PENDULUMHULLÁM, AVAGY SZERELEM ELSŐ LÁTÁSRA

Lendvai Dorottya, Czövek Márton, Forrás Bence
Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest

„Egy húron pendulum!”

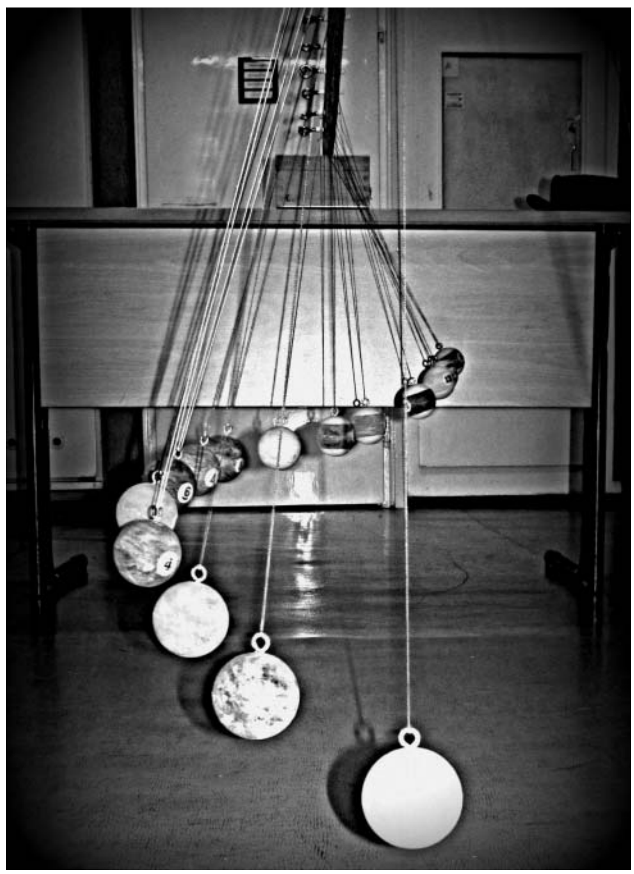
Valamikor 2013 őszén találkoztam először a pendulumhullám jelenségével, aminek egy pillanatát örökítettük meg a később elkészült eszközön (*1. ábra*).

Bevallom, első látásra beleszerettem. Azóta az eszköz elkészítésén, fizikai-matematikai leírásán és a benne rejlő további lehetőségeken törtem a fejem. A budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium nyolcadikos, valamint tizenkettedikes speciális matematika tantervű osztályainak tanulóival – fizikatábori projektmunka keretében – álltunk neki részletesebben foglalkozni ezzel a jelenséggel.

A fizikatáborról[1]

A helyszín legtöbbször egy előadótermekkel, tantermekkel felszerelt erdei iskola. A gimnázium 40-50 diákja vesz részt a minden évben megrendezésre kerülő fizikatáborban. A 13-19 éves tanulók meghívásos alapon kerülnek be a négynapos programba, amely komoly munkát, felkészülést és odafigyelést igényel. A tábort néhány hetes-hónapos előzetes felkészülés előzi meg, amelynek ideje alatt a tanulók egy közösen kiválasztott téma keretében csoportokban dolgoznak tanári irányítás segítségével. Egyéb programok mellett az elkészült munkákat is a táborban mutatják be egymásnak a diákcsoportok. A kidolgozandó projektnek nincsen előre kötött formája. Lehet ez egy vagy több kísérlet, mérés, kiértékelés bemutatása, kísérleti eszköz építése, számítógépes szimuláció elkészítése stb., esetenként történeti háttérrel vagy elméleti, számítási

1. ábra. Pendulumhullám (elölnézet).

