki/Cantor-halmaz) b.) A rezgetett inga mozgásának képe a hely-sebesség ábrázolásban, szabályos időközönként vett mintákon [3].

Úgy érzem, ez az érdekes nyúló-visszahajló mintázat, – amely első látásra nehezen dolgozható fel, és ami nagy változatosságra ad lehetőséget, a nézőt további vizsgálódásra készteti – lehet a forrása a káosz esztétikai hatásának.

A fraktálok további bemutatását nem részletezem a dolgozatomban, az olvasó megtalálja a „*Fizika és művészet: Káoszfizika*" című iskolai jegyzetemben (Függelék), melyet jóval az ELTE doktori tanulmányaim (Fizika Tanítása Program) előtt készítettem, 2013-ban. A fraktálok témakörét a tanulók számára ma is hasonlóan mutatom be, mint ahogy a kiadványban ismertettem.

6.2. Mintázatok összehasonlítása – hasonlóság felismerése

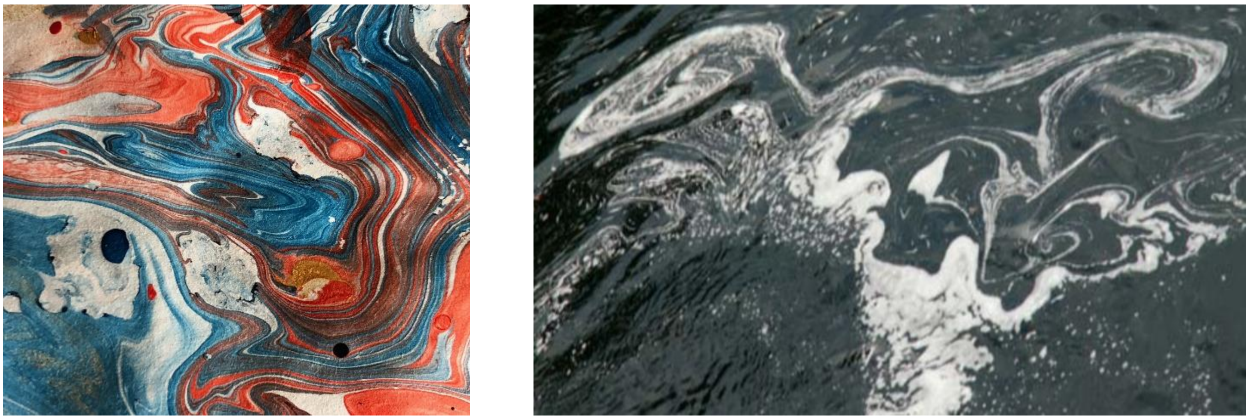
Káosztanítási moduljaim során a következőket vizsgálva, fraktál mintázatokkal találkoztunk:

1. Egyszerű mechanikai rendszerekben, amelyek kaotikusan viselkedtek; a fázistérben rajzolódott ki a fraktálmintázat (1. fejezet, 1.5. ábra).

2. A kaotikus sodródásban márványozó technikával állítottuk elő a fraktálmintázatot, amikor festékeket kevertünk össze a víz felszínén (3. fejezet, 3.9.a ábra), és az így kialakult fraktálmintázatot rögzítettük (3.9.b ábra). A folyamat során a tanulók megtapasztalhatták, hogyan alakulnak a keveredési mintázatok.

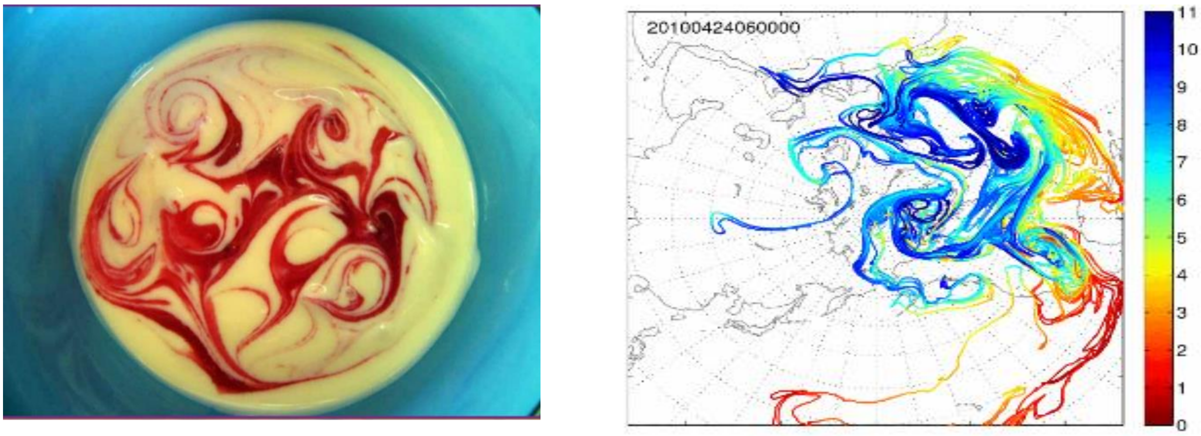
3. A vulkánkitörést követően a szennyeződések terjedését a RePLaT-Chaos-edu programmal leírva, a terjedés mintázata fraktál volt (4. fejezet, például 4.3.a ábra). A szimulálás során a diákok itt is figyelemmel követhették a szennyeződés mintázatának alakulását.

Az említett helyzetekben kapott mintázatokat összevetettük. A tanulók felismerték a különböző esetekben a hasonló mintákat: festékek keveredésekor (pl. márványozás, lásd 6.2.a ábra) és környezeti szennyeződések terjedésekor – akár valós esetről készített fényképről (6.2.b ábra), akár szimulációról van szó (6.3.b ábra). A márványozás során (6.2.a ábra) tapasztaltakhoz hasonló indás, elágazó-visszakanyarodó szerkezetek jelennek meg a környezeti jelenségekben, mint például víz felszínén a szennyező hab képződésekor (6.2.b ábra). A tanulóknak lehetőségük volt arra is, hogy összevessék a festékek keveredéséből született alkotásaikat és a hétköznapokban, például ételek esetén a keveredések során kapott mintázatokat, így a ribizliszörp pudingba keverésének mintázatát (6.3.a ábra), vagy a légkörben terjedő vulkáni hamu mintáját (6.3.b ábra). Arra a következtetésre jutottak, hogy a kaotikus jelenségekre jellemző szálas, fraktál szerkezetek jól felismerhetőek, és nagyon különböző térbeli léptékekben fordulhatnak elő.



a. b.

6.2. ábra a.) Márványozás során kapott fraktálok szálas mintázata – 10 cm-es nagyságrend (fotó: Rósa Kata 11.a) b.) Víz felszínén szennyező hab mintázata duzzasztógát előtt – 10 m-es nagyságrend (fotó: Károlyi György.)

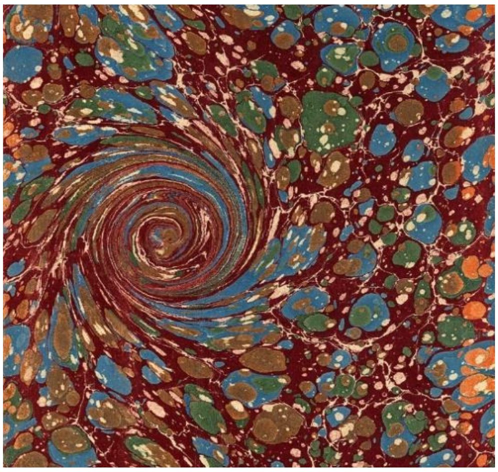


a. b.

6.3. ábra a.) Ribizliszörp keveredési mintája pudingban – 1 cm-es nagyságrend (fotó: szerző) b.) Vulkánkitörést követően gázfelhő mintázata – 1 000-10 000 km-es nagyságrend (A szimuláció a Fujiból (Japán; 3776 m, szélesség: 35° 10' É. hosszúság: 138° 40' K) származó gázfelhőt mutat 2010. április 24-én, 10 nappal a kitörés után. A színek magasságot jelölnek (a RePLaT-Chaos-edu program beépített esete)

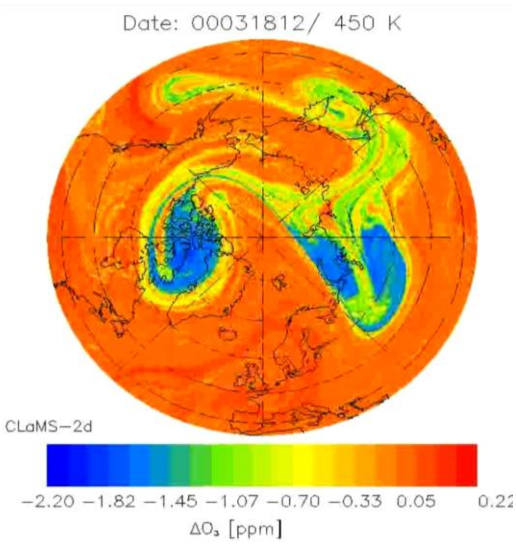
Röviden ismerkedtünk azzal is, hogy a márványozás, mint technika, mikor jelent meg a történelem során (lásd 3.2.1. fejezet). A tanulók összehasonlították egy kézi kötésű könyv fedlapján található márványozó technikával kapott mintázatot (6.4. ábra) az addig ismert különböző fraktálképekkel, és a pudingba kevert ribizliszörp rajzolatában találtak nagyon hasonló „forgókat“ (6.3.a. ábra). Ez a felismerés lehetőséget ad arra, hogy beszéljünk az örvényekről, a folyadékok forgó mozgásformáiról. Ezek jelennek meg a festékrajzolatokban

„forgóként". Gyakori előfordulásuk illusztrálja, hogy az örvények egyik fontos tulajdonsága, hogy bennük a festékek mintegy csapdába esnek, nehezen lépnek ki belőlük [4].



6.4. ábra Márványozott papír egy kézi kötésű könyv fedőlapján, Franciaország, cc. 1880. (forrás: https://hu.wikipedia.org/wiki/M%C3%A1rv%C3%A1nyoz%C3%A1s)

További vizsgálódás során más szembetűnő hasonlóságokat is találtunk a tanulókkal közösen. A márványozás során kialakuló ábra (6.2.a ábra) jellegében nagyon hasonlít az Északi-sark fölött az ózonfogyás dinamikájának szimulálásakor kialakuló mintázatra (6.5.a. ábra), valamint egy korondi edényen a festékek zománcozást megelőző keveredésekor kialakuló mintára (6.5.b. ábra).



a. **b.**

6.5. ábra a.) Az ózonfogyás dinamikája (a sötétkék szín jelzi a jelentős ózonhiányt) az Északi-sark fölött 18 km magasságban 2012 augusztusában – a KFA Jülich szimulációja valódi mért szelekkel [5] b.) Festékek keveredésének mintázata egy korondi edény zománcába égetve

6.3. Hasonló mintázatok keresése a természetben

A tanulók feladatul kapták, hogy keressenek hasonló mintázatokat a márványozás során kialakultakhoz, illetve a vulkánkitörést követően a szennyeződések tovaterjedésekor látottakhoz (4. fejezet). Az alábbiakban a beadandóikból idézek, illetve hozok képeket az általuk találtak közül (a képek egy részének forrása az Internet).

Székely Csenge (10.c) példaként a vízfesték vízbeni szétterjedésének mintázatát (6.6.a ábra), míg Kundráth Dorottya (9.a) az elfújt gyertya füstjének mintázatát választotta (6.6.b ábra).

a. **b.**

6.6. ábra a.) Vízfesték vízbeli szétterjedése – Székely Csenge (10.c) b.) Elfújt gyertya füstje – Kundráth Dorottya (9.a)

Keresztély Zsófia (9.a) példája a munkánk során tapasztaltakhoz hasonló mintázatra az olajfolt szálas szerkezete a víz felszínén (6.7.a ábra). Rácz Barnabás (9.a) is egyik példaként az olaj által a víz felszínén kirajzolt mintázatot adta (6.7.b ábra). Taliga Zsombor (11.a) a természetből vett jó példákat: vízhullám látványa (6.8.a ábra) és a faopál (az opál egyik változata) mintázata (6.8.b ábra).

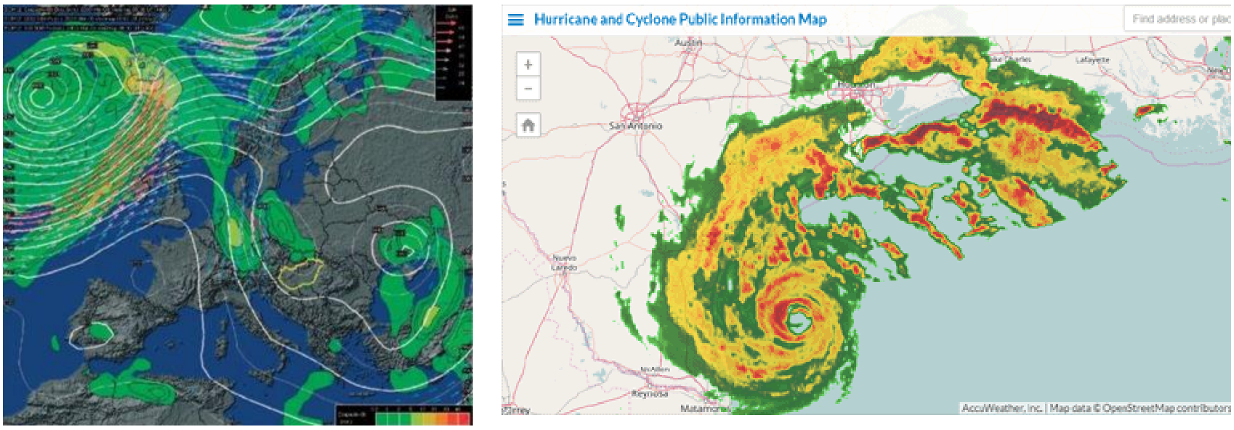
a. **b.**

6.7. ábra Olajfolt szálas szerkezete a víz felszínén a.) Keresztély Zsófia (9.a) b.) Rácz Barnabás (9.a)

a. **b.**

6.8. ábra Taliga Zsombor (11.a) példái a természetből a.) Megtörő vízhullám
b.) Faopál – az opál egyik változata – mintázata

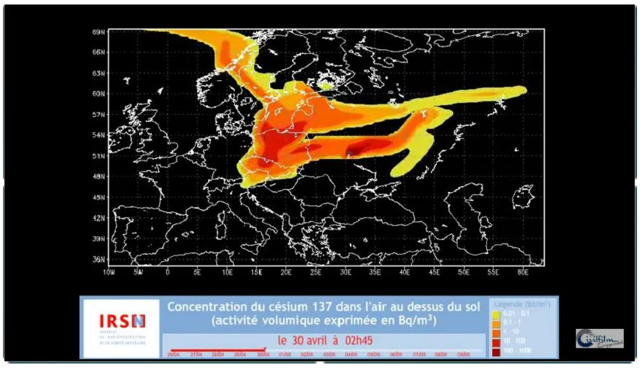
Nagy Marcell (9.a) példaként az időjárás előrejelzési térképeken látható felhőzetet hozta fel, beidézem a beadandójának egyik diáját (6.9.a ábra). Keresztély Zsófia (9.a) másik példája a tornádó volt (6.9.b ábra).



a. **b.**

6.9. ábra a.) Felhőzet időjárás előrejelzésen – Nagy Marcell (9.a) b.) tornádó műholdképen – Keresztély Zsófia (9.a)

Berényi Lajos (9.a) a hasonló mintázatra példaként a csernobili atombaleset radioaktív felhőjének terjedését adta (6.10. ábra). Az ábra felbontása elég gyenge, ennek ellenére a beadandójába beillesztett videón jól látszik a mintázat kialakulásának folyamata, ami hasonló az általunk említett esetekben tapasztaltakhoz.



6.10. ábra Az 1986. április 26-i csernobili atombaleset radioaktív felhője április 30-án, 2 óra 45 perckor (kép egy videóból: https://www.youtube.com/watch?v=AohOLOlcNgg&t=4s) – Berényi Lajos (9.a)

6.4. Interdiszciplinaritás, univerzalitás

Ha alaposan megvizsgáljuk, nemcsak a fizika területén, bármely más természettudományos tárgy esetében találunk példát determinisztikus káoszra, amit fémjelez a fraktálszerkezet felbukkanása: a kémia vagy a biológia témakörében éppen úgy, mint a földrajz területén. Hasonló mintázatokat figyelhetünk meg a meteorológiában, szennyeződések keveredésekor, mint amit láttunk a tanulók munkájának bemutatása során, de ilyen formákkal találkozhatunk a kőzetek kialakulását megelőző keveredések eredményeként is (6.11. ábra). Azt tapasztaltuk, hogy ezeken az órákon nagymértékben erősödött a diákok interdiszciplináris szemlélete.

a. **b.**

6.11. ábra. a.) A Tordai sóbánya falának keveredésről árulkodó mintázata: a sóban gazdagabb, világos és sóban szegényebb, sötétebb rétegek sávos fraktál mintázata látható a kép alsó részén, a kép felső középső részén pedig a világos sávokból lelógó só-cseppköveket látunk (fotó: szerző) b.) Márvány-barlangok, Chile (kép: https://haerdekel.blog.hu/2012/02/07/marvany_barlang)

6.5. Következtetés

A környezeti jelenségekben a márványozás során kialakuló mintákhoz hasonló struktúrák jelennek meg. A tanulóknak lehetőségük volt összevetni a festékek keveredése során kialakult mintákat a környezeti szennyeződések terjedéséről készült fotókkal: például olajszennyeződés mintázata a víz felszínén, s végül a vulkáni hamu légkörben való terjedése során. Tapasztalatom alapján a tanulók felismerték a hasonlóságot a különböző módon kialakult és különböző méretű mintázatok között, és ez az univerzalitás a felfedezés erejével hatott: a káosz minden méretskálán hasonló alakzatok kirajzolódására vezet. A káosz előfordulását kísérő deformált Cantor-szálak dinamikája nagy változatosságot eredményez. Ezek a nyúló-visszahajló, adott esetben forgó formák esztétikai hatása erős, megragadja a diákokat, motiváló és egyben esztétikai élményt ad.

Irodalom

1. B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, 1983.
2. Nagy Péter, Tasnádi Péter: Fraktálok világa - Játékos tudomány http://real.mtak.hu/109404/1/2019_4_CSC_010_Nagy.pdf
3. Tél Tamás, Gruiz Márton: *Kaotikus Dinamika,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.

4. T. Tél, M. Vincze, I.M. Jánosi Vortices capturing matter: a classroom demonstration Phys. Educ. 55 (2020)
5. Grooβ, J.-U., Konopka, P. and Müller, R. 'Ozone chemistry during the 2002 Antarctic vortex split', J. Atmos. Sci. 62, 860 (2005).

A tézissel kapcsolatos publikációm

Bajkó Ildikó.: *Felfedező tanulás a középiskolai természettudományokban a vulkáni hamu terjedése alapján*, Fizikai Szemle 2022/9 pp. 291-296.

7. Projektek

Megmutattam, hogy a középiskolában nemcsak tanórákon, hanem projektfoglalkozás során is sikeresen felkelthető a diákok figyelme a káosz fontosságára

7.1. Bevezető

Mivel a tanórai keret szűkös, ezért sok témát projektfoglalkozásokon lehet elmélyíteni. Projekt-terveket dolgoztam ki és projektfoglalkozásokat tartottam a káoszfizika- és a légköri szennyeződések terjedése témában. Az egy hétre tervezett projektek témái a következők voltak:

Káoszfizika: kísérletekkel, digitálisan és kézművességgel;

Művészet és fizika: káoszfizika;

Káoszfizika: környezetfizika.

A Szent István Gimnázium hagyományos projektheteinek keretében valósultak meg a projektek. A tanulók maguk választhattak a meghirdetett projektek közül, így vegyes csoportokkal dolgoztunk, és mindenki érdeklődött a téma iránt. A *Művészet és fizika: káoszfizika* témájú projekthez minden diákunk számára elérhető jegyzetet készítettem, ami hatékonnyá tette a projekt céljainak megvalósítását (Függelék).

7.2. Miért érdemes projekt keretében ismerkedni a káosszal?

Nézzük meg, miért nagyon jó választás számunkra ennek a témának a megismertetéséhez és elmélyítéséhez a projekt, mint keret! Nagyon sok előnye van, egyik legjellemzőbb, ami számomra nagyon vonzóvá teszi, hogy kilépünk a tantárgyi keretekből. Ugyanakkor kiemelten fontos, hogy lehetőséget teremt arra, hogy: 1. a diákok a kutatómunkában tapasztalatot szerezzenek; 2. egyéni munkát végezzenek; 3. változik az attitűdjük a projektmunka során [1]. További, jól ismert előnyei a projektmódszernek, amiért mindenképp hasznosnak ítélem ezt a feldolgozási formát: a diákok tapasztalatot szereznek a csoportmunkában, erősödik az együttműködési készségük, nagyon sok ismeretre tesznek szert nem hagyományos tanulási keretek közt, megélik az önálló ismeretszerzés örömét, nő a felelősségérzetük, más jellegű kapcsolat alakul ki a tanárral, mint a szokványos tanórai keretben, mindezek eredményeképp nő a motiváltságuk és az önbizalmuk [1].

