

Centrális erőterbeli mozgások tanulmányozása Dynamics Solver programmal – számítógépes kísérleti fizika

1. Bevezetés

Általános tapasztalat, hogy a diákok természettudományos tudásszintje, képességei és motiváltsága is erőteljesen csökkent az utóbbi években. Ennek oka sokrétű: egyfelől a demográfiai csökkenésből eredően kevesebb a fiatal; másrészt a középiskolai oktatás színvonala kitapinthatóan visszaesett; végül nem elhanyagolható a természettudományoktól való elfordulás társadalmi szintű hatása sem.







Világossá vált, hogy a természettudományok oktatásában egyfajta paradigmaváltásra van szükség, a leíró-magyarázó módszerek helyett szemléltetés-orientált tárgyalásmódot kell alkalmazni, amely élvezetesebbé és sikeresebbé teheti a fizikaoktatást. A tananyagkészítés során a pontos, szakterületi részeredményeket olyan módon kell leegyszerűsíteni, hogy a lényeg megmaradjon, ugyanakkor a részleteket egységes szemléletű, érdeklődést felkeltő egészebe kell önteni. Lényeges momentum az új, lehetőleg gyakorlatorientált témák beemelése az oktatásba, mivel ezek fokozhatják a tanulók érdeklődését és érzékeltethetik, hogy a fizika milyen mértékben tölt be meghatározó szerepet a mindennapi életben.

A számítógépek a fizika számára is új dimenziót nyitottak, létrejött a számítógépes kísérleti fizika, mint teljesen újszerű vizsgálati módszer. A számítógépes szimulációk segítségével olyan modellekről tudunk releváns kvantitatív információt nyerni, amelyek korábban egyáltalán nem, vagy csak kvalitatív módon voltak tárgyalhatók. A Dynamics Solver (továbbiakban DS) ingyenesen letölthető program [1], amelyet célirányosan dinamikai rendszerek szimulációjára fejlesztettek ki. Jelen tanulmány szerzői számára mind az oktatásban, mind a kutatásban valóságos áttörést hozott a használata.

A Dynamics Solver lényegi tulajdonságai:

- ingyenesen letölthető,
- minimális programozási előismeret szükséges a használatához,
- magas szintű validitás, erős megbízhatóság jellemzi,
- kimagaslóan gyors,
- elképesztően flexibilis, azaz szinte minden dinamikai rendszer modellje specifikálható benne.

A DS használata nem feltételez programozási előképzettséget: a szimulációhoz szükséges minden információ bevitele felhasználóbarát párbeszéd-ablakokban történik és a sokrétű grafikus és numerikus eredmények megjelenítése és kinyerése nagyon egyszerű. A program hatékony beépített fordítója a standard alakú matematikai kifejezések széles osztályát kiemelkedően gyors futású belső kóddá alakítja. A fentiek miatt a DS kiemelkedően hatékony eszköz dinamikai rendszerek tanulmányozására.

A Dynamics Solverben elkészített modelleket a program *.ds kiterjesztésű ASCII formátumú szöveges *probléma-fájlokban* menti el, így valójában egyszerű szövegszerkesztővel is megírhatnánk őket, de természetesen sokkal kézenfekvőbb és áttekinthetőbb a modellekészítés a program igen barátságos felhasználói felületén. A program használatához készítettünk magyar [2] és angol [3] nyelvű tömör áttekintő segédletet, de a jelen tanulmányhoz kapcsolódó *.ds probléma-fájlok futtatásához szükséges legalapvetőbb funkciókat röviden itt is megadjuk: a futtatás a  ikonnal, leállítása (felfüggesztése) a  ikonnal, folytatása a  ikonnal, a grafikus ablakok törlése a  ikonnal, a paraméter-tábla megjelenítése a  ikonnal, a kezdetifeltétel-tábla megjelenítése pedig a  ikonnal történik.

A DS segítségével a diákok szinte játszva érthetik meg a dinamika alapvető fogalmait és módszereit, a szimulációk használatával a kutatás és felfedezés élményét élhetik meg.

2. A centrális erőtér és kialakuló mozgásformák

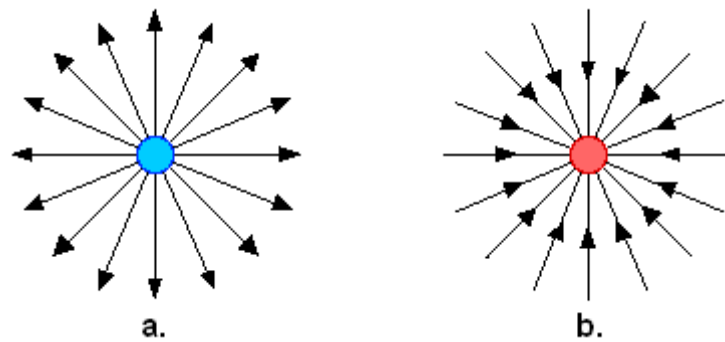
Az ún. **centrális erőtér** esetén tetszőleges tömegpont mozgását meghatározó potenciális (helyzeti) energia csak az adott ponttól (centrumtól) mért r távolságtól függ, tehát:

$$V(r). \quad (2.1.a)$$

Ekkor a tömegpontra ható erő:

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.1.b)$$

amelynek hatásvonala mindig a vonatkoztatási rendszer egy meghatározott pontján, a centrumon (többnyire ide választjuk a koordináta-rendszer O origóját) halad keresztül (lásd 1. ábra).



1. ábra: centrális erőtér szemléltetése (a.: taszító, b.: vonzó erőtér)

A legfontosabb – és a természetben legáltalánosabban megjelenő – centrális erők azok, amelyekben a potenciális energia az r távolsággal fordítottan arányos:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad (2.2.a)$$

ahol $\alpha > 0$ vonzó, $\alpha < 0$ taszító jellegű erőtér esetén. (2.1.b)-ből következően az erő $\frac{1}{r^2}$ szerint függ a távolságtól:

$$F(r) = \frac{\alpha}{r^2}. \quad (2.2.b)$$

A két legfontosabb, legismertebb $1/r$ jellegű centrális erőhatás:

- a gravitációs erő (M tömegű test erőtere, $M \gg m$ feltétel mellett): $\alpha = G \cdot M \cdot m$,
- a Coulomb-erő (M tömegű, Q töltésű test erőtere, $M \gg m$ feltétel mellett): $\alpha = \frac{-Q \cdot q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}$.

A (2.2) képletekkel adott centrális erőkben kialakuló mozgások tömör elméleti tárgyalását a Függelékben adjuk meg. Jelen szakaszban csak kiemeljük a mozgásformákra levezetett legfontosabb eredményeket. Lényegi megállapítás, hogy a létrejövő mozgás pályája az:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \varphi} \quad (2.3.a)$$

egyenletű kúpszelet lesz (polár koordináta-rendszerben), amelynek paraméterei:

$$p = \frac{J^2}{m\alpha} \text{ és } e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{m\alpha^2}}, \quad (2.3.b)$$

ahol E a test teljes mechanikai energiája, J pedig a $\vec{J} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$ képlettel definiált perdület (impulzusmomentum) nagysága.