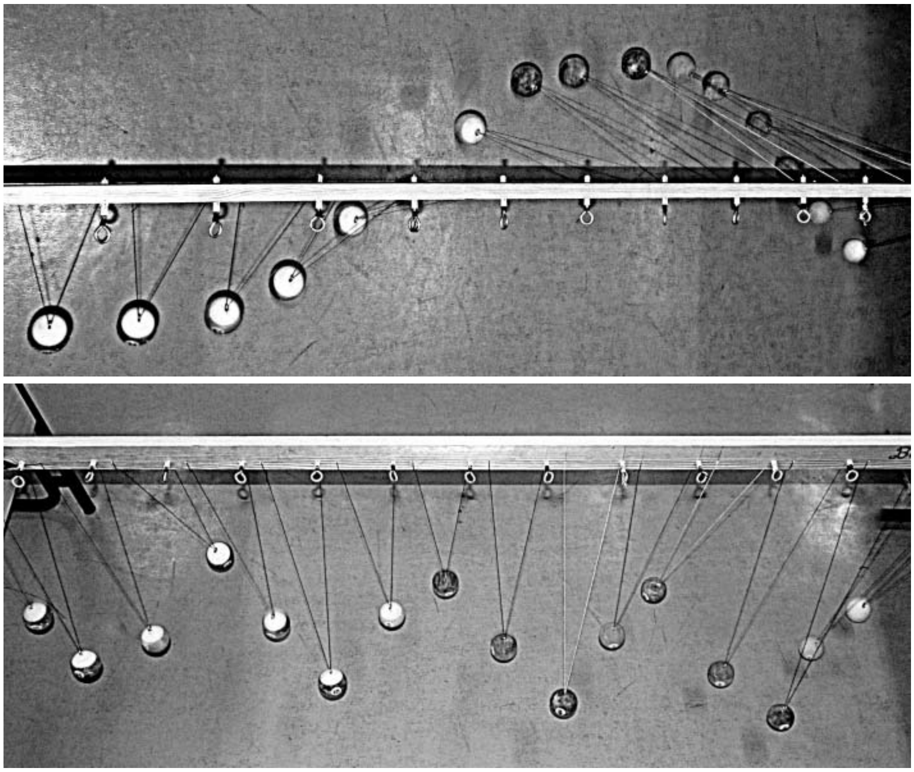


Lendvai Dorottya az ELTE Fizika Doktori Iskola hallgatója. *Czövek Márton* és *Forrás Bence* az informatikai hátteret írták és a jelenséghez kapcsolódó szimulációt készítették, ők a Berzsenyi Dániel Gimnázium 2014-ben végzett tanulói, jelenleg a BME VIK, illetve az ELTE TTK hallgatói.

[1] http://fizika.berzsenyi.hu/fizika-tabor

leírások bemutatásával egybekötve. A tábor végén közösen értékeljük a munkát. A tavalyi projektmunkánk, a pendulumhullám vizsgálatának részleteit és eredményeit szeretném itt most megosztani az olvasókkal.

Többek között azért gondoltam, hogy érdemes a pendulumhullámmal bővebben is foglalkozni, mert kiderült, alig találni magyar nyelvű leírást róla. Szebbnél szebb videók találhatók az interneten, azonban még az idegen nyelvű leírások sem elég részletesek és szakszerűek. A kollégák előtt sem ismert széles körben a jelenség. Ezért szeretném megosztani tapasztalataimat egy olyan fizikai jelenségről, amely kicsiket és nagyokat egyaránt ámulatba ejt.



2. ábra. Pendulumhullám felülnézetből (felül) és felül-oldalnézetből (alul).

Ugyan az internet sokszor nem megbízható, mégis érdemes a „pendulum wave” címszó alatt keresgélve videofelvételen megnézni, miről is lesz szó.[2] Hosszabb keresés után hasonló témájú hiteles írásokat az *American Journal of Physics* 2001. júliusi [1], illetve 1991. februári [2] számaiban találtam. Az általunk összegyűjtött információk és projektmunkánk részletei elérhetők a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium honlapján keresztül [3].

A pendulumhullám fizikai háttere és matematikai leírása

Megmutatható, hogy egy matematikai inga lengésideje kis szögkitérések esetén a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1)$$

összefüggésből meghatározható, ahol T az inga periódusideje, l a kötél hossza, g a nehézségi gyorsulás. Az inga lengési síkját megtartja, valamint kis kitérésekre lengésideje sem változik számottevően.

[2] Videók az interneten:
- Egyszerű pendulumhullám: https://www.youtube.com/watch?v=yVkdfJ9PkRQ
- Hosszú pendulumhullám: https://www.youtube.com/watch?v=O6Tys1unB8k
- Pendulumhullám sötétben: https://www.youtube.com/watch?v=7_AiV12XBbI
- Extrém pendulumhullám tűzgolyókkal: https://www.youtube.com/watch?v=u00OF3ilNUs
- Pendulumhullám szimmetrikusan: https://www.youtube.com/watch?v=vDtfWxL-AJg

Mi a pendulumhullám?

A pendulumhullám tetszőleges számú ingából álló ingasor, amelyben az ingák hosszát megfelelő matematikai összefüggés szerint választva, az ingák a képeken látható különleges alakzatokat veszik fel (*2. ábra*). (Amint a meghatározásból látszik, a pendulumhullám a fizikában elfogadott értelemben nem hullám, hiszen független ingák együttes látványáról van szó, ami semmilyen hullámegyenletnek sem felel meg.)