A projektoktatás feltételei [1] teljesültek az általam meghirdetett projektek során: pedagógusként nyitott voltam a diákokkal való együttműködésre, a tanulók felkészülteknek bizonyultak az önálló tanulásra és kutatómunkára, a diákok kooperatívak voltak, és iskolánkban adottak voltak a projekt személyi feltételei: képzett pedagógus a választott témában, a káoszfizikában, és a tárgyi felfeltételek is rendben voltak, a szükséges egyszerű mechanikai kísérleti eszközöket a tanulókkal együtt elkészítettük (kettős lejtő, mágneses inga, kettős inga).

Projektek esetében fontos kritérium, hogy legyen a tanulók által készített, felmutatható produktum. A mi esetünkben a gyakorlatunk szerint az iskola tanulói számára tartott, a témát ismertető, népszerűsítő, nagyon hasznos bemutató előadás volt az egyik produktum, amit fel tudtunk mutatni. Ebben a tanulók ismertették a munkájukat: egyrészt a kísérleti eszközök összeállítását, a mérés menetét, mérési eredményeiket, másrészt a kézműves tevékenységüket: a festékek keveredésének a rögzítését, a márványozást, és a következtetéseiket is, amire jutottak. Ezen kívül produktumként megtekinthetőek voltak a tanulók által készített kísérleti eszközök, valamint az általuk készített, bekeretezett képek.

A *Káoszfizika: kísérletekkel, digitálisan és kézművességgel* és a *Káoszfizika: környezetfizika* projekteket egy-egy alkalommal valósítottuk meg, a *Művészet és fizika: káoszfizika* címűt pedig kétszer. A résztvevő diákok száma 12 és 15 közt változott, 9. és 11. évfolyamosok voltak.

7.3. Az alapprojekt: Káoszfizika

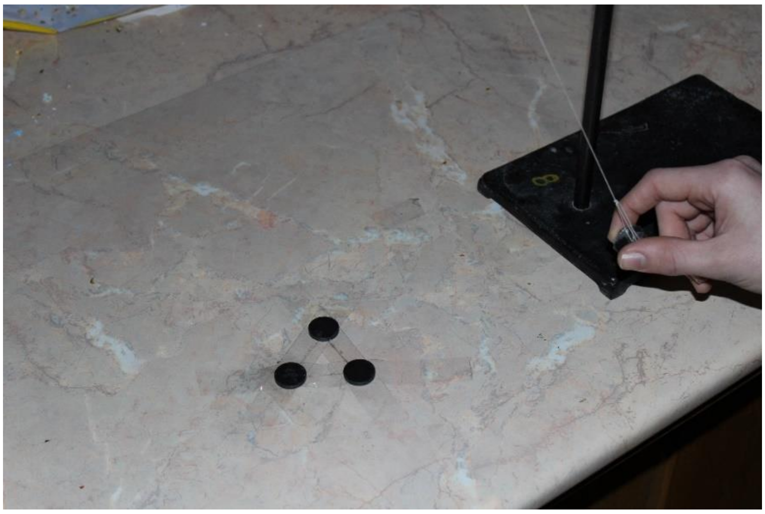
A projekt során először a káoszfizikával ismerkedtek a tanulók, három különböző módon: tanári ismertetés, csoportmunka és egyéni munka formájában, három különböző előfordulási lehetőségből kiindulva: a hétköznapokban, a természetben, illetve a művészetekben, ahogyan a bemutató előadásuk egyik diáján is láthatjuk (7.1. ábra).

7.1. ábra Hol találkozhatunk kaotikus jelenségekkel a tanulók bemutató előadásának egyik diája szerint

A témához tartozó elmélet nagyjából egybeesik az 1. fejezetben bemutatott tanmenettel (1.2. táblázat). Mivel az elmélet egy részét maguk keresték ki, fedezték fel, mások voltak a hangsúlyok. Így például a fraktálok témaköre megfogta őket, ezzel részletesebben foglalkoztak. Ahhoz, hogy egy pillanatra betekinthessünk a munkának ezen fázisába, egy diát mutatok be, amit a projektet záró előadásra készült bemutatóból idézek (7.2. ábra). A dián látható kép a Káoszfizika első momentumaihoz is visszavezet, Edward Lorenz meteorológus munkásságához. A kép bemutatja, hogy hogyan válnak szét nagyon rövid időn belül az időjárás alakulását leíró diagramok: Edward Lorenz látta, hogy jóllehet számítógépen szimulált időjárása közelítőleg ugyanabból a pontból indul ki, egymástól egyre jobban és jobban eltérő mintázatokat hoz létre, mígnem teljesen különbözőek lesznek [2]. Összegezve, a kezdőfeltételekre való érzékenység, a pillangóhatás egyik első, dokumentált példáját mutatták be.

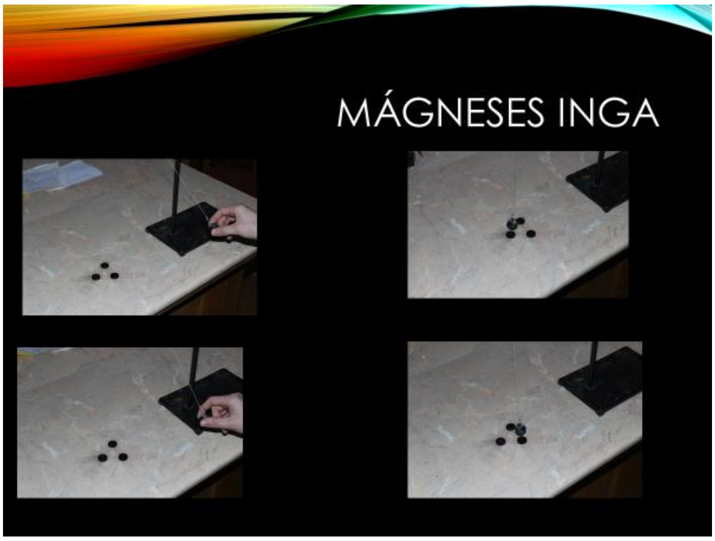
7.2. ábra A Determinisztikus káoszt bemutató egyik dia a tanulók projektet záró előadásáról. A képen Edward N. Lorenz 1961-ben kinyomtatott lapjait láthatjuk: megmutatja, hogy kis kezdeti feltételbeli különbség esetén hogyan térnek el egymástól az időjárás alakulásának mintázatai. (kép forrása: Gleick Káosz, egy új tudomány születésű c. könyv [2])

Következő fázisban a csapat közösen eldöntötte, hogy a megismert egyszerű kaotikus mechanikai rendszerek [3] közül melyiket építsék meg. A könnyű megvalósíthatóság fontos volt a szempontok közt, így a mágneses ingára (7.3. ábra) és a kettős lejtőre (7.5. ábra) esett a választásuk.



7.3. ábra Egyszerű kísérleti eszközt, mágneses ingát készítettek a tanulók: három, az ingatestet vonzó mágnest rögzítettek az asztallaphoz (a szerző felvétele)

Alaposan és sokat kísérleteztek mindkét eszközzel. Beazonosították a kezdeti feltételekre való érzékenységet mindkét kaotikus rendszerben. A mágneses inga esetében ezt a 7.4. ábrán látható módon mutatták be az előadásukra készült egyik dián. Az előadás során ezzel párhuzamosan bemutatták a hallgatóságnak kísérlettel is, hogy két egymáshoz nagyon közeli kezdőfeltételt választva, teljesen eltérő végeredményhez jutunk, a három vonzó mágnes közül két különböző vonzásában zárul a mágneses inga pályája.



7.4. ábra A mágneses ingával felfedezett pillangóhatás szemléltetése a bemutató előadás egyik diáján. A viszonylag közeli helyekről indított ingatest a felső esetben a három vonzó mágnes közül a bal oldali első mágnesnél állt meg, az alsó esetben a jobb oldali első mágnes vonzásában

Ezt követően döntést kellett hozni, hogy melyik „kísérleti eszközzel" végezzenek méréseket. A jobb láthatóság és a skála könnyebb kialakíthatósága miatt a kettős lejtőn pattogó pingpong-labdára esett a választásuk.

7.5. ábra Egyszerű kísérleti eszköz készül: kettős lejtő két iskolapadból. A rajta pattogó pingpong-labda mozgása kaotikus (a szerző felvétele)

A pingpong-labda kettős lejtőn való mozgásáról videófelvételt készítettek. Ezt feldolgozták az ingyenesen letölthető Tracker programmal, az eredmény a 2.1 ábrán látotthoz hasonló.

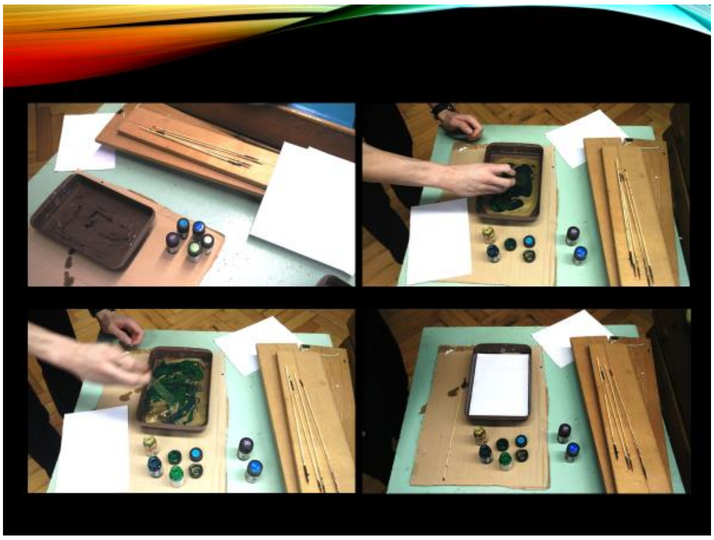
A projekt alatt több kettős lejtős kísérletpárosban, amikor nagyon közeli helyzetekből engedték szabadon esni a pingpong-labdát, beigazolódott a pillangóhatás. Ezt a projektzáró előadáson is bemutatták tanulótársaiknak élőben. A 7.6. ábrán láthatóak a bemutatóra előkészített eszközök is: a kettős lejtő és a mágneses inga.

7.6. ábra Kezdődik a projektbemutató: előkészítve a kísérletek; utolsó simítások, mielőtt bejön a hallgatóság az Eötvös terembe (Szent István Gimnázium) (a szerző felvétele)

A kísérleteket követően a kézműves tevékenység került fókuszba. A tanulók a márványozó technika segítségével (3.2.1. fejezet) a festékek keveredése során kialakult mintázatot papírra rögzítették (7.7. ábra).

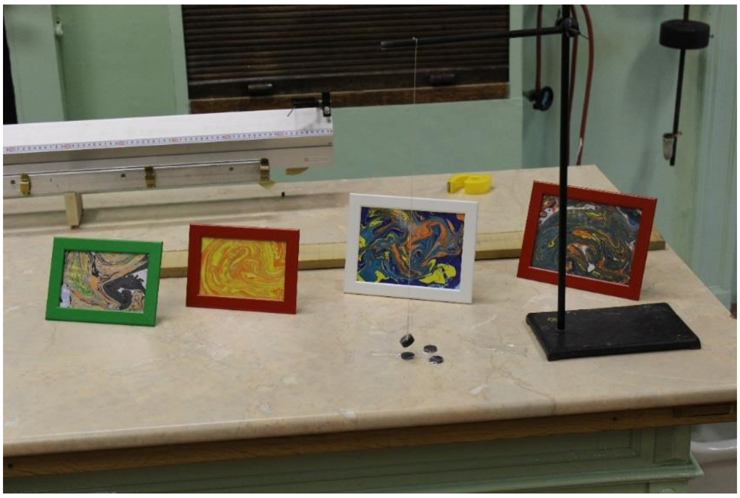
7.7. ábra Márványozás, mellette a száradó képek (a szerző felvétele)

Az erről készült diájukat a 7.8. ábrán láthatjuk, aminek segítségével bemutatták a hallgatóságot alkotó diákok számára is a márványozó technikát, elmesélték minden fortélyát.



7.8. ábra A márványozás fázisait bemutató dia a záróelőadásból

A nagyon jól sikerült levonatokat be is keretezték, hogy ki lehessen állítani, és könnyebben körbe lehessen adni őket (7.9. ábra).

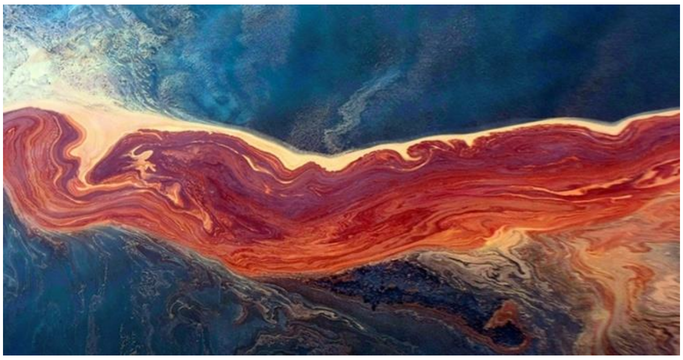


7.9. ábra Kellékek az előadáshoz az Eötvös teremben: mágneses inga; márványozás során készült, bekeretezett, körbeadható képek (a szerző felvétele)

7.4. A szennyeződés és a vulkáni hamu terjedésének szimulálása

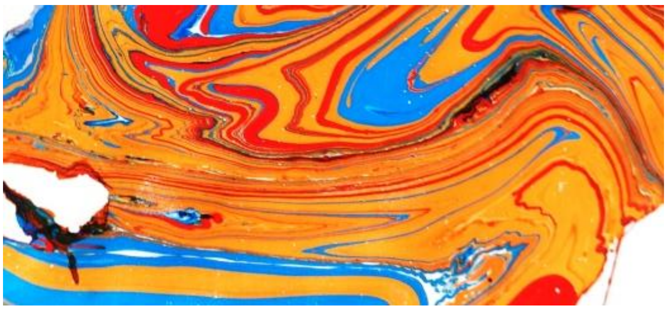
Egy fontos blokk a projektekben a szennyeződések terjedésének témája. A tanulók ehhez kötődő terjedési mintázatokat kerestek és gyűjtöttek össze, majd összevetették őket a kaotikus sodródás általuk már megtapasztalt esetével, a festékek keveredésekor kialakuló mintázatokkal.

A bemutatón megfordították a helyzetet: az előadást hallgatók számára a projektben részvevők kivetítettek a környezeti szennyeződés terjedésének mintázatát bemutató képeket, és a nézőknek kellett keresniük hasonló mintázatot a kiállított, illetve körbeadott képek közül, amelyek márványozással készültek. Egyik ilyen feladat volt a Deepwater Horizon fúrótorony 2010. áprilisi katasztrófáját követően a tenger felszínén az olajszennyeződés terjedésének mintázatáról készül képek mellé találni hasonló jellegűeket.



7.10. ábra Olajszennyeződés terjedése a Deepwater Horizon fúrótorony felrobbanását követően [https://hvg.hu/nagyitas/20100511_olajszennyezes_mexikoiobol_nagyitas]

Az 7.10. ábrán latható kép mellé a márványozás során készült levonatokból a 7.11. ábrán lévőt választotta ki a hallgatóság.



7.11. ábra A projekt során márványozással készült levonat. A fehér folt kézműves hiba a képen,ennek ellenére megtartották, ha nem is keretezték be a képet a tanulók, a nagyon jellegzetes, szépen látható szálas mintázat miatt (a szerző felvétele)

Egy másik példa volt az 7.12. ábrán látható olajfolt ugyanezen katasztrófát követően 3 héttel később Louisiana partjainál.

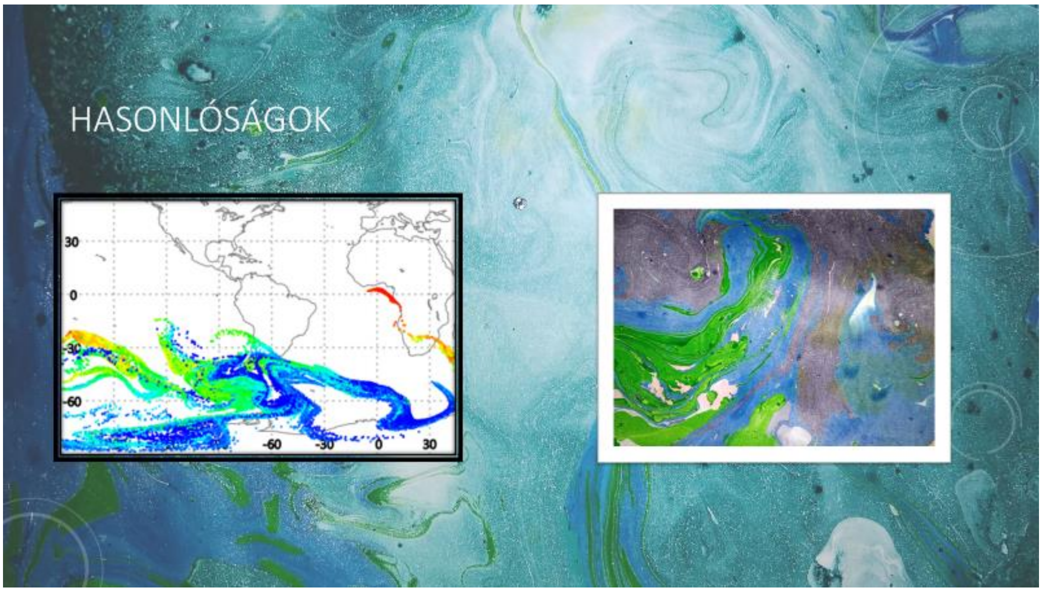
7.12. ábra Olajszennyeződés terjedése a Deepwater Horizon fúrótorony felrobbanását követően 3 héttel https://www.origo.hu/idojaras/20100510-olajkatasztrofa-mexikoiobol-fotok-urfelvetelek.html (kép eredeti forrása: Greenpeace)

E mellé hasonló mintázatként az 7.13. ábrán látható márványozással nyert levonatot választották a hallgatóság soraiból.

7.13. ábra A projektben részt vevők által készített márvány-mintás levonat (a szerző felvétele)

Az eddig bemutatott projekt törzsanyaga volt a gerince a *Káoszfizika: kísérletekkel, digitálisan és kézművességgel* és a *Művészet és fizika: káoszfizika* projekteknek. A hangsúly és az egyes részekre fordított idők eltérőek voltak, a tanulói csapat igényének, összetételének függvényében. A *Káoszfizika: környezetfizika* projekt esetében bővítettem az addigi keretet, mivel a RePLaT-Chaos-edu (lásd 4. fejezet) megjelenése lehetővé tette a vulkánkitöréseket követő szennyeződések terjedésének nyomon követését szimuláció segítségével.

Ebben a projektben a kaotikus sodródás eredményeképp kapott, saját készítésű képeket a vulkánkitörést követően kapott szennyeződés terjedési mintázatokkal állították párhuzamba a diákok (7.14. ábra).



7.14. ábra A projektben részt vevő tanulók által generált vulkánkitörés az ugyancsak általuk készített márvány-mintás levonat egymás mellé helyezve a bemutató előadás diáján.

Irodalom

1. M. Nádasi Mária: *A projektoktatás elmélete és gyakorlata*, Géniusz könyvek, Magyar Tehetségsegítő Szervezetek Szövetsége, 2010
2. James Gleick, Káosz: Egy új tudomány születése, Göncöl Kiadó, 1999.
3. Tél Tamás, Gruiz Márton: *Kaotikus Dinamika,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002

Összegzés

Doktori dolgozatommal, reményeim szerint, sikerült olyan munkát végezni, amely ihletet adhat azoknak, akik szeretnék fizika tanításukat, szakköreiket, projektjeiket tovább színesíteni. Bízom benne, hogy sikerült olvasóimat meggyőznöm, hogy érdemes a káoszfizika irányába nyitni, és támpontokat is adok ehhez. Tapasztalatom szerint nem csak a szigorúan fizika iránt érdeklődő tanulóknál lehet átütő sikereket elérni a káosz témakörével, hanem azoknál is, akik kevésbé elkötelezettek, különösen, ha a kézműveskedést és a szennyeződések terjedésének szimulálását is segítségül hívjuk.

Dolgozatomat a következőképpen strukturáltam: **1. Egyszerű kaotikus mechanikai kísérletek**, és itt amint elkezdünk mérni is, az rögtön átvezet bennünket a következő nagy részhez: **2. Digitális technológiák bevonása a káosztanításban.** Ha azt szeretnénk, hogy magasabb matematika nélkül lényegében minden érdeklődő számára hozzáférhető legyen a káosz jellemzőinek megismerése, akkor segítségünkre lesz a számítógép és a márványozás. Így a következő nagy témakör: **3. A kézművesség a káosztanításban**. A RePLaT-Chaos-edu program használatához fűződő tapasztalataimat összefoglalom a negyedik részben: **4. Felfedező tanulás a középiskolai természettudományokban a vulkáni hamu terjedése alapján**. Ezzel kapcsolatos, tanulóktól kapott visszajelzéseimet az **5. Diákok visszajelzései a RePLaT-Chaos-edu vulkáni szennyeződésfelhő terjedését szimuláló program használatáról** fejezetben összegzem.