Azt is megállapítottuk, hogy mozgó m tömegű test E teljes mechanikai energiájától függ, hogy a pálya zárt (véges), vagy nyitott (végtelen) lesz.

2.1. Zárt pályák

$E < 0$ esetén az m tömegű test p paraméterű, e excentricitású ellipszis pályán mozog, amelyre:

- az ellipszis nagy-, illetve kistengelye: $a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}$, $b = a \cdot \sqrt{1-e^2}$, (2.4.a)

- a keringés periódusideje pedig: $T = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$. (2.4.b)

(a) Gravitációs tér (bolygómozgás, Kepler-törvények)

Az M tömegű test gravitációs ($\alpha = G \cdot M \cdot m$) erőterében (2.4) képleteket felhasználva:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\left(\frac{\alpha}{2|E|}\right)^3}{\left(\pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}\right)^2} = \frac{G \cdot M}{(2\pi)^2} = \text{állandó}, \quad (2.5)$$

ami nem más, mint **Kepler III. törvénye**, maga az ellipszis pálya megjelenése pedig tulajdonképpen **Kepler I. törvénye**.

A F.1. függelékben megmutatjuk, hogy centrális erőterben a perdület (impulzusmomentum) állandó, így a *centrális erőterben mozgó tömegpont által időegységenként sűrolt terület*

$$\dot{T} = \frac{1}{2} |v_x \cdot y - v_y \cdot x| \quad (2.6)$$

állandó értékű (ha a mozgás az x-y síkban történik). Ez pedig nem más, mint **Kepler II. törvénye**: a bolygók vezérsugara – a bolygót a Nappal összekötő szakasz – azonos idő alatt azonos területet sűrol.

(Megjegyzés: $e = 0$, azaz $E = E_{\text{kör}} = -\frac{m\alpha^2}{2J^2}$ energiaérték esetén $a = b = p$, tehát körpálya lesz.)

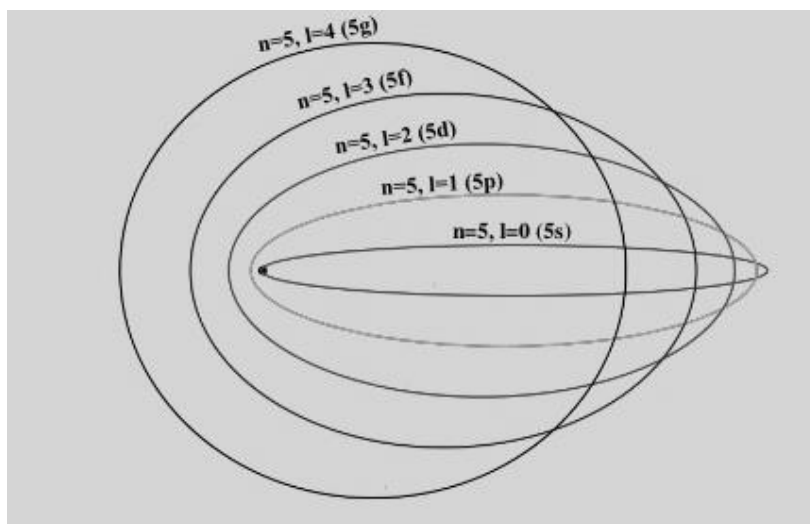
(b) Elektrosztatikus tér (elektronpályák, Bohr-Sommerfeld modell)

A kvázi-klasszikus kvantumelméletben az atomok szerkezetét leíró *Bohr-Sommerfeld modellje* szerint a negatív töltésű elektronok a pozitív töltésű atommag körüli ellipszis pályákon helyezkednek el, tehát

lényegében parányi naprendszert alkotnak. Ez esetben nyilván a gravitációs erő helyett az (ellentétes töltések esetén szintén vonzó) elektrosztatikus Coulomb-erő hat és $\alpha = \frac{-Q \cdot q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}$.

Egy atomban levő összes elektron teljes fizikai állapota négy kvantumszámmal adható meg.

Az n ($n = 1, 2, 3, \dots$) főkvantumszám a pálya nagyságát (az elektronnak az atommagtól mért átlagos távolságát) és energiáját, míg az l ($l = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$) mellékvantumszám a pálya alakját és perdületét jellemzi (lásd a 2. ábrán). Ma már tudjuk, hogy ez a kép nem realisztikus, de adott keretek között igen sikeres (pl. a kémiai tulajdonságok leírásában) és főként nagyon szemléletes.



2. ábra: a Bohr-Sommerfeld atommodell elektronpályái

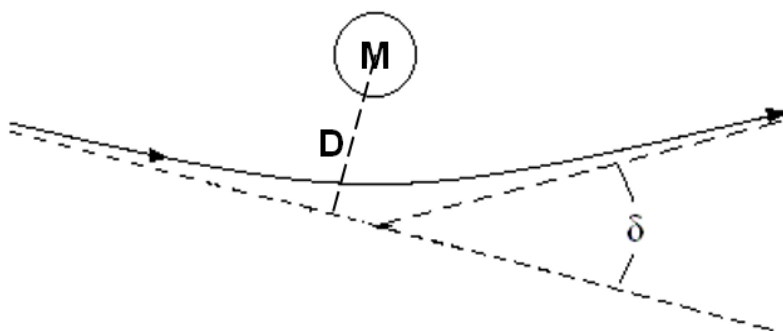
2.2. Nyitott pályák

$E > 0$ esetén nyitott (végtelen) hiperbola pályán mozog a test ($E = 0$ speciális esetben parabola).

Részletesebb tárgyalás az F.2. függelékben található, itt csak összefoglaljuk a legfontosabb gyakorlati példákat.

2.2.a. Elterülés centrális gravitációs erőterben

A 3. ábrán a vonzó centrális erőterben mozgó test hiperbola pályáját látjuk, a vonzócentrumtól nagy távolságra v_0 sebességgel induló m tömegű test az M tömegű ($M \gg m$) objektumtól D távolságra haladna el, ha a vonzócentrum gravitációs tere el nem térítené.



3. ábra: pálya elterülés centrális gravitációs erőterben

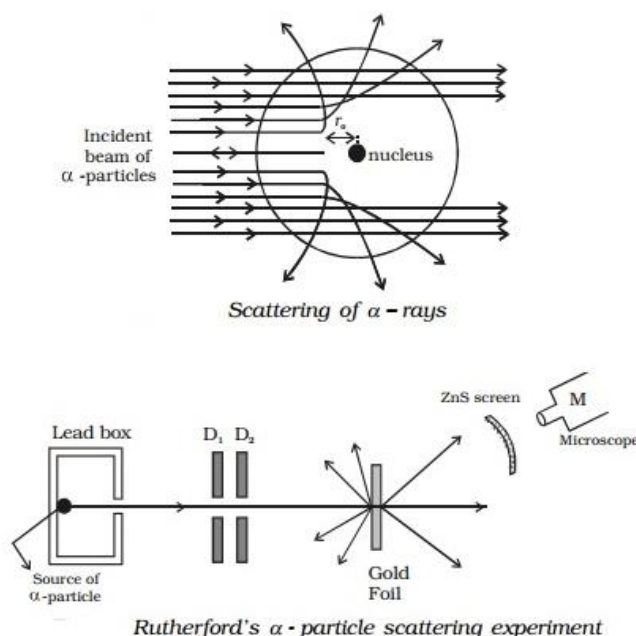
Az M tömeg gravitációs erőterében tehát hiperbola pályán mozogva δ szögű irányváltozással térül el. A hiperbolának két, egymást nem metsző és nem érintő ága van, a test pályája a vonzócentrumhoz közelebbi hiperbolaág. A szimmetriatengelytől minden határon túl növekvő távolságra a hiperbolaág két vége egy-egy egyeneshez tart, amelyeket aszimptotának hívnak, a δ irányváltozás a két aszimptota által bezárt szög.

A tisztán klasszikus fizikai levezetéssel kapott (F.2.8.) képlet szerint:

$$\delta = 2 \frac{G \cdot M}{D \cdot v_0^2} . \quad (2.7)$$

2.2.b. Részecske-szórás

Egy elektromosan töltött részecske szóródása elektromágneses erőcentrumon vagy egy másik töltött részecskén az ún. *Coulomb-szórás*. Ezt kísérletileg Rutherford vizsgálta először alfa-részecskéknek arany-atommagokon való szórásával, amit *Rutherford-féle szórás*kísérletnek nevezünk (4. ábra).



4. ábra: Rutherford-féle szórás

2.2.c. Fényelhajlás

A modern fizika (a kvantumelmélet és a relativitáselmélet) szerint a fény is anyagi objektumnak tekintendő, így megfontolásaink talán legfontosabb – tudománytörténetileg is kiemelkedő jelentőségű – alkalmazása a fény nagy tömegű test (pl. a Nap) közelében való elhaladása során történő elhajlása. Sajnos viszont a klasszikus fizika pontatlanná válik nagy sebességek esetén, tehát ez esetben a relativitáselméletre kell támaszkodni, amely megfontolás eredménye szerint a relativisztikus szögeltérés pont kétszerese a klasszikus képletének (lásd F.2. függelékben):

$$\delta = 4 \frac{G \cdot M}{D \cdot v_0^2} . \quad (2.8)$$

A Nap közelében történő fényelhajlás az első kísérleti bizonyítékot szolgáltatva az általános relativitás igazolására. 1919-ben – egy Napfogyatkozást kihasználva – A. Eddington angol csillagász megmérte a Nap közelében levő csillagok fényének elhajlását (miközben a Föld felé tartva fényük elhalad a Nap közelében) és a mérés eredménye egyértelműen a relativisztikus képlettel egyezett (lásd az 1. táblázatban).

	fény elhajlása a Nap közelében (szögmásodperc)
klasszikus fizika alapján számított	0,87
relativitáselmélet szerint számolt	1,75
mért (Eddington)	1,74±0,03

1. táblázat: fény szögelhajlása a Nap közelében

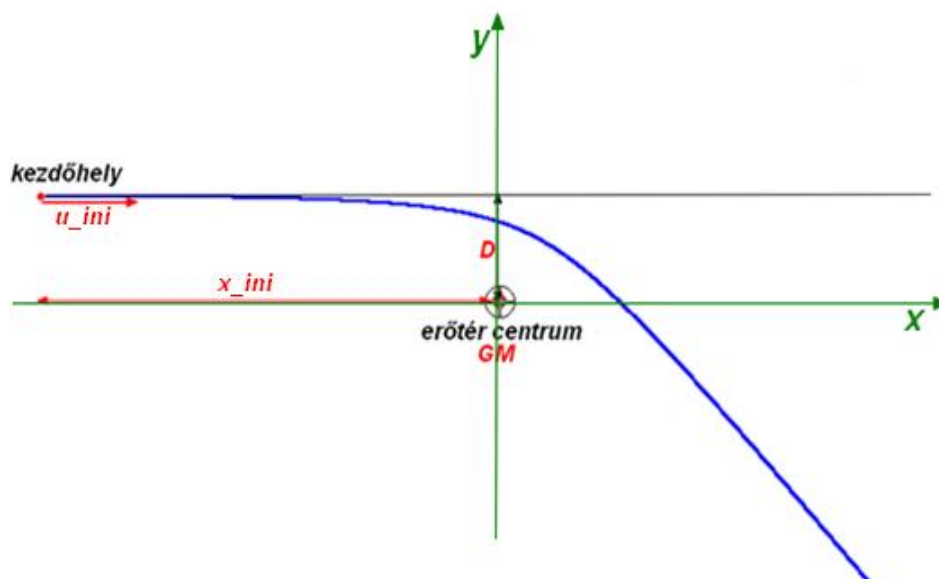
3. Szimulációk – számítógépes kísérleti fizika

A jelen fejezetben tárgyalt feladatok az igazi *számítógépes kísérleti fizika* élményét, a saját „felfedezés” örömet kínálják, ezért érdemes saját próbálkozásokkal kísérletezni, megéri a rászánt időt. Ezért javasoljuk, hogy próbálkozzanak saját megoldásokat keresni az alábbi feladatokra, de az F.3. függelékben adunk némi segítséget.

A következő feladatokban tanulmányozza az $\alpha = G \cdot M \cdot m$ gravitációs erőterben létrejövő mozgások numerikus szimulációját a DS mappában található *grav_sim.ds* probléma-fájl futtatásával!

Megjegyzés: a centralis erőter probléma szimulálható Excel alapú numerikus differenciálegyenlet megoldással is, ahogy a <http://theorphys.elte.hu/fiztan/num/> oldal (középpontos Euler módszerrel) is demonstrálja.

Ha részleteiben meg szeretné érteni a szimuláció működését, akkor nézze át a probléma-fájl felépítését (a Bevezetésben említett segédlet alapján taz *Edit* menüben levő *Type...*, *Variables...*, *Parameters...*, *Equations...*, *Initial conditions...* és *Range...* almenü pontokon végig haladva). Ez nem feltétlenül szükséges, a szimulációs programmal kísérletezhet a Bevezetés végén ismertetett legalapvetőbb funkciók használatával.



5. ábra: a szimulációban használt koordináta-rendszer és paraméterek

A (Descartes-féle) koordináta-rendszer origóját az erőter centrumba helyezve **négy paraméter határozza meg a mozgást:**

- az erőter erősségét megadó **GM** paraméter (amely gravitációs erőter esetén: $GM = G \cdot M$),
- valamint a kezdőfeltételek, tehát az $(x_0 = x_ini ; y_0 = D)$ kezdőhely az **x_ini** és **D** paraméterekkel, valamint az $(v_{x0} = u_0 = u_ini ; v_{y0} = v_0 = 0)$ – tehát x-tengellyel párhuzamos irányú – kezdősebesség-vektor az **u_ini** paraméterrel (a mozgás általános jellegét nem korlátozzuk azzal, hogy a kezdősebességet az x-tengellyel párhuzamosnak vesszük).

Outputként egy grafikus ablakot és egy szöveges adatkiíró ablakot definiáltunk. A grafikus ablakban a mozgásgörbét rajzoljuk ki az xy-síkban. A szöveges ablakban a pillanatnyi sebesség irányszögét (a sebességvektor x-tengellyel bezárt szögét), valamint az origóból a mindenkori tartózkodási pontba mutató helyvektor által időegységenként súrolt terület nagyságát (lásd F.1. függelékben) írjuk ki.

1. feladat

Végezzen számítógépes kísérleti fizikát: a fenti négy paraméter értékének változtatásával: próbáljon találni hiperbola pályát („üstökös”) és ellipszis pályát („bolygó”). (Amennyiben szükséges változtassa a grafikus megjelenítőablak beállításait az *Output* menü *Graphics format...* almenüpontjához tartozó párbeszédablakban a segédletekben leírtak alapján.)

Mit tapasztalunk, ha GM paraméternek negatív értéket választunk, tehát „taszító” centrális erőterünk van?

2. feladat

Ha sikerült hiperbola pályát találnia, akkor szöveges ablakban jól láthatja, hogy az irányszög értéke indításként 0 radián, ami megfelel az általunk választott x irányú kezdősebességnek (ez tulajdonképpen a hiperbola pálya kezdő aszimptota-egyenese), majd kellően hosszú idő múlva az irányszög értéke nullától különböző értékben stabilizálódik (ez a hiperbola pálya másik aszimptota-egyenese irányja). Így tehát ez az irányszög megegyezik az elméleti leírásban definiált eltérülési δ szöggel.

A szimulációval kísérletezve állapítsa meg, hogy miként függ a δ eltérülési szög a paraméterektől! A GM , D és u_ini paraméterek közül mindig csak egyet szisztematikusan változtatva mutassa meg (az x_ini paraméter nem releváns, csak annyiban, hogy elég nagyoknak kell választani, hogy a bemeneti aszimptotán legyen a kezdőhely), hogy a δ eltérülési szög egyenesen arányos GM -mel, fordítottan arányos D -vel, illetve u_ini négyzetével, tehát kísérletileg igazolja a (2.7) képletet. (Természetesen a klasszikus fizikai megközelítés érvényes, hiszen a szimulációban a Newton II. axiómája szerinti (F.2.3) mozgásegyenleteket használjuk.)

3. feladat

Az 1. feladatban tapasztaltuk, hogy a (vonzó) centrális erőter esetén megfelelő paraméterértékek esetén ellipszis pályájú mozgás jelenhet meg. Az erőter centrumba a Napot helyezve lényegében tehát a bolygók mozgását szimulálhatjuk! 400 évvel ezelőtt Johannes Kepler egy fantasztikus új találmány, a távcső segítségével tanulmányozta a Naprendszer bolygóinak mozgását és hatalmas munkával, szisztematikus és pontos adatgyűjtéssel három csodálatos törvénybe sűrítette megfigyeléseit:

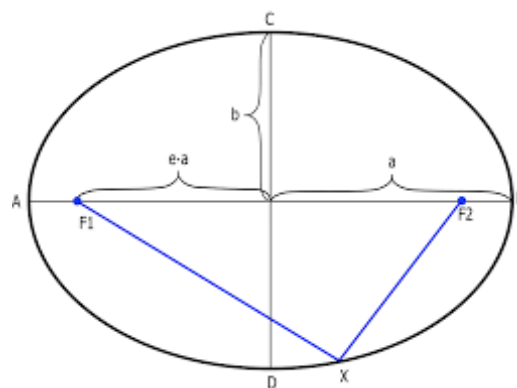
I. A bolygók pályája ellipszis, és annak egyik gyújtópontjában van a Nap.

II. A bolygók vezérsugara (a bolygót a Nappal összekötő szakasz) azonos idő alatt azonos területet sűrol.

III. A bolygók keringési időinek (T) négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint az ellipszispályák fél nagytengelyeinek (a) köbei, azaz:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{állandó}. \quad (\text{Pontosabban: } \frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{(2\pi)^2})$$

(A paraméterek értelmezését a (2.4) képletek adják.)



6. ábra: a bolygómozgás ellipszisének paraméterei

Kepler törvényeit a 2. fejezetben, illetve a Függelékben elméleti úton is tárgyaltuk, most tanulmányozzuk a zárt pályákon kialakuló mozgásokat számítógépes szimulációval, tehát „kísérletileg” igazolja a fenti Kepler-törvényeket!

4. feladat

Ebben a feladatban tanulmányozza az $\alpha = \frac{-Q \cdot q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}$ Coulomb-féle elektrosztatikus erőterben

létrejövő mozgások numerikus szimulációját a DS mappában található [Rutherford_sim.ds](#) probléma-fájl futtatásával. A használt koordináta-rendszer és a paraméterek azonosak a [grav_sim.ds](#) szimulációban megismertekkel, annyi eltéréssel, hogy a centrum erősségét ezúttal GM helyett az α paraméter adja meg, valamint, hogy nem egyetlen x_{ini} távolságú kezdőpontból indítunk tömegpontot, hanem $-D$ és $+D$ közötti y -intervallumban egyenletesen 200 részecskéből álló nyalábot a Rutherford-féle szórás-kísérletnek megfelelően.

Változtassa a paramétereket és figyelje a részecskék szórásának jellegét!

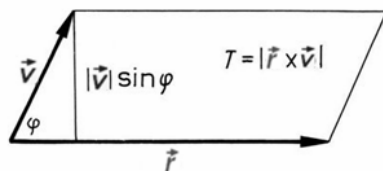
Függelék

F.1. Perdület (impulzusmomentum) centrális erőterben

Három dimenzióban a Descartes-féle $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ bázis (jobb-sodrású ortogonális egység) vektorokkal megadott $\vec{r}(x, y, z)$ és $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ vektorok *vektoriális szorzata* definíció szerint:

$$\vec{r} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = \vec{i}(y \cdot v_z - z \cdot v_y) + \vec{j}(z \cdot v_x - x \cdot v_z) + \vec{k}(x \cdot v_y - y \cdot v_x) \quad (\text{F.1.1})$$

A vektoriális szorzat geometriai értelmezése: a két vektor által meghatározott paralelogramma területe egyenlő a vektoriális szorzatuk nagyságával (7. ábra), azaz $T = |\vec{r} \times \vec{v}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \varphi$. A definícióból következően, de ez utóbbi értelmezésből jól láthatóan párhuzamos vektorok ($\sin \varphi = 0$) vektoriális szorzata nulla.



7. ábra: a vektoriális szorzat geometriai értelmezése

A vektoriális szorzatnak számos fontos felhasználása van, alábbiakban egy fizikai alkalmazást tárgyalunk. A *perdület*, más néven *impulzusmomentum* a klasszikus fizikában a test forgási mozgásállapotát jellemző vektormennyiség. Az m tömegű, \vec{v} pillanatnyi sebességű mozgó tömegpont adott pontra vonatkoztatott perdülete:

$$\vec{J} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}. \quad (\text{F.1.2.})$$

Vizsgáljuk meg a perdület időbeli változását, azaz idő szerinti deriváltját, amely a szorzatfüggvény differenciálási szabálya szerint:

$$\frac{d}{dt} \vec{J} = m \cdot \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = m \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right),$$

mivel definíció szerint $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$, így:

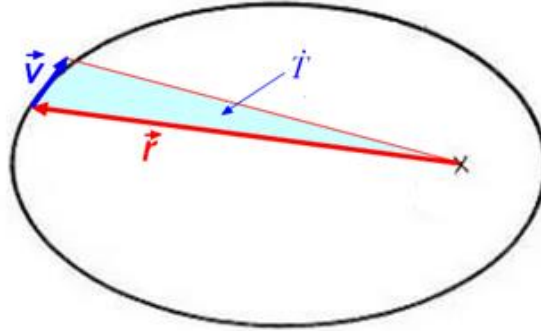
$$\frac{d}{dt} \vec{J} = m \cdot \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = m \cdot (\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}).$$

Mivel párhuzamos vektorok vektoriális szorzata nulla, így a fenti zárójelben az első tag nulla, hiszen \vec{v} nyilván párhuzamos önmagával, és centrális erőterben az erő párhuzamos az \vec{r} helyvektorral (lásd (2.1.b)), így az m tömegű test \vec{a} pillanatnyi gyorsulása is párhuzamos az \vec{r} helyvektorral, így:

$$\frac{d}{dt} \vec{J} = 0, \text{ azaz } \vec{J} = \text{állandó}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy *centrális erőterben mozgó tömegpont perdülete állandó!*

Nézzük ezek után a centrális erőterben mozgó tömegpont (pl. egy Nap körül keringő bolygó) által időegységenként sűrt \dot{T} területet (lásd a 8. ábrán). Ha az egyik vektor – a perdületben a \vec{v} sebesség – egységnyi idő alatti elmozdulást jelent, akkor a $\vec{r} \times \vec{v}$ vektoriális szorzat is az egységnyi időre vonatkoztatott területet jelent, így az \vec{r} helyvektor által időegységenként „sűrt” terület nagyságát a két vektor által kijelölt háromszög területe adja (lásd az ábrán), ami a két vektor által meghatározott paralelogramma területének fele, tehát $\dot{T} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$ és mértékegysége m^2/s .



8. ábra: centrális erőterben mozgó tömegpont helyvektora által egységnyi idő alatt sűrt terület

A fentebbi képletek szerint a sűrt terület felírható a perdülettel:

$$\dot{T} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2m} \vec{J}.$$

Mivel megmutattuk, hogy centrális erőterben a perdület állandó, így arra jutottunk, hogy a *centrális erőterben mozgó tömegpont által egységnyi idő alatt sűrt \dot{T} terület állandó értékű.* (Ez pedig nem más, mint **Kepler II. törvénye**: a bolygók vezérsugara – a bolygót a Nappal összekötő szakasz – azonos idő alatt azonos területet sűrol.)

Ha a pálya síkja a koordináta-rendszer x-y ($z = 0$) síkjában van, akkor $\vec{r}(x, y, 0)$, illetve $\vec{v}(v_x, v_y, 0)$, így a vektoriális szorzatuk:

$$\vec{r} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{pmatrix} = \vec{i}(y \cdot 0 - 0 \cdot v_y) + \vec{j}(0 \cdot v_x - x \cdot 0) + \vec{k}(x \cdot v_y - y \cdot v_x) = \vec{k}(x \cdot v_y - y \cdot v_x).$$

Tehát az egységnyi idő alatt sűrt terület nagysága:

$$\dot{T} = \frac{1}{2} |v_x \cdot y - v_y \cdot x|. \quad (\text{F.2.3.})$$

F.2. Tömegpont mozgása 1/r potenciálú centrális erőterben

Tekintsük tehát a nagy M tömegű test

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (\text{F.2.1.})$$

($\alpha > 0$ vonzó, $\alpha < 0$ taszító jellegű) centrális erőterében mozgó kis m tömegű testet ($M \gg m$).

Ekkor az erő:

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (\text{F.2.2.})$$

így Newton II. axiómája szerint az m tömegű test mozgásegyenlete:

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = m \cdot \vec{a},$$

amiből a gyorsulásvektor a pálya x-y síkjában:

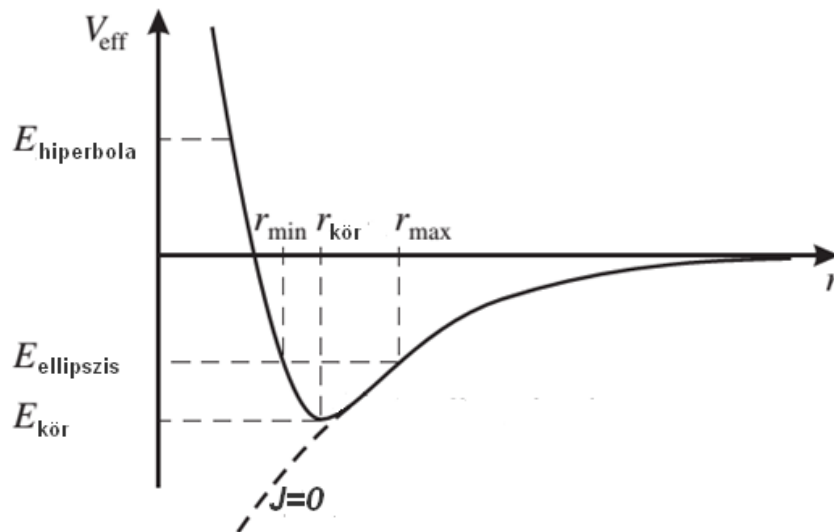
$$\vec{a} \left(a_x = -\frac{\alpha x}{mr^3}; a_y = -\frac{\alpha y}{mr^3} \right), \text{ ahol } r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{F.2.3.})$$

A részletes tárgyalás megtalálható pl. a [4] 14. § és 15. § szakaszában, itt csak a lényegi mozzanatokat tekintjük át.

Hasznos bevezetni a:

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{J^2}{2mr^2} \quad (\text{F.2.4.})$$

ún. *effektív potenciált* (lásd a 9. ábrán), ahol J az előző szakaszban megismert perdület.



9. ábra: az effektív potenciál távolság-függvénye

Az x-y Descartes-koordináta rendszerről áttérve az r-φ polárkoordináta-rendszerre és elvégezve a mozgásegyenletben levő elemi integrált azt kapjuk, hogy:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \varphi}, \quad (\text{F.2.5.a})$$

ahol:

$$p = \frac{J^2}{m\alpha} \text{ és } e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{m\alpha^2}}. \quad (\text{F.2.5.b})$$

Az (F.2.5.a) olyan *kúpszelet* egyenlete, amelynek a *fókusza* az origóban van, p a pálya *paramétere*, e pedig az *excentricitása*.

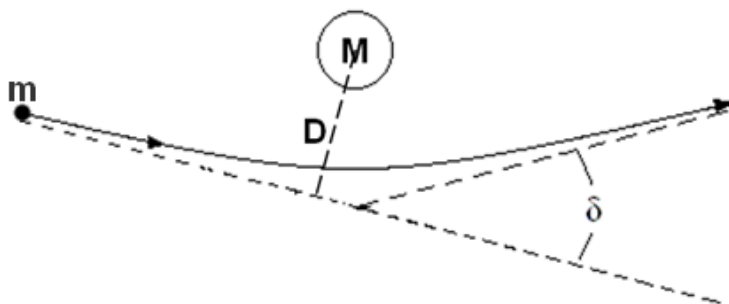
A mozgó m tömegű test $E = V_{\text{eff}}(r) + \frac{1}{2}mv^2$ teljes mechanikai energiájától függ, hogy a pálya zárt (véges), vagy nyitott (végtelen) lesz (lásd a fenti ábrán). Mivel az $\frac{1}{2}mv^2$ mozgási energia triviálisan nemnegatív, így csak olyan r tartományon történhet mozgás, ahol $E \geq V_{\text{eff}}(r)$ teljesül.

Tekintsük először az $E < 0$ esetet,

- ekkor véges (zárt) ellipszis pályán mozog a test (**Kepler I. törvénye**),
- az ellipszis nagy-, illetve kistengelye: $a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}$, $b = a \cdot \sqrt{1-e^2}$, (F.2.6.a),
- a keringés periódusideje: $T = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$ (F.2.6.b).
- (F.2.6.a) és (F.2.6.b) alapján: $\frac{a^3}{T^2} = \frac{\alpha}{(2\pi)^2 m} = \text{állandó}$ (**Kepler III. törvénye**) (F.2.6.c)
- ($e = 0$, azaz $E = E_{\text{kör}} = -\frac{m\alpha^2}{2J^2}$ energiaérték esetén $a = b = p$, tehát körpálya lesz).
- (Emlékeztető: **Kepler II. törvényét** az F.1. Függelékben kaptuk meg!)

$E > 0$ esetén végtelen (nyitott) hiperbola pályán mozog a test ($E = 0$ esetén parabola).

Nézzük kicsit részletesebben azon $E > 0$ esetet, amikor egy v_0 sebességű (ez az „eredeti” sebesség, mikor még nagyon távol van az erőcentrumtól), m tömegű test, amely az M tömegű ($M \gg m$) objektumtól D távolságra elhaladó egyenesen mozogna (ha nem hatna gravitáció). Az M tömeg gravitációs erőterében azonban hiperbola pályán mozogva δ szögű irányváltással térül el. A hiperbolának két, egymást nem metsző és nem érintő ága van, a test pályája a vonzócentrumhoz közelebbi hiperbolaág. A szimmetriatengelytől minden határon túl növekvő távolságra a hiperbolaág két vége egy-egy egyeneshez tart, amelyeket aszimptotának hívnak, a δ irányváltás a két aszimptota által bezárt szög. Próbáljuk meghatározni a δ szöget!



10. ábra: $1/r$ jellegű vonzó centrális erőterben hiperbola pályán mozgó test eltérülése (elhajása)

Tegyük megfontolásokat a szögeltérülés függésére, először egyszerűen csak a mértékegységek alapján (dimenziális megfontolások), majd klasszikus fizikai leírásban, végül a relativitáselmélet szerint.

a. Dimenziális megfontolás:

Vegyük számba, hogy milyen fizikai tényezők függvénye lehet a δ szögeltérülés:

- a centrális erőter forrásaként az objektum M tömege (SI mértékegysége kg),
- a G gravitációs (Cavendish-) állandó (SI mértékegysége $\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$),
- a v_0 sebesség (SI mértékegysége $\frac{m}{s}$),
- a D távolság (SI mértékegysége m).

Keverjük ki a fenti négy mennyiség mértékegységeiből a dimenziótlan (radián) δ síkszög mértékegységét, igen gyorsan arra jutunk, hogy:

$$\delta \propto \frac{G \cdot M}{D \cdot v_0^2} \quad (F.2.7.)$$

Természetesen a fenti kifejezés reciproka is megfelelne dimenziálisan, de ellentmondana alapvető fizikai elvárásoknak, pl. miszerint a centrum erősségével (az M tömeg és a G gravitációs állandó szorzatával) egyenes arányos, a D távolsággal és a v_0 sebességgel fordított arányos szögeltérülés függés felel meg fizikai képünknek.

b. Klasszikus fizika:

A (2.2.a) potenciálú centrális erőterben ($\alpha > 0$ vonzó, $\alpha < 0$ taszító jelleg) egy m tömegű (a centrumtól nagy távolságban) v_0 sebességű tömegpont, amely mozgás-egyenesének a centrumtól való távolsága D , δ szögű irányváltozására klasszikus fizikai számítással kapjuk, hogy (az itt nem részletezett levezetést lásd pl. [4] I. 14., 15., 18. és 19. §, a (19,1) képlet szerint):

$$\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} = \frac{m \cdot v_0^2}{\left(\alpha/D\right)}$$

A kotangens függvény közelítő polinomja (Taylor-sora első rendig) $\operatorname{ctg} x \cong \frac{1}{x} - \dots$, így:

$$\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cong \frac{1}{\frac{\delta}{2}} = \frac{2}{\delta} = \frac{m \cdot v_0^2}{\left(\alpha/D\right)}$$

Rendezve és felhasználva, hogy gravitációs potenciálnál $\alpha = G \cdot m \cdot M$ kapjuk, hogy:

$$\delta = 2 \frac{G \cdot M}{D \cdot v_0^2} \quad (F.2.8.)$$

Tehát a klasszikus (Newtoni) fizika szerint a szögeltérés valóban a dimenzióanalízissel kapott kifejezéssel arányos, pontosan annak kétszerese!

c. Relativitáselmélet:

A *speciális relativitáselmélet* két alaptételre épül. Az egyik a relativitás elve, amely szerint a természeti jelenségek azonos módon játszódnak le bármely inercia-rendszerből figyelve őket, s az őket leíró természettörvények alakja bármely két inercia-rendszerben azonos. A másik alaptétel azt a meglepő állítást fogalmazza meg, hogy a vákuumbeli fénysebesség minden megfigyelő számára azonos $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ nagyságú. Adott fizikai mennyiség értéke az egyik vagy másik vonatkoztatási rendszerből mérve lehet különböző, de ezek egymásból a vonatkoztatási rendszerek relatív mozgását jellemző ún. *Lorentz-transzformációval* egyértelműen meghatározhatók, nincs elkülönült abszolút tér és idő, a Lorentz-transzformáció lényegében a 4 dimenziós téridőben való geometriai transzformáció.

Az általános relativitáselmélet összeolvasztja a speciális relativitáselméletet és a Newton-féle univerzális gravitációs törvényt, a gravitációt a téridő geometriai tulajdonságaként írja le. Az általános relativitáselmélet az *ekvivalencia-elvre* épül, amely szerint a lokális gravitációs hatás megfelel a gravitációmentes térbeli gyorsuló vonatkoztatási rendszerben észlelt gyorsulás hatásának, és (ugyancsak lokálisan) a kettő nem különböztethető meg. Ez nem a priori igazság, hanem a tehetetlen és gravitáló tömeg azonosságát igazoló megfigyelésekre (pl. Eötvös-inga) alapozott kijelentés.

Itt nem részletezett számítások szerint (lásd pl. [5][6]) azt kapjuk, hogy az M tömegű testtől r távolságra levő lokális (nem-inercia) rendszerben a fénysebesség:

$$c(r) = c_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{2GM}{c_0^2 r}}{1 + \frac{2GM}{c_0^2 r}}} . \quad (\text{F.2.9.})$$

Innen kezdve már teljesen klasszikus fizikai megfontolásokkal haladhatunk tovább. Használjuk az optikából jól ismert $n = \frac{c_0}{c}$ (abszolút) törésmutatót olyan közegben, amelyben a fény terjedési sebessége c ($c \leq c_0$), amely most (F.2.9.) alapján:

$$n(r) = \frac{c_0}{c(r)} = \sqrt{\frac{1 + \frac{2GM}{c_0^2 r}}{1 - \frac{2GM}{c_0^2 r}}} \cong 1 + \frac{2GM}{c_0^2 r} = 1 + \frac{b}{r} , \text{ ahol } b = \frac{2GM}{c_0^2} , \quad (\text{F.2.10.})$$

ahol közelítésként a Taylor-sor első rendjét vettük. (F.2.10.) lényegében inhomogén optikai közegben haladó fénysugarat jelent. Ilyen jellegű probléma széleskörűen tárgyalt [7] a klasszikus fénytanban (pl. a délibáb jelenségénél), a kapott szögeltérülés:

$$\delta = \frac{2b}{D} ,$$

amely jelen esetben (F.2.10.) felhasználásával:

$$\delta = 4 \frac{G \cdot M}{D \cdot v_0^2} \quad (\text{F.2.11.}).$$

Ez pedig nem azonos a tisztán klasszikus fizikai levezetéssel kapott (F.2.8.) formulával: *a relativisztikus eredmény éppen kétszerese a klasszikus fizikából kapott szögeltérésnek.*

F.3. Segítség a kitűzött feladatokhoz

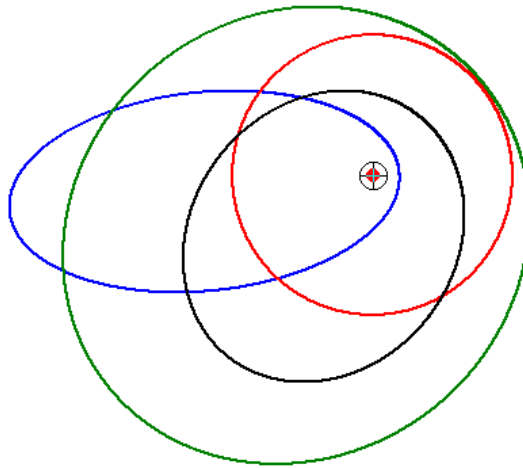
Amennyiben úgy érzi, hogy nem boldogul egyedül a kitűzött feladatokkal, akkor az alábbiakban adunk némi segítséget.

1. feladat

Hiperbola pálya ("elhajlás", "üstökös") jelenik meg például a $GM = 20$, $u_{ini} = 4$, $x_{ini} = -20$, $D = 3$ paraméterértékeknél.

Ellipszis pálya ("bolygó") jelenik meg például az alábbi paraméterértékeknél (pályák a 11. ábrán):

- $GM = 20$, $u_{ini} = 2$, $x_{ini} = -5$, $D = 3$ (kék színű, lapos),
- $GM = 20$, $u_{ini} = 3$, $x_{ini} = -1$, $D = 3$ (fekete, kevésbé lapos),
- $GM = 20$, $u_{ini} = 2$, $x_{ini} = -2$, $D = 6$ (zöld színű, majdnem kör),
- $GM = 20$, $u_{ini} = 2$, $x_{ini} = 0$, $D = 5$ (piros, kör),



11. ábra: ellipszis pályák a DS szimulációban

Ha GM paraméternek negatív értéket választunk, tehát „taszító” centrális erőterünk van, akkor láthatjuk, hogy csak hiperbola pályák jelenhetnek meg.

2. feladat

A GM , D és u_{ini} paraméterek közül mindig csak egyet szisztematikusan változtatva feljegyezzük δ eltérülési szög változását (az x_{ini} paraméter nem releváns, rögzítjük pl. $x_{ini} = -20$ értéken).

(a) tömeg-függés vizsgálata: ($GM = \dots$, $u_{ini} = 4$, $D = 3$)

GM	δ szög [rad]
------	---------------------

1	0,0416
---	--------

2	0,0833
---	--------

3	0,1253
---	--------

4	0,1674
---	--------

5	0,2097
---	--------

A fenti adatokból megállapítható, hogy a δ eltérülési szög egyenesen arányos a GM paraméterrel.

(b) távolság-függés vizsgálata: ($GM = 2$, $u_{ini} = 4$, $D = \dots$)

D	δ szög [rad]
1	0,250104
2	0,125307
3	0,0833402
4	0,0622552

A fenti adatokból megállapítható, hogy a δ eltérülési szög fordítottan arányos a D paraméterrel.

(c) kezdősebesség-függés vizsgálata: ($GM=1$, $u_{ini}=\dots$, $D=3$)

u_{ini}	δ szög [rad]
1	0,671469
2	0,167432
3	0,0740379
4	0,0415587

A fenti adatokból megállapítható, hogy a δ eltérülési szög fordítottan arányos a u_{ini} paraméter négyzetével.

A fenti három megállapítást egyetlen összefüggésbe sűrítve azt kapjuk, hogy

$$\delta \propto \frac{GM}{D \cdot u_{ini}^2} ,$$

egészen pontosan pedig:

$$\delta = 2 \frac{GM}{D \cdot u_{ini}^2}$$

adódik, ami azonos a klasszikus fizikai levezetéssel nyert (2.7) képlettel, tehát „kísérletileg” empirikusan igazoltuk azt.

3. feladat

Az **I.** törvény igazáról a szimuláció futtatásával vizuálisan könnyen meggyőződhetünk, hiszen ellipszis alakú pályagörbék jelennek meg. *A DS praktikus szolgáltatása, hogy a grafikus ablakban egérrel mozgatható hajszálkereszt mindenkor pozíciójának koordinátáit a képernyő alján levő státuszsorban láthatjuk.* Az ellipszis egyik fókuszpontja az origó, hiszen oda tettük az erőtercentrumot.

Hogyan keresné meg az ellipszis másik fókuszpontját?

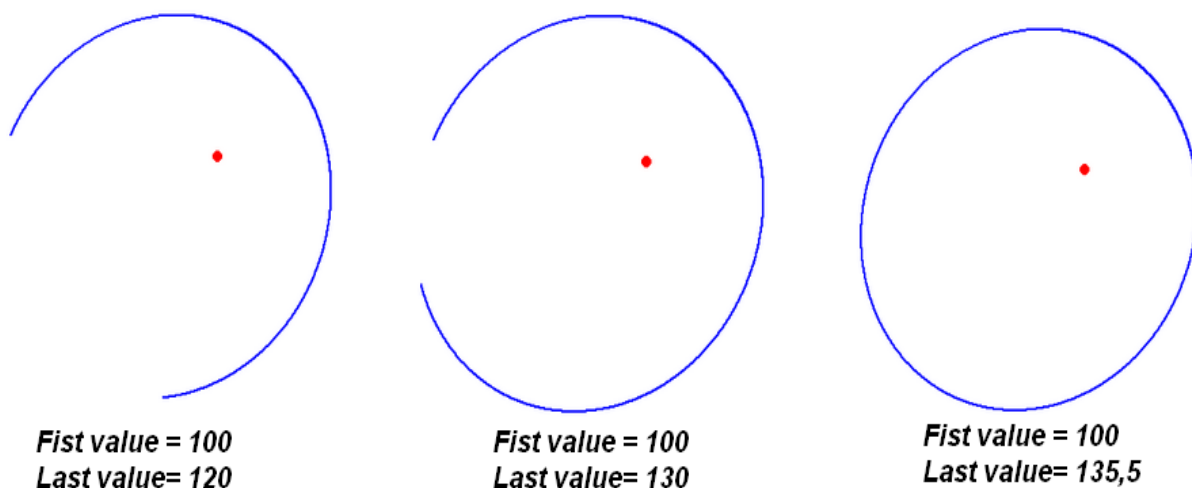
Ha megvan a két fókuszpont, akkor az ellipsziszjelleg igazolására használhatjuk az ellipszis definícióját, miszerint az ellipszis a sík azon pontjainak mértani helye, amelyeknek a két fókuszponttól mért távolságösszege állandó.

A **II.** törvény igazolási lehetőségét a vektoriális szorzat fentebb leírt értelmezésének végén kaptuk, miszerint tehát az időegységenként sűrűlt terület nagysága $\dot{T} = \frac{1}{2} |u \cdot y - v \cdot x|$, amely értékét a szöveges adatainkban időlépésenként kiszámoltatjuk és kiíratjuk. A futtatás során láthatjuk, hogy a kiírt érték időben állandó, tehát „kísérletileg” igazoltuk a törvényt.

A **III.** törvény igazolásához futtassuk a szimulációt rögzített GM paraméterű erőterénél különböző x_{kezd} , D és u_{kezd} kezdőfeltételekkel, azaz rajzoljunk ellipszispályákat adott erőterben (adott „Nap” esetén különböző „bolygók” pályáit). Minden beállítás esetén próbáljuk empirikusan megállapítani a kapott ellipszis a fél nagytengelyének és a keringés T periódusidejének értékét.

Az a értékének megbecsléséhez használjuk a hajszálkeresztes koordináta-kijelzést úgy, hogy olvassuk le az ellipszis két legtávolabbi pontjának koordinátáit, azokból Pitagorasz-tétellel számítsuk ki a távolságukat és az a értéke ezen távolság fele.

A T periódusidő becsléséhez használjuk az *Edit* menü *Range...* almenüjének párbeszédablakában a *First value* és *Last value* beállításokat úgy, hogy pl. állítsuk a *First value* értékét tetszőlegesre, majd változtatgassuk a *Last value* értéket addig, hogy éppen záruljon a kirajzolt görbe (12. ábra), ekkor a kezdő és végérték különbsége a keringési idő.



12. ábra: a T keringési periódusidő „kísérleti” meghatározása a szimulációban ($T = 35,5$)

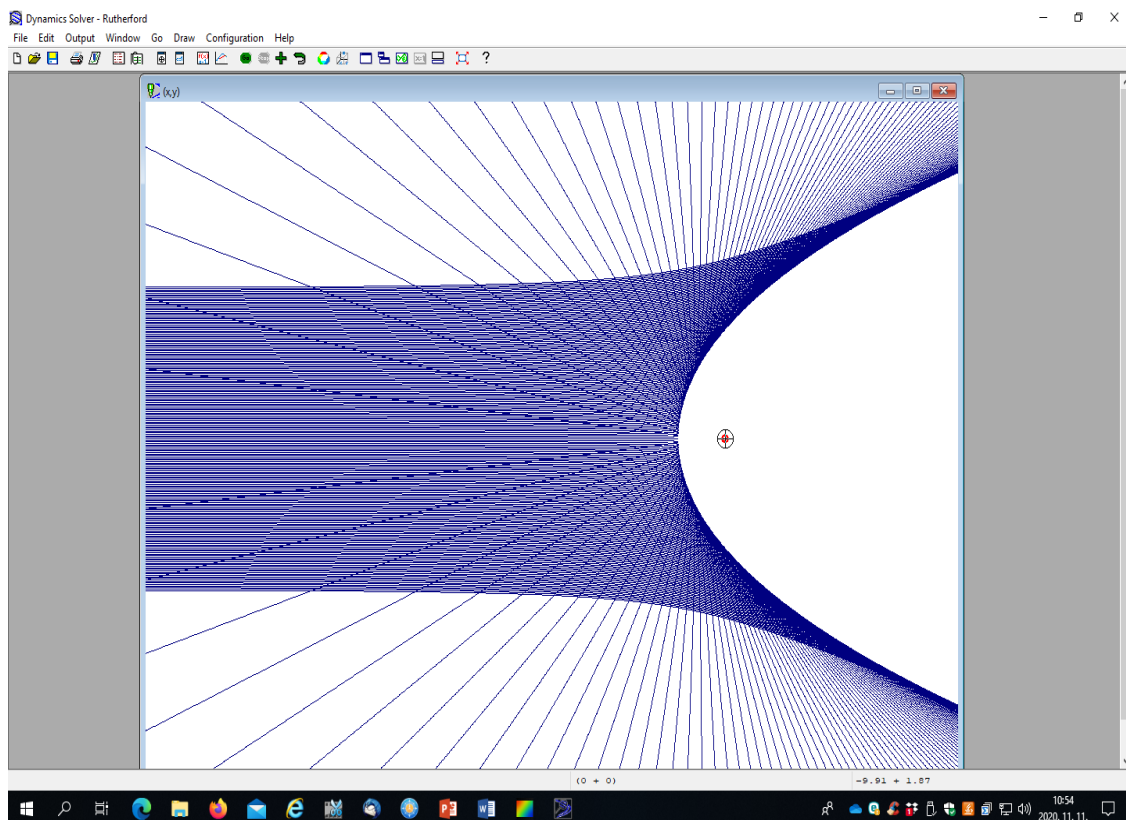
A „mért” a és T értékek alapján jól láthatóan teljesül, hogy $\frac{a^3}{T^2} = \text{állandó}$, illetve az is belátható,

hogy pontosabban $\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{(2\pi)^2} = \frac{GM}{(2\pi)^2}$ is teljesül.

Tehát a Kepler-törvényeket „kísérletileg” empirikusan igazoltuk.

4. feladat

A [Rutherford_sim.ds](#) probléma-fájl futtatásával kapott szimulációk tipikus grafikus megjelenítése az alábbi ábrán látható.



13. ábra: a DS szimulációval kapott szóráskép

A kapott szóráskép megfelel az irodalomban található képeknek. A paraméterek változtatásával jól láthatóan változik a szögeloszlás, azaz a pontos képből vissza lehet következtetni a szórócentrum tulajdonságaira, ami a Rutherford-féle mérés lényegi (Nobel-díjas)eredménye.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programja támogatta.

Irodalomjegyzék

- [1] <http://tp.lc.ehu.es/jma/ds/ds.html> (© J. M. Aguirregabiria, Universidad del País Vasco, Leioa, Vizcaya, Spain)
- [2] http://csodafizika.hu/DS_segedlet.pdf
- [3] http://csodafizika.hu/DS_brief_tutorial.pdf
- [4] L. D. Landau, E. M. Lifsic: Elméleti fizika I. – Mechanika, Tankönyvkiadó Vállalat, 1988.
- [5] <http://redshift.vif.com/JournalFiles/V15NO3PDF/V15N3BU2.pdf>
- [6] D. Edwards: Gravitational Bending of Light
(home.fnal.gov/~syphers/Education/Notes/lightbend.pdf)
- [7] http://cserti.web.elte.hu/okt/O_SpR-6_Eikonal17.pdf