Fontos kérdés, hogy milyen legyen az elrendezés módja, vagyis milyen hosszúak legyenek a fonalak, hogy az ingákat egyszerre kitérítve, majd elengedve, azok meghatározott időközönként ilyen szabályos alakzatokat mutassanak? A „trükk” a következő: az ingák úgy vannak beállítva, hogy a teljes pendulumhullám egy bizonyos időn belül visszatérjen a kiindulási állapotába, vagyis minden golyó újra egyszerre legyen ugyanazon szélső helyzetben, mint a legelején. Ez alatt az idő alatt minden inga különböző frekvenciával leng. Ha a leghosszabbik például 52-t leng a pendulumhullám teljes periódusideje alatt, akkor a rákövetkező 53-at, utána 54-et és így tovább. Ha ezt felismerjük, akkor matematikailag már nincs olyan nehéz dolgunk: alapvető, hogy az egyes ingák periódusidejének hányadosa racionális szám legyen (ez biztosítja a rendszer periódusidejét), valamint célszerű, hogy a pendulumhullám periódusideje alatt az egyes ingák lengésszáma között 1-1 legyen a különbség.

A pendulumhullámban lévő ingákat (azok golyóit) beszámozzuk: i = 0, 1, 2, 3, … n. A pendulum így összesen (n+1) darab ingából áll. Legyen a nulladik inga a leghosszabb.

1. táblázat **Az egyes ingák periódusideje**		
i – az inga sorszáma	az inga τ idő alatti lengéseinek száma	T_i – az inga periódusideje
0	N	$T_0 = \tau / N$
1	$N+1$	$T_1 = \tau / (N+1)$
2	$N+2$	$T_2 = \tau / (N+2)$
⋮	⋮	⋮
i	$N+i$	$T_i = \tau / (N+i)$
⋮	⋮	⋮
n	$N+n$	$T_n = \tau / (N+n)$

További jelöléseink:

τ a pendulumhullám teljes periódusideje (az a legkisebb idő, amely alatt a pendulumhullámban lévő összes inga ismét egyszerre ér a kezdeti pozíciójába),

T_i – az i-edik inga periódusideje,

l_i – az i-edik inga kötélhossza (a felfüggesztéstől a golyó vagy egyéb nehezék súlypontjáig),

N – a leghosszabb ($i = 0$) inga τ idő alatti lengéseinek száma.

Ezek alapján az egyes ingák periódusideje az *1. táblázatban* leírtak szerint alakul.

A fonalhosszak megadására vonatkozó összefüggést két különböző módon is bemutatjuk.

1. Az *1. táblázatban* megadott τ, N és T_i közötti összefüggés és (1) felhasználásával az i-edik inga hossza:

$$l_i = \frac{g}{4\pi^2} T_i^2 = \frac{g}{4\pi^2} \left(\frac{\tau}{N+i} \right)^2. \qquad (2)$$

Az adatok egy lehetséges és kivitelezhető példája: τ = 90 s, n = 15 és N = 52. A *2. táblázat* összefoglalja (2) segítségével ezen értékekhez kapott kötélhosszakat.

2. A (2)-ből következik, hogy a hosszak rekurzióval is megadhatók:

$$l_{i+1} = l_i \left(\frac{N+i}{N+i+1} \right)^2.$$

2. táblázat

A kötélhosszak egy lehetséges megadása

i	l_i (cm)	i	l_i (cm)
0	74,4	8	55,9
1	71,7	9	54,1
2	69,0	10	52,4
3	66,5	11	50,7
4	64,2	12	49,1
5	62,0	13	47,6
6	59,8	14	46,2
7	57,8	15	44,8

Érdekes kérdés, hogy más elrendeződés (például számtani sorozatot követő kötélhosszak) esetén milyen mintázatok jöhetnek ki. Látunk-e hasonlóan „szépet”? Ez megfelelő szimulációval, ahol a különböző paraméterek könnyedén állíthatók, gyorsan ellenőrizhető. Természetesen akkor is lesznek „látványos együttállások”, azonban az időzítések és az ebből kialakuló összhatás miatt szubjektív megítélésem szerint a jelenség messze nem ilyen szép.

Az eszköz elkészítésének nehézségei

Az eszközt többféleképpen is el lehet készíteni. Most egy olyan egyszerű módszert mutatok be, amely iskolai körülmények között is kivitelezhető. Továbbá szeretném felhívni a figyelmet néhány olyan nehézségre, amelyek többségére csak a munka során derül fény.