Összehasonlítva az előző fejezetekben megismert mintázatokat: a kísérletek során a fázistérben látottakat, a márványozás során a kaotikus sodródáskor megtapasztaltakat, illetve a környezeti áramlásoknál, a környezeti szennyeződések terjedésekor megismerteket, elérkezünk a talán legérdekesebb részhez: **6. A káosz esztétikája, mintázatok különböző skálákon** fejezethez.

Számomra talán a legnagyobb örömet adta, és meglátásom szerint a tanulóknak is a legnagyobb élményt nyújtotta, ha egy projekt keretében végig tudtunk menni a bemutatott folyamatokon. Erről a tapasztalataimat a **7. Projektek** fejezetben foglalom össze. Különösen ajánlom a témát olyan projektekhez, ahol a környezettudatosság van a fókuszban.

Akár tanórán, akár szakkörön, akár projekten dolgozunk együtt a tanulókkal, az a tapasztalatom, hogy a káosztanítás megfelelő felépítésével közelebb jutunk a természet megismeréséhez és megértéséhez. A káosz jellemzőit megismerve, tudatosítható például, hogy a környezet szennyezésének következményei nem csak lokálisak, hanem nagyobb léptékűek.

Tanárként fontosnak tartom, hogy a tények ismertetésén túl, a felfedező tanulás segítségével, saját élményeken keresztül szemléletet is formáljak a tanítás során.

Summary

With my thesis, I hope to have inspired those who wish to further enrich their physics teaching. I am confident that I have succeeded in convincing my readers that it is worthwhile to open up towards chaos physics, and I will provide some hints for doing so. In my experience, it is not only students who are strictly interested in physics who can have a resounding success with chaos, but also those who are less engaged, especially if crafts and simulations of the spread of pollution are used.

I have structured my thesis as follows: **1. Simple chaotic mechanics experiments**, and here as soon as you start measuring it, it leads you straight to the next big part:

2. Involving digital technologies in chaos teaching. If we want to make the study of the properties of chaos accessible to essentially anyone interested without higher mathematics, then computers and marbling will help us. Thus, the next major topic is **3. Crafts in the teaching of chaos.** I summarize my experience of using the RePLaT-Chaos-edu program in Part **4. Inquiry-based learning in high school science through volcanic ash dispersion**. I summarize my related feedbacks from students in Chapter **5. Students' feedbacks on the use of the RePLaT-Chaos-edu volcanic ash dispersion simulation program.**

By comparing the patterns seen in the previous chapters: those seen in the phase space during the experiments, those seen during the marbling during chaotic drift, and those seen in the environmental flows during the environmental pollution dispersion, we arrive at perhaps the most interesting section: Chapter **6. The aesthetics of chaos, similar patterns at different scales**.

For me, perhaps the greatest pleasure, and in my view the greatest experience for the students, was to be able to go through the processes presented in the context of a project. I summarise my experience of this in Chapter **7. Projects**. I particularly recommend this topic for projects where environmental awareness is the focus.

Whether we are working with students in class, in a workshop or on a project, my experience is that by structuring the teaching of the chaos in the right way, we can get closer to learning about and understanding nature. By understanding the characteristics of chaos, we can, for example, become aware that the consequences of environmental pollution are not only local, but also on a larger scale. As a teacher, I believe it is important to use inquiry-based learning to form attitudes through first-hand experiences in addition to teaching facts.

Publikációim és előadásaim

A PhD-képzés alatt publikált cikkek

1. I. Bajkó: Chaos Physics in Secondary School – A Material Applicable in Online *Teaching* Horizons of mathematics, physics and computer sciences **50**, 22-34 2021

2. I. Bajkó *Chaos Physics in High School - Challenges in Multimedia Application* GIREP Conference 2022 J. Phys.: Conf. Ser. 2297 012006

3. I. Bajkó: *Inquiry-based Science Teaching – The Use of RePLaT-Chaos Application*, proceedings of TIM Conference 2022, közlésre elfogadva

4. Bajkó I.: *Felfedező tanulás a középiskolai természettudományokban a vulkáni hamu terjedése alapján,* Fizikai Szemle 2022/9 pp. 291-296.

A PhD-képzés alatti előadások

I. *Chaos Physics in High School - Challenges in Multimedia Application* GIREP Conference Malta, 2020. november 16-18.

II. *Inquiry-based Science Teaching – The Use of RePLaT-Chaos Application* TIM Conference, Temesvár 2021. november 11-13.

III. *Káoszfizika tanítása középiskolában – felfedező tanulás,* Erdélyi Fizikatanári Ankét, Jósikafalva 2022. október 14-16.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Tél Tamásnak, témavezetőmnek a számomra nyújtott rengeteg segítségét, idejét, energiáját. Hálásan köszönöm az együtt gondolkodást, az útkeresést abban, hogy hogyan lehet a káoszfizikát a középiskolában tanítani. Köszönöm a kitartó biztatást, a nélkülözhetetlen útmutatásokat, a türelmet, a precizitást a cikkeim, valamint a doktori munkám elkészítése kapcsán.

Köszönöm Haszpra Tímea témavezetőm segítségét, hasznos útmutatásait, tanácsait. Hálásan köszönöm az élményt, amelyben részem volt, miközben az általa írt RePLaT-Chaos-edu programot használták a tanítványaim.

Köszönöm Gruiz Mártonnak a közös gondolkodást, az előrevivő beszélgetéseket, jelen doktori képzésem előtti cikkeimhez az ábrákban nyújtott segítségét.

Hálás köszönet családomnak és barátaimnak, hogy mindvégig támogattak és mellettem álltak a doktori iskolában való tanulmányaim ideje alatt. Külön köszönöm Benczik Izabellának a közös gondolkodást, a segítséget és a bíztatását, hogy ne adjam fel. Köszönöm Gurbi Gábornak a támogatását, a cikkeim és a dolgozat szerkesztésében nyújtott segítségét.

Köszönöm tanítványaimnak, a Szent István Gimnázium diákjainak a közös inspiráló munkát, felfedezést, alkotást, egyszóval a közös örömteli élményeket a káosz jellemzőinek feltárása során.

Köszönöm Ambrus Rozáliának, általános iskolai fizikatanárnőmnek és Nagy Antalnak, gimnáziumi fizikatanáromnak, hogy megmutatták a fizika varázsát, és követendő példát nyújtottak.

Függelék

SZENT ISTVÁN GIMNÁZIUM

Fizika és művészet: Káoszfizika

Szatmáry-Bajkó Ildikó

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

A káoszelmélet egyre inkább kultúránk részévé válik. Az utóbbi évtizedekben egyre gyakrabban találkozhatunk a káoszjelenségekkel úgy a tudományos élet berkeiben, mint a művészetben, vagy akár társalgási témaként. A Természet Világában 2002-ben indult egy sorozat „A káosz természete" címmel. A magyar Tudomány különszámot szentelt a káoszkutatás új eredményeinek (2002/10. szám). Gleick, „*Káosz: egy új tudomány születése*" című, 1987-ben írt sikerkönyvét, ami a káosztudomány kialakulását mutatja be, 1999-ben magyarul is kiadták. De nem kell elmennünk a tudományokig: Spielberg filmjének, a „*Jurassic Park*" egyik főszereplője káoszkutató. Stoppard „*Árkádia*" című, 1993-ban írt darabjában – a Katona József Színház 1998-ban mutatta be – egy fontos szál épül a káosztudomány és matematika köré, szakszerű ismeretekre alapozva, közérthetően.

Megvizsgáltuk a középiskolás diákoknál a káoszelmélet fogadtatását. Tananyagot fejlesztettünk ki és kipróbáltuk két csoportban. Vizsgáltuk a középiskolás tanulók káosszal kapcsolatos előképét, és a témának a mechanika tananyag keretében, valamint szakkörön való taníthatóságát (Szatmári-Bajkó, 2006).

Kutatásaink eredményeként arra a következtetésre jutottunk, hogy hasznos lenne, hogy a középiskolás diákok halljanak a kaotikus jelenségekről. A modern fizika olyan fejezetéből kaphatnának ízelítőt, amely könnyen megközelíthető, mert a természettudományok nagyon sok területén megtalálható a fizikától a biológián át a környezettudományokig, s mindez makroszkopikus skálán.

Miután felismertük, hogy a jelenleg tanított fizikai mozgásformák kivételek, arra a következtetésre jutottunk, nem tehetjük meg, hogy a szabálytól, az általános mozgásformáról – amely ráadásul alkalmas arra, hogy a fizika újszerű vonásaira és egyben a mindennapi élettel való kapcsolatára is felhívja a figyelmet – nem ejtünk szót. (Gruiz és Tél, 2005).

Úgy gondoljuk, a modern fizika oktatásának megújulásához is hozzájárulhatna a káoszfizika tanítása. Kísérleti tananyagunk kidolgozása megfelel a természettudományos nevelés, és azon belül a fizikaoktatás megújulásának lehetőségét szem előtt tartó szempontrendszernek (Radnóti, 2005, 4. o.). Ezek közül kiemelném a következőket:

- a gyermeki előismeretek figyelembevétele;
- a diákok életének valóságos viszonyaihoz köthető kontextus;
- megjelennek környezeti problémák és történeti elemek;
- megfelelően választott kísérlet alapján történő tapasztalatszerzés.

Ugyanakkor szem előtt tartja annak a fontosságát is, hogy a tananyag tartalma többféleképpen feldolgozható, új kapcsolatokra nyitott legyen, ezáltal is növelve az oktatási informatika terjedésének esélyeit (Kárpáti, 2004).

Már nem csak a természettudományok művelői foglalkoznak azzal, hogy ezeket a fogalmakat be kell vezetni a középiskolai oktatásba, hanem az Új Pedagógia Szemle is. Megerősíti bennünk a fentebb vázoltakat Csorba F. László felvetése is az *Új tudomány: A káosz* cikkében (2000). Három szempontot említ, ami szerinte indokolná, hogy a tanítási órákon is legyen szó a káoszról. Szempontjai egybecsengenek az általunk tapasztaltakkal: az esztétikai-érzelmi kötődés lehetősége, alkalom reflektálásra néhány – alapvető – filozófiai alapelvre: determináció, jósolhatóság (előrejelezhetőség), történetiség, a számítógép kreatív és tervezhető bekapcsolása a hagyományos tantárgyak oktatásába.

Tapasztalataink azt mutatják, hogy akár szakközépiskolás diákok részére is lebilincselő a káosz. A káosz képi világa és formai lehetőségei mágnesként vonzza a diákok tekintetét, hat esztétikai érzékükre, felébreszti kreativitásukat. Ezek a hétköznapi, mindenki számára érthető, megfogható folyamatok segítenek a természettudományos gondolkodás elmélyítésében.

Jelen jegyzet alapját előző publikációim képezik, a 2. és a 4. fejezet nagyrészét az Iskolakultúrában megjelent cikkem adja, további írásaim, amelyekből egybefüggő részeket használok, a Fizikai Szemlében 2006-ban megjelent, illetve az ELTE 2011. konferencia-kiadványában megjelent cikkek:

Szatmári-Bajkó, I. (2010). Káosz, rend, látvány: a káosztudomány ismertetésének lehetősége IKT-eszközökkel a középiskolai oktatás keretében. Iskolakultúra, 20(1), 116–131.

https://www.iskolakultura.hu/index.php/iskolakultura/article/view/20963

Szatmáry-Bajkó Ildikó: *Ünnepeljünk fizika órán fraktálokkal, színekkel* in: Természettudomány tanítása korszerűen és vonzóan, 315. old., Tasnádi Péter, Eötvös Lóránd Tudományegyetem, természettudományi Oktatásmódszertani Centrum, 2011.

http://fiztan.phd.elte.hu/letolt/konfkotet2011.pdf

Szatmári-Bajkó Ildikó (2006): *„Káoszt”? – Azt! – Káoszelmélet a középiskolában* Fizikai Szemle 2006/11. 376-380.
http://fizikaiszemle.hu/archivum/fsz0611/Szatmari-BajkoI.pdf

Köszönetnyilvánítás

A 2. fejezet ábrái (2.1. – 2.23. ábra és az I. színes kép) és a 4. fejezet 4.3. és 4.6. ábrái Tél Tamás és Gruiz Márton *Kaotikus dinamika* c. könyvéből vannak átvéve, közvetlenül vagy módosításokkal, a szerzők engedélyével. Hálás köszönetem fejezem ki érte ezúton is.

2. A káoszfizika megismerése az alkotás élményének segítségével

2.1. Káosz – nemlineáris determinisztikus rendszerek

„*Valentine*: Ha az ember ismerné a képletet, és visszacsatolná, mondjuk, tízezerszer, mindannyiszor keletkezne egy pont valahol a képernyőn. Azt sose tudnánk, hol várható a következő pont. De lassanként ezt a formát kezdené látni, mert minden pont belül maradna ennek a levélnek a formáján. Ez nem levél lenne, hanem matematikai tárgy. De azért...mégis. A véletlenszerű és a törvényszerű együtt alakítják a dolgokat olyanná, amilyenek. Így teremti magát a természet minden méretben, a hópehely éppúgy, mint a hóvihar. Engem ez boldoggá tesz. Hogy megint ott vagyunk a kezdeteknél, és nem tudunk szinte semmit. Azok a dolgok, amikről az emberek verseket írnak - a felhők - a tűzliliom - a vízesés - meg ami a csésze kávéban történik, amikor belemegy a tejszín – mindez csupa rejtély, éppolyan rejtélyes nekünk, mint amilyen az ég volt a görögöknek. Jobban meg tudjuk jósolni, hogy milyen események várhatóak a galaxis peremén vagy az atommag belsejében, mint azt, hogy fog-e esni mához három hétre a nénikénk kerti ünnepélyén. Minden pillanat megteremti a következőnek a feltételeit, ezért megjósolhatatlan például az időjárás, mindig is megjósolhatatlan lesz. A jövő: rendezetlenség. A lehető legjobb ilyenkor élni, amikor szinte minden téves, amiről azt hittük, hogy tudjuk.
Hannah: A Szaharában egészen jól meg lehet jósolni az időjárást.
Valentine: Más a lépték, de a görbe ugyanúgy megy föl-le. Fogadjunk, hogy hatezer év a Szaharában olyan, mint hat hónap Manchesterben.
Hannah: Mibe?
Valentine: Bármibe, úgyis elveszted.”

Tom Stoppard: Árkádia
(fordítás: Várady Szabolcs)

2.1.1. A káoszfizika

Mi a káosz?

Ha kiülünk egy Duna-parti teraszra, a víz örvényeit, az utazó felhőket, a kávéban elkeveredő tejszínt vagy a cigaretta füstjét szemléljük, rádöbbenünk arra, hogy a minket körülvevő mozgások igen kis hányada esik a tanult mozgásfajták körébenn. Középiskolai fizika ismereteinkkel épphogy leírható egy alma szabadesése, de a madártollak vagy a falevelek libegő hullása már jócskán meghaladja a lehetőségeinket.

Az informatika fejlődése lehetővé tette, hogy mind pontosabban modellezhetőek, és így tanulmányozhatóak legyenek az eddig szabálytalannak és előrejelezhetetlennek tartott folyamatok. A szabálytalanság mögött felfedezhető a rend, és egyre többet tudunk mondani ezekről a kaotikusnak nevezett jelenségekről.

De mi is a káosz? A hétköznapi szóhasználatban a káosz egyrészt térbeli rendezetlenséget, másrészt összevisszaságot, zűrzavart, fejetlenséget jelent. A modern tudomány szóhasználatában azonban a káosz a mozgás egy fajtája, mely az iskolában tanult mozgásokhoz képest szokatlan tulajdonságokkal rendelkezik.

Kaotikus folyamatokkal szinte minden természeti jelenség során találkozhatunk, nemcsak olyan fizikai folyamatokban, mint a viharos tengerben áramló folyadékrétegek keveredése (Neufeld, 2003), hanem az állati populációkban – például egy ragadozó és lehetséges zsákmánya létszámának változása – (Domokos, 2002), az óceáni plankton térbeli és időbeli változásában (Scheuring, 2002), oszcilláló kémiai reakciókban (Gáspár, 2002), a szívműködés ingadozásaiban, szennyeződések terjedésekor, és az elmélet alkalmazása megkezdődött a társadalomtudományokban (Fokasz, 2003) is, ámbár legtöbbször csak allegória szintjén.

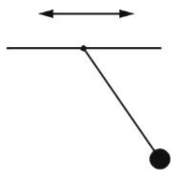
A káosz megértéséhez vizsgáljuk az alábbi példákat a mechanika területéről (Tél és Gruiz, 2002), amelyeket középiskolai fizika oktatás keretében is lehetne ismertetni, kísérletek illetve számítógépes szimuláció segítségével – részben tanítási órán, részben szakkörön (Szatmári-Bajkó, 2006). Ezeken keresztül megismerhetjük a kaotikus mozgás legfontosabb jellemzőit:

- szabálytalan;
- előrejelezhetetlen, azaz a kezdeti feltételekre érzékeny;
- a rend, a pontos geometriai szerkezet: fraktálszerkezet megjelenése.

A káosz megismerése újfajta geometriai szemléletet ad, szokatlan, érdekes esztétikai élményt nyújt. Gazdag ötlettárat jelenthet a számítógépes grafika terén, a kaotikus mozgásformák ábrázolása számtalan érdekes formát és szerkezetet rejt. (Egyes példákra visszatérünk a kaotikus mozgásokat szimuláló számítógépes program bemutatásakor.)

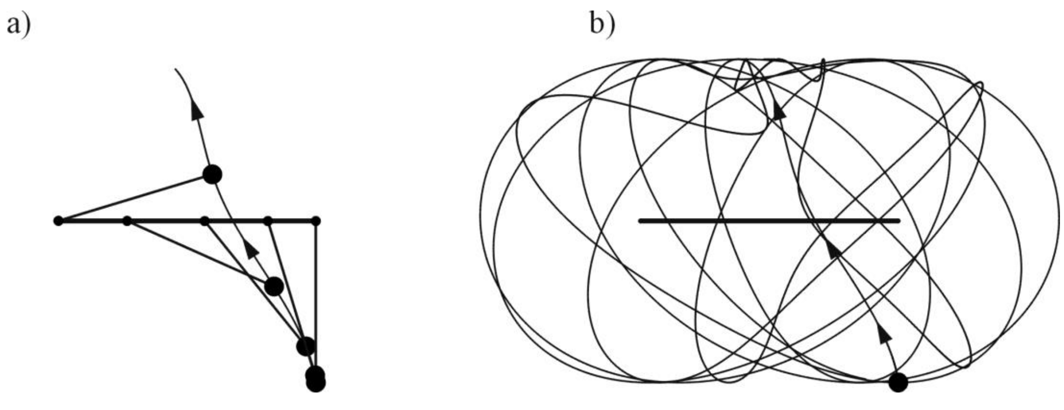
Rezgetett inga

A középiskolából ismert fonálinga (matematikai inga) felfüggesztési pontját vízszintes síkban periodikusan mozgatjuk, így kapjuk a rezgetett ingát (2.1. ábra).



2.1.ábra Rezgetett inga: az ingát felfüggesztési pontja vízszintes síkbeli periodikus mozgatásával gerjesztjük

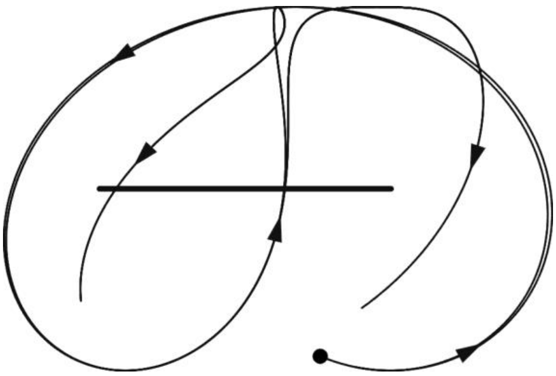
A lengés a súrlódás vagy a közegellenállás miatt gerjesztés hiányában leállna. A felfüggesztési pontot vízszintesen, időben periodikusan mozgatjuk, így gerjesztjük az ingát, hogy a mozgás állandósuljon. Ez a periodikus mozgatás az oka annak, hogy a mozgás kaotikussá válhat. A 2.2. ábra az inga tömegpontjának mozgását mutatja a függőleges síkban.



2.2. ábra Egy periodikusan mozgatott felfüggesztésű inga mozgása. a.) Az indítás utáni pár pillanatban berajzoltuk az ingát is. b.) Az inga végpontjának a pályáját látjuk hosszabb ideig függőleges síkban: az inga mozgása szabálytalan, gyakori átfordulásokkal.

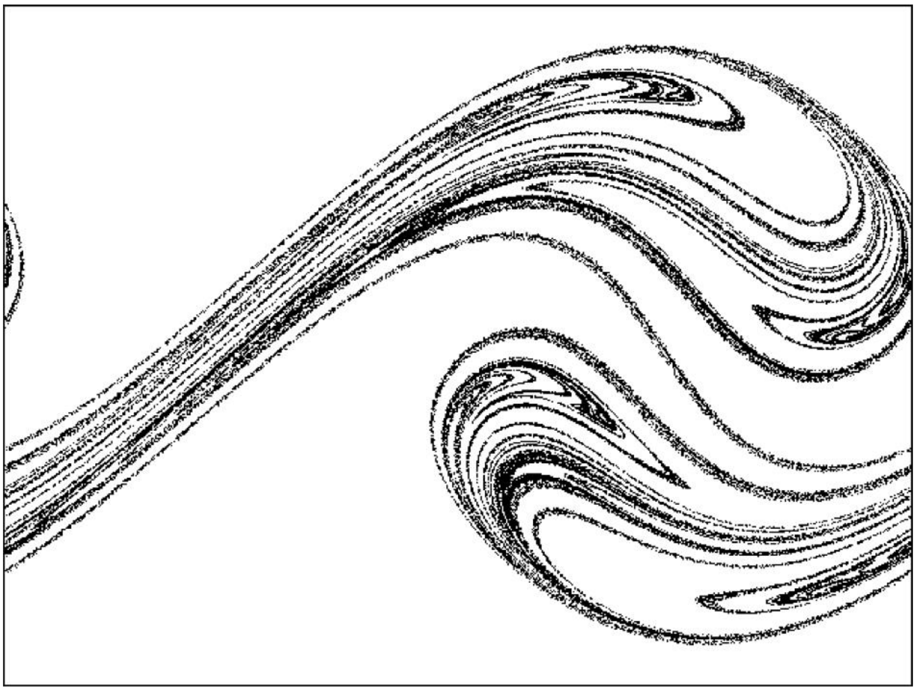
A mozgást tetszőleges hosszú ideig követve sem találunk semmilyen szabályosságot. A kaotikus mozgás egyik jellemzője, hogy *szabálytalan*.

A 2.2.b. ábrán láthatjuk, hogy az inga többször átfordul. Az az állapot, amikor éppen „fejjel lefelé" van, különösen határozatlan, instabil állapot. Ha két közeli kezdőpontból indítjuk az ingát, a két mozgás pályája csak addig marad közel egymáshoz, amíg egy ilyen „fejjel lefelé" állapotban szét nem válik. Az egyik esetben tovább fordul, a másik esetben az eredeti forgásával ellenkező irányba fordul. (2.3. ábra) (Ez a „fejjel lefelé" állapot annyira instabil, mint a hegyére állított ceruza helyzete.) Érzékelhető, hogy a mozgás nagyon sok instabil állapoton vezet keresztül. Ebből adódik a mozgás egy másik jellemzője, hogy két, igen kevéssé eltérő kezdőfeltétel mellett a pályák már rövid idő múlva is nagyon eltérnek egymástól: a kaotikus mozgás *előrejelezhetetlen, a mozgás érzékeny a kezdőfeltételekre*.



2.3. ábra Két közeli helyzetből induló rezgetett inga pályájának szétválása egy instabil („fejjel lefelé") állapot közelében. A nyilak jelzik az inga tömegpontjának az elmozdulási irányát.

Említettük, hogy a szabálytalanság mögött felfedezhető a rend. Ezt úgy tehetjük láthatóvá, hogy a mozgást nem folytonosan követjük, hanem azonos időközönként „mintát veszünk" belőle. A 2.4. ábrán elénk táruló érdekes szerkezetet úgy kapjuk, hogy szabályos időközönként (a gerjesztési periódusidő egész számú többszöröseinek megfelelő időpontokban) megadjuk a mozgás hely- és sebességkoordinátáit, majd ezeket nagyon sok perióduson keresztül egy síkon ábrázoljuk.



2.4. ábra A rezgetett inga mozgásának képe a hely-sebesség ábrázolásban, szabályos időközönként vett mintákon.

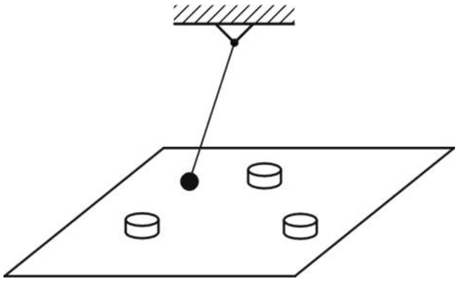
A szép, megkapó ábra szálas, fonalas szerkezetű; ez mutatja, hogy a káoszhoz sajátos szerkezet tartozik. Ez a mintázat eltér a megszokott síkgeometriai alakzatokétól, jóval bonyolultabb, *fraktál* a neve. Láthatjuk, hogy a kaotikus mozgás végtelenszer bonyolultabb, mint a periodikus, hiszen a 2.4. ábrán a periodikus mozgásnak egyetlen pont felelne meg.

A 2.4. ábrán látható fraktálszerkezetű objektumot kaotikus attraktornak nevezzük, hiszen bármilyen kezdőfeltételből is indul a rendszer, hosszú idő eltelte után ehhez a vonzó objektumhoz, attraktorhoz tart és a mozgás szabálytalan, kaotikus. Érdekes, sajátos szerkezete miatt különös attraktornak is szokás nevezni.

A kultúránkban más oldalról, a káosztól függetlenül is jelen vannak a fraktálok. A közismert Mandelbrot-halmaznak már kultusza van, az interneten honlapok tömkelegét találni a témában. A kaotikus attraktor is fraktálszerkezetű, de „fraktálsága" más jellegű.

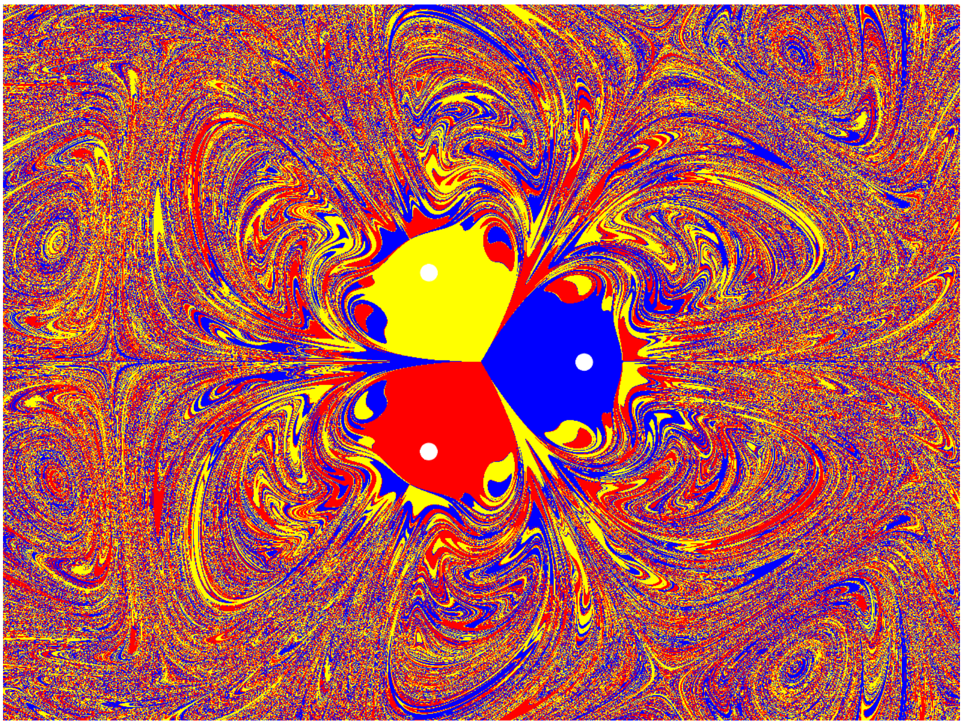
Mágneses inga

Ha a középiskolából ismert fonálingánkat mágneses testből készítjük, és az asztalon mágneseket helyezünk el, amelyek fölött mozoghat az inga teste, máris kész a mágneses ingánk, amelynek segítségével a káosz egy másik arculatát ismerhetjük meg. Vegyünk három mágnest, és helyezzük el őket egy szabályos háromszög csúcsain (2.5. ábra). Ha az inga és a mágnesek között vonzóerő hat, az inga bármelyik mágnes közelében megállhat, tehát a rendszerben három vonzó objektum, attraktor létezik.

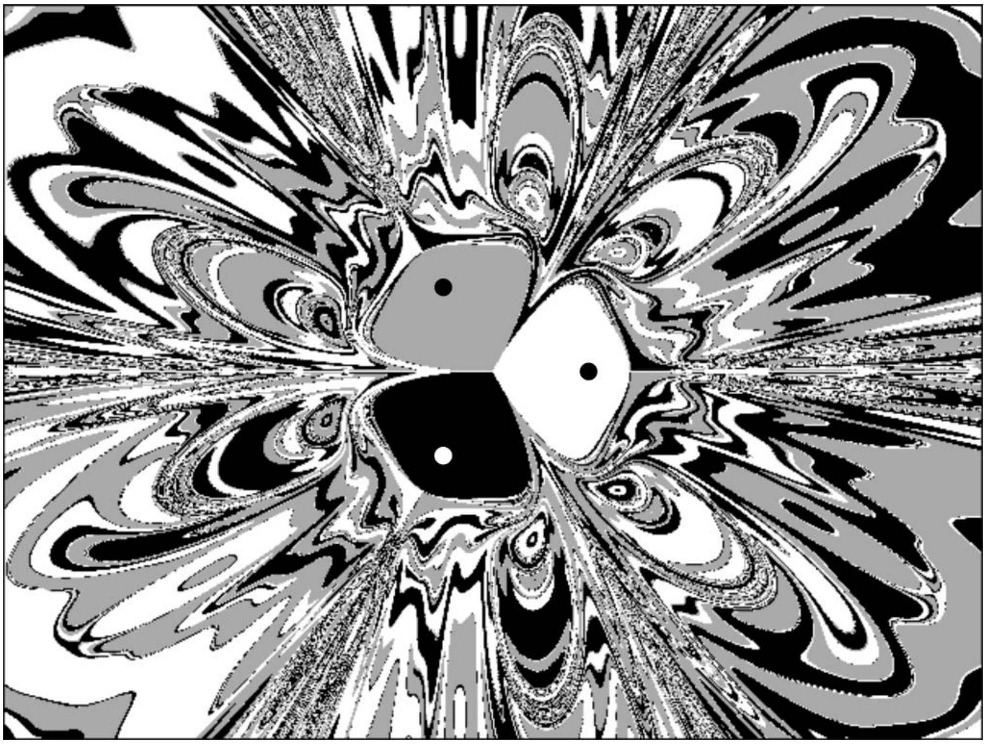


2.5. ábra A mágneses inga.

A három attraktorhoz egy-egy színt rendelünk, és kiszínezzük az egész síkot aszerint, hogy a sík adott pontja felett elengedve a mágneses inga testét, melyik mágnes fölött, azaz milyen színű attraktornál állapodik meg. Az azonos színű területek egy *vonzási tartomány*t képeznek. Figyeljük meg az így kapott I. színes képet: a vonzási tartományok határai bonyolultan összeszövődnek, ezek a határok is szálas szerkezetet mutatnak, az attraktorok *fraktál vonzási tartománnyal* rendelkeznek (2.6. ábra).

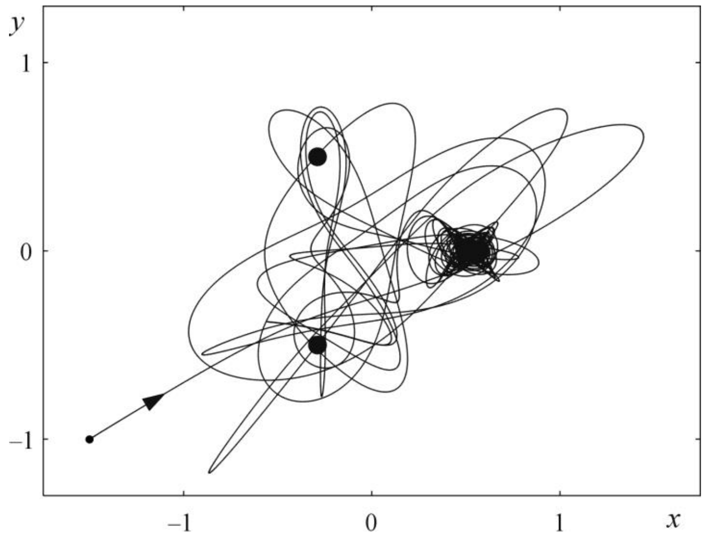


I. színes kép Vonzási tartományok a fázistérben – mágneses inga három vonzó mágnessel



2.6. ábra A mágneses inga három mágnesének vonzási tartományai. A sík egyes pontjaihoz aszerint rendelünk színeket, hogy a fölöttük elengedett inga melyik mágnesnél áll meg.

Ha a mágneses ingát a fraktál vonzási határ közeléből indítjuk, a mozgás hosszú ideig kaotikus, szabálytalan (2.7. ábra).



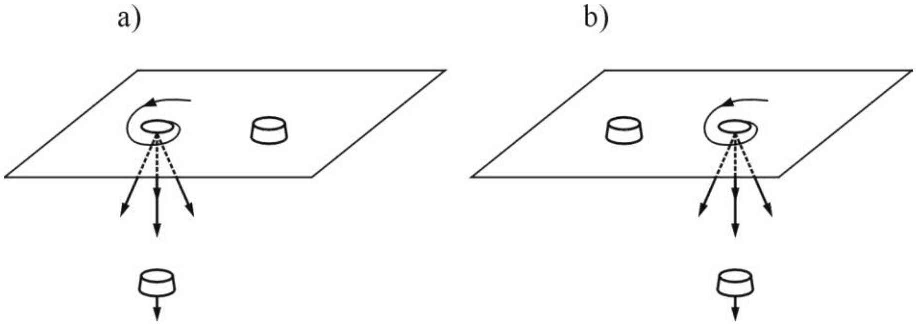
2.7. ábra A mágneses ingatest mozgása felülnézetből: a mozgás hosszú ideig szabálytalan.

2.1.2. Keveredések

Szennyeződések sodródása

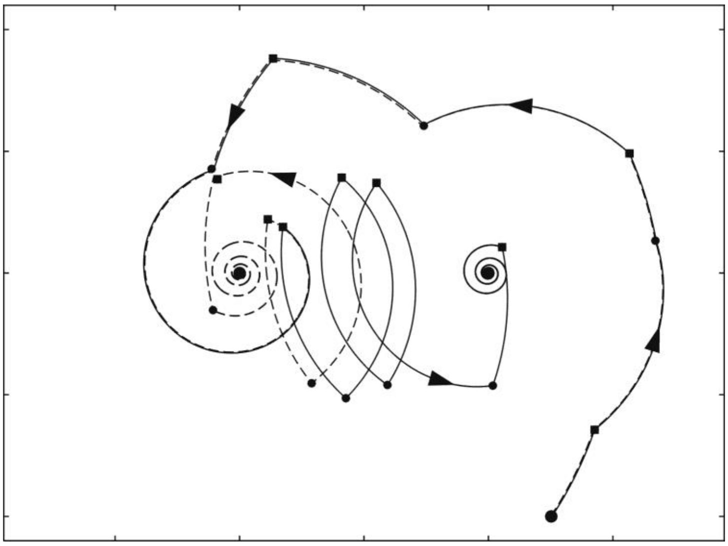
Kaotikus mozgás számos gyakorlati alkalmazással bíró jelenségben is előfordul. A kérdés környezetvédelmi jelentősége miatt mi egyet emelünk ki: a szennyeződések levegőben vagy vízben (áramló közegekben) való terjedését.

Építsünk fel egy kétlefolyós modellt, időbe periodikus áramlással: egy kétlefolyós kádban (széles, lapos edény) a két lefolyót felváltva működtetjük, egy-egy fél periódus ideig az egyiket, majd a másikat (2.8. ábra). Kíváncsiak vagyunk, hogyan mozog egy szennyeződés, például egy festékrészecske.



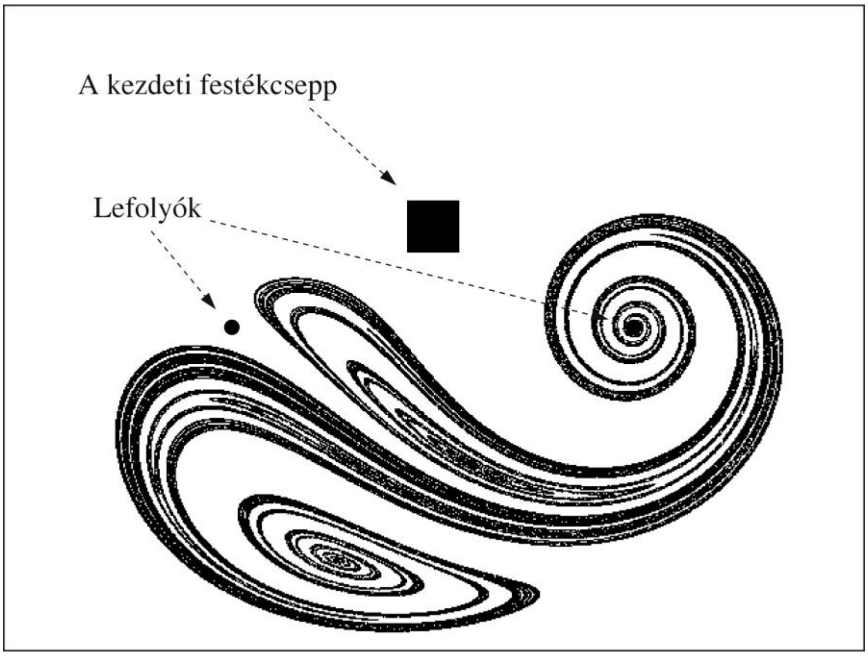
2.8. ábra A kétlefolyós kád: egy széles, lapos edényben a felváltva nyitva tartott lefolyók kaotikus sodródást okoznak.

Követve a részecske pályáját, látjuk, hogy a kaotikusság eredete példánkban az, hogy ha az egyik lefolyó felé tartó részecske fél periódusidő alatt nem éri el a lefolyót, akkor a másik felé kezd mozogni, de megtörténhetik, hogy azt sem éri el a következő fél periódusidőben, és így tovább. Így hosszú ideig is eltarthat, amíg kifolyik az edényből. A közelről induló festékrészecskék különböző lefolyókon hagyhatják el a kádat, közben bonyolult pályát írhatnak le (2.9. ábra).



2.9. ábra Két, közelről induló festékrészecske pályája kétlefolyós kádban (egyiket folytonos, másikat szaggatott vonallal jelöltük). A fekete pontok a bal oldali lefolyó nyitási pillanataihoz tartozó helyzetek, a négyzetek a jobb oldali lefolyó nyitási pillanatait jelölik.

Egy festékcsepp vagy szennyezéscsepp mozgásának követése nagyon érdekes és fontos a szennyeződések terjedésének vizsgálata szempontjából. Meglepő, hogy a csepp kezdeti alakját nagyon rövid idő alatt elveszíti úgy, hogy minden egyes részecske kaotikus mozgása mellett jól definiált szálas szerkezetet, fraktálalakzatot rajzol ki (2.10. ábra).



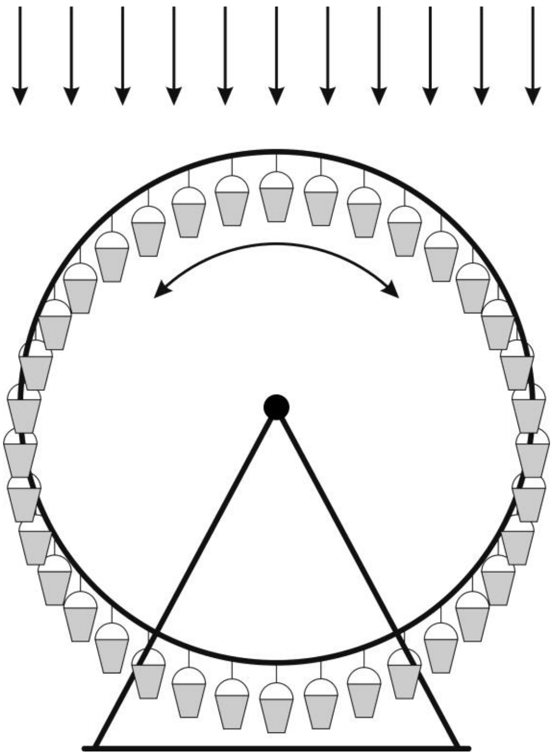
2.10. ábra Egy festékcsepp kezdeti és 5 periódus utáni alakja a kétlefolyós kádban.