A tartószerkezet

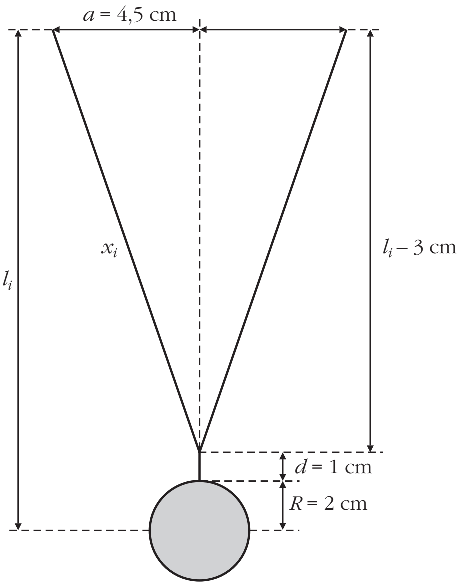
A tartószerkezet bármilyen egyszerű fa/fém állvány lehet, ami elbírja a golyókat, és amelybe kellő számú lyukat lehet fúrni. Akár talapzatra sincs szükség, egy egyszerű, kellő hosszúságú deszkalap is megteszi, amit két oldalról alá lehet támasztani. Tapasztalat szerint a rendszer szállításra igen érzékeny, főképp a fonalak, amelyek könnyen elszakadhatnak, elmozdulhatnak.

A golyók kiválasztása

Sajnos a méretes fagolyók drágák. Több videó található, ahol óriási anyacsavarral oldották meg a feladatot. Nekem a biliárdgolyó vált be, amelyet olcsón (akár ingyen) is be lehet szerezni. (A leselejtezett golyók után biliárdszalonokban érdemes érdeklődni.) A golyókat kampós csavar tartja a fonál végén. Az előfúrás stabilan tartható fúróval könnyen kivitelezhető. Amennyiben a fúró a kampós csavar meneténél körülbelül fél mm-rel vékonyabb, akkor a becsavart kampó könnyen beleszorul a golyóba. Sok ki-be tekergetés során meglazulhat a menet, ekkor egy kis pillanatragasztó még segíthet.

Fonalválasztás, felfüggesztés és fonalhosszak

Ahogyan a legtöbb videón is látszik, a csavarodás minimalizálása érdekében kettős felfüggesztést érdemes készíteni. A golyók oldalnézetből a *3. ábrának* megfelelő pozícióban egymás mellett helyezkednek el. Az ilyen típusú felfüggesztés stabilizálja ugyan a golyót, ellenben nehézkessé teszi a fonalhosszak amúgy sem könnyű beállítását. A fonal anyagának kiválasztása nem egyszerű. Kezdetben damillal próbálkoztunk, de azzal a finomhangolásokat nem lehetett elvégezni. Olyan fonalat javasolok, amely viszonylag csavarodásmentes, a súrlódástól kevéssé kopik és kellőképpen teherbíró. Erre a hímzőfonalak egészen alkalmasak. A fonalak számára 2-2 lyukat fúrtunk a tartószerkezetbe. Az egyikbe a ingát tartó fonalat fixen rögzítettük, a másik oldalon egy tipliben



3. ábra. Az egyes ingák készítésének paraméterezése (oldalnézet).

mozgó csavar köré tekertük a fonalat. A csavar ki-, illetve betekerésével lehet finomhangolni a fonalhosszat. Az i-edik inga fonalának $2x_i$ hosszát a Pitagorasz-tétel segítségével számíthatjuk ki:

$$x_i = \sqrt{\left(l_i - R - d\right)^2 + a^2}. \tag{3}$$

Egy lehetséges méretezés például: R = 2 cm a biliárdgolyó sugara, d = 1 cm a golyóból kilógó kampó hossza, $2a$ = 9 cm a két felfüggesztési pont közötti távolság (*3. ábra*).

A többi golyó az ábrázolttól balra, illetve jobbra helyezkedik el.

A fonalhosszak precíz hangolása

A munka legidegőrlőbb része most következik. A legfőbb gondot az okozza, hogy néhol csupán pár milliméter a különbség két szomszédos kötél hossza között, amelynek pontos beállítása szinte lehetetlen, ráadásul a hibafaktor olyan összetett (csavarodás, rossz indítás, közegellenállás, súrlódás stb.), hogy bizonyos ponton túl értelme sincs a hosszak pontosabb mérésének. Mit tehetünk mégis? Az egyik, ami segíthet az, hogy nem a függőleges l_i értékeket próbáljuk meg beállítani, hanem a golyó elhelyezkedését a fonálon. A *3. ábráról* leolvasható $2x_i$ távolságot lényegesen könnyebben lehet állítani a (3) formula szerint! Lehet próbálkozni a golyók egyenkénti hangolásával, periódusidőt mérve – ehhez igénybe vehető számítógépes időmérő program. Ezt megelőzően ajánlom, hogy az egész rendszert többször elindítva figyeljük meg: a teljes pendulumhullámhoz képest mely golyók sietnek avagy éppen késnek, és ennek függvényében óvatosan, csak 1-2 millimétert állítsunk a hosszakon a megfelelő irányokba, majd jó néhányszor ismételjük meg ezt a műveletet. Ezzel a módszerrel néha gyorsabb és pontosabb a hangolás, mint szigorúan ragaszkodva az idő-, illetve hosszmérésekhez.