A szennyeződések szálas alakzatokban történő terjedése jól megfigyelhető számos jelenségben: az utcai olajfoltok mintázatai, a kémiai szennyeződések légköri szétterjedése, festékek keveredése folyadékokban, vagy akár a tej keveredése a kávéban. Ebből a szálas szekezetből egyértelműen következik a szennyező elemek kaotikus mozgása.

Vízikerék

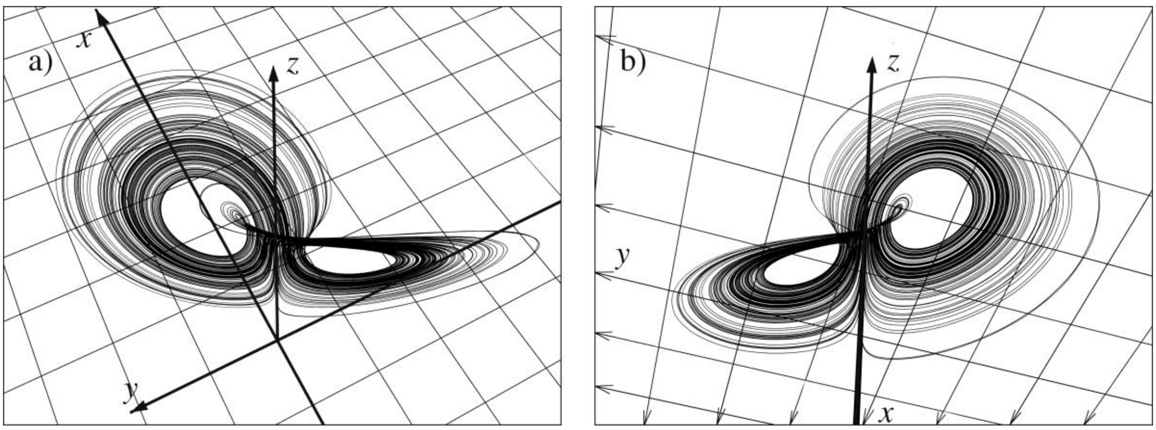
A vízikerék egy szimmetrikus elrendezésű, egyszerű rendszer, ahol a kaotikus mozgás nem időbeli periodikus külső hatás, hanem energiabetáplálási folyamat következménye.

Kör alakban szimmetrikusan vödröket rögzítünk egy kerékre, a kerék középpontját egy tengelyre erősítjük. A mindkét irányban szabadon elfordulni képes kerékre folyamatosan esik az eső, valamennyi víz folyamatosan távozik a vödrökből (2.11. ábra).



2.11. ábra A vízikerék. Egy kerékre alul kilyukasztott vödröket rögzítünk szimmetrikusan, a kerék középpontja egy tengelyre van felfüggesztve, melyekre folyamatosan hull az eső. A kerék mindkét irányban szabadon elfordulhat.

Ebben az esetben a kaotikus attraktorunk háromdimenziós lesz és alakja egy pillangó szárnyait idézi. (2.12. ábra)

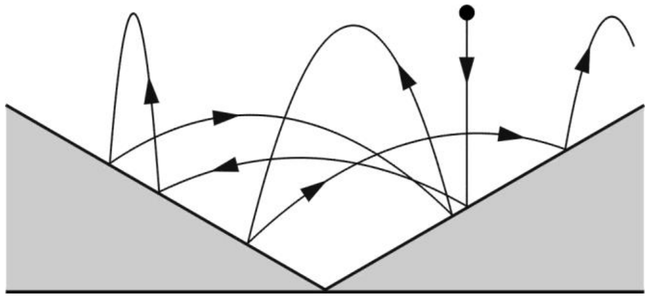


2.12. ábra A vízikerék attraktorának két térbeli nézete: a.) felülről; b.) alulról.

A pillangó szárnyai kapcsán a káoszelméletben nagyon könnyen asszociálunk Gleicknek a káoszról írt népszerűsítő könyve (1999) révén világhírre szert tett pillangó-effektus kifejezésre. A szóhasználat a kezdeti feltételekre való érzékenységre utal, ugyanakkor a megtévesztés veszélyét is rejti (Tél és Gruiz, 2002, 201. o.).

Kettős lejtőn pattogó labda

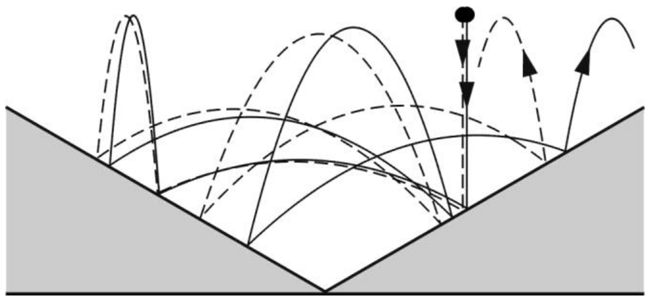
A kaotikus mozgást mutató rendszerek közül egyik legegyszerűbb a két szemben álló szimmetrikus lejtőn pattogó rugalmas labda (2.13. ábra).



2.13. ábra Két szemben álló lejtőn tökéletesen rugalmasan pattogó labda (a lejtők dőlésszöge azonos).

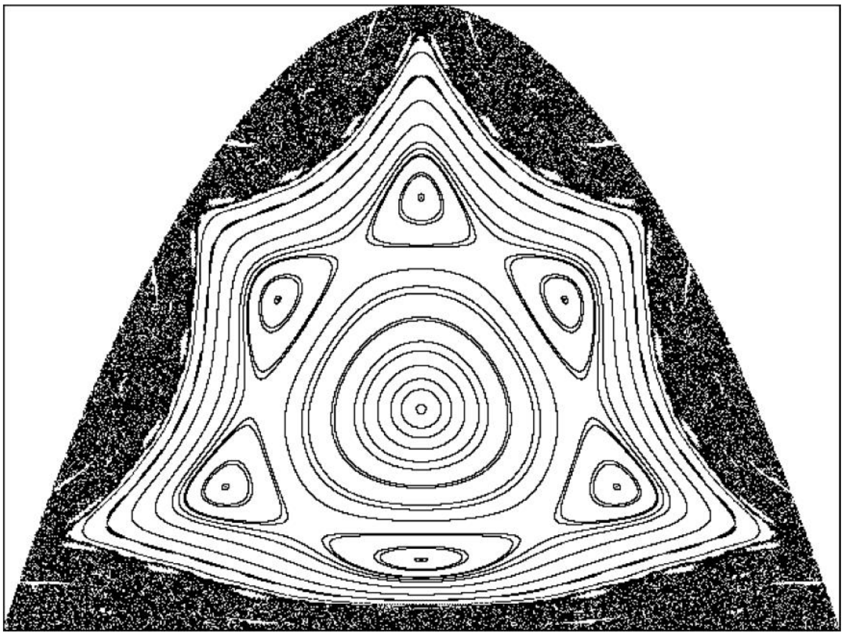
A mozgást tetszőleges hosszú ideig végigkövetve sem találunk semmilyen szabályosságot. A kaotikus mozgás abból adódik, hogy a másik lejtőre való átpattanás után a labda nem oda jut vissza, ahonnan jött. Így állandóan új helyzetekkel találjuk szembe magunk. Az iskolában is nagyon könnyen bemutatható ez a kaotikus mozgásforma.

Ha a kettős lejtő fölött közel azonos kezdőhelyzetből ejtjük le a labdát, a pályák jól láthatóan hamar eltávolodnak egymástól. A kis kezdeti különbségek erősen megnövekednek: a kaotikus mozgás érzékeny a kezdőfeltételekre, és ezért előrejelezhetetlen (2.14. ábra).



2.14. ábra A kettős lejtő fölött közel azonos helyzetből leejtett labdák pályája hamar szétválik: a mozgás érzékeny a kezdőfeltételekre (a folytonos vonal megegyezik a 2.13. ábrán lévővel).

Ha a lehetséges mozgások összességéről áttekinthető képet szeretnénk kapni, érdemes egy fajta mintavételezést alkalmazni. Itt a mintavételezés az eddigiektől eltérő lesz, mivel a rendszer jellemzői is eltérőek: az n-edik ütközés pillanatában ábrázoljuk az elpattanási sebesség két komponensét a sík egy pontjaként (2.15. ábra). Így láthatóvá válik, hogy a káosz határozott struktúrával rendelkező bonyolult mozgás. Ez a struktúra is fraktálszerkezetet mutat, azonban most más az információtartalma, mint az eddig megismert példákban. A pöttyözött tartományok kaotikus mozgást jeleznek. Ezeket ellipszis-szerű rajzolatok szakítják meg, melyekhez szabályos mozgás tartozik.



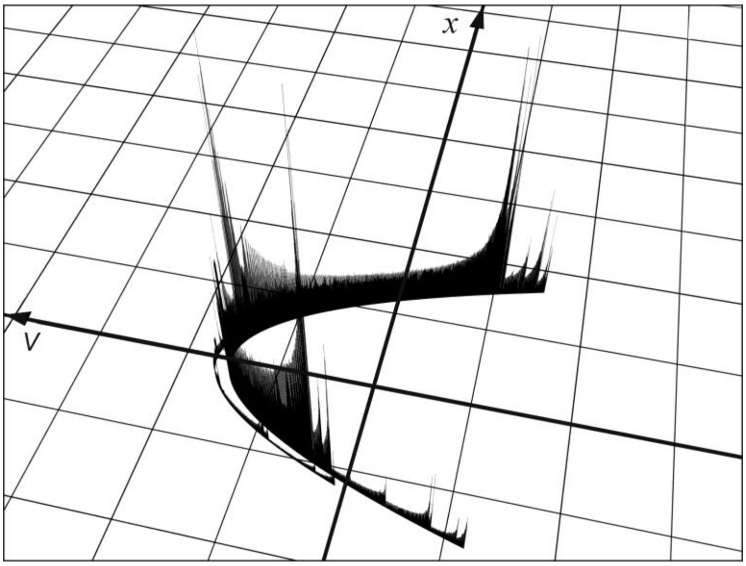
2.15. ábra A kettős lejtőn pattogó labda lehetséges mozgásainak képe adott összenergia mellett olyan ábrázolásban, ahol a vízszintes tengelyre az elpattanási sebesség u_n lejtővel párhuzamos komponensét, a függőlegesre pedig a lejtőre merőleges komponens z_n négyzetét mérjük fel.

A két lejtő között pattogó labda esetében a 2.15. ábrán a széleken megfigyelhető csipkeszerű, sötétebb, pöttyözött rész, amely a kaotikus mozgásnak felel meg, olyanszerű, mint a tésztagyúrás pöttyfelhője, mivel hasonló típusú káoszról beszélhetünk mindkét esetben.

A természetes eloszlás

Megismerkedtünk a kaotikus rendszerek három alapvető tulajdonságával: szabálytalanság, előrejelezhetetlenség (érzékenység a kezdeti feltételekre), pontos geometriai szerkezet, a fraktálszerkezet megjelenése. A három tulajdonság szintézisét, s egyben általánosítását is adja a kaotikus attraktoron kialakuló *természetes eloszlás*. Mivel a kaotikus attraktoron a mozgás nagyon rövid időn belül már csak 100 százalék hibával írható le, a hosszú távú viselkedést csak úgy jellemezhetjük, ha megadjuk, hogy a test milyen valószínűséggel kerül az attraktoron egy adott pont közelébe. A természetes eloszlás a kaotikus rendszerek hosszú idejű jellemzésének egyetlen helyes eszköze.

A 2.16. ábra alapján képet alkothatunk a természetes eloszlásról.



2.16. ábra Természetes eloszlás egy kaotikus attraktoron. A két dimenzióba fekvő fraktálszerkezetű attraktoron megjelenik egy erősen inhomogén eloszlás egy harmadik dimenzióban, melynek helyi maximumai a kaotikus attraktor leggyakrabban látogatott helyeit jelzik.

Összefoglalásként elmondható, hogy káosz az egyszerű, kevés változóval leírható rendszerek olyan mozgása, melyet hosszú távon csak valószínűség-eloszlással lehet helyesen és tetszőleges pontossággal jellemezni.

A természetes eloszlás ábrái még rálicitálnak arra, amit az amúgy is gyönyörű látvány nyújtó kaotikus attraktor rajzolata ígér. A szokásos valószínűség-eloszlás a harang-, vagy Gauss-eloszlás. Itt teljesen mással találkozunk, a természetes eloszlással. Ez a legmeglepőbb, leglátványosabb, amit a káosz produkál. Változatos asszociációkra ad teret – például antarktiszi hegyvidék – kinek mit varázsol elő a fantáziája. A függvények világában megmutatkozó „fraktálsággal" van módunk találkozni itt. A természetes eloszlások ábrázolása nyújtotta esztétikai és grafikai élmény hatalmába keríthet bennünket.

Thomasina: „…Isten az atyám, Septimus, ha van egyenlete az olyan görbének, amelyik a haranghoz hasonlít, akkor kell, hogy legyen egyenlete az olyan görbének is, amelyik harangvirághoz hasonlít, és ha már harangvirághoz, miért ne rózsához? Elhisszük, hogy a természetet számokban írták?
Septimus: El.
Thomasina: Akkor a maga egyenletei miért csak az ipari formákat írják le?
Septimus: Nem tudom.
Thomasina: Ilyen eszközökkel Isten csak egy szekrényt tudott volna teremteni."

Tom Stoppard: *Árkádia* (fordítás: Várady Szabolcs)

2.2. Fraktálok

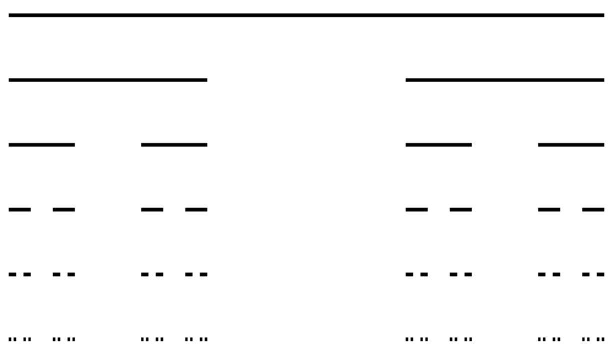
A fraktálok tört dimenziójú geometriai alakzatok. Leírásukkal a fraktálgeometria foglalkozik. A káoszfizikában a fázistérben jelennek meg. A fraktál mintázat a kaotikus folyamatok esetében mindig megjelenik egy absztrakt térben, a fázistérben, így rejtve marad a közvetlen megfigyelés előtt. A keveredés a kivétel: a fázistér egybeesik a valós térrel, így a fraktálszerkezet megfigyelhető a hétköznapokban is, például a kávéba öntött tejszín esetében.

2.2.1. Matematikai fraktálok

Cantor-halmaz

Szerkesszünk közösen egy iteráció (ismétlési eljárás) segítségével egy Cantor-halmazt, kiindulva egy szakaszból. Osszuk fel a szakaszt három egyenlő részre, majd távolítsuk el a közepét. A megmaradt két szakasszal ismételjük meg a folyamatot, majd újra, és újra, amig a ceruzánk hegye vagy a számítógép képernyőjének felbontása engedi (2.17. ábra). Elvileg vég nélkül ismételhetjük az eljárást.

Vajon mennyi a dimenziója annak az objektumnak, amit így kapunk?



2.17. ábra Cantor halmaz

A válasz: a dimenzió 0 és 1 közé esik[1]. Több, mint a pont dimenziója, de kevesebb, mint egy szakasz dimenziója. Ez újszerű számunkra, hogy tört dimenziójú geometriai alakzatokról beszélünk: a latin fractus szóból képezték a fraktál nevet.

Ha a szakasz helyett egy téglalapból indulunk ki, és hasonló szerkesztésnek vetjük alá, akkor **Cantor-szálakat** kapunk, melynek dimenziója értelemszerűen 1 és 2 közé esik. A keveredések során találkozni fogunk a Cantor-szálaknak, jól jegyezzük meg őket!

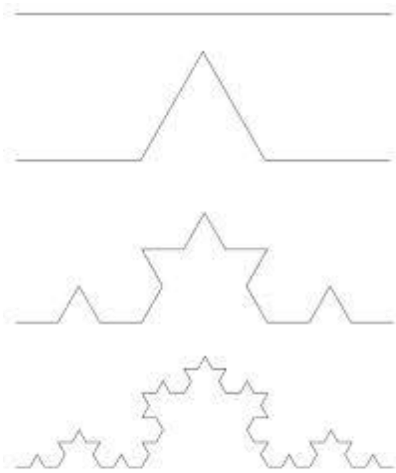
Feladat: Szerkessz Cantor szálakat!

[1] A Hausdorff-dimenziója 0,63 (log2/log3) [dimenziós irodalomjegyzék].

Koch-görbe szerkesztése

Induljunk ki egy szakaszból, távolítsuk el a középső harmadát, és építsünk rá egyenlő oldalú háromszöget (2.18. ábra).

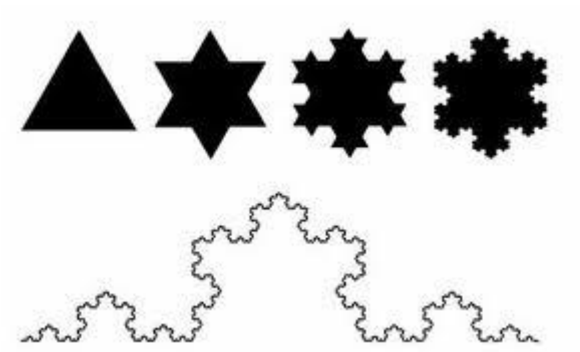
Az így keletkező négy szakaszra ismételjük meg ugyanezt az eljárást újra és újra. Folytathatjuk az egyre rövidebb, egyre nagyobb számú szakaszokkal vég nélkül.



2.18. ábra Koch-görbe

Az így létrehozott objektum több, mint egy szakasz, de kevesebb, mint egy sík, dimenziója 1 és 2 közé esik[2]. Ha nagyon sokszor (végtelenszer) ismételjük a szerkesztést, nagyon hosszú (végtelen) lesz a keletkezett geometriai alakzat, annak ellenére, hogy a területet nem tölti ki teljesen. Ez a tulajdonsága a fraktáloknak nagyon „hasznossá” és gyakran „alkalmazottá” teszi őket a természetben (jó példa erre a vérér-rendszerünk, vagy a nyirokhálózatunk).

Mesterséges hópehely szerkesztésére is alkalmas ez a művelet, a 2.19. ábrán a Koch-sziget szerkesztését látjuk.

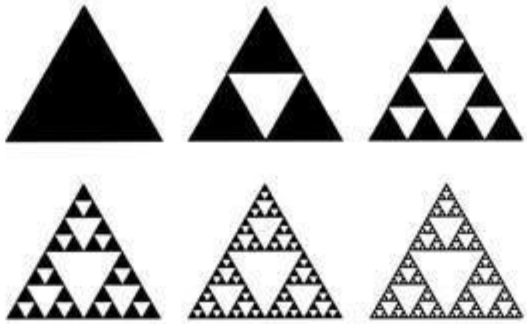


2.19. ábra Koch-sziget

[2] A Koch-görbe Hausdorff-dimenziója 1,26 (log4/log3).

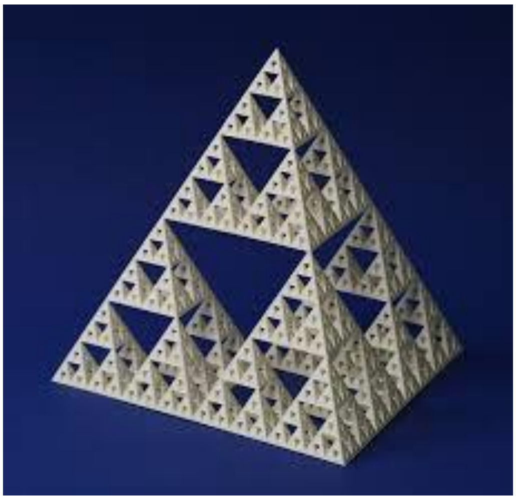
Sierpinski háromszög

Vegyünk egy szabályos háromszöget, az oldalfelező pontokat kössük össze, az így kapott középső kis szabályos háromszöget távolítsuk el. Ezt a műveletet folytassuk (2.20. ábra). Az így kapott objektum dimenziója ugyancsak 1 és 2 közé esik[3], de nagyobb, mint a Koch-görbe esetében.

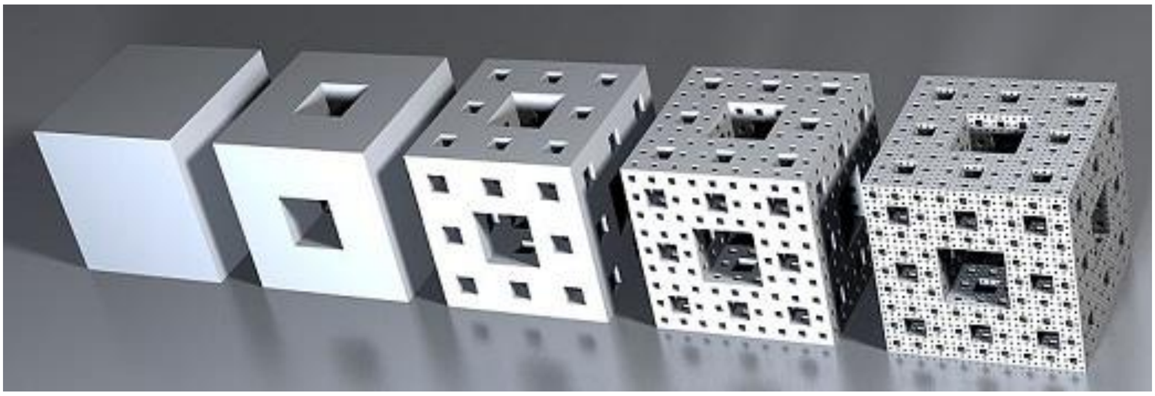


2.20. ábra Sierpinski háromszög szerkesztése

Három dimenzióban ugyanezt a szerkesztést ismételve, Sierpinski piramist (II. színes kép) kapunk.



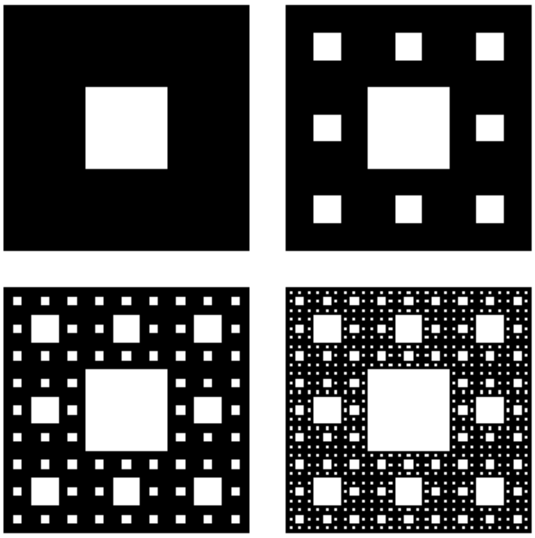
II. színes kép Sierpinski tetraéder



III. színes kép Sierpinski kocka (más néven Menger szivacs)

[3] A Sierpinski háromszög Hausdorff-dimenziója megközelítőleg 1,58 (log3/log2).

A Sierpinski kocka, (más néven Menger szivacs) is látványos (III. színes kép), megkonstruálható a kétdimenziós Sierpinski szőnyegből, amely a 2.21. ábrán látható.



2.21. ábra Sierpinski szőnyeg szerkesztése

Végtelen számú lépést követően a Sierpinski kocka térfogata nulla, felszíne pedig végtelen.

Feladat: Szerkesszetek Cantor-szálakat, a Cantor-halmaz szerkesztésének elvét használva!
Feladat: Mit mondhatunk el a 2.19. ábrán látható Koch-sziget kerületéről, illetve területéről?
Feladat: Készíts Sierpinski-háromszöget vagy Sierpinski tetraédert azonos méretű tárgyakból (pl. sörösdoboz, Geomag játék elemei, stb.)

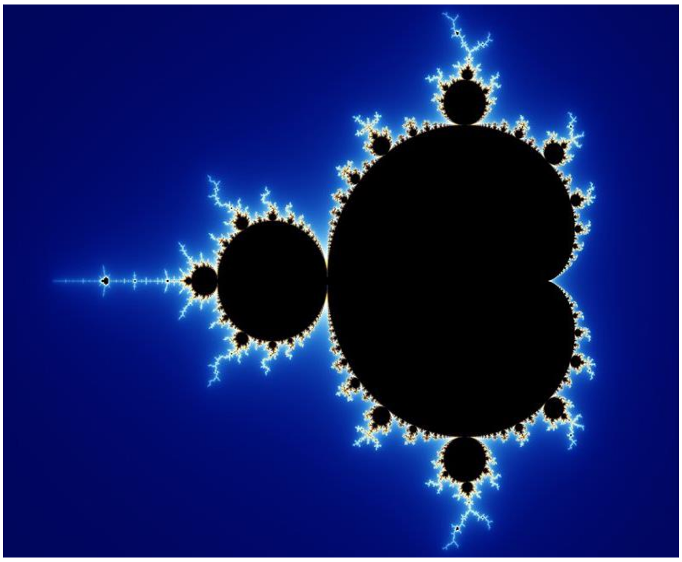
A 13. században több helyen is díszítettek Sierpinski háromszögekkel, például az Anagni katedrális padlómozaikján látható (IV. színes kép), a Vatikán padlóján láthatjuk (V. színes kép), több római templom díszítő mozaikjaként megcsodálhatjuk.

IV. színes kép: Anagni katedrális, 13. sz. (forrás: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQxjjXldj399EsiNY_yjH8zM_OS6nRViJ6aD0OhlGTx6o6e2XVt)

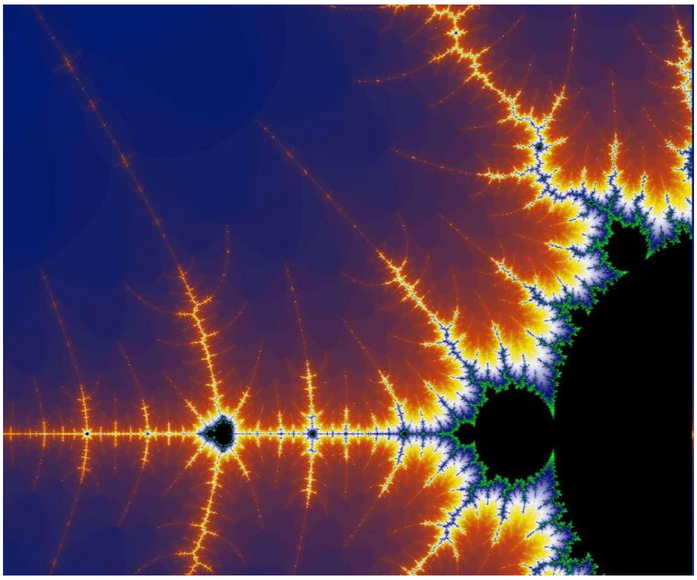
V. színes kép Vatikán 13.sz. (forrás: https://www.researchgate.net/publication/259341701_SIERPINSKY_TRIANGLES_IN_STONE_ON_MEDIEVAL_FLOORS_IN_ROME)

Matematikai fraktálokat ismerhetünk meg Kecskés Lajos a Mandelbrot-halmaz „számtengerét” bemutató könyvében is (Kecskés, 2002). Már a fejezetek címei érzékeltetik, mennyire csodálatos világba kalauzol bennünket a szerző: *Cseppben a tenger, Buboréklények, Öbölnemzedékek, Örvénymorajlás, Tengertánc, Alvilág*. Ilyen élvezetes bemutatás elvarázsol bennünket, megajándékoz a nem kis esztétikai élményen túl a felfedezés izgalmával és örömével.

Matematikai fraktálok számtalan változatát találjuk az interneten (például http://www.mehmib.freeserve.co.uk). Talán az egyik legismertebb fraktálgeneráló program a Fractint (spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html). Nagy élmény felfedezni őket és lehet versengeni a szebbnél szebb látványt nyújtó képekért, animációkért, grafikai játéklehetőségekért. Jól tanulmányozhatóak ezekkel a programokkal a fraktálok egyik legjellemzőbb tulajdonsága, az önhasonlóság is, ami azt jelenti, hogy a fraktál egy részlete, egy másik skálán lényegében azonos szerkezetű az eredetivel A VI. színes képen a Mandelbrot-halmaz, a VII. színes képen pedig egy részletének a kinagyítása látható. Az önhasonlóság szembeszökő.



VI. színes kép A Mandelbrot-halmaz



VII. színes kép A VI. színes képen latható Mandelbrot-halmaz egy részletének a kinagyítása

2.2.2 Fraktálok a természetben

„A fraktálokat először definiáló matematikusok azt mondták, hogy ezek nem lehetnek a természet részei, én azonban megmutattam, hogy mindenütt fraktálok vannak, a test szerveitől kezdve egészen a fizikáig és a művészetekig."

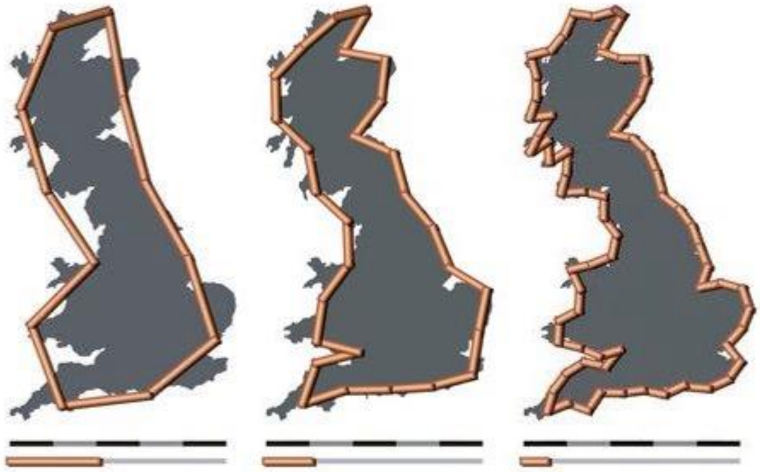
Bênoit Mandelbrot

Eddig a matematikai fraktálokról beszéltünk. A természetben azonban nagyon sok fraktál alakzattal találkozunk. Ha alaposan szétnézünk magunk körül, hamar észrevesszük, hogy a természetben leggyakrabban előforduló formákat nem tudjuk leírni az euklidészi geometria eszközeivel, mint például a felhők, a hegyek, a brokkoli alakja, a fák ágazata, a levelek erezete. Több mint húsz évvel ezelőtt mondta Mandelbrot, hogy "A felhők nem gömbök, a hegyek nem kúpok, a partvonalak nem körívek, a fakéreg nem sima, és a villám sem terjed egyenes vonalban." A legtöbb természeti objektum bonyolult alakú. Lehetetlennek tűnt a matematikai leírásuk, ezért a "matematika szörnyetegeinek" nevezték őket.

1975-ben Mandelbrot ezeknek a szörnyetegeknek a leírására bevezette a fraktál fogalmát, mely a számszerű leíráson kívül az ezekben az objektumokban rejlő szabályosság felismerésében is segít bennünket (Mandelbrot). A fraktálok nemcsak színes, számítógéppel alkotott ábrák. Egy sziget partvonala, egy folyó hálózata, a káposzta vagy a brokkoli szerkezete, vagy az erek és az idegek hálózata az emberi retinában - mind-mind leírhatók fraktálként.

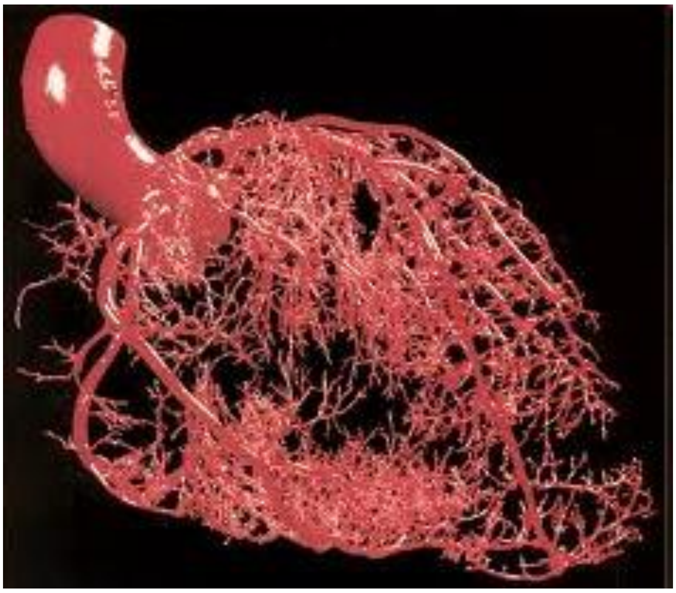
Az angol származású Lewis F. Richardson a 20. század második felében egy igen érdekes problémával találkozott. A világ térképeit vizsgálva feltűnt neki, hogy néhány szomszédos ország leírásában eltér a közös határvonalak hossza. Közelebbről megvizsgálva a dolgot, észrevette, nem mindegy, milyen mérőeszközt használunk. Minél kisebb szakaszokat illesztünk a határvonalakra, azok annál hosszabbak lesznek, tehát a felület nagysága függ a mérésünk pontosságától is.

Richardson statisztikáiból Bênoit Mandelbrot "Milyen hosszú a brit part?" címmel írt cikket (Mandelbrot, 1967), melyben feltételezte, hogy a mérés 200 km hosszúságú vonalzóval történik, és a vonalzó mindkét vége érinti a partot. Ezt a mérést egyre rövidebb vonalzókkal megismételve egyre nagyobb hosszúságok adódnak, ahogy egyre több részletet, öblöt, félszigetet kell figyelembe venni (2.22. ábra). Azt lehetne gondolni, hogy a vonalzó hosszának csökkenésével a kapott eredmény egy véges értékhez, a partvonal "valódi hosszához" tart, de megmutatható, hogy nincs ilyen felső határ. A part hossza tetszőlegesen hosszú is lehet, ha elég rövid a méréséhez használt egység.

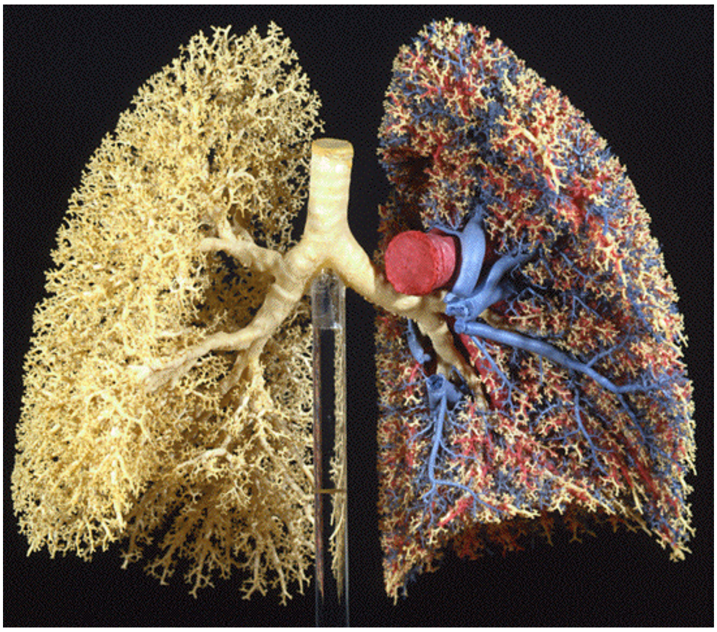


2.22. ábra. Nagy-Britannia partvonala hosszának mérése az ábrák alatt látható mérőrudakkal

Nem véletlenül találkozhatunk olyan sok helyen fraktál a természetben. Vérérhálózatunk, így plédául a szív erezete is (VIII. színes kép), nyirokhálózatunk, a tüdőben az elágazó hörgők (IX. színes kép), a fák ágai, a levelek erezete: mind ugyanarra a problémára keresik a megoldást: minél nagyobb térfogatot, illetve területelet úgy behálózni, hogy a lehető legkevesebb helyet foglaljanak el. Erre ideálisnak bizonyult a fraktálszerkezet.



VIII. színes kép A szív erezete



IX. színes kép A tüdő erezte

2.3. Alkalmazott technikák

Amint már megbeszéltük, a kaotikus mozgás nem kivételes, hanem tipikus mozgás. Legfontosabb jellemzői (Tél, Gruiz, 2002): determinisztikus, azaz ismerjük a mozgásegyenleteket; szabálytalan; előrejelezhetetlen, mivel a mozgást leíró egyenletek nem lineárisak; a fázistérben rendet találunk: megjelenik a fraktálszerkezet.

A fraktál mintázat a kaotikus folyamatok esetében mindig megjelenik, azonban rendszerint egy absztrakt térben, a fázistérben, így rejtve marad a közvetlen megfigyelés előtt. Kivételt képez a **keveredés**, azaz **a kaotikus sodródás** (például szennyeződések terjedése egy áramlásban, a kávéba öntött tejszín vagy a vízbe cseppentett tinta, festékek keveredése), valamint a **kaotikus szórás** (például karácsonyfagömbökön a fény szóródása). Ezekben az esetekben a fraktálszerkezet megfigyelhető a valós térben, éppen ezért mi a kaotikus folyamatok széles tárházából ezeket vizsgáljuk.

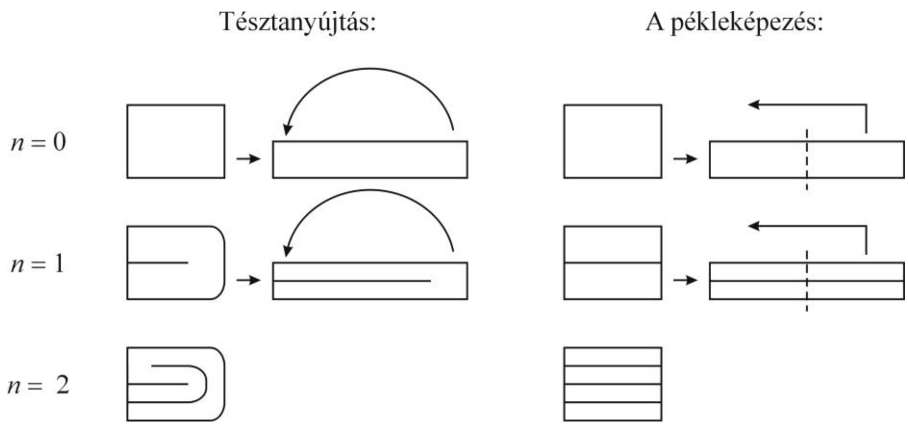
Márványozás – kaotikus keveredés két dimenzióban: víz felszínén márványozó festékeket keverünk össze, papírlapot helyezünk finoman a mintázatra, gyors, határozott, de azért érzékeny mozdulatokkal rásimítjuk a lapot a víz felszínére, hogy az egész felületen érintkezzen a papír a vízfelszínnel és a rajta található festékkel, majd óvatosan felemeljük a papírt, azaz „levonjuk". Hobbiboltokban található festék és könyv (Hannelore,2004) a témáról. Gyönyörű fraktálszerkezet mutatkozik meg a márványfestéskor: szép Cantor-szálas lesz a papírunk, a gyertyánk, avagy a tojásunk.

Tésztagyúrás – kaotikus keveredés három dimenzióban: a legjobb keveredést a nyújtás-összehajtás algoritmus adja. Ez egy kaotikus folyamat, neve pék leképezés (Tél, Gruiz, 2002). A levelestészta készítésekor az összenyomott és egyszer megnyújtott tésztát visszahajtjuk. Az így kialakult kétrétegű darabot ismét megnyújtjuk, majd visszahajtjuk, és mindezt ismételjük. Ezt az algoritmust alkalmazhatjuk például szép fraktál-mintázatos gyurmák, illetve gyurmaékszerek készítéséhez (Hegyessy, 2004).

2.3.1. Tésztagyúrás (Pék leképezés)

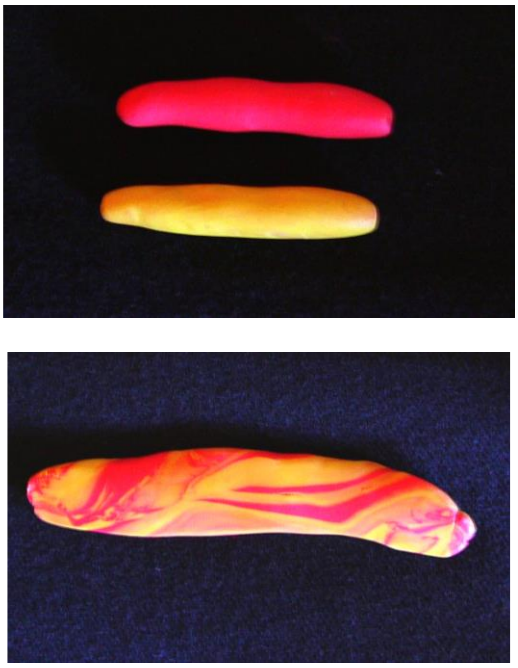
A leghétköznapibb konyhai tevékenységek is szolgálnak jó példával, ilyen a tésztagyúrás. Nagyanyáink és a pékek nem hiába hajtják össze és nyújtják a tésztát, hiszen ők már rég tudják azt, amit az utóbbi időben a tudomány is megfogalmazott, hogy a legjobb keveredést ez az algoritmus, a nyújtás-összehajtás adja.

A levelestészta készítésekor az összenyomott és egyszer megnyújtott tésztát visszahajtjuk. Az így kialakult kétrétegű darabot ismét megnyújtjuk, majd visszahajtjuk, és mindezt ismételjük. A pékleképezés olyan nyújtási folyamat, amelyben a megnyújtott tésztadarabot nem visszahajtjuk, hanem két egyforma darabra vágunk, melyeket azután egymásra tolunk (2.23. ábra).