4. ábra. A pendulumhullám indítása.

Indítás

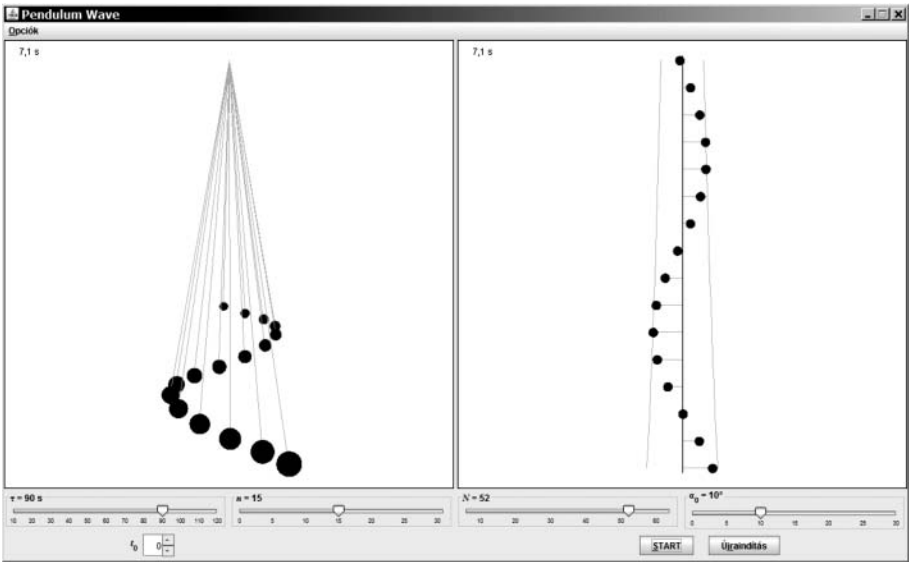
Az elkészített ingarendszert az elindításkor egy hosszú deszkával térítjük ki. Azonban a fenti számítások alapján a lengéseknek nem azonos amplitúdóval, hanem azonos maximális szögkitéréssel kellene történniük. Ez a kitérítés szempontjából a valóságban alkalmazott paraméterértékek mellett nem jelent lényeges különbséget: a szélsőhelyzetek burkológörbéje jó közelítéssel egyenes (*4. ábra*).

Egyéb ötletek

Sötétben is csodálatos a pendulumhullám, ha a golyókat (és akár a fonalakat is) láthatóvá tesszük. Ehhez hobbyboltokban többféle színben foszforeszkáló festék kapható, vagy fehér alapanyaggal dolgozva, eszközünk UV-lámpával megvilágítható. Mindkettő káprázatos látványt nyújt!

Továbbá az interneten megtalálható egy tűzgolyós verzió is, amelyen a golyók fémláncokon lógnak és éghető anyagot tartalmaznak. A fémlánc hossza viszonylag könnyen hangolható, nem igényel kettős felfüggesztést. A golyó üregesnek tűnik, amely valamilyen folyékony, éghető anyaggal lehet megtöltve. Alkalmas lehet egy játszótéri hinta váza is, de némi ötletességgel ennél jóval kisebb változatban is kivitelezhető. Ugyan nagy elővigyázatosságot igényel, de a látványért talán megéri!

További élményt jelent, ha az ingák hangot is adnak például úgy, hogy a szélső helyzetükben valamit megkongatnak. Ez azonban hosszabb távon lényegesen megváltoztatná az ingák mozgását. Ötletünket nem feladva, a „pendulumhullám zenéje” a szimuláció elkészítésével valósult meg.



5. ábra. Pendulumhullám szimuláción (elöl- és felülnézet).

Pendulumhullám számítógépes szimuláción

A jelenség pontosabb vizsgálatát elősegítendő azt demonstráló programot készítettünk. (A program a valóságban is működő eszközünknek megfelelő *2. táblázat* adataival indul, a későbbiek során azonban a különböző paraméterek módosíthatók.)