2.23. ábra A hagyományos nyújtási folyamat rajza (a tésztát oldalnézetből ábrázoljuk) és a pékleképezésnek megfelelő nyújtási folyamat.

A keveredés a leghatékonyabb akkor, ha kaotikus a folyamat (például a turmixgépek, betonkavarók esetében hasznos és kívánatos emiatt a káosz).



X. színes kép. Két különböző színű gyurma keveredésekor láthatóak a fraktál-szálak.

Hasonlóan járhatunk el színes gyurmával (X. színes kép). Hőre szilárduló gyurmából készíthetünk egyedi ékszereket (XI. színes kép). A technikát melírozásnak nevezik.

XI. színes kép Hőre szilárduló gyurmából készíthetünk egyedi ékszereken, szépen megmaradnak a fraktál-szálak. (Szalai Anita készítette a karkötőt.)

A legjobb keveredést a nyújtás-összehajtás adja. Ez egy kaotikus folyamat. A levelestészta készítésekor az összenyomott és egyszer megnyújtott tésztát visszahajtjuk. Az így kialakult kétrétegű darabot ismét megnyújtjuk, majd visszahajtjuk, és mindezt ismételjük. Ezt az algoritmust alkalmazhatjuk szép fraktál-mintázatos gyurmák, illetve gyurmaékszerek készítéséhez.

2.3.2. Márványozás (Festékek keveredése)

Amint láttuk, a fraktálok tört dimenziójú geometriai alakzatok. A káoszfizikában a fázistérben jelennek meg. A fraktál mintázat a kaotikus folyamatok esetében mindig megjelenik egy absztrakt térben, a fázistérben, így rejtve marad a közvetlen megfigyelés előtt.

A **keveredés** a kivétel: a fázistér egybeesik a valós térrel, így a fraktálszerkezet megfigyelhető a hétköznapokban is, például a kávéba öntött tejszín, a vízbe csepentett tinta esetében, vagy festékek keveredésekor. (2.1.2. fejezet)

Víz felszínén márványozó festékeket keverünk össze, papírlapot helyezünk finoman a mintázatra és „levonjuk”. Hobbiboltokban található festék és könyv a témáról (Hannelore, 2004). Gyönyörű fraktálszerkezet mutatkozik meg a márványfestéskor: szép Cantor-szálas lesz a papír, a gyertya, avagy a tojás.

3. Fizika szappanbuborékokkal

A szappanbuborékok sokunkat elvarázsolnak kisgyerekkortól (XII, XIII, és XIV. színes képek).

XII. színes kép A szappanbuborékok sokunkat elvarázsolnak. (szappanhártya-óra a 11.b osztállyal, 2013/14-es tanév, fotó: Szakony Kriszti)

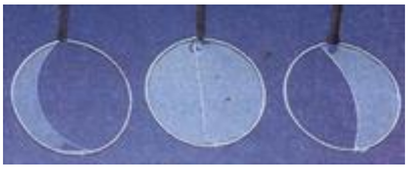
XIII. színes kép Az óriásbuborékokért jó szaladni (szappanhártya-óra a 11.a osztállyal, 2013/14-es tanév, fotó: Ruzicska György)

XIV. színes kép Buborékfúvás (fotó: Ferenczi Zsanett)

E szépséges világ varázslata még inkább elmélyülhet bennünk, ha felfedezhetjük a fizika törvényeit is a segítségükkel. A mechanika, az optika, valamint a modern fizika fejezeteibe is színesebb betekintést nyerhetünk.

Olyan kérdésekre kaphatunk válaszokat, mint:

1) Miért tud a molnárka sétálnia a víz felszínén?
2) Miért gömb alakú a szappanbuborék?
3) Vajon mindig gömb alakú-e?
4) Miért gyönyörű szivárványszínűek a szappanbuborékok a fényben?
5) Ha a szappanhártyának az ábrán keretben kiszúrom az egyik felét, miért lesz félhold alakú a másik oldala? (3.1.ábra)
6) Mi a kaotikus sodródás?

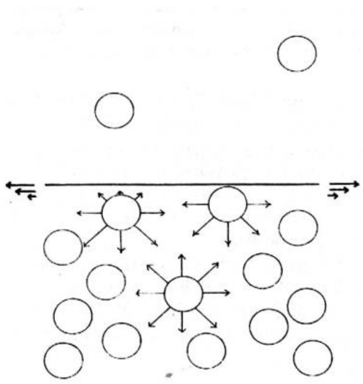


3.1. ábra A szappanhártyának kiszúrom az egyik felét a keretben: miért lesz félhold alakú a másik rész?

A következő jelenségeket tanulmányozhatjuk középiskolában a szappanbuborékok segítségével: a mechanika keretében a felületi feszültséget, a geometriai optika fejezetben a gömbtükrök képalkotását, fizikai optikánál a vékonyréteg interferenciát, a modern fizika esetében szakkörön a kaotikus sodródást.

3.1. Mechanika – Felületi feszültség

A felületi feszültséggel a folyadékok esetében találkozunk, ennek köszönhetően a folyadékok a lehető legkisebb felületű, azaz gömb alakot veszik fel, amennyiben nem hat rájuk külső erőtér. A jelenség magyarázata: a folyadék részecskéi (atomok, egyszerű és összetett ionok, molekulák, stb.) között fellépő vonzóerő, a kohéziós erő (3.2. ábra). Ezért gömb alakú a kis méretű lebegő folyadékcsepp, vagy a szappanbuborék stb.



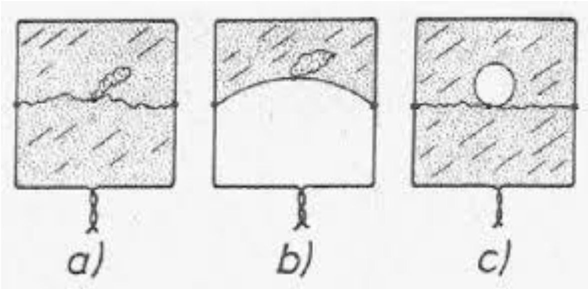
3.2. ábra Kohéziós erők a folyadék részecskéi között

A felületi feszültség következménye, hogy bizonyos tárgyak (pl. gémkapocs, pénzérme) és állatkák, mint például a molnárka (XV. színes kép) a vízben nem süllyednek el, a víz felületén maradnak, bár a sűrűségük nagyobb, mint a folyadéké.

XV. színes kép a). Molnárka a vízen; b.) Vízipók csodapók. Itt is fontos a buborék szerepe!

1.Kísérlet: Ha kör alakú drótkeretet, melynek két pontját laza cérnaszál köti össze, vízbe mártjuk, a keretet teljes egészében kitölti a keletkező hártya, és a cérnaszál laza marad. Ha azonban az egyik oldalról eltávolítjuk a hártyát, a cérnaszál kifeszül (3.1. ábra).

Ha a kísérletet fémkerettel ismételjük meg, és eltávolítjuk a hártyát a hurok közepéből, a cérna kör alakúvá feszül ki (3.3.c ábra).



3.3. ábra A cérna kör alakúvá feszül ki, ha a hurok közepéből eltávolítjuk a szappanhártyát

2.Kísérlet Készítsünk téglalap alakú drótkeretet, amelynek egyik oldala könnyen elmozdítható. Ha a keretet kiemeljük a vízből, a hártya a mozgatható oldalt a szemben fekvő, rögzített oldalhoz rántja. Ahhoz, hogy ezt megakadályozzuk, a mozgatható oldalra húzóerőt kell kifejtenünk. Megállapítható, hogy a húzóerő nagysága függ a mozgatható oldal hosszától, de nem függ a hártya felületétől.

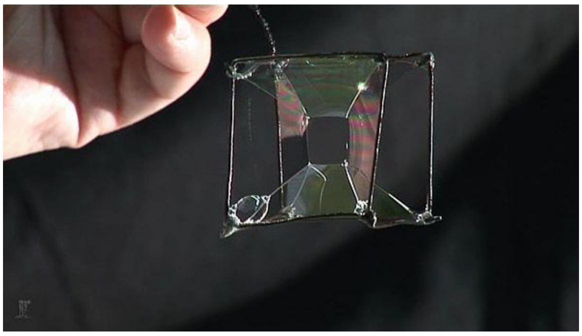
A kísérletből megállapíthatjuk, hogy a hártya a felületet határoló keret minden részére befelé irányuló erőt fejt ki. Ezt úgy fogalmazhatjuk másképpen, hogy a felszínt határoló vonaldarabra felületi feszültség hat, ami a felszínt összehúzni igyekszik.

Ha növelni akarjuk a hártya felületét, munkát kell végeznünk. Hiszen a keret mozgatható oldalát adott erővel kell húznunk. A felület a munkavégzés által energiához jut. Összehúzódás közben ezt a munkavégzést visszakapjuk, a hártya felületi energiája csökken.

A hártya felszínének a lehető legkisebbre való összehúzódása energetikailag is értelmezhető. Itt érvényesül az, hogy stabil egyensúlyi helyzetben a helyzeti (felületi) energia a lehető legkisebb értéket veszi fel. Ez pedig a lehető legkisebb felületnagyságnál következik be.

3.Kísérlet Megnézünk a fenti elvre néhány érdekes példát különböző alakú drótkeretek segítségével. A kialakuló hártyák minden esetben minimálfelületek, ami azt jelenti, hogy adott határgörbe mellett a lehető legkisebb felszínű alakzatok (Gulyás János, Honyek Gyula, Markovits Tibor, Szalóki Dezső, Varga Antal: Mechanika Tankönyv 126. old.)

A legkisebb energiaszintű felület kialakításának elve mindig teljesül, nem csak a folyadékcsepp esetében. Éppen ezért nagyon jól használható a szappanhártya a minimálfelületek meghatározására (XVI. és XVII. színes kép)



XVI. színes kép A folyadékból kiemelt kockán rövid idő alatt kialakul egy felület, mely a továbbiakban stabilan megmarad. (forrás: http://titan.physx.u-szeged.hu/~julio/Dokumentum_MechHullOptKis.html)

XVII. színes kép Minimálfelület kialakítása

Kérdés: Mi a különbség a vízipók és a molnárka közlekedése közt?

3.2. Geometriai optika – Gömbtükrök képalkotása

A geometriai optika fejezetben tanult leképezéseket jól tanulmányozhatjuk szappanhártyán. A hártya képezhet számunkra síktükröt, vagy gömbtükröt. A szappanbuborékok nagyon jó domború gömbtükrök, ezt több ízben is gyönyörűen megörökítették iskolánk diákjai (XVIII. színes kép). Megfelelő fény-árnyék viszonyok mellett homorú felüket is használhatjuk (XIX. és XX. Színes kép), így egyszerre kapunk egyenes és fordított állású képet, ha lefotózzuk a buborékot.

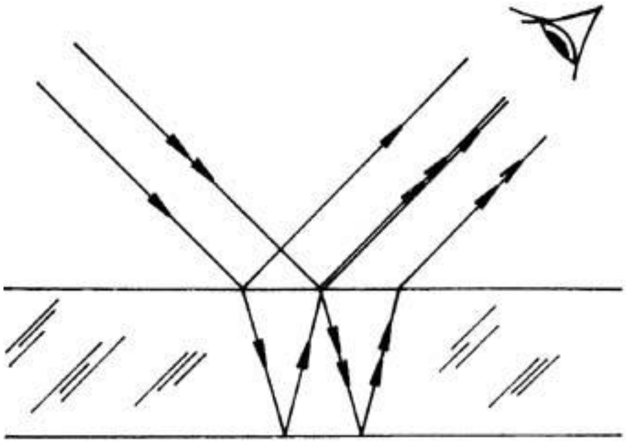
XVIII. színes kép Szappanhártya buborék, mint gömbtükör

XIX. színes kép Domború és homorú gömbtükör is a képen látható szappanbuborék. Az iskolánkról alkotott egyenes és fordított állású kép látható rajta (fotó: Ferenczi Zsanett)

XX. színes kép Gyönyörű fotó a szappanbuborékról (fotó: Németh Roland)

3.3. Fizikai optika – Vékonyréteg interferencia

A fizikai optika fejezet keretében beszélünk a fény hullámtermészetéről, és megismerkedünk az interferencia jelenségével. A vékonyréteg interferencia tanulmányozására ideális a szappanhártya, hiszen a hártya vastagsága a fény hullámhosszának nagyságrendjében esik, ekkor a két úton haladó fény útkülönbsége miatt interferenciajelenséget látunk (3.4. ábra).



3.4. ábra Interferencia szappanhártyán

A különböző színek különböző helyeken erősítik egymást, ezért, noha fehér fény esik a hártyára, külön fogjuk látni a színeket. Ennek köszönhetően olyan szép színesek a szappanbuborékok (XXI. és XXII. színes kép).

XXI. színes kép Vékonyréteg interferencia a szappanhártyán: jól kivehetőek a színes sávok (szerző felvétele)

XXII. színes kép Interferencia nagy felületű szappanhártyán

3.4. Kaotikus sodródás

Amint már beszéltünk erről a 2. fejezetben, a kaotikus mozgás nem kivételes, hanem tipikus mozgás. Legfontosabb jellemzői (Tél, Gruiz, 2002): determinisztikus, azaz ismerjük a mozgásegyenleteket; szabálytalan; előrejelezhetetlen, mivel a mozgást leíró egyenletek nem lineárisak; a fázistérben rendet találunk: megjelenik a fraktálszerkezet.

A fraktál mintázat a kaotikus folyamatok esetében mindig megjelenik, azonban rendszerint egy absztrakt térben, a fázistérben, így rejtve marad a közvetlen megfigyelés elől. Kivételt képez a **keveredés**, azaz **a kaotikus sodródás** (például szennyeződések terjedése egy áramlásban, a kávéba öntött tejszín vagy a vízbe cseppentett tinta, festékek keveredése). Ezekben az esetekben a fraktálszerkezet megfigyelhető a valós térben, éppen ezért mi a kaotikus folyamatok széles tárházából ezeket vizsgáljuk.

A szappanhártyán jól megfigyelhető a vékonyréteg interferenciával együtt a kaotikus sodródás is, káprázatosan szép és változatos sodródási mintázatokat csodálhatunk meg. Gyönyörű példáját látjuk a kaotikus sodródásnak többek között az istvános Ferenczi Zsanett által készített képen (XXIII. színes kép).

XXIII. színes kép A tükröződés és a kaotikus sodródás szappanbuborékon. A kép bal alsó sarkán az iskolánk épülete tükröződik. (fotó: Ferenczi Zsanett)

Kérdés: Milyen jelenségeket juttat eszedbe a XXIII. ábra? Hol láttunk hasonló jellegű mintázatokat?

3.5. Érdekességek

Recept: Az interneten nagyon sok receptet találni otthoni kísérletezéshez, a saját jól bevált receptünket adom közzé: egyenlő arányban víz és mosogatószer (nekünk a *Jar* vált be), kevés glicerin és kevés cukor, ez utóbbi kettő főleg óriásbuborékokhoz javasolt, de ez utóbbi két összetevő nélkül is jó buborékokat lehet fújni.

Vigyázzunk, ne rázzuk fel, ne kavarjuk fel hirtelen az oldatunkat, ha mégis habos lesz, szépen szedegessük le a habot a felszínéről.

Az óriásbuborékokon is megfigyelhető az összes eddig felsorolt jelenség, azonban jóval nagyobb felületen, így jóval látványosabb, ennek megfelelően a diákok körében sokkal nagyobb lelkesedést váltanak ki (XIII. és XXII. színes képek, illetve a XXIV. és XV. színes képek).

XXIV. színes kép Óriásbuborék (Ferenczi Zsanett)

XXV. színes kép Vékonyréteg-interferencia óriásbuborékon (11. a osztály)

Kérdés: Nézz utána, mi az antibuborék?

Kérdés: Milyen elven működnek a nem piszkolódó textíliák (keresési segédszavak: nanotechnológia, felületi feszültség)?

Köszönöm a Szent István Gimnázium 2010/11. tanéve 11.b és 11 c. osztályok fizika fakultációs csoportjának, valamint a 12.e osztálynak a közös ünnepi fizika órákat. Köszönet Németh Roland 11.c osztályos, valamint Murai László 12. e osztályos tanulónak az ünnepi órákon készített fotókért. Köszönet Szalai Anitának a fraktál-mintás gyurmaékszerek elkészítéséért.

4. Kiegészítések

4.1. Számítógépes szimuláció

Szimulációs programok

A fizika éppen sokrétűsége miatt a modern oktatási eszközök alkalmazásának is talán legfontosabb terepe, így a tantárgy esetében az IKT legfontosabb alkalmazási lehetőségei a kísérletvezérlés, a számítógépes mérés és a mérés kiértékelés mellett a számítógépes szimuláció (Tasnádi, 2003).

A kaotikus jelenségek játékos formában történő elsajátításához nagy segítséget nyújthatnak a szimulációs programok, különösen napjainkban, amikor a diákok a hagyományos tankönyvekkel szemben egyre inkább otthonosan mozognak a számítógépek és az internet világában. E programok használatakor a kezdőfeltételek és a paraméterek változtatása révén a diák a tananyag passzív befogadójából aktív szereplővé lép elő, amely nagyságrendekkel növeli a tanulás hatékonyságát (Gruiz és Tél, 2005).

A szimulációs programok aktív használatán túl a programozásban járatos tanulók maguk is elkészíthetnek – tanári útmutatással – egy-egy egyszerűbb szimulációs programot. Ez egyúttal nagyban segíti a diákok modellalkotási készségeinek fejlesztését is.

A kaotikus mozgások szimulációs program bemutatása

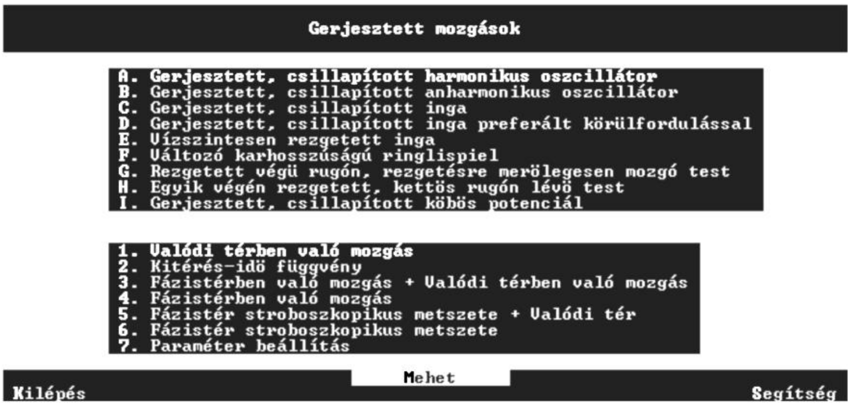
A *Kaotikus mozgások* szimulációs programot (Hóbor, Gruiz, Gálfi és Tél, 2001) az Eötvös Loránd Tudományegyetem Elméleti Fizika Tanszékén készítették, kiinduló pontként használva a Természettudományi Karon 1997-ben tartott *Nemlineáris fizika: káosz és fraktálok* tanár-továbbképzési tanfolyam résztvevői által készített programokat.

A program célja, hogy kaotikus mozgásokat szimuláljon, így téve lehetővé ezek tanulmányozását. E program használatakor a tanulónak módjában áll változtatni a kezdőfeltételeket és a paramétereket, ezáltal passzív befogadóból aktív szereplővé lesz.

A programot felhasználói füzet kíséri, amely egyrészt segít az installálásban, a működés megismerésében, bemutatja a paraméterek beállítási lehetőségeit, másrészt bemutatja, hogy mit tud a szoftver: a választható mozgási formákat, az ábrázolási módokat, ezek kiválasztásának módozatát. Ugyanakkor bemutatja röviden a választható mozgásokat. Ez mindegyik esetben tartalmazza a rendszer rövid leírását, a mozgásegyenletet, a mozgásegyenletben és a programban használt koordináták közötti megfeleltetéseket, a paraméterek, kezdeti feltételek programban szereplő beállításait, illetve a mozgás ábrázolásának sajátosságait.

A program DOS alatt fut. Elindítását követően felhasználóbarát, egyszerűen, könnyen kezelhető, segít a felhasználói füzet is. A címoldalt követően menüsorból választhatjuk ki, milyen irányban szeretnénk tovább haladni: a gerjesztett mozgások, a súrlódásmentes mozgások vagy a vonzási tartományok tanulmányozásával szeretnénk-e foglalkozni.

A döntést követően módunkban áll a konkrét mozgás és az ábrázolási mód kiválasztására, például gerjesztett mozgás választása esetén a 4.1. ábrán látható szöveges képernyőhöz jutunk. A felső menüsorból választhatóak a szimulálható mozgások, az alsóból az ábrázolási módok, illetve a paraméterek beállításának lehetősége.



4.1. ábra A program szöveges képernyője.