Előkészületek

A program fő funkciója, hogy az ingarendszert mutatja egyidejűleg elöl- és felülnézetből (lásd az *1., 2.* valós, valamint az *5.* szimulációs *ábrákon*). Ezen vetületek megrajzolásakor ténylegesen egy síkra rajzolunk, tehát a program nem 3 dimenziós adattípusban tárolja az ingákat.

Az animáció létrehozásához egymáshoz közeli pillanatokban rajzoljuk ki az ingarendszert. Minden újrarajzoláskor a monitorról letöröljük az előző képkockát, majd kirajzoljuk az újat – másodpercenként 33-szor. Ehhez minden pillanatban valamennyi inga helyzetét ismernünk kell, tehát minden ingáról tudnunk kell az aktuális kitérési szögét és fonala hosszát: ezekből az adatokból meghatározhatók a golyók Descartes-koordinátái. A fonálhosszak adott ingarendszernél ismertek. Szükség van az $\alpha_i(t)$ kitérési szög-idő függvényre minden egyes l_i hosszúságú inga esetén. Ezt az alábbi összefüggésből kaphatjuk meg:

$$\alpha_i(t) = \alpha_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l_i}}\; t\right),$$

ahol α_0 a kezdeti kitérés, ami minden ingára azonos. Így már minden adott, hogy az ingarendszer megfelelő vetületeit tetszőleges pillanatban ki tudjuk számítani.

Mi az úgynevezett objektumorientált programozási koncepciót követtük: saját adattípusokat hoztunk létre. Elsőként elkészült az ingatípus, ami tárolja egy inga összes paraméterét. Erre épülve jött létre az ingarendszer típusa, ami az előbb megírt ingákat használja; azok belső működését nem befolyásolja, csupán összehangolja őket: gondoskodik például arról, hogy egyszerre induljanak el, illetve ez végzi el az ingák paramétereinek beállítását is. A grafikus felülethez a Java nyelv Swing[3] csomagját használtuk.

A programozás hozadékai

Burkológörbe

A megépített ingarendszerben – amint már említettük – a szélső helyzetek burkológörbéje csak közelítőleg egyenes. Ez a videók alapján nem feltétlenül vehető észre. Átgondolva, illetve az egzakt matematikai formulákra épült szimulációt megnézve azonban jól látható. A jelenség szépségén és a fizikai leírás lényegén ez nem változtat, mégis érdekes lehet a szimulációban a burkológörbe kirajzolása, főleg ott, ahol más paraméterértékekkel jelentőssé válik az eltérés.

Nagy kitérítések

Az általunk írt program nem tanult fizikát: nincs tisztában sem a Newton-törvényekkel, sem a gravitációval, csak az ingák mozgását leíró képleteket ismeri, amelyek azonban a közelítés miatt csak kis szögek esetén igazak. Ebből következően az sem zavarja, ha olyan kitérési szögértéket adunk meg, amire a közelítés már nem lenne igaz. Ez szórakoztató jelenségekhez vezet: 120°-os kitérítés esetén például a golyók egy pillangómintát írnak le. Persze ennek nincs sok köze a valósághoz: ha a rendszert 120°-kal térítjük ki, a golyók nem körpályán fognak elindulni, hanem először szabadesést végeznek (a merev fonál – rúd – is csak közelítőleg felel meg a programbeli mozgásnak). Ez utóbbi példa jól jellemzi a programozás során gyakran megfogalmazott álláspontot: „megcsináljuk, mert megtehetjük”.

Lineáris fonálhosszak

Felmerült a kérdés, hogy mi történik, ha az ingák kötélhosszai a megadott képlet helyett egy egyszerűbb összefüggést, például egy számtani sorozatot követnek. A szimulációból kiderül, hogy ebben az esetben az indulás ugyan nagyon hasonló, de rövidesen az ingák mozgásában már nem lesz látható olyan megkapó szabályosság, mint az általunk elkészített pendulumhullámnál. Az (1) képlet alapján az ingák periódusideje a számtani sorozat egyes tagjainak négyzetgyökével lesz arányos, így biztosan lesz olyan aránypár, aminek értéke nem racionális szám, a „pendulumhullámnak” nem lesz periódusideje, sohasem tér vissza a kezdőállapotba.

---

[3] http://docs.oracle.com/javase/7/docs/api/javax/swing/package-summary.html

3. táblázat

Az ingák helyzetének jellemzői 1/3, illetve 2/3 periódusidőnél

az inga sorszáma	τ (90 s) periódusidő alatti lengések száma	τ/3 (30 s) alatti lengések száma	golyó helyzete τ/3 (30 s) után	2τ/3 (60 s) alatti lengések száma	golyó helyzete 2τ/3 (60 s) után
0.	52	17 1/3	eh-bszh	34 2/3	bszh-eh
1.	53	17 2/3	bszh-eh	35 1/3	eh-bszh
2.	54	18	jszh	36	jszh
3.	55	18 1/3	eh-bszh	36 2/3	bszh-eh
4.	56	18 2/3	bszh-eh	37 1/3	eh-bszh
5.	57	19	jszh	38	jszh
6.	58	19 1/3	eh-bszh	38 2/3	bszh-eh
7.	59	19 2/3	bszh-eh	39 1/3	eh-bszh
8.	60	20	jszh	40	jszh
9.	61	20 1/3	eh-bszh	40 2/3	bszh-eh
10.	62	20 2/3	bszh-eh	41 1/3	eh-bszh
11.	63	21	jszh	42	jszh
12.	64	21 1/3	eh-bszh	42 2/3	bszh-eh
13.	65	21 2/3	bszh-eh	43 1/3	eh-bszh
14.	66	22	jszh	44	jszh
15.	67	22 1/3	eh-bszh	44 2/3	bszh-eh

Jelmagyarázat: eh – egyensúlyi helyzet
jszh – jobb szélső helyzet
bszh – bal szélső helyzet
eh-bszh – az inga éppen az egyensúlyi helyzetből tart a bal szélső helyzetébe
bszh-eh – a inga éppen a bal szélső helyzetből tart az egyensúlyi helyzetébe

Hangok

Tekintettel a pendulumhullám látványosságára, logikusnak tűnik, hogy ez az élmény esetleg más érzékszervvel is észlelhetővé, például hallhatóvá tehető. A pendulumhullám megépítésekor technikailag nem lenne megvalósítható, hogy az ingák a szélső helyzetekben hangot adjanak ki, ezért ezt a jelenséget is szimuláltuk. A programban a leghosszabb inga „A” hangon szól, ettől kezdve minden inga sorban fél hanggal magasabb hangot ad. A programban a hangok bekapcsolásával egyidejűleg érdemes a *Szélsőhelyzet más színnel* funkciót is engedélyezni, így látható, hogy éppen mely ingák adnak ki hangot. A kezdeti feltételezés igaznak bizonyult: valóban érdekes „zenét” kapunk. (Ennek szemléletessé tételére másféle inga-hang hozzárendelés is lehetséges. Egy másik megoldás lehet például a spirális ábrázolás,[4] amelynek lényege, hogy a felhangrendszer szerint, az alaphang egész számú többszörösei elvén van skálázva.)

Letöltés és felhasználás

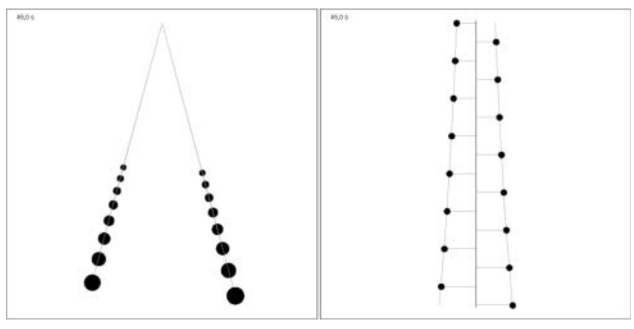
A program szabadon letölthető,[5] használatához legalább 7-es Java futtatókörnyezetre van szükség.[6]

Részletes elemzés

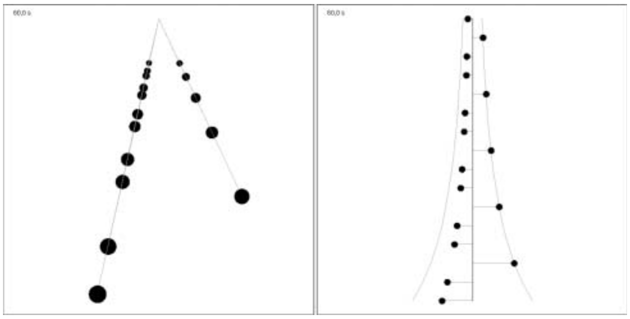
A szimuláció alapján a „szép alakzatok” még sokkal könnyebben értelmezhetők, akár a nyolcadikosok számára is elemezhetők. Ugyanis a szimuláció az elkészített eszközön megjelenő látványhoz képest nagyon nagy pontosságú és komoly előnye, hogy tetszőleges időpontokban megállítható. Természetesen ez nem helyettesítheti a valóságban működő ingasor élményét. Azonban használjuk ki a szimuláció előnyét és pendulumhullámunkat vizsgáljuk meg néhány speciálisan kiválasztott pillanatban!

Amikor a pendulumhullám éppen félperiódusnál jár (*6. ábra*), akkor azok a golyók, amelyek a teljes periódusidő alatt páros számú teljes lengést végeztek, most a kiindulási helyzetben találhatók. Azonban

6. ábra. Fél periódusidő (45 s) utáni állapot elöl- és felülnézetben.



[4] https://www.youtube.com/watch?v=JMzB7sLeSbs
[5] http://www.berzsenyi.hu/Lendvai
[6] http://java.com/en



7. ábra. 1/3 (30 s), illetve 2/3 (60 s) periódusidő utáni állapot elöl- és felülnézetben.

azok a golyók, amelyek a teljes periódusidő alatt páratlan számút lengtek, most féllengésnyi távolságban, az előbbiekhez képest az átellenes oldalon lesznek.

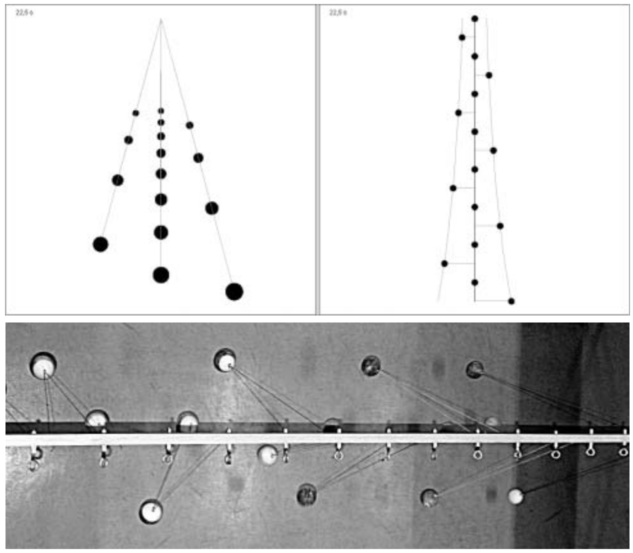
Az 1/3, illetve 2/3 periódusidő (30., illetve 60. másodperc) esetén érdemes összefoglalni az egyes ingák aktuális helyét és mozgásirányát (*3. táblázat*).

Leolvasható, hogy egy-egy inga helyzete a 30. és a 60. másodperc pillanatfelvételén valóban semmiben sem különbözik egymástól, hiszen a jelenség szimmetrikus. Azonban egyszerű gondolatmenettel és a *3. táblázat* segítségével könnyen észrevehető, ami a kimerevített képeken (*7. ábra*) nem látszik: amíg az 1/3 periódusidőnél némely inga balról jobbra leng, addig 2/3 periódusidőnél éppen ellenkezőleg, ugyanaz az inga jobbról balra leng, miközben azonos pozíción halad keresztül (és természetesen fordítva).

Ehhez hasonlóan vizsgálható bármely pillanat, főképp a „szép” rajzolatú pillanatnyi állapotoknál. Például az 1/4 periódusidőnél (22,5 s) történő elemzést elvégezve válnak érthetővé a *8. ábra* szimulációs, illetve valós felvételei.

Összefoglalás

Pedagógiailag fontosnak tartom megjegyezni, hogy a diákok a folyamatos konzultációk közben sok szempontból (például a programozás és annak hozadékai tekintetében) önálló munkát végeztek, az eredeti tervet jócskán meghaladva. Mindeközben anélkül, hogy a már létező egyéb megvalósításoknak mélyebben utánanéztek volna, számtalan saját ötlettel is gazdagították a projektmunkát.



8. ábra. 1/4 periódusidő (22,5 s) utáni állapot elöl- és felülnézetben szimuláción, valamint felülnézetben valós felvételen.

Az elkészült anyagok (internetes videók listája, saját videók, szimulációk, előadásanyagok, projektmunka-tervezet, kapcsolódó cikkek stb.) megtalálhatók a [3] webcímen.

Reményem szerint sokak érdeklődését felkeltette az írás. Jó szórakozást és hasonló sikereket kívánok a projekten való munkához, valamint további érdekességek felkutatásához!

Irodalom:

1. J. A. Flaten, K. A. Parendo: Pendulum waves: A lesson in aliasing. *Am. J. Phys. 69/7* (2001) 778–782.
2. R. E. Berg: Pendulum waves: A demonstration of wave motion using pendula. *Am. J. Phys. 59/2* (1991) 186–187.
3. http://www.berzsenyi.hu/Lendvai

További érdekességek:
http://bouncemetronome.com/video-resources/harmonic-polyrhythms/pendulum-waves-played-harmonics
http://bouncemetronome.com/features/pro/theremins-rhythmicon
http://whitneymusicbox.org/index.php?var=v2