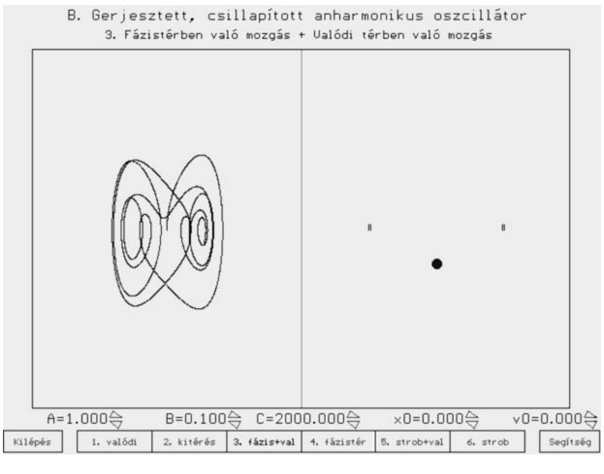
Folytassuk a kaotikus mozgásokat szimuláló program bemutatását egy konkrét példán keresztül.

Gerjesztett, csillapított anharmonikus oszcillátor (pl. centrifuga)

Megismerkedhetünk a centrifugát modellező gerjesztett, csillapított anharmonikus oszcillátor esetében a különböző ábrázolási módokkal, ezáltal módunk nyílik több szempontból, többféleképpen is tanulmányozni a minket érdeklő mozgást, például: valódi térben való mozgás, kitérés-idő függvény, fázistérben való mozgás (elmozdulás-sebesség tér), stb.

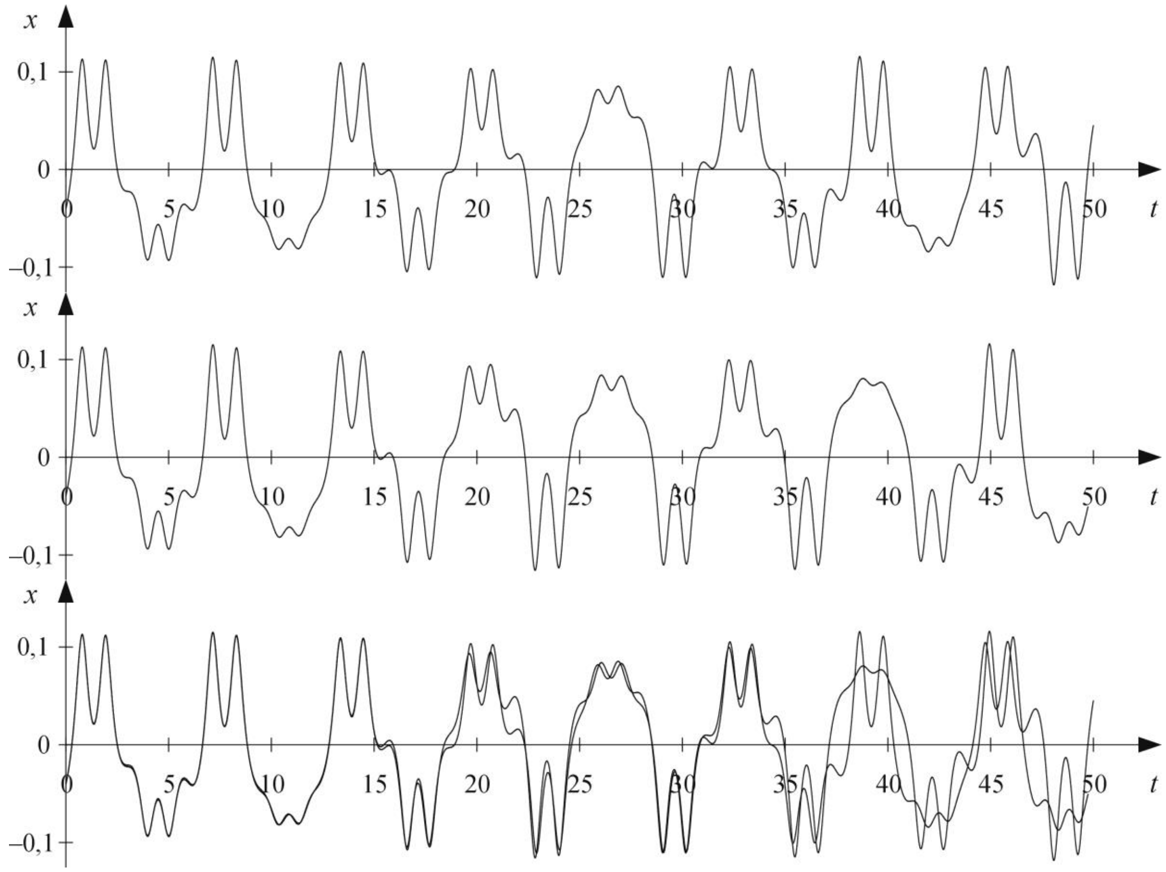
A szimuláció elindítása után egy grafikus képernyőhöz jutunk (21. ábra). Itt látható, milyen könnyen válthatunk a választható ábrázolási módok között, illetve a paraméterek és kezdőfeltételek beállítása is könnyen megvalósítható innen, diákbarát. A 4.2. ábrán egyszerre látható a centrifuga modelljének fázistérbeli és valódi térbeli mozgása.

A különböző ábrázolási módok szimultán bemutatási lehetősége nagyban segítik a megértést és sokkal látványosabbá, követhetőbbé teszik a megismerendőket. A kezdőfeltételek és paraméterek módosítási lehetőségével együtt nagy teret adnak a tanulók felfedező kedvének, ezáltal aktív részeseivé válnak a kaotikus mozgások tanulmányozásának.



4.2. ábra A program grafikus képernyője. Egyszerre követhető az elmozdulás-sebesség térben (fázistérben) és a valódi térben való mozgás. A középső kövér pötty a centrifuga tömegpontját jelöli, míg a két szélső pont a centrifuga tengelyének felfüggesztési pontjait, ezek mozgása mutatja a gerjesztés mértékét.

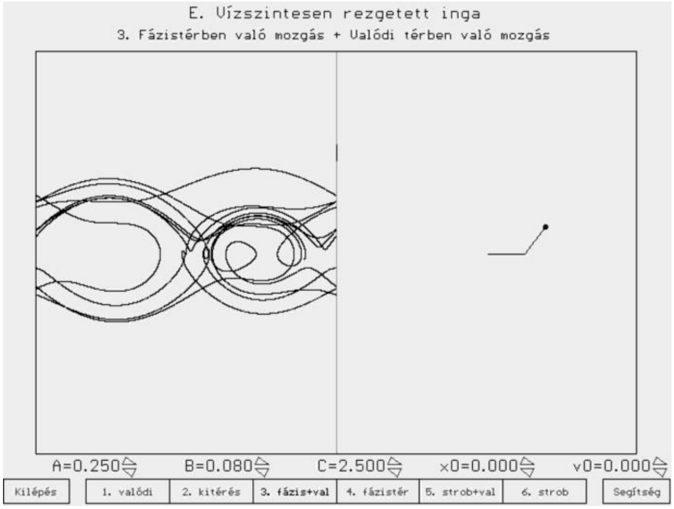
Választhatjuk az ábrázolási módok közül a kitérés-idő függvényt is. Ekkor megfigyelhetjük a kaotikus mozgás egyik – az első részben megismert – tulajdonságát, a szabálytalanságot. Megkereshetünk két, egymáshoz nagyon közeli olyan kezdőfeltételt (például első esetben x_0= -0,041, v_0=0,083 a 4.3.a. ábrán, másodszor x_0= -0,040, v_0=0,083 a 4.3.b. ábrán), amikor jól követhető, hogy elég kevés lépés után (n=50) a két mozgás már nagyon eltávolodik egymástól. Így szembesülhetünk a káosz másik jellemző tulajdonságával, az előrejelezhetetlenséggel, a kezdőfeltételekre való nagy érzékenységgel. Ha egymás födésében helyezzük a két grafikont (4.3.c. ábra) – ezt már nem ennek a programnak a segítségével – még nyilvánvalóbbá válik az amúgy is megfigyelhető távolodása a nagyon közeli helyről, azonos sebességgel indított mozgásoknak.



4.3. ábra A centrifuga mozgásának kitérés-idő függvénye. A két nagyon közeli helyről indított mozgás (az a). ábrán x_0= -0,041, v_0=0, a b.) ábrán x_0= -0,040, v_0=0,083) viszonylag hamar szétválik (c. ábra).

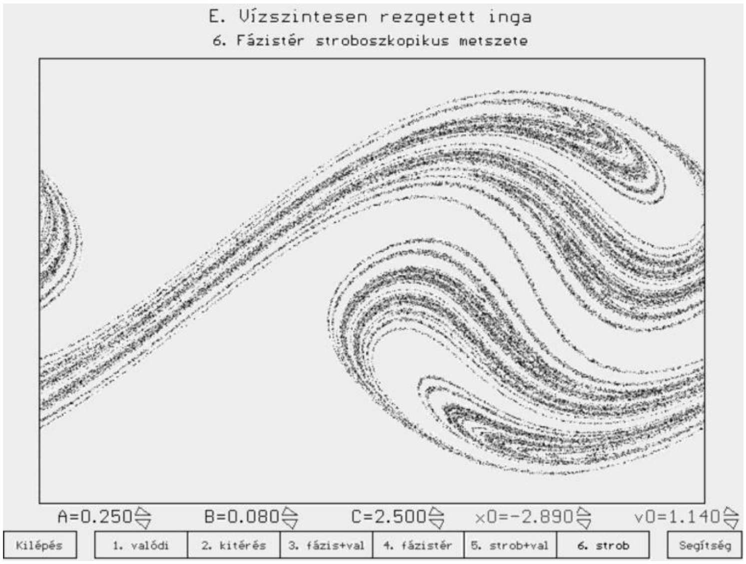
Rezgetett inga

Kövessünk végig egy pár választási lehetőséget a vízszintesen rezgetett inga esetében is. Ezt a mozgásformát részletesen bemutattuk a cikk első részében, így most a program nyújtotta lehetőségeket vázoljuk röviden. A 4.4. ábrán képernyőjén egyszerre követhetjük a rezgetett inga elmozdulás-sebesség térben és a valódi térben való mozgását.



4.4. ábra A program grafikus képernyőjén egyszerre követhetjük a rezgetett inga elmozdulás-sebesség térben (fázistérben) és a valódi térben való mozgását.

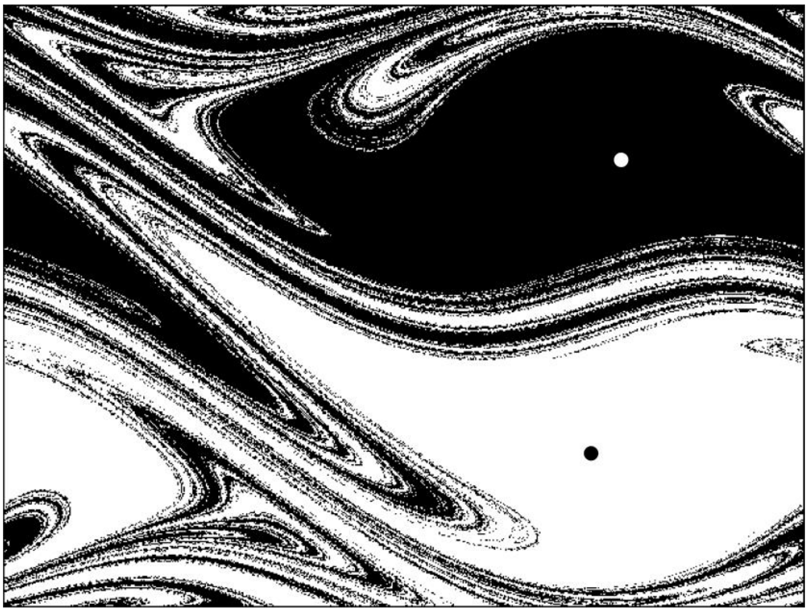
A rezgetett inga bemutatásánál a 4. ábrán látottakat viszontláthatjuk a 4.5. ábrán a szimulációs program segítségével. Ezáltal a tanulóknak alkalmuk van felfedezni a szabálytalanság, előrejelezhetetlenség mögött rejlő rendet, struktúrát: a különös attraktor szálas fraktálszerkezetét.



4.5.ábra A rezgetett inga mozgásának képe a hely-sebesség ábrázolásban, szabályos időközönként vett mintákon (stroboszkopikus leképezés).

Fraktál vonzási tartományok

Ha további látványos fraktál alakzatokkal akarjuk kényeztetni diákjainkat, ajánlhatjuk nekik, hogy válasszák a Fraktál vonzási tartományok menüpontot. Maradjunk a rezgetett inga példájánál: a sötét és világos vonzási tartományok az inga jobbra, illetve balra forgó két mozgó végállapotát jelölik (4.6. ábra). A vonzási tartományok határának bonyolult összegabalyodása, szálas fraktálszerkezete egyrészt szemet gyönyörködtető látvány, másrészt jól el lehet játszani a kezdőfeltételek és paraméterek választásával.



4.6. ábra A rezgetett inga fraktál vonzási tartományai: a sötét és világos vonzási tartományok azt jelölik, hogy az inga jobbra, vagy balra forog.

”Tudomány, művészet gyökere egy. Mindegyik a világot tükrözi a maga módján. S a tudományos és művészi nagyság alapja is ugyanaz: az igaz ember, a vir justus.”
Kodály Zoltán

5. Következtetések

Tapasztalataink azt mutatják, hogy akár szakközépiskolás diákok részére is lebilincselő a káosz. A káosz képi világa és formai lehetőségei mágnesként vonzza a diákok tekintetét, felébreszti kreativitásukat. Ezek a hétköznapi, mindenki számára érthető, megfogható folyamatok segítenek a természettudományos gondolkodás elmélyítésében. Hasznos lenne, hogy a középiskolás diákok halljanak a kaotikus jelenségekről. A modern fizika olyan fejezetéből kaphatnának ízelítőt, amely könnyen megközelíthető, mert a természettudományok nagyon sok területén megtalálható a fizikától a biológián át a környezettudományokig, s mindez makroszkopikus skálán. Az elmúlt évek hazai tapasztalatai azt mutatják, hogy középiskolás diákok publikálásra érett eredményeket érhetnek el a káosz kísérleti vizsgálata témakörében [12–14].

Már nemcsak a természettudományok mûvelôi foglalkoznak azzal, hogy ezeket a fogalmakat be kellene vezetni a középiskolai oktatásba, hanem az *Új Pedagógiai Szemle* is. Megerősíti bennünk ezt Csorba F. László felvetése is az *Új tudomány: A káosz* [15] cikkében. Három szempontot említ, ami szerinte indokolná, hogy a tanítási órákon is legyen szó a káoszról. Szempontjai egybecsengenek az általunk megfogalmazottak, valamint az általunk tapasztaltak egy részével:
– az esztétikai-érzelmi kötődés lehetősége
– alkalom reflektálásra néhány – alapvető – filozófiai
alapelvre: determináció, jósolhatóság (előrejelezhetőség), történetiség
– a számítógép kreatív és tervezhető bekapcsolása a hagyományos tantárgyak oktatásába.

Marx György *Az iskola új feladata* [16] című előadása így foglalta össze már 1995-ben a káosz „időszerűségét". „A 20. század bevezetett a kvantumelméletbe és a statisztikus fizikába, komplementer modellek használatára nevelt és csupán valószínűségi anticipációt engedett meg. De most a századvégen felfogjuk világunk nemlineáris jellegét. Ha az Ohm-törvény hirtelen érvényessé válna félvezetőkre is, elnémulna minden rádió, megállna minden számítógép és elektronikus eszköz; lineáris optikában a fényszálak is elveszítenék nagy információmennyiséget továbbító képességüket. A fizikában is káosz lett a divat, akárcsak a (szintén nemlineáris) piacon és a politikában. Kiugróan nagy értékek és intenzitások, éles és gyors változások esetén a kezdeti feltétel parányi különbségei jelentős eltéréseket eredményezhetnek a végkifejletben."

Bár tudjuk, hogy nagyon nehéz ezeket a jelenségeket középiskolai szinten oktatni, mert a tudományos igényű matematikai apparátus nem használható, ugyanakkor mégis nagyon fontosnak tűnik, mert a természet leírásának túlságos leegyszerűsítése elveheti a tanulók hitét a természettudományok erejében. Ezért hasznosnak tartjuk a kitekintéssel való próbálkozást és a tanári közösség együttműködését ezen a területen.

Irodalomjegyzék

Békéssy L.I., Bustya Á.: A fizikai kettős inga vizsgálata. Kaotikussá vált mechanikai síkmozgás egy példája (2005) *Fizikai Szemle* 55/5, 185.

Bíró I.: Mágneses ingák kísérleti tanulmányozása. Kaotikussá váló mechanikai síkmozgás egy példája (2006) *Fizikai Szemle* 56/1, 13.

Csorba F. László (2000): Új tudomány: A káosz, *Új Pedagógiai Szemle*, 9.

Domokos Gábor (2002): Püthagorász, Rényi és a lemmingek, avagy a káosz irracionalitása 1-2, *Természet Világa*, **133**, szeptember, október Gruiz Márton, Tél Tamás (2005): Káoszról, kicsit bővebben, Fizikai Szemle, 6. 218-220.

Florin Diacu, Philip Holmes (2003): *Égi találkozások. A káosz és a stabilitás eredete*, Akkord Kiadó, Budapest

Fokasz Nikosz (2003): *Káosz és nemlineáris dinamika a társadalomtudományokban*, Typotex Kiadó, Budapest

Gáspár Vilmos (2002): Játszunk Káoszt! Káosz: determinisztikus rendszerek véletlenszerű viselkedése, *Természet Világa*, **133.** július

Gleick, J. (1999) *Káosz, egy új tudomány születése*, Göncöl Kiadó, Budapest

Gulyás János, Honyek Gyula, Markovits Tibor, Szalóki Dezső, Varga Antal: Fizika Mechanika Tankönyv, Műszaki Könyvkiadó Budapest, 2000.

Hannelore Otto: *Márványozás*, CSER Kiadó, Budapest, 2004.

Hegyessy Mari: *Gyurmaékszerek*, Cser Kiadó, Budapest 2004.

F. Herrmann, L. Mingirulli, P. Morewietz: A káosz tanítása iskolákban (1988) *Fizikai Szemle* 38, 301 (eredeti szöveg. Herrmann, L. Mingirulli, P. Morewietz: Teaching Chaos in Schools in Marx György ed.: Teaching Nonlinear Phenomena – Chaos in Education, National Centre for Educational Technology, 1987.)

Hóbor Miklós, Gruiz Márton, Gálfi László, Tél Tamás (2001): *Kaotikus mozgások szimulációs program*, ELTE TTK Elméleti Fizika Tanszék

Kárpáti Andrea (2004): Tanári szerepek az informatizált iskolában, *Iskolakultúra,* 9. 3-11.

Kecskés Lajos (2002): *Egy ölnyi végtelen*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

Mandelbrot B. (1982) *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco

Marx Gy.: Az iskola új feladata – Gyorsuló idő (1995) *Fizikai Szemle* 45/9, 289

Neufeld Zoltán (2003): Káosz és keveredés a légkörben és óceánban, *Természet Világa*, **134.** március

Radnóti Katalin (2005): A fizikatanítás pedagógiájának kérdései a fizika évében, *Iskolakultúra,* 10. 3-20.

Stoppard, Tom: Árkádia, www.mek.oszk.hu/002000/; a Katona József Színház 1998-ban mutatta be a darabot

Scheuring István (2002): Káosz az élőközösségekben. Nemlineáris jelenségek kompetitív rendszerekben és táplálékhálózatokban, *Természet Világa*, **133**. augusztus

Sótér Anna: Lorenz modelljének kísérleti vizsgálata és a kaotikus vízikerék (2004) *Természet Világa melléklete, Diákpályázat, Természet Világa* 135 május

Szatmári-Bajkó Ildikó (2006): „Káoszt”? – Azt! – Káoszelmélet a középiskolában, *Fizikai Szemle,* 11. 376-380.

Szatmáry-Bajkó Ildikó (2010) *Káoszkísérletek a középiskolai fizika oktatásban* in: Fizikatanítás tartalmasan és érdekesen, Juhász András, Tél Tamás, 317, Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Fizika Doktori Iskola, Budapest

Szatmári-Bajkó, I. (2010). Káosz, rend, látvány: a káosztudomány ismertetésének lehetősége IKT-eszközökkel a középiskolai oktatás keretében. *Iskolakultúra*, 20(1), 116–131.

Szatmáry-Bajkó Ildikó (2011) *Ünnepeljünk fizika órán fraktálokkal, színekkel* in: Természettudomány tanítása korszerűen és vonzóan, 315. old., Tasnádi Péter, Eötvös Lóránd Tudományegyetem, természettudományi Oktatásmódszertani Centrum

Tasnádi Péter (2003): Az informatikai eszközök alkalmazása a fizika tanításban. in: Kárpáti Andrea (sorozatszerk.), Főző Attila László, Tasnádi Péter (szerk.): *Informatikai eszközök a fizika oktatásában*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 9-14.

Tél T.: Káosz egy csésze kávéban, *Természet Világa* (1998) 129, 386

Tél Tamás, Gruiz Márton (2002): *Kaotikus Dinamika*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest