

Juhász András, Tasnádi Péter,
Tasnádi Tamás, Illy Judit, Gócz Éva

A FIZIKA TANÍTÁSA

A KÖZÉPISKOLÁBAN

III.

FÉNYTAN

MODERN FIZIKA

ELTE FIZIKA DOKTORI ISKOLA

**Juhász András, Tasnádi Péter,
Tasnádi Tamás, Illy Judit, Gócz Éva**

**A FIZIKA TANÍTÁSA
A KÖZÉPISKOLÁBAN
III.**

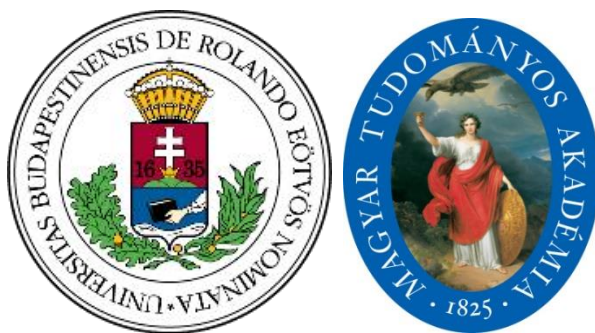
FÉNYTAN

MODERN FIZIKA

ELTE FIZIKA DOKTORI ISKOLA BUDAPEST

2021

A kiadvány elkészítését támogatta:
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
TANTÁRGYPEDAGÓGIAI KUTATÁSI PROGRAMJA



Szerkesztők:

Juhász András, Tasnádi Péter, Gócz Éva

ISBN: 978-963-489-306-6

© Juhász András, Tasnádi Péter, Tasnádi Tamás, Illy Judit, Gócz Éva

Kiadja az ELTE Fizika Doktori Iskola
Felelős Kiadó: Dr. Gubicza Jenő
Budapest 2021

Nyomtatta és kötötte: Kucsák Könyvkötöde és Nyomda, Vác
Felelős vezető: Kucsák Gábor

„Az igazi tanár ... nem tanít a szó régi értelmében, hanem alkot. A saját mindig friss, mindig korszerű tudását alkotja, szüli újjá tanítványai lelkében. Így lesz művész, alkotó művész.”

/Öveges József/

ELŐSZÓ

Igen, a tanítás művészet, igazi alkotói elkötelezettséggel járó hivatás. Alkotni azonban csak a mesterség apró fogásainak, trükkjeinek ismeretében lehet. A festőművésznak ismernie kell az ecsetkezelés technikáit, a zongoraművésznak olvasni, és gyors kézzel, bravúrosan követni kell a kottát. Az alkotáshoz a tanárnak a biztos szakmai ismeretek mellett, alkalmaznia kell az egyszerűsítések trükkjeit, tudnia kell a kísérletezés buktatóiról, és a különböző diákcsoportokhoz illeszkedő módszerek választásának fogásairól.

„A fizika tanítása a középiskolában” c. három kötetes könyv ennek jegyében, a tanári munkához szükséges „tanítástechnikai háttér, és gyakorlati feladatok segítése céljából dolgozza fel a fizika szakmódszertanát. Az összefoglaló munka az egyetemi fizikatanár képzést, a tanártovábbképzést, az ELTE Fizika Doktori Iskola „Fizika tanítása” PhD programját és az iskolák szaktanárainak hétköznapi munkáját kívánja segíteni. A kiadvány régi hiányt pótol.

Több mint száz éve folyik középiskolai fizikatanárok képzése az ELTE Természettudományi Karán, illetve jogelődjeiben, de eddig nem készült olyan írott szakanyag, ami a fizikát a középiskolai tanítás szempontjából tárgyalná, és annak ára készítené fel a hallgatókat.

A fizika szakmódszertan feladatát a középiskolai fizikatanítás céljai jelölik ki. A középiskolában szeretnénk diákjainkkal megértetni és megéreztetni a fizika szerepét a természet megismerésében, megmutatni a fizika törvényeinek objektivitását, és alkalmazásainak gyakorlati jelentőségét. Mindemellett a középiskola fontos célja, hogy alapozó tárgyi ismeretekkel és alapvető készségek kialakításával felkészítse az érdeklődő diákokat a szakirányú továbbtanulásra.

A könyv döntő részében a fizika tematikus fejezeteinek tartalmát tekintjük át a középiskolai tanítás nézőpontjából. Időálló és a legkülönbözőbb tantervi szabályozás esetén is hatékonyan használható szakmai anyagot kívántunk készíteni. Alapvető tanári feladatnak tekintjük, hogy a fizika tudományos eredményei a tanulók szintjén, a középiskola matematikai eszközeivel, az életkori sajátosságoknak megfelelően jelenjenek meg. Munkánk tananyagot tárgyaló részében döntően a modern szakmódszertan egyik alapvető módszerének a MER-nek (Modell of Education Reconstruction) eredményeire támaszkodtunk. A MER, (magyar fordításban „Újraalkotás a tanítás számára”) lényege, hogy a tanítási anyagok a tudományos ismeretekből indulva egyszerűsített fogalomrendszerben, a tanulók előismereteihez illesztett és kifejezetten tanítási célra kidolgozott modellekre támaszkodva kerülnek kidolgozásra. A tudományos elméleteknek ez az egyszerűsített formában történő újraalkotása, sok-sok kompromisszummal

jár, és gyakran vezet tévképzetekre. Kiemelten foglalkozunk a fizika fogalmilag nehéz, gyakran félreértett, illetve tévképzetekkel terhelt anyagrészeivel, de hangsúlyt kapnak a fizika tanításának korszerű módszerei is. Törekszünk arra, hogy a leendő tanárok világosan lássák azokat a pontokat, amelyek a tanulás során gyakran okoznak problémákat a diákoknak. Valljuk, hogy a tanításban nincs egyedül üdvözítő út, kijelölni csak a határköveket lehet, a részletek sokféleképpen valósíthatók meg. Ezért a kritikus témák tárgyalásakor többféle alternatív megoldási lehetőséget is kínálunk.

WWW

[Fizika tanítása a középiskolában I.](#)



WWW

[Fizika tanítása a középiskolában II.](#)



A könyv első és második kötete a klasszikus fizikával foglalkozik. Az első a mechanika és a hőtan témakörét és a fizika tanítás fontosabb gyakorlati kérdéseit tárgyalja. A második a mechanikai rezgések és hullámok, valamint az elektromágnesség tanítását öleli fel.

A jelen, harmadik kötet a klasszikus fénytan tárgyalásától indulva vezet el a modern fizika megalkotását eredményező, klasszikusan megoldhatatlannak bizonyuló optikai problémákhoz, majd folytatódik a modern fizikai anyagszerkezet fejezeteivel (atomfizika, kvantumfizika alapjai, magfizika, kondenzált anyagok szerkezete) majd a relativitáselmélet lehetséges középiskolai tárgyalásával zárul.

WWW

[Fizika tanítása a középiskolában III.](#)



Bár a diákokat érdeklik és motiválják a modern fizika eredményei, a témakör érdemi tanítása mégis sok nehézséggel járhat a tanárok számára, hiszen a modern fizika fogalmai és módszerei a középiskolai szintet általában messze meghaladó matematikai leírásokon alapulnak, és érzékszervi tapasztalatokra épülő ösztönös szemléletünk alapján gyakran képtelenségnek tűnnek. Emiatt a tanításban az egzakt matematikai leírás helyett a fogalmi megértést kell előtérbe helyeznünk. A hétköznapi szemlélettől gyökeresen eltérő fogalmakat azonban többnyire csak részizgazságokkal, metaforákkal és analógiákkal támaszthatjuk alá. A tanár számára különösen fontos, hogy megtalálja a finom egyensúlyt a megértést segítő, de óhatatlanul hamisító egyszerűsítések és az absztrakciók miatt könnyen érthetlenné váló és elkedvetlenítő tudományosan igaz tárgyalás határmezsgyéjén. Úgy tárgyalja a fontos, de kritikus alapfogalmakat, (hullám- részecske kettősség, határozatlansági reláció stb.), hogy a diákok a klasszikus fizikában tapasztalati úton igazolt törvényekre és a tanár személyes hitelességére hagyatkozva el tudják fogadni a modern fizika eredményeit. Az így letett „puzzle-elemek” koherens illeszkedésből fokozatosan kirajzolódó kép már önmagát igazolva adja tanítványaink modern fizikai szemléletét.

A fizika témaköreinek feldolgozásakor mindenütt hangsúlyosan kezeltük a környezetfizikai, technikai és a társadalmi fontosságú kérdéseket, megmutatva a fizika alkalmazási lehetőségeit, és rámutatva a fizika szerepére az általános természettudományos szemlélet és világkép kialakításában.

Természetesen a jegyzetben leírtak szakembereknek – fizikatanároknak, tanárjelölteknek – szólnak, és általában nem alkalmasak arra, hogy változatlan formában tanítsuk a középiskolai diákoknak. A jegyzet nem használható középiskolai tankönyvként, és a fizika egyetemi szaktankönyveit sem helyettesíti.

A középiskolai fizika kritikus tartalmi vonatkozásainak áttekintése mellett igyekszünk sok gyakorlati példát, kísérletet, a diákokat motiváló érdekességet bemutatni. Meggyőződésünk szerint a fizika fogalmait megalapozó klasszikus fizikát éppúgy lehet érdekesen, akár a legmodernebb technika alkalmazásával is tanítani, mint a modern fizika ismereteit. Szükséges, hogy a tanár megtalálja az egészséges egyensúlyt a fizikatanítás sokszorosan kipróbált módszerei és a legmodernebbnek tekinthető, újszerű (s néha éppen emiatt gyorsan avuló) megoldások között.

A könyv nagy terjedelme ellenére, különösen a modern fizikai rész vonatkozásában, sok tekintetben hiányos, a jelenleg is nagy erővel kutatott területek közül jónéhány hiányzik (kvantum számítógépek, gravitációs hullámok, kaotikus jelenségek...stb.) Ebben a tekintetben segítséget jelenthet az ELTE Fizikatanári Doktori alprogramjának honlapján található „közkinccs” rovat, ahol a modern fizika számos kérdésének módszertani igényességű feldolgozása megtalálható.

A jegyzet írása közben ismertük fel, hogy az elektronikus forma különleges lehetőséget kínál arra, hogy a könyvszerűen folytonos vonalvezetést leágazásokkal, kitérőkkel gazdagítsuk. Ez azt jelenti, hogy a tematikus tartalom kifejtése során nagyon gyakran talál az olvasó opcionális kiegészítéseket a jegyzetben. Ezek mind tartalmukat, mind műfajukat és formájukat tekintve igen különbözőek. Van köztük matematikai levezetés, az aktuális témához kapcsolódó feladat, érettségi mérés, diákoknak ajánlható fakultatív otthoni kísérletleírás, a fizika kultúrtörténetéhez

kapcsolódó érdekesség, technikai alkalmazás stb.) A kiegészítő anyagok egyetlen kattintásra megjelennek, illetve eltűnnek. Többségük a szerzők munkája, de felhasználtunk interneten keresztül, külső szervereken felkínált hasznos tartalmakat is. (Így érhetők el például az aktuális tantervi szabályozás dokumentumai, vagy szakmai honlapok cikkei). Mindezeket figyelembe véve mondhatjuk, hogy az elektronikus jegyzet a nyomtatott szakkönyvekhez viszonyítva gazdagabb és sokrétűbben felhasználható tartalmat közvetít.

Könyvünk mindhárom terjedelmes kötete több éven keresztül készült, és kötetenként külön-külön jelent meg. elektronikus jegyzet formájában. Az első kötet elkészítését és megjelentetését 2015-ben a TÁMOP 4.1.2.B.2-13/1-2013-0007 program támogatta. A második és harmadik kötet elkészítését az MTA Tantárgypedagógiai Kutatási Programja tette lehetővé. Ez utóbbi biztosította a könyv korlátozott példányszámú nyomdai megjelentetését is (a könyv nem kerül kereskedelmi forgalomba).

Mindhárom kötet elektronikus változata az ELTE Fizikatanári Doktori Programjának honlapjának „Közkinccs” oldaláról tanári felhasználásra (terjesztésre nem!) szabadon letölthető, hasonló más oktatási kiadványokkal és elektronikus tananyagokkal együtt:
<http://fiztan.phd.elte.hu/kozkinccs/kiadvanyok/index.html>



Budapest, 2021 augusztusában

A szerzők

TARTALOMJEGYZÉK

OPTIKA, ÚT A MODERN FIZIKÁHOZ

Bevezetés.....	16
1. A geometriai optika tanítása az általános és a középiskolában	23
1.1. Köznapi szóhasználat és optikai fogalmak.....	23
1.2. A fény egyenesvonalú terjedése	25
1.2.1. Fénysugár, fénynyaláb.....	25
1.2.2. Fény és árnyék.....	27
1.2.3. A fény terjedési sebességének mérése.....	27
1.2.4. Fényterjedés két közeg határán	28
1.3. A fény visszaverődése	29
1.4. A fény törése	31
1.4.1. Többszörös törés, teljes visszaverődés, diszperzió.....	33
1.4.2. Folytonos törés	36
1.4.3. Törés görbült felületen	37
1.5. Optikai leképezés	37
1.5.1. Fogalmak, definíciók.....	38
1.5.2. Leképezés az általános- és a középiskolában	39
1.5.3. A síktükör képalkotása	41
1.6. Gömbtükrök képalkotása.....	44
1.7. Leképezés sík közeghatáron történő fénytörés következtében.....	45
1.8. Lencsék képalkotása.....	46
1.8.1. A fókusz fogalma	46
1.8.2. A leképezési törvény	46
1.8.3. A gyűjtő- és szórólencse képalkotása.....	47
1.9. A geometriai optika beépülése a fizika egészébe	51
1.10. A geometriai optika alkalmazása.....	52
2. Hullámoptika	55
Bevezetés.....	55
2.1. A fényhullám középiskolai bevezetése és a hullám leírás elhelyezése a tananyagban	56
2.2. Miért hullám a fény? (bizonyítékok, analógiák)	57
2.3. A fényhullám matematikai leírása.....	59
2.3.1. Az interferencia és elhajlásjelenségek leírásához szükséges minimum	60
2.3.2. A fényhullámot leíró függvény	62
2.4. Fényinterferencia kísérletek értelmezése.....	64
2.4.1. Young történelmi kísérlete a fény hullámtermészetének igazolására.....	64
2.4.2. Vékonyréteg interferencia	67
2.5. Fényelhajlás (diffrakció)	70
2.5.1. Az elhajlási jelenségek értelmezése	71
2.5.2. Elhajlás résen.....	72
2.5.3. Elhajlás optikai rácson: diffrakció.....	74

2.5.4. Rácsparaméter meghatározása.....	76
2.5.5. Diffrakciós szerkezetkutatás	76
2.5.6. Elhajlás kicsiny akadályokon	77
2.6. Fénypolarizáció	78
3. Fény és anyag kölcsönhatása.....	81
3.1. Fényszórás	83
4. Fényerősség, fényforrások.....	83
5. A fény fotonelmélete	84
5.1. Fényelektromos jelenség	84
Fénytan mellékletei	
F1. Egyszerű kísérletek a lézerfény tulajdonságainak bemutatására.....	87
F2. Árnyékjelenségek megfigyelése, értelmezése.....	90
F3. A lyuk-kamera (Camera obscura) készítése és egyszerű kísérletek.....	93
<i>Készítsünk sötétkamrát a Nap megfigyeléséhez.....</i>	93
F4. „High-tech” tantermi demonstrációs mérés a fénysebesség meghatározására.....	97
F5. Aranyhíd kialakulása hullámzó vízfelszínen.....	99
F6. Műanyag-levegő határfelület törésmutatójának meghatározása Hartl-koronggal.....	101
F7. Síklapokkal határolt törőközegek: fénytörés plánpárhuzamos lemezen és prizmán	104
F8. Optikai szálak és alkalmazásuk.....	108
F9. Newton-prizma kísérletei	109
F10. Fénytörés a légkörben	112
F11. A szivárvány.....	114
F12. A gömbtükrök képalkotásának mennyiségi leírása	121
F13. A lencsetörvény levezetése	127
F14. Lencsehibák.....	138
F15. A Fermat-elv	144
F16. Az emberi szem.....	158
F17. A látószőgnagyítás, az egyszerű nagyító (a lupe)	165
F18. A mikroszkóp.....	168
F19. Távcsövek	172
F20. A fényképezőgép.....	175
F21. Tanulságos feladatok a geometriai optika tárgyköréből.....	179
F22. Emelt szintű érettségi mérések geometriai optikából.....	183
F23. Gömb- és síkhullámok	194
F24. A hullámcsomag és a csoportsebesség.....	196
F25. A koherenciafogalom	198
F26. Michelson–Morley-kísérlet	208
F27. Fényinterferencia hullámfront osztással (biprizma, Fresnel-féle kettős tükör, Lloyd-tükör)..	210
F28. Az interferencia energiaviszonyai	216
F29. Newton-gyűrűk	224
F30. A Huygens-elv	226
F31. A Huygens–Fresnel-elv.....	232
F32. A rács elhajlási kép meghatározása fázorokkal.....	240
F33. A fényelhajlás jelensége optikai rácson, a fény hullámhosszának meghatározása	245

F34. CD lemez (mint reflexiós rács) ráctávolságának meghatározása	248
F35. Madártoll periódikus szerkezetének meghatározása kétféle módszerrel.....	250
F36. Diffrakció, mint a szerkezetkutatás egyik alapvető módszere	252
F37. A Poisson-folt értelmezése a Fresnel-féle zóna módszerrel.....	254
F38. Képkalkotás és hullámoptika	257
F39. Polarizáció visszaverődéskor: a Brewster-törvény.....	266
F40. Optikai kettőtörés	268
AZ ANYAG ATOMOS SZERKEZETE	
Bevezetés.....	277
6. Az anyag atomos szerkezetére utaló alapvető megfigyelések, felfedezések	287
6.1. Az anyag atomos szerkezetével kapcsolatos kémiai ismeretek	287
6.1.1. A kémiai reakciók súlyviszony törvényei	288
6.1.2. Súlyviszonytörvények és a gáztörvények összekapcsolása: Avogadro-törvénye	289
6.1.3. Az atomi részecskék mozgására utaló kísérleti eredmények.....	289
6.2. Az elektromosság „atomos” szerkezete – az elemi elektromos töltés.....	291
6.2.1. Az elemi töltés meghatározása Millikan módszerével	292
6.2.2. Az elektron, mint töltött elemi részecske	293
7. Az első atommodellek	294
7.1. Thomson atommodellje	295
7.2. Az atommag felfedezése – a Rutherford-féle atommodell	296
8. A modern kvantumfizikát előkészítő, a klasszikus fizikával nem magyarázható kísérleti tapasztalatok.....	298
8.1. A hőmérsékleti sugárzás megoldhatatlannak tűnő problémája	298
8.2. Planck megoldása, az energiakvantum bevezetése.....	299
8.3. Fényelektromos hatás (fotoeffektus)	301
8.4. A fény részecske természetére utaló kísérleti jelenségek	303
8.5. A fényrészecskék – fotonok – tulajdonságai	303
8.6. Gázok emissziós és abszorpciós színe	304
9. A Bohr-féle atommodell.....	306
9.1. A Bohr-féle pályafeltétel	306
9.2. A Bohr-féle frekvenciafeltétel	307
9.3. A Franck–Hertz-kísérlet	307
9.4. A Bohr-modell eredményei és hiányosságai	309
Az atomfizika mellékletei	
A1. Egyszerű szakköri kísérletek az állandó súlyviszonyok törvényének igazolására	312
A2. Festékszemcsék, füst részecskék Brown-mozgásának megfigyelése mikroszkóppal.	314
A3. Brown-mozgás elmozdulás-idő összefüggésének vizsgálata modellkísérlet segítségével	316
A4. Különböző gázok porózus falon keresztül történő diffúziójának összehasonlítása.....	318
A5. Az Avogadro-szám és az atomok méretének meghatározása a kinetikus gázelmélet alapján..	321
A6. Molekulák méretének nagyságrendi becslése, vízfelületen kialakult olajfolt méretéből	322
A7. Az elemi töltés meghatározása a Millikan-kísérlettel.....	324
A8. Az elemi töltés nagyságának becslése MnO_4^- -ionok vándorlási sebességéből.....	328
A9. Thomson módszere az elektron fajlagos töltésének meghatározására (egyidejűleg ható elektromos és mágneses térben történő eltérítéssel)	330
A10. A fotoeffektus vizsgálata fotocellával	332

A11. A Compton-szórás (Compton-effektus). Fénynyomás. A Compton-formula levezetése	335
A12. A gázkisülések vizsgálata	338
A13. Színképek kísérleti vizsgálata az iskolában (kiegészítő szakköri anyag)	340
A14. A Bohr-féle pályafeltétel alapján végzett elemi számítás a H-atom méretének, illetve a mag körül keringő elektron alapenergiájának meghatározására	347
A15. Franck–Hertz-kísérlet iskolai bemutatása	349
KVANTUMFIZIKA – AZ ANYAGSZERKEZET KVANTUMFIZIKAI LEÍRÁSA	
Bevezetés	352
10. Az anyaghullámok	354
10.1. De Broglie hipotézise	354
10.2. A mikrorészecskék hullámtermészetének kísérleti igazolása	355
10.2.1. A Davisson–Germer-kísérlet	355
10.2.2. A kétréses interferenciakísérlet	357
10.3. A hullámfüggvény valószínűségi értelmezése	360
10.4. Az anyaghullámok tulajdonságai	361
10.4.1. A hullámcsomag	362
10.4.2. A hullámcsomag szétfolyása	364
10.5. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció	366
11. A hullámfüggvény meghatározása	368
12. Kötött részecskék kvantummechanikai leírása	370
13. Az atomok kvantumfizikája	375
13.1. A hidrogénatom	376
13.1.1. Az H-atom alapállapotának mennyiségi jellemzése (az atom mérete, az elektron kötési energiája)	377
13.1.2. A H-atom elektronjának pályaimpulzus- és mágneses momentuma – a kvantumfizikai atommodell és a Bohr-modell kapcsolata	378
13.1.3. Az elektron gerjesztett állapotainak leírása a H-atomban	379
13.1.4. Az elektron H-atomban lehetséges hullámállapotainak jellemzése kvantumszámokkal	381
13.2. Magasabb rendszámú atomok kvantumfizikai tárgyalása	383
13.3. A kémiai kötések kvantumfizikája	385
13.3.1. A kovalens kötés általános jellemzése	386
13.3.2. Az ionos kötés magyarázata	389
13.3.3. A fémes kötés magyarázata	389
13.3.4. A kötéstípus elektronegativitás szerinti áttekintése	389
A kvantumfizika mellékletei	
KV1. A kvantumfizikát megalapozó tudósok kételyei	392
KV2. Az elektrondiffrakció iskolai kísérleti igazolása és a Planck-állandó meghatározása	394
KV3. Kiegészítő módszertani ajánlások a kétréses elektroninterferencia tanításához	399
KV4. A síkhullám kép ellentmondásossága	401
KV5. A fázis- és csoportsebesség	402
KV6. A határozatlansági reláció igazolása gondolkísérlettel	404
KV7. További határozatlansági relációk	406
KV8. A Schrödinger-egyenlet tárgyalása	407
KV9. Hullámfüggvények az egydimenziós potenciálgödörben	409

KV10. Mennyire zárt a véges mélységű potenciáldoboz? Alagúteffektus.....	410
KV11. Két dimenziós potenciál-tartományba zárt részecske.....	413
KV12. Háromdimenziós potenciáldobozba (téglatestbe) zárt részecske.....	416
KV13. Színcentrumok sókristályokban (kiegészítő gyakorlati példa a potenciáldobozba zárt elektronra).....	418
KV14. H-atom elektronjának pályaimpulzus momentumának és mágneses momentumának elemi kvantumfizikai tárgyalása.....	421
KV15. A hidrogénatom gerjesztett energiaszintjei.....	424
KV16. Kvantumszámok és hullámállapotok.....	426
KV17. Az elektron saját-impulzusmomentuma (spin).....	429
KV18. A Mengyelejev-féle periódusos rendszer.....	431
KV19. A hidrogénmolekula-ion kötési energiájának becslése.....	434
KV20. Molekulapályák értelmezése.....	436
KV21. Sokrészecske-rendszerek kvantummechanikai leírása.....	442
MAGFIZIKA	
Bevezetés.....	445
14. Az atommag jellemzői.....	447
14.1. Az atommagot protonok és neutronok alkotják.....	449
14.2. Magerők – erős kölcsönhatás.....	450
14.3. Az atommag tömege és energiája.....	451
14.4. Atommagmodellek.....	454
15. Magreakciók.....	455
15.1. Radioaktivitás.....	458
15.1.1. Mesterséges radioaktivitás.....	464
15.2. Maghasadás.....	465
15.3. Magfúzió.....	468
16. Elemi részecskék.....	470
A magfizika mellékletei	
MF1. Érdekességek a Rutherford-kísérlettel kapcsolatban.....	476
MF2. Magerők.....	478
MF3. A Weizsäcker-formula.....	479
MF4. Tórium-emanáció radioaktív bomlásának vizsgálata ionizációs kamrával.....	484
MF5. A radioaktív bomlás-függvény elméleti értelmezése.....	487
MF6. Ionizáló sugárzás észlelésére szolgáló mérőeszközök (GM-cső, ionizációs-kamra, ködkamra, szilárdtest nyomdetektor) egyszerűsített iskolai változatai, és működésük.....	489
MF7. A természetes és mesterséges radioaktivitás gyakorlati alkalmazásai.....	493
KONDENZÁLT ANYAGOK (HALMAZOK) SZERKEZETI TULAJDONSÁGAI	
Bevezetés.....	498
17. Kristályos szerkezetű szilárd anyagok.....	500
17.1. A kristályszerkezetek jellemzése a kémiai kötés típusa alapján.....	505
17.1.1. Atomrácsok.....	506
17.1.2. Ionrácsok.....	506
17.1.3. A fémek kristályszerkezete.....	507
17.1.4. Molekularácsok.....	510
17.1.5. A polimorfia jelensége.....	512

18. A kristályos anyagok fizikai tulajdonságainak értelmezése az kristályszerkezet alapján	514
18.1. A szilárdtestek elektromos tulajdonságai. A sáv szerkezet	514
18.1.1. A fémek sáv szerkezete	517
18.1.2. Szigetelő és félvezető kristályos anyagok sáv szerkezete	519
19. Eltérések az ideális kristályszerkezettől. A kristályhibák	524
20. A folyadékok szerkezete	526
20.1. Az egyszerű folyadékok Bernal-féle golyómodellje	526
20.2. Az üvegek szerkezete	531
20.3. A folyadékkristályok	532
21. Az óriásmolekulájú anyagok (műanyagok) tulajdonságai.....	533
A kondenzált anyagok mellékletei	
ANY1. Az kristályok növekedése – a jellegzetes kristályforma kialakulása	545
ANY2. Kristályok hasadása	548
ANY3. Modellkísérlet a kristályszerkezet diffrakciós vizsgálatára	552
ANY4. Polikristályok.....	553
ANY5. A vas kristályszerkezeti átalakulása hőmérsékletváltozás hatására.....	555
ANY6. Polimorfia	556
ANY7. A kristály elektronjainak energiaspektruma	557
ANY8. A fémek fajlagos ellenállásának értelmezése	560
ANY9. Merev golyókból álló kétdimenziós kristálymodell (kristály hibák szemléltetésére).....	562
ANY10. Rézdrót alakítási keményedése.....	581
ANY11. Az acél edzése és megeresztése hőkezeléssel.....	582
RELATIVITÁSELMÉLET	
22. Relativitáselmélet.....	585
Bevezetés.....	585
22.1. A relativitáselmélet tanítása alapszinten.....	586
22.2. Speciális relativitáselmélet	589
22.2.1. Einstein relativitási elve és a fénysebesség állandósága	589
22.2.2. A fénysebesség állandóságának következményei	590
22.2.3. A relativisztikus dinamika.....	597
22.3. Általános relativitáselmélet	601
22.3.1. Az általános relativitáselmélet ekvivalencia elve.....	602
22.3.2. A fény terjedése gravitációs térben	603
A relativitáselmélet mellékletei	
Bevezetés.....	607
R1. A Galilei-féle téridő.....	607
R1.1. Alapvető tapasztalatok.....	608
R1.2. A Galilei-féle téridő geometriája	610
R1.3. Inerciális vonatkoztatási rendszerek; tér, idő.....	611
R1.4. Szimmetriák; speciális Galilei-transzformáció	613
R1.4.1. (K szerinti) időeltolás	614
R1.4.2. Térbeli eltolás.....	615
R1.4.3. (K szerinti) térbeli forgatás	616
R1.4.4. Speciális Galilei-transzformáció.....	616

R2. Speciális relativitáselmélet	618
R2.1. Alapvető tapasztalatok.....	618
R2.1.1. II-mezonok bomlása	619
R2.1.2. A Michelson-féle interferencia-kísérlet	620
R2.1.3. A Kennedy–Thorndike-kísérlet	623
R2.2. Praktikus mérési utasítás távolság- és időmérésre	625
R2.3. A speciális Lorentz-transzformáció	627
R2.4. A Minkowski-féle téridő geometriája.....	630
R2.4.1. Az intervallum és invarianciája	630
R2.4.2. A Minkowski-féle skaláris szorzás.....	631
R2.4.3. Térszerű, fényszerű és időszerű vektorok.....	632
R2.4.4. Négyessebesség	633
R2.5. Inerciális vonatkoztatási rendszerek	635
R2.5.1. Egyidejűségi hipersíkok.....	635
R2.5.2. Megfigyelő szerinti tér és idő	637
R2.5.3. Relatív sebesség.....	639
R2.6. A Minkowski-féle téridő szimmetriái.....	640
R2.6.1. (K szerinti) időeltolás	640
R2.6.2. (K szerinti) térbeli eltolás	641
R2.6.3. (K szerinti) térbeli forgatás.....	641
R2.6.4. Speciális Lorentz-transzformáció	642
R2.7. Relativisztikus jelenségek.....	643
R2.7.1. Relativisztikus sebességösszeadás	643
R2.7.2. Idődilatáció (iker-paradoxon)	644
R2.7.3. Hosszkontrakció (pajta-paradoxon)	647
R2.7.4. Energiaimpulzus négyesvektor; megmaradási tételek	650
R2.7.5. Egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás; Relativisztikus tömegnövekedés	654
R2.7.6. Fotonok. Relativisztikus Doppler-effektus	657
R2.7.7. Tömeg-energia ekvivalencia, tömegdefektus	660
R2.7.8. A Maxwell-egyenletek kovarianciája.....	664
R3. Általános relativitáselmélet	666
R3.1. Görbült téridő	666
R3.1.1. Az ekvivalencia-elv	666
R3.1.2. Görbület, mint belső, geometriai tulajdonság.....	668
R3.1.3. Az Einstein-egyenlet kvalitatív jelentése	671
R3.2. Alapvető jelenségek, kísérleti igazolások	672
R3.2.1. A Merkúr perihélium-elfordulása.....	672
R3.2.2. Fényelhajlás erős gravitációs térben	673
R3.2.3. Gravitációs vöröseltolódás	674
Irodalomjegyzék.....	677

OPTIKA, ÚT A MODERN FIZIKÁHOZ

1. A geometriai optika tanítása az általános és a középiskolában
2. Hullámoptika
3. Fény és anyag kölcsönhatása (fakultatív kiegészítő anyag)
4. Fényerősség, fényforrások (alapszintű tananyag)
5. A fény fotonelmélete (középszintű tananyag)

Bevezetés

A fizikai fényjelenségek köre igen széles, a megfigyelések, kísérleti tapasztalatok magyarázata egységes tárgyalásmódban lehetetlen. Az optika tudománytörténeti fejlődése során alakult ki a jelenségkör fejezetekre bontása aszerint, hogy a probléma értelmezése milyen megközelítést kíván. Ilyen értelemben beszélünk geometriai optikáról, hullámoptikáról és a hozzá kapcsolódó elektromágneses fényelméletről, kvantumoptikáról. Az optika nagy területei közül az általános és középiskolában a geometriai optikával és a hullámoptikával, részletesebben, a fény energiakvantáltságával érintőlegesen foglalkozunk.

Köznapi használatban gyakran nevezzük a különböző megközelítéseket optikai modelleknek: beszélhetünk a fény geometriai optikai modelljéről, hullámmodelljéről és részecskemodelljéről. Ezzel kapcsolatban fontos tisztázni, hogy itt a modell jelentése inkább az elméletnek felel meg, hiszen nem pusztán egyszerűsítő feltételek kiválasztását jelenti, amelyekkel, mint például egyes mechanikai modellek esetén kevésbé lényeges körülményeket leválasztva és elhanyagolva a probléma lényegi sajátosságaira koncentrálnak, miközben tudjuk, hogy a modell alapján végzett számításokból csak közelítő eredményekre számíthatunk.

Az optikában használt modellek különböznek az atommodellektől is. Az atommodellek a megismerés egy-egy jelentős lépcsőfokához tartoznak. Addig tekinthetők irányadónak, amíg képesek a jelenségek, mérési eredmények értelmezésére, amint olyan tények válnak ismertté, amik a modell segítségével már nem magyarázhatók, új modell születik. Az optika modelljei, pl. a geometriai optika nem válik „túlhaladottá”, törvényei érvényesek, és jól használhatók maradnak a jelenségek bizonyos körében.

Az optika modelljei (elméletei) olyan törvényrendszereket jelentenek, amelyek érvényességi köre pontosan körülhatárolható, és az elméletek egymással való kapcsolata, egymásra épülése is pontosan tisztázható. A geometriai optika a hullámoptika és a fény elektromágneses elméletének egymásra épülése tanulságos példa arra, hogy az egyre finomodó modell (elmélet) sorral hogyan szélesedik a leírható jelenségek köre. A szélesedés azonban nem úgy történik, hogy a korábbi elmélet érvénytelenné válik, hanem megmutatható, hogy a bonyolultabb hogyan tartalmazza (esetleg határesetként) a korábbi.

A fénytannról szerzett legelemibb tapasztalatainkat a geometriai optika jelenti. A geometriai optika segítségével értelmezhetjük a fénytörés, fényvisszaverődés jelenségét és a leképezés létrejöttét. A geometriai elmélet egyetlen lényeges absztrakciót, a fénysugár fogalmát tartalmaz, és emellett két tapasztalati törvényre, a visszaverődési és törési törvényre épít. Nem beszél a fény tényleges terjedéséről, és nem értelmezi azt sem, hogy „mi a fény”.

A fény tulajdonságainak megértésében kísérleti tapasztalatokra építve léphetünk tovább. A keskeny résre, illetve kisméretű tárgyakra (tű hegye, kifeszített cérnaszál stb.) fényt ejtve interferencia és elhajlás jelenségeket tapasztalunk. A vízhullámokra vonatkozó tapasztalatokkal analóg tulajdonságok alapján kimondhatjuk, hogy a fény hullámjelenség. (A tudománytörténet szerint a vízhullámok mellett elsősorban hangtani analógiák szerepeltek a fényjelenségek

magyarázatában.) Kísérleti úton következtethetünk a fényhullám tranzverzális jellegére is (polarizáció). A hullámtermészetet felismerve a fényjelenségek egységesen tárgyalhatók a Huygens- és a Huygens–Fresnel-elv alapján. A Huygens-elv segítségével levezethető a geometriai optika két alaptörvénye, a visszaverődési és törési törvény, így a geometriai optikát a hullámelmélet magában foglalja. A hullámoptika és a geometriai optika közötti átmenet a Fermat-elvre is építhető, azonban ennek tárgyalása nehéz matematikai fogalmak bevezetésével jár, így időigényes, és csak matematikai érdeklődésű csoportokban valósítható meg. (Ezeknek a kérdéseknek a középiskolai tanítási vonatkozásait a későbbiekben még részletezzük.)

Bár a fény hullámelmélete igen általános és a jelenségek széles körére nyújt magyarázatot, látnunk kell, hogy a fény mibenlétét még mindig nem érinti. Nem mutatja meg, hogy milyen típusú rezgések közvetítik a fényhullámokat. (A tudománytörténet rámutat arra, hogy ennek a kérdésnek a megoldása vezetett az éter hipotézishez, a rugalmas közegek rezgéseivel vett analógia alapján feltételezték, hogy a fény az éter rezgéseként jön létre és terjed.)

Az elektromágneses hullámok kísérleti tanulmányozása, valamint a Maxwell-egyenletek alapján adódó elméleti leírás alkalmazása a fényre, és az elméleti eredmények széles körű egyezése a kísérleti tapasztalatokkal, egyértelműen mutatja, hogy a fény elektromágneses hullám. A döntő bizonyíték az, hogy a Maxwell-egyenletekből az elektromágneses hullámok terjedési sebességére elméletileg adódó érték megegyezik a fény terjedési sebességére vonatkozó kísérleti tapasztalattal. (Természetesen, mint ahogyan a fizikai elméletek esetén általában, az elmélet elfogadása nem alapozható egyetlen kísérleti eredményre. A Newton törvények érvényességét az bizonyítja, hogy a mechanikai mozgások széles körét, kiemelten az égitestek mozgását helyesen írják le. A fény elektromágneses elméletének hasonló erőjű bizonyítéka, hogy a fény és anyag kölcsönhatása széles körben értelmezhető vele.)

Az elektromágneses hullám elmélet az előző két elmülethez képest döntő előrelépést jelent, hiszen ekkor ismerhető fel, hogy milyen fizikai mennyiséggel azonosítható a fény. A fény elektromágneses hullám elmélete magában foglalja mind a fény hullámelméletét, mind a geometriai optikát. Az így felépülő „bennfoglaló” elmülelsor egyben azt is jelenti, hogy az újabb elmüleletek kidolgozásakor nincsen a jelenségkör leírásában döntő paradigmaváltás! Új fogalmakat és új törvényeket használunk, azonban a „régii” fogalmak és törvények is használhatók, illetve érvényben maradnak az új elmület keretei között, csak érvényességi körüket kell pontosan meghatározni.

A fény elektromágneses hullám elmélete segítségével a fény terjedésével és a fény és anyag kölcsönhatásával kapcsolatos jelenségek értelmezhetővé válnak. Kivételt szinte csak a fotoeffektus jelent. A fotoeffektus alapján kell kimondanunk, hogy a fény bizonyos esetekben részecskeként viselkedik. Ez a felismerés vezet arra, hogy a fény kettős természetű, aminek teljes leírása csak a kvantumelektrodinamika segítségével lehetséges.

A fényről alkotott mai elképzelésünk tehát négy egymásra épülő törvényrendszer segítségével alakítható ki. A középiskolai anyagban indokolt mindegyik elmület szerepeltetése (ahogyan ezt a jelenlegi tantervek is tartalmazzák). A történeti út ismertetése igen tanulságosan mutatja, hogy a természeti törvények objektívek, ellenőrizhetőek, a természetről szerzett ismeretek gyarapodásával az elmüleletek finomodhatnak, a természeti törvények azonban nem veszítik el érvényességüket, legfeljebb hatókörüket kell pontosabban körvonalazni.



Simonyi Károly: A Fizika kultúrtörténete

A fényre vonatkozó tudományos ismeretünk fejlődéstörténete (amellett, hogy szemléletformálóan érdekes) a fizikatanításban is jól felhasználható minden szaktanár és tanárjelölt számára. Ajánljuk Simonyi Károly *A fizika kultúrtörténete* c. nagyszabású munkájának fényvel kapcsolatos fejezeteit.



A fénytann tanításának nagy kihívása azonban, hogy a fénytani elméletek finomodása, a törvényrendszerek kibontása egyre több és mélyebb matematikai ismeretet igényel. Ez az oka annak, hogy a tananyagban a fénytani törvények nem igazi súlyukkal, hanem azzal szinte fordított arányban szerepelnek. Legtöbb időt a geometriai optikára szánunk, s a napjaink fizikájában igazán alkalmazott elektromágneses fényelméletről és különösen a kvantumelméleti leírásról alig szólnak. Az arányok megválasztása kritikus kérdés! Törekednünk kell arra, hogy megfelelő interpretációval a modern optika nagyobb szerepet kapjon a tananyagban, de a geometriai optika színes, könnyen kísérletezhető részeit sem szabad elveszítanünk.

A fénytann tanításának kiemelt jelentőséget ad, hogy a klasszikusan jól értelmezhető jelenségekből kiindulva, átvezet a modern fizika területére. Ezt jól példázza a fény terjedési sebességének középiskolában is tárgyalható problémaköre, vagy a fotoeffektus kísérleti jelenségének magyarázatára megalkotott fotonelmélet. Az elektromágneses hullámok Maxwell-féle elméletéből számításokkal adódik a vákuumbeli fénysebesség értéke. Az érzékeny Michelson-féle interferencia kísérletek bizonyítják, hogy a fénysebesség határsebesség, azaz a fény sebessége mozgó fényforrás esetében sem változik meg (Michelson–Morley-kísérlet). A fénysebesség paradoxnak tűnő tulajdonságából kiindulva alkotta meg Einstein a modern fizikában alapvető szerepet játszó relativitáselméletet. A fotoeffektus a fény hullámtermészetével nem értelmezhető. A fotoeffektus a fény-energia kvantáltságával kap magyarázatot, és így a fénytani probléma átvezet a modern kvantumfizika területére. A fénytann tanításával tehát a modern fizika forradalmian új fogalmainak bevezetését készítjük elő.

Az optika tantervi beillesztése az általános és középiskolában

A kisdíjak ismerkedése a fényjelenségekkel már az alsó négy osztály környezetismeret óráin, majd az 5. és 6. évfolyam természetismeret óráin megkezdődik. Itt a legegyszerűbb optikai jelenségek játékos megfigyelése és kvalitatív értelmezése a feladat. A feldolgozott témák mozaikszerűek, és egyfajta átmenetet jelentenek a mindennapi tapasztalatok és a tudatos megfigyelés, kísérletezés közt.

Az általános iskolai fizika szaktárgyi oktatásában, 7-8. évfolyamon a geometriai optika kísérletekre támaszkodó megalapozása a cél. Kiemelt téma a fény és a látás kapcsolatának kvalitatív értelmezése. Az optikai alapfogalmak (első és másodlagos fényforrások, fénynyaláb,

fénysugár) bevezetése és a geometriai optika alapjelenségeinek (a fény egyenes vonalú terjedése, fényvisszaverődés, fénytörés) kísérleti alapokon történő kvalitatív tárgyalása a feladat. Fontos, hogy minél több konkrét jelenség, optikai eszközökre vonatkozó megfigyelés és kísérlet értelmezésével mutassuk be a geometriai optika gyakorlati alkalmazását, hasznosságát. Az optikai eszközök használatához kapcsolódva alapvető feladat a képalkotás lényegének megértése. A tárgyalás döntően kísérleti alapú és kvalitatív szintű. Kvantitatív szinten csak a tükrös visszaverődés törvényét tárgyaljuk, illetve a nevezetes sugarakra támaszkodva egyszerű képszerkesztéseket végzünk.

Az általános iskolai optika középpontjában a jelenségbemutató kísérletezés és a hozzá kapcsolódó megfigyelés áll. A tanári kísérletezés mellett döntő jelentőségű, hogy a diákok minél több saját kísérletet és megfigyelést végezzenek. A geometriai optika általános iskolai feldolgozásra alkalmas jelenségeinek, kísérleteinek gazdag sokasága lényegesen meghaladja a fizika e témakörre fordítható órakeretét. Kiegészítésként jó lehetőség kínál a fizikasakkör, ahol a tanár az érdeklődő diákokkal kisebb csoportokban foglalkozhat. A szakköri kísérletezéshez jól felhasználhatók a játék-kereskedelemben időnként forgalmazott, műanyagból készült „optikai építő játék” készletek is.



Optikai építő készletek

A diák-kísérletezéshez hasznos segítséget jelentenek az egyszerű optikai kísérleteket népszerűsítő kiadványok, például Öveges József ma is aktuális munkái.



Egyszerű optikai kísérleteket népszerűsítő kiadványok

A gimnáziumi fizikaoktatásban hagyományosan a hullámoptika témaköre kapja a legnagyobb hangsúlyt. A fény hullámsajátságainak tárgyalását a mechanikai és az elektromágneses hullámok tárgyalása előzi meg. A különböző hullámok összekapcsolása előnyös a jelenségek lényegi megértésében. A hullám, mint közegben terjedő rezgésállapot a mechanikában kísérletekre alapozva szemléletesen vezethető be. A térben és időben periodikus hullámot leíró matematikai függvény is a mechanikában kap tartalmat. Az interferencia jelensége, az

állóhullám, az elhajlás vagy a tranzverzális hullámokra jellemző polarizáció ugyancsak a mechanikában kerül először tárgyalásra a részleteiben is megfigyelhető hullámkadas és érzékletes hangtani kísérletekre alapozva. Erre épül rá analógiás gondolkozással az elektromágneses mikrohullámok és a fény hullámtulajdonságainak bemutatása.

A hullámoptikában is kísérletek jelentik a kiindulást. A fény hullámtulajdonságát interferencia-kísérletekkel bizonyítjuk, majd a mechanikai hullámkadas kísérleteket felidézve a Huygens- és a Huygens–Fresnel-elv alapján értelmezzük a fényelhajlás jelenségét. A fehér fényvel végzett interferencia és elhajlási kísérletekben megfigyelhető erősítési sávok színesek. Ehhez a tapasztalathoz kötve, és az általános iskolában jelenségszinten tárgyalt prizmás színelbontást felidézve tárgyaljuk a fehér fény összetett voltát, a különböző színösszetevők közegenként változó terjedési sebességét és hullámhosszát. A hullámoptikát a középiskolában hagyományosan a fénypolarizáció bemutatása és jelenségszintű értelmezése zárja.

Az emelt szinten fizikát tanuló osztályok megemelt alapóraszama, a fakultációs órakerettel kiegészítve megfelelő időt biztosít arra, hogy az általános iskolában tárgyalt geometriai optikát újra áttekintsük és kiegészítsük a fénytörést mennyiségi vonatkozásban leíró Snellius–Descartes törvénnyel, illetve a tükrök és lencsék leképezési törvényének formulájával. Fontos kiegészítés az általános iskolában csak említés szintjén szereplő fénysebesség mérése is.

A geometriai optika és a hullámoptika összekapcsolására a tükrös visszaverődésnek és a Snellius–Descartes-törvénynek a Huygens-, illetve Huygens–Fresnel-elven alapuló hullámoptikai értelmezése ad lehetőséget. A gimnáziumi osztályok többségében, ahol az alapóraszám heti két óra, az optika lerövidített tárgyalásába nem fér bele a geometriai optika kiegészítő ismétlése. A hiánypótlásra, az érettségire és szakirányú továbbtanulásra készülő diákoknak szüksége van. Ezért az érettségi felkészítést szolgáló fakultatív órák időkeretében kell ezt megtenni. Matematikai beállítottságú osztályokban a geometriai optika törvényeinek összefoglalása a Fermat-elv kimondása és alkalmazása révén is történhet.

A fénytan lezáró témája középiskolában a fényelektromos jelenség tárgyalása és ezen keresztül a fény kettős természetének megfogalmazása. A fény kettős természete adja a kiindulópontot a korpuszkuláris anyag hasonlóan kettős természetének feltételezéséhez, és ennek kísérleti bizonyítása után az atomi részecskék kvantummechanikai leírásához.

Gyermekkori naiv elképzelések, tévképzetek, amik nehezítik az iskolai fénytantanítást

A fénytan iskolai tárgyalása a legegyszerűbb alapfogalmakkal és jelenségekkel, azaz a geometriai optika témakörével kezdődik. Első pillantásra úgy tűnik, hogy könnyű dolgunk lesz, hiszen a fényről minden iskolásnak vannak fogalmai, mindegyikük sok fényjelenséget látott már, napi gyakorisággal használ optikai eszközöket is, jól ismeri a tükröt, látott nagyítólencsét, szemüveget, esetleg nézett már távcsöbe is. Úgy tűnhet tehát, hogy ezekre a hozott tapasztalatokra és előismeretekre könnyű lesz építkezni a fizikaórákon. Ez azonban nem ennyire egyszerű. A problémát az jelenti, hogy a kisdíák tapasztalatai, ismeretei mozaikszerűek, hiányosak és nincsenek rendszerbe kapcsolva. Természetesen vannak kapcsolatok, amiket észrevesz és a maga módján igyekszik is értelmezni. Minden 7. évfolyamos kisdíák tudja például, hogy a fény és a látás kapcsolatban van egymással. A pedagógiai-pszichológiai

kutatások szerint igyekeznek is értelmezni a felfedezett kapcsolatot a maga számára, de ezek a saját magyarázatok tudományos szempontból általában nem igazak. Ilyenkor beszélünk *prekonceptióról*, azaz a hivatalos tanulást megelőző saját elképzelésekről. (Érdemes megjegyezni, hogy a gyerekeknek a jelenségekről alkotott saját magyarázatai néha meglepő hasonlóságot mutatnak a fizikatörténet során nagy vitákat kiváltó, egykor tudományosan is elfogadott hipotézisekkel. Ez arra utal, hogy a megismerés történelmi útja és az egyéni fejlődés lépcsői között vannak párhuzamok. A fizikatörténet ismerete fontos a fizika tanítása szempontjából.) A tartalmi problémák feloldását nehezíti az is, hogy a köznapi életben, illetve tudományban ugyanazokat a szavakat más tartalommal használjuk. A tanárnak empátiára és tapasztalatra van szüksége, hogy megérezze az esetleg rossz megfogalmazásban is a jó gondolatot. Sok pedagógus úgy látja, hogy azokat a szaktárgyi témaköröket, amelyekre vonatkozóan sok a gyerekek hozott ismerete, nehezebb eredményesen tanítani az iskolában, mint azokat, amelyről ott hallanak először a diákok. A hozott prekonceptiók korrigálása (ezt nevezi a szakirodalom fogalmi váltásnak) nehéz feladat. A diáknak magának kell belátnia, hogy korábbi gondolatmenete hibás volt, amivel nem tud további, komolyabb kérdések megoldása felé továbblépni. Ha a fogalmi váltás megtörténik, a tanítás eredményes, ha nem, vagy csak részlegesen, akkor a diák ismereteiben maradnak tévképzetek, amik akár évek múltán is okozhatnak megértési problémákat, és jelenthetnek akadályt a tiszta fogalmi gondolkodásban.

Néhány gyakori tévképzet

A diákok köznapi életből hozott, és tudományos szempontból hibás fogalmait a kutató pedagógusok, pszichológusok gyakorló tanárok közreműködésével széles körben vizsgálják. Hasonlóképpen vizsgálják azt is, hogy az iskolai oktatástól elvárt fogalmi váltás, mennyire sikeres.

Az alábbiakban (a teljesség igénye nélkül) néhány olyan gyakori tévképzetre hívjuk fel a figyelmet, amely az iskolai fizikaoktatás ellenére is tanítványaink jelentős részében makacsul tartja magát.

- A gyerekek tudják, hogy a látáshoz fényre van szükség. úgy képzelik azonban, hogy a fény általános világosságot kelt a sötét szobában és ez teszi lehetővé, hogy mindent látunk, amerre nézünk. Eszerint nem az a látás feltétele, hogy a tárgyról kiinduló vagy szóródó fénysugarak a szemünkbe jussanak, hanem az, hogy mi valamire ránézzünk.

Jól jelzi ezt a tévedést az a tesztkérdés, ahol a feladatlapon a Nap, egy fa és távolabb a fa felé forduló gyerek rajza van megadva azzal a feladattal, hogy a diák fénysugár-nyilak berajzolásával értelmezze, miért látjuk a fát? A válaszok között nagyon gyakori volt, hogy a Naptól sugarakat irányítottak a fára (ez világítja meg a fát) és a gyerek szeméből kiinduló nyilat a fa felé (amivel a gyerek a fát látja).

- Sokan gondolják úgy, hogyha a sötét szobában felkapcsoljuk a zseblámpát és rávilágítunk egy képre, akkor csőszerű világos csatorna alakul ki, és mivel világosság van, e tartományban látunk. A fényt egyfajta állapotnak tartják, és nem a folyamatos fényterjedés és visszaszóródás folyamatának.

- A kisdíákok ismerik és használják a síktüköröt. Az iskolában tanulnak róla és tapasztalják, hogy a tükör felcseréli a jobb és bal oldalt, de a másik két térirányban, a „fent és lent” vonatkozásában nincs semmilyen változás. (Nem veszik észre, hogy a jobb és bal azért cserélődik fel, mert azt ahhoz viszonyítjuk, hogy merre nézünk, azaz az elől és hátul iránya cserélődik fel, amikor a tükörképet nézzük.) Sokan közülük úgy gondolják, hogy a tükörkép a tükör felületén van, hasonlóan ahhoz, ahogy a falra akasztott fotó képe a fotópapíron. A tükör síkja mögötti tükörképet nem fogadják el, legfeljebb csak optikai csalódásként. Jól mutatja ezt, hogy arra a kérdésre, hogy az alábbi két állítás közül melyik a helyes a döntő többség a tanultak ellenére is a *B* állítást jelölte meg:
 - A) A síktükör által létrehozott kép a tükör mögött van.
 - B) A síktükör által létrehozott képet az ember a tükör mögé látja.
- A gyűjtőlencse képalkotását a diákok a tanult képszerkesztések után is úgy képzelik, hogy a kép egésze, a tárgyról valahogyan átvándorol a lencsére, majd azon áthaladva kerül a felfogó-ernyőre. Ha tehát a fényképezőgép lencséjére rászállt egy légy, a képen a „kitakart rész” hiányozni fog.
- Nagyon gyakori, hogy a fény színét a diákok a fény hullámhosszához kapcsolják, és amikor a fény egyik közegből a másikba halad át, akkor a hullámhosszúságot tekintik állandónak és nem a frekvenciát. A tévképzet nyilvánvalóan helytelenül megtanult összefüggés beidegződéséből ered.
- Bár a relativitáselméletet diákjaink kevéssé ismerik, csak néhány emelt szintű anyagot tanuló osztályban szerepel a tantervben, azt már szinte az általános iskolában megtanulják, hogy a fény sebességénél gyorsabban semmilyen test sem mozoghat. Gyakori azonban, hogy a diákok nem veszik figyelembe, hogy a fény különböző közegekben különböző sebességgel terjed, és határsebességnek a vákuumbeli fény terjedési sebességét kell tekinteni.

Nem véletlen, hogy sokkal több geometriai optikai, mint hullámoptikai tévképzetet soroltunk fel, hiszen a tévképzetek alapja többnyire a kisgyermekkorai tapasztalatszerzés, ami a fénytannak erre a témakörére vonatkozik. A fényhullám már absztrahált fogalom, a rá vonatkozó tapasztalatok áttételesek, a téves beidegződések az iskolai és az egyéb informálisan szerzett ismeretekből származnak és többnyire nem általánosak, hanem adott tanulócsoportra jellemzőek.

A tanítás akkor sikeres, ha a gyerekkorból hozott téves elképzeléseket, naiv elméleteket az iskolában sikerül az életkornak megfelelő, helyes fogalmi rendszerré alakítani.

Jegyzetünk következő fejezeteiben a konkrét tantervi előírásoktól függetlenül igyekszünk teljes gazdagságában áttekinteni a geometriai optika és a hullámoptika középiskolai szinten feldolgozható fontosabb témáit. Jól tudjuk, hogy a jegyzet anyagának megtanítása nem fér bele a rendelkezésre álló időkeretekbe. A tanár feladatának tekintjük, hogy a tanulócsoportok adottságai és érdeklődése szerint válogatva állítsa össze helyi tantervét. E szakami munka

segítésére az egyes témákat feldolgozó alfejezetek címe után feltüntetjük az adott tartalom feldolgozásnak szintjét. Ezen túl a leírások során felhívjuk a figyelmet a tartalmi szempontból kritikus pontokra, javaslatokat teszünk a fogalmilag nehezebb részek feldolgozásának ajánlott módjára, a szakmai hangsúlyok elhelyezésére és a fontosabb kapcsolódó kísérletekre, feladatokra is. A tanításhoz segédanyagokat, motiváló kiegészítő anyagokat is ajánlunk. Ismételten hangsúlyozzuk azonban, hogy jegyzetünk nem fizika tankönyv, hanem a tankönyveket kiegészítő módszertani segédlet.

1. A GEOMETRIAI OPTIKA TANÍTÁSA AZ ÁLTALÁNOS ÉS A KÖZÉPISKOLÁBAN

1.1. Köznapi szóhasználat és optikai fogalmak

A geometriai optika egyszerű, a köznapi életben is tapasztalható jelenségek leírásával és azok alkalmazásaival foglalkozik. A fényvel kapcsolatos tapasztalatokra épülő mindennapi tudásrendszerből szofisztikált fogalomrendszere, kidolgozott módszerei, a velük feltárt egzakt törvények különböztetik meg. Az optika tanításának alapvető problémája, hogy a hétköznapi „laza” szóhasználat, illetve a hozzá kapcsolódó felületes fogalmak és gondolkodás, hogyan alakítható át tudományos igényességű fogalmakká és egzakt gondolkodássá.

Fény és látás

A fény és a látás kapcsolata nagyon régóta foglalkoztatta a gondolkodókat, és az elmúlt századok kiemelkedő tudósai is súlyos vitákat folytattak a kérdésről. A fentebb idézett tévképzetek mutatják, hogy a mai iskolások fejében is sok téves elképzelés él a kérdésről.

Arra az egyszerű kérdésre, hogy mi a feltétele, hogy lássunk a szobában, felnőttektől és gyerekektől egyaránt a leggyakoribb válasz az, hogy a szobában „világos” legyen, „fény legyen”. Eszerint a fény és a világosság szinonim értelmű fogalmak, a szoba egyfajta állapotát jellemzik. Köznapi beszélgetés során az elnagyolt válasz fölött elsiklunk, fizikaórán azonban ezt nem tehetjük meg. A fizikaórán a látás és a fény kapcsolatát egyszerű, de gondosan megtervezett kísérletek sorozatával kell tisztázni. A kísérletsorozathoz a lesötétített terem mellett mindössze egy erősebb fényű zseblámpára van szükségünk.

A zseblámpát felkapcsolva először „szembe világítjuk” az osztályt – a fényt kibocsátó izzót mindenki látja, aki nem takarja el a szemét, vagy nem néz tudatosan más irányba. *A sötét szobában a fényforrást akkor, és csak akkor látjuk, ha fénye szemünkbe jut.*

Világítsunk most a lámpával oldalra úgy, hogy a fénynyaláb csóváját fekete textilanyaggal bélelt dobozba irányítjuk: oldalról a lámpa fénycsóvája nem, vagy csak alig látható, a doboz fekete bélése elnyeli a bejutó fényt. A fényforrás fénye csak előre terjed. A krétaporos táblatörlő rongyot belerázva a fénynyaládba, a világító porszemcsék oldalról is láthatóvá teszik a

fénynyalábot. A fény útjában lévő szemcséken a fény szóródik, és a felénk szóródó fény a szemünkbe jut. A fény igazi forrását, a lámpát nem látjuk, csak a fénylő pontokat, mint másodlagos fényforrásokat.

Irányítsuk a zseblámpát a teremben lévő tárgyra! A diákok a fényt elsődlegesen kibocsátó izzólámpát most sem látják, de a megvilágított tárgyakat igen, a megvilágított tárgyak másodlagos fényforrásként szétszórják a rájuk eső fénynyalábot, és mivel a szórás minden irányba történik, mindenki szemébe jut fény.

Az elvégzett kísérletsorozat eredményeként kimondhatjuk; a látás lényege, hogy a fényt kibocsátó tárgyról (elsődleges fényforrás) vagy a ráeső fényt szétszóró más testekről (másodlagos fényforrás) fény jut a szemünkbe. Csak azokat a pontokat látjuk, amelyekről fénysugarak jutnak a szemünkbe. Ezek után érdemes megbeszélni, hogyan is kell értenünk azt a köznapi megállapítást, miszerint „akkor látunk a szobában, ha ott világos van”.

A szobába nappal az ablakon keresztül jut be fény, este pedig lámpa fénye világít benne. A fényforrás fénye a falakig, berendezési tárgyakig egyenes vonalban szabadon terjed, de ott jó része szóródva visszaverődik, a széttartó sugarak ismét egyenes irányban terjednek az újabb szóródást eredményező tárgyig. A szobában „világos” van, mert a fénysugarak a szoba falain, illetve a szobában lévő tárgyakon sokszorosán és folyamatosan minden lehetséges irányba visszaverődve, szóródva terjednek. Az egymást folytonosan keresztező sugarak nincsenek hatással egymásra. A szobába belépve bármerre nézünk, fénysugarak jutnak a szemünkbe a különböző tárgyról. Szemünk a beérkező fényt felfogja és a beérkező fénysugarak irányában érzékeli azokat a pontokat, amelyekről a fénysugarak a szemünkbe jutottak. A gyerekek számára meglepő, hogy a világosság nem állapot, hanem minden irányban terjedő fénysugarak sokasága. Ezek közül az egymást zavartalanul keresztező sugarak közül csak nagyon kevés jut a szemünkbe, de ilyen sugarak bármerre nézünk, mindenhol érkezik. A tanulók természetesnek veszik, hogy a geometriai optikában folyamatosan használjuk a „fényterjedés”, a „fény terjed” kifejezést, nem zavarja őket, hogy ez arra utal, hogy a fény bizonyos idő alatt jut el a kibocsátás (visszaverődés) helyéről valamilyen másik tárgyhöz. Ugyanakkor ez nem észlelhető, a zseblámpa bekapcsolásakor a fénynyaláb azonnal teljes hosszában megjelenik, a redőny felhúzásakor a sötét szobában azonnal világos lesz. Érdemes már a fénytan tárgyalásának megkezdésekor felhívni a tanulók figyelmét arra, hogy a fény valóban terjed, a fénysugár nem pillanatszerűen teszi meg a befutott vonalszakaszt, azonban terjedési sebessége olyan nagy, hogy a hétköznapi életben ez nem észlelhető.

A fenti példával azt akartuk érzékeltetni, hogy a tanulók átvezetése a hétköznapi gondolkozásból a tudományos igényű gondolkozás felé még az egyszerűnek tűnő esetekben sem könnyű feladat. A tanárnak észre kell vennie, ha a diák tévesen gondolkodik, vagy helytelen tapasztalatokra támaszkodik. Ez a tanár részéről a biztos szakmai ismeretek mellett empátikus érzékenységet kíván. Tudnia kell, hogy ami számára fogalmilag természetes, a gyerekek számára nem biztos, hogy szintén egyértelmű és világos. Ha az alapfogalmak egyértelmű rögzítésére nem fordítunk kellő figyelmet, a pongyola fogalmi rendszer a későbbiekben nehezen felismerhető akadály lehet a fizikában szükséges egzakt gondolkodásnak.

1.2. A fény egyenesvonalú terjedése (alapozó szint)

A geometriai optika a fényterjedéssel kapcsolatos jelenségekkel foglalkozik, legfontosabb fogalmai és absztrakciói a következők:

- a fény homogén közegben egyenes vonalban terjed mindaddig, míg valamilyen akadályba nem ütközik. A fénysugarak egymáson akadályoztatás (kölsönhatás) nélkül haladnak át.
- az akadályba ütköző fény az akadály határfelületén visszaverődik és/vagy, irányát megváltoztatva tovább halad az új közegben (megtörik)
- a fénysugár irányának megfordításával a fény útja nem változik meg.
- a fény véges sebességgel terjed, a fénysebesség értéke (c) vákuumban kb. 300 000 km/s.

1.2.1. Fénysugár, fénynyaláb (alapszintű tananyag)

A fény egyenes vonalú terjedését, kézenfekvő módon, irányított egyenes vonallal fejezzük ki, ezt nevezzük fénysugárnak. A fénysugár hasonló absztrakció a fizikában, mint a geometriában az egyenes. Az egyenes eleméleteileg egydimenziós alakzat, azonban amint lerajzoljuk, már vastagsága van. Fénysugárral ugyanúgy nem lehet kísérletezni, mint ahogyan nem lehet geometriai egyenest rajzolni. Amivel kísérletezhetünk, az a párhuzamos fénysugarak sokaságának tekintett fénynyaláb.

A fény egyenes vonalú terjedésének, a fénynyalábok láthatóvá tételének, egymáson történő akadálytalan áthaladásnak bemutatására kézenfekvő tanári bemutató eszköz a közismert lézer-fénymutató.



Vigyázat!

Még a kisteljesítményű lézer is súlyos balesetet okoz, ha valakinek közvetlenül a szemébe világít!

(Az általános iskolában a lézerről első alkalmazásakor, a bevezetőben kell néhány szót mondani! Hangsúlyozzuk, hogy a lézer nem más, mint igen intenzív fényt adó fényforrás, aminek a gyakorlatban sok változata, és sokféle alkalmazási területe van. Még az iskolai kis teljesítményű lézerek használatakor is óvatosnak kell lenni, mert ha fénye közvetlenül szemébe világít valakinek, súlyos szemsérülést okozhat.)

A lézert az általános iskolában csak tanár használhatja!

A fénymutató rendeltetészerű használatakor a lézert egy-egy kiválasztott tárgy (vetítőernyő, kép, tábla stb.) számunkra fontos pontjára irányítjuk. A lézer bekapcsolásakor a kilépő keskeny fénynyaláb azonnal eléri a céltárgyat és arról visszaverődve általában diffúz módon szóródik. Ezt a szórt fényt érzékeli a szemünk! A szemünkbe érkező fénysugarak irányát visszafelé követve az ernyő lézerral megvilágított pontját fényfoltként látjuk. Ahogyan a fény és a látás

kapcsolatát illusztráló kísérlet során már hangsúlyoztuk, oldalról csak akkor vesszük észre a hosszú, nyílegyenes vonalként terjedő lézervényt, ha útja során apró részecskékbe (pl. levegőben lévő por, vízben lebegő homokszemcsék, vagy speciális festék-részecskék stb.) ütközik és azokon szóródva szemünkbe jut. (Erős fényű zöld lézerrel esetleg a csillagokra is rámutathatunk. Természetesen ilyenkor nem a csillagról visszaverődő fényt, hanem a levegőben lévő apró porrészecskéken, a lehűlő éjszakai levegőben kiváló parányi vízcseppeken oldalra szóródó fény vonalát látjuk, a fénynyaláb haladási irányát, mint valami óriási mutatópálcát követjük. A diszkó látványosságaként, a sötét égboltot pásztázó lézer fényszórók mozgó fényoszlopai messziről is jól megfigyelhetők. Gyakran megtörténik, hogy két fényoszlop keresztezi egymást. Az egyenes fénysávok úgy haladnak át egymáson mintha a másik ott sem lenne.



1.1. ábra: (bal) Kézi „csillagmutató” lézer, (jobb) egymást keresztező diszkó-fények

A közvetlen lézersugaras bemutatáson alapuló tárgyalás mellett fontos, hogy a köznapi tapasztalatokat is összhangba hozzuk a fényterjedéssel és a fénysugarakkal kapcsolatos kísérleti megállapításainkkal.

A 1.2. ábrán látható erdei felvétel azt illusztrálja, hogy a lézersugaras kísérletekkel bemutatott jelenségeket a mindennapi életben is sokszor tapasztaljuk, de ritkán tudatosítjuk. Az erdő párák levegőjében lebegő apró köd-cseppeken szóródik a lombok közt oldalról beeső fény. A fénysugarak egyenes terjedése jól megfigyelhető, sőt a fatörzsek függőleges vonalát alapul véve a fotóról a Nap horizont feletti magasságának szöge is meghatározható. (A kép elemzése akár feladatként is kiadható az általános iskolában. Megkérdezhetjük például, hogy milyen napszakban készülhetett a felvétel. Természetesen ilyen kérdésekre nem pontos választ várunk, hanem fizikai alapú kvalitatív következtetéseket.)



1.2. ábra: (bal) Napsugarak szóródása a levegőben lévő vízcseppeken és porszemeken, (jobb) füstszemcséken szóródó lámpafény



F1. Egyszerű kísérletek a lézerefény tulajdonságainak bemutatására

[Részletek >>>](#)

1.2.2. Fény és árnyék (alapozó szint)

A fény egyenes vonalú terjedésének következményei az árnyékjelenségek. A fény-árnyék kísérletek, a tapasztalatok értelmezése, az általános iskolában a játékos alapfeladatnak számít.



F2. Árnyékjelenségek megfigyelése, értelmezése

[Részletek >>>](#)

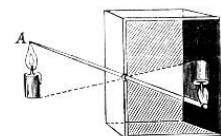


Hasonlóan tanulságos és érdekes alkalmazása az egyenes vonalú fényterjedésnek a lyukkamera (Camera obscura) képének értelmezése. Az eszközt a tanulók útmutatásunk alapján maguk is egyszerűen elkészíthetik.



F3. Lyuk-kamera (Camera obscura) készítése és egyszerű kísérletek

[Részletek >>>](#)



1.2.3. A fény terjedési sebességének mérése (középszintű tananyag)

A fénysebesség mérése nem egyszerű feladat, de elvi jelentőségű, ezért foglalkozni kell vele. Bevezető szinten elegendő, ha a diákoknak tudják, hogy a fény nagyon gyorsan, de mégis mérhető sebességgel (kb. 300 000 km/s) terjed. (A fénysebesség nagyságának érzékeltetésére kiszámíthatjuk, hogy mennyi idő alatt jut el a Nap fénye Földre, vagy elmesélhetjük a közelmúlt bravúros mérését, amikor úgy sikerült pontosan megmérni a Föld-Hold távolságot, hogy a Holdon elhelyezett tükörrre a Földről fény-impulzust lőttek, és mérték azt az időt, amíg a tükörről visszavert fényjel visszaérkezik a jeladóhoz. Megbecsülhetjük, a diákokkal közösen, két égitest távolságát, ha tudjuk, hogy a fény 1,28 másodperc alatt tette meg az oda-vissza az utat. A tükörről való fény visszaverődés tanításánál újra megemlíthető ez a kísérlet.

Középszintű iskolában az érdeklődő diákok nem elégednek meg a fénysebesség nagyságának számértékével, érdekli őket, maga a mérés is. A fény sebességét nagyságrendileg helyesen elsőként Römer Olaf dán csillagász határozta meg csillagászati megfigyelései alapján. Römer Olaf módszerének ismertetése a középszintű iskolában többszörösen is hasznos, egyrészt történehez kötve jobban rögzül a fizika iránt kevésbé érdeklődő diákokban is fénysebesség nagyságrendje,

másrészt csillagászati érdekességeket tartalmaz (Galilei-holdak), és nem utolsó sorban szép példa az interdiszciplináris gondolkodás bemutatására is.



Simonyi Károly: A Fizika kultúrtörténete

A fénysebesség meghatározásának történelmi módszereiről, köztük Olaf Römer csillagászati módszeréről is szemléletformáló képet ad, tanár és diák számára egyaránt.



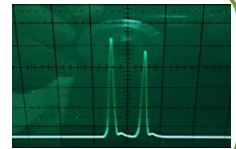
A fénysebesség iskolai demonstrációs (nagyságrendileg helyes eredményt adó) méréséhez elvben régóta megvan a lehetőség. Foucault 1850-ben kidolgozott „forgó-tükrös” módszere iskolai körülmények között is használható, a szükséges eszközök a taneszköz kereskedelemben hosszú idő óta kaphatók. Elterjedését nem annyira az eszközök ára, mint inkább az igényes előkészítés, beállítás és az értelmezés nehézségei gátolták.

Az elektronika gyors fejlődésével lehetővé vált a nagyon pontos időmérés, így a fénysebesség mérése már a tanteremben is út és idő mérésére egyszerűsödött. A kifejezetten iskolai demonstrációs célra kifejlesztett mérés eszközei a nemzetközi tanszer kereskedelemben beszerezhetők. (Az ELTE Fizikai Intézete rendelkezik ilyen mérési összeállítással.) A mérőkísérlet alapelve megegyezik a fentebb említett Föld-Hold távolságmérésével.



F4. „High-tech” tantermi demonstrációs mérés a fénysebesség meghatározására

[Részletek >>>](#)



1.2.4. Fényterjedés két közeg határán (alapszintű tananyag)

Homogén közegben a párhuzamos fénynyaláb irányváltoztatás nélkül egyenes irányban terjed. Új közeg határfelületéhez érve a beeső fénysugár részben visszaverődik, részben a határon átlépve a másik közegben terjed tovább egyenes vonalban, de általában korábbi terjedési irányától eltérő irányban.

A közeghatáron egyszerre megfigyelhető fényvisszaverődés és fénytörés egyszerűen bemutatható, ha egy pohár víz felszínére fentről ferdén fénynyalábot irányítunk (1.3. bal ábra). (A kísérlet legegyszerűbben lézer fénymutatóval végezhető el. A pohár víz feletti légtérbe fűjjünk finom port vagy füstöt, a vízbe pedig tegyünk egy csepp tejet, hogy a sugármeneteket oldalról jól láthassuk.)



1.3. ábra: (bal) A közegethatáron a lézer-fény nagyobb része megtörik, kisebb része visszaverődik. (jobb) A sima vízfelület tükröz, a tükörképet kicsit sötétebbnek látjuk, mert a fény jelentős része behatol a vízbe

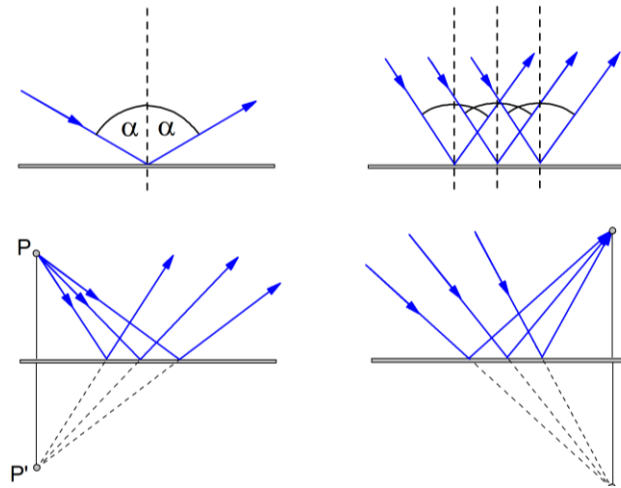
A közegek anyagi tulajdonságaitól függ az, hogy a fény nagyobb része visszaverődik-e, vagy az új közegben megváltozott iránnyal tovább halad. Az 1.3. ábra jobb oldalán bemutatott fotón az intenzitásviszonyok mutatják, hogy a levegőből a vízfelszínre eső fény nagyobb része megtörik, kisebb hányada visszaverődik.

A visszaverődés és a fénytörés jelenségét célszerű külön vizsgálni. A visszaverődést olyan anyagok határfelületén tanulmányozzuk, (pl. levegő-fém) ahol a visszaverődés dominál. A fénytörést ott, ahol a határfelületről visszaverődő fény csekély (pl. levegő-víz, levegő-üveg, levegő-plexi).

Bevezető szinten (általános iskola) a fényvisszaverődést részletesen és kvantitatív módon, a fénytörés jelenségét kvalitatív módon tárgyaljuk. A középiskolában a fénytörés törvényét (Snellius–Descartes-törvény) méréssel igazoljuk és feladatmegoldások során is alkalmazzuk.

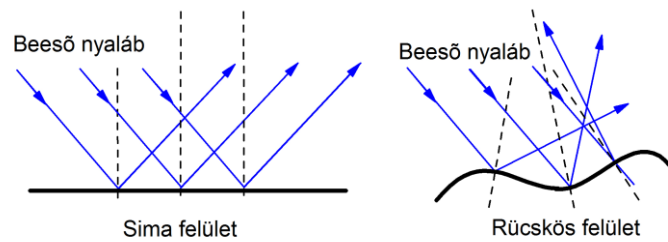
1.3. A fény visszaverődése (alapszintű tananyag)

A sima fémfelületre, üvegtükörrre érkező fénysugár döntő része visszaverődik, a felület tükröz. Már a jelenség egyszerű bemutatása során megfigyelhető, hogy a fénynyaláb beesésének irányát, illetve a tükör helyzetét megváltoztatva, változik a visszavert fény iránya is. E kétszeres függést egyszerűsítjük, amikor a fénysugár beesési és visszaverődési szögét is – megállapodás szerint – a beesési merőlegestől mérjük. Ennek segítségével megfogalmazhatjuk a tükrös visszaverődés törvényét, miszerint *a beeső és visszavert fénysugár és a beesési merőleges egy síkban van; a fénysugár visszaverődési szöge megegyezik a beesési szögével.* Ezt a törvényt már az általános iskolában elvégezhető mérések alapján is kimondhatjuk. Ezután érdemes bemutatni a tükrös visszaverődés alapeseteit (a párhuzamos fénynyaláb sugarai a tükrözés után is párhuzamosak maradnak, a széttartó sugárnyaláb a tükörről visszaverődve is széttartó, az összetartó nyaláb összetartó marad).



1.4. ábra: A tükrös visszaverődés alapesetei

A tükrös visszaverődéshez kapcsolva értelmezzük az átlátszatlan rücskös felületek diffúz fényszórását is. Ha a felület egyenetlen, akkor a felület különböző pontjaiban a beesési merőleges iránya nem azonos, így a beeső fénynyaláb párhuzamos sugarainak beesési szöge helyről helyre változik, ennek megfelelően a visszavert sugarak iránya is változó. Az eredetileg párhuzamos fénynyalábból a fénysugarak a féltér minden irányába verődhetnek vissza.



1.5. ábra: A fény visszaverődése sima, illetve rücskös felületről

A lemenő Napnak hullámzó vízfelületen való szabálytalanul változó visszaverődése okozza az aranyhíd jelenségét is. A törési törvény ismeretében az aranyhíd látószöge is könnyen meghatározható.



F5. Aranyhíd kialakulása hullámzó vízfelületen

[Részletek >>>](#)



A visszaverődéssel kapcsolatos kísérletek, mérések részletes leírása a tankönyvekben, illetve a különböző kísérletgyűjteményekben megtalálható.



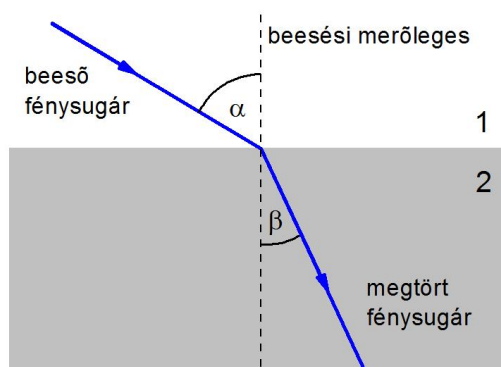
[Kísérletek, mérések a fény visszaverődésének tárgyalásához](#) (Fizikai kísérletek gyűjteménye I. VIII. 3 fejezet)



1.4. A fény törése (részben alapszintű, részben középszintű tananyag)

A fénysugár közeget határhoz érve behatol az új közegbe, iránya megváltozik, ez a fénytörés. A bevezető kísérletek során fontos megmutatnunk, hogy a fénysugár irányváltozása a két közegre jellemző, és a közeget határon átlépő fénysugár útja is megfordítható. Értelmeznünk kell az optikailag sűrűbb, illetve optikailag ritkább közeg fogalmát. Definícióként használhatjuk azt, hogy a fénysugár akkor lép optikailag ritkább közegből optikailag sűrűbbe, ha a törési szög kisebb, mint a beesési szög. (Szokásos megfogalmazása ennek, hogy ebben az esetben a fény a beesési merőlegeshez törik, míg fordított irányban haladva a beesési merőlegetől törik.) Hangsúlyoznunk kell, hogy az optikai sűrűség fogalma általában semmilyen kapcsolatban sincsen az anyag tömegsűrűségével. (Kivétel képeznek ez alól a gázok, amelyekre jó közelítéssel teljesül, hogy a nagyobb sűrűségű gáz optikai sűrűsége is nagyobb.)

Általános iskolában a töréssel kapcsolatban nem mehetünk tovább a kvalitatív megállapításoknál. Annyit azért a visszaverődés törvényének analógiájára megfogalmazhatunk, hogy *az új közeg határára érkező fény a közeg határán megtörik, és a beeső, és a visszavert fénysugár, valamint a beesési merőleges egy síkban vannak.* A törés mértéke a két közeg anyagi minőségétől és a fény színétől függ.



1.6. ábra: A fény törése (2-es tartomány optikailag sűrűbb)

A törés alapjelenségeit bemutathatjuk vizes káddal, Hartl-koronggal, illetve gombostűkísérlettel tanuló kísérlet formájában is.



Középiskolai osztályokban mérésrel igazolva kimondhatjuk a Snellius–Descartes-törvényt, és megfelelő matematikai ismeretek (szögfüggvények, függvényábrázolás) birtokában bevezethetjük a törésmutató fogalmát, az

$$n_{2,1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

összefüggéssel, ahol $n_{2,1}$ a fény haladási irányának megfelelően a második közegnek az elsőre vonatkozó relatív törésmutatója. A törésmutató tehát a két egymással határos közegre jellemző anyagjellemző. Amennyiben a fény optikailag ritkább közegből lép át optikailag sűrűbb közegbe, akkor a törésmutató nagyobb 1-nél, hiszen a beesési merőlegeshez törő fényre $\sin \alpha > \sin \beta$. A fénysugár útjának megfordíthatóságából azonnal következik, hogy

$$n_{1,2} = \frac{1}{n_{2,1}}$$

azaz az optikailag sűrűbb közegből optikailag ritkább közegbe lépő fény esetén a törésmutató kisebb, mint 1.

Megjegyzés:

- Érdemes megemlíteni, hogy amennyiben a fény vákuumból lép át a második közegbe, akkor a törésmutató csak a második közegtől függ, ezért abszolút törésmutatónak nevezzük. Célszerű továbbá azt is megemlíteni, hogy a törésmutatónak mélyebb fizikai tartalom is adható majd, a fény hullámtermészetének megismerésekor. Esetleg előre bocsátható a relatív törésmutatóra, illetve az abszolút törésmutatókra vonatkozó

$$n_{2,1} = \frac{c_1}{c_2}, \text{ illetve } n_1 = \frac{c}{c_1} \text{ és } n_2 = \frac{c}{c_2}$$

összefüggés, ahol c , c_1 és c_2 rendre a fény vákuumbeli, első, illetve második közegbeli terjedési sebességét jelenti. Az összefüggésekből azonnal látható, hogy a relatív törésmutató az abszolút törésmutatók hányadosával adható meg. Ez a magyarázata annak, hogy abszolút törésmutatóként gyakran a levegőre vonatkoztatott törésmutatót használjuk, hiszen a fény terjedési sebessége vákuumban és levegőben jó közelítéssel megegyezik.

A Snellius–Descartes-törvény ismeretében a törésmutató kísérleti meghatározását is javasoljuk. A mérésrel a megfelelő matematikai ismeretek birtokában a grafikonkészítést és függvényábrázolást is gyakorolhatjuk a felsőbb osztályokban.



F6. Műanyag-levegő határfelület törésmutatójának meghatározása Hartl-koronggal

[Részletek >>>](#)

1.4.1. Többszörös törés, teljes visszaverődés, diszperzió

A fény útját gyakran egymást követő sík felületeken keresztül kell követni. Gyakran használt optikai elem a plánparallel lemez és a prizma. A fénysugár az egymást követő sík felületeken ismételten megtörik, a sugármenet a törési törvény egymás utáni alkalmazásával számítással egyszerűen követhető, és a számítás eredménye kísérletileg ellenőrizhető. A geometriai optikai számítások jó alkalmat nyújtanak a matematika tananyaggal való koncentrációra. Felidézhetők a háromszögekre vonatkozó elemi geometriai, valamint trigonometriai ismeretek, de a prizma minimális deviációjának meghatározásakor a szélsőérték számításához szükséges differenciálszámítási ismeretekre is szükség lehet.



F7. Síklapokkal határolt törőközegek: fénytörés plánparallel lemezen és prizmán

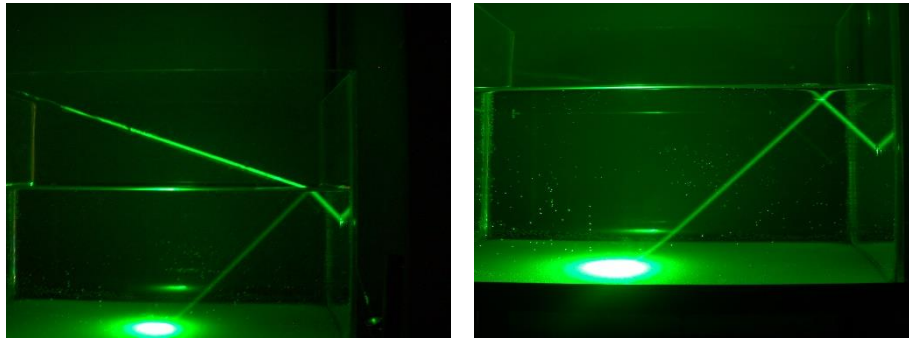
[Részletek >>>](#)

Nem szóltunk eddig két jelenségről – a teljes visszaverődésről és a prizma által alkotott színekéről –, amelyek mindegyike bemutatható általános iskolában is. Mindkét jelenség értelmezhető a geometriai optika törvényeivel, azonban igazán érthetővé csak a hullámoptika, illetve az elektromágneses fényelmélet keretében válik. Mindkettő, elsősorban a középiskolai tanításban, átvezetést képezhet a hullámoptika felé. A prizma színe egyszerűen értelmezhető azzal, hogy az üveg törésmutatója a fény színétől (azaz frekvenciájától) függ, a teljes visszaverődés esetén azonban nincs magyarázat arra, hogy a határszögnél nagyobb beesés esetén az optikailag ritkább közegről miért verődik vissza a fény.

Teljes visszaverődés (középszintű tananyag)

A tapasztalat szerint az optikailag sűrűbb közeg felől (abszolút törésmutatóját jelöljük n_1 -gyel) optikailag ritkább (abszolút törésmutatója legyen n_2) közeg határához érkező fénysugár ($n_1 > n_2$) nem hatol be az optikailag ritkább közegbe, hanem teljes visszaverődést szenved, ha a beesési szög nagyobb az α_h határszögnél. A jelenség vizes kádban a víz-levegő határfelületet alulról felfelé erős lézerrel megvilágítva könnyen bemutatható. A határszög elérésekor a törési szög éppen 90° lesz és a határszögnél nagyobb beesési szög esetén a törési törvény értelmetlenné válik. (A törési szög szinuszára egynél nagyobb érték adódna.) A természet „feloldja az ellentmondást”, a határszögnél nagyobb beesési szög esetén a visszaverődési törvénye „lép életbe”. Ekkor egyáltalán nincs a másik közegbe behatoló fénynyaláb, ezért beszélünk teljes visszaverődésről. A teljes visszaverődés nagyon fontos, mert sok természeti

jelenség és technikai eszköz működésének magyarázata kapcsolható hozzá (déliab, Fata Morgana, optikai szálak stb.).



1.7. ábra: (bal) A határszögnél kisebb beesési szögnél a lézervény nagy része megtörik, (jobb) növelve a beesési szöveget a teljes nyaláb visszaverődik

A törési törvény és a törésmutató fogalmának ismeretében a teljes visszaverődés jelensége is alkalmas az adott közegek egymáshoz viszonyított törésmutatójának kísérleti meghatározására.

$$n_{2,1} = \frac{\sin \alpha_h}{\sin 90^\circ} = \sin \alpha_h$$

Megjegyzés:

- A teljes visszaverődéssel kapcsolatban nyilvánvaló kérdés, hogy ha a fény nem lép be a másik közegbe, akkor hogyan „érezkeli” a teljes visszaverődést okozó határfelületet. Nos, erre az a magyarázat, hogy a fény kicsiny mélységbe teljes visszaverődés esetén is behatol a másik közegbe. Ennek bizonyítására Drude a következő kísérletet végezte. Simára csiszolt határlapú üvegtömb és levegő határfelületére fényt bocsátott, úgy, hogy a fény a határfelületen teljes visszaverődést szenvedjen. Ezután az üvegtömbhöz ugyanabból az anyagból készített másik üvegtömböt közelített. Amikor a két üvegtömb közötti rés igen keskenyvé vált, a visszavert fénysugár mellett egy megtört a másik üvegtömbbe belépő és ott a behatolási mélységgel rohamosan gyengülő fénysugár is megjelent. A jelenség csak a fény elektromágneses elmélete alapján magyarázható. Kimutatható ugyanis, hogy az elektromágneses hullámok még teljes visszaverődés esetén is kismértékben áthatolnak a közeghatáron, s mintegy „érezkeli” a másik közeg minőségét. A behatolási mélység a fény hullámhosszának nagyságrendjébe esik, azaz a behatoló fény gyorsan lecseng. Fennáll továbbá, hogy az optikailag ritkább közegbe átjutó fényenergia időátlaga zérus.



F8. Optikai szálak és alkalmazásuk

[Részletek >>>](#)

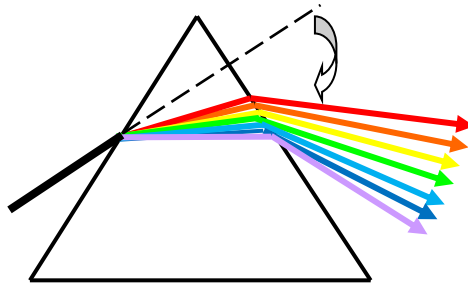


Diszperzió prizmán (alapszintű tananyag)

A prizmán való fénytörést mindenképpen fehér fényvel érdemes bemutatni. Izzólámpa fényével világítsunk meg keskeny rést, majd a mögé helyezett gyűjtőlencsével képezzük le a rést egy ernyőre. Fehéren világító vonalat kapunk. A lencse után helyezzünk a fény útjába prizmat, amin

a fénynyaláb kétszeres törést szenved. Az ernyővel követve a fénynyaláb útját, láthatjuk, hogy az izzólámpa fénye színekre bomlik, az ernyőn az összetett fehér fény folytonos spektruma jelenik meg. A prizma után újabb gyűjtőlencsét elhelyezve a spektrum újra fehér fénné egyesíthető.

A kísérlet során két dologra is érdemes felhívni a figyelmet. Egyrészt arra, hogy a diszperzió mértéke, a színes sugarak szétválásának mértéke a beesési szögtől is függ, másrészt pedig arra, hogy a prizmába való belépéskor a vörös színű fény törésszöge a legnagyobb, a lila színé pedig a legkisebb.



1.8. ábra: A fehér fény színeire bomlása prizmán való kettőtörés után

Minden korosztálynak elmondhatjuk, hogy ez a kísérlet azt bizonyítja, hogy a fehér fény összetett, különböző színű fénysugarak keveréke: a prizma anyagának törésmutatója a különböző színű fényekre más és más. A prizma diszperziója értelmezhető a geometriai optika törvényeivel, ha feltételezzük, hogy a törésmutató függhet a fény színétől. Ez a feltevés azonban önkényes, egyetlen jelenség leírására szolgáló kiegészítése az eddigi tanult törvényeknek.

Megjegyzés:

- Amikor a fényt a prizmával színeire bontjuk, majd egy másik prizmával újra fehér fénné egyesítjük, akkor Newton „experimentum crucis”-át, azaz perdöntő kísérletét ismételjük meg. Newton a színek színeinek újra fehér fénné egyesíthetőségével bizonyította, hogy a fehér fény valóban színek keveréke, és amikor a prizmával színekre bontjuk, akkor ez nem annak a következménye, hogy a prizma (pl. az üveg öntési hibáinak következtében) megváltoztatta a fény tulajdonságait (lásd Newton-prizma kísérletei [F9.](#) melléklet).
- A Fermat-elv vagy a Huygens-elv ismeretében azonban mélyebb magyarázatot is adhatunk. Ezekből az elvekből következik (levezethető) a törésmutató és a közegekben való haladási sebességek közötti

$$n_{2,1} = \frac{c_1}{c_2}$$

- összefüggés. A prizma szín bontását bemutatva felhívhatjuk a figyelmet arra, hogy a különböző színű fénysugarak más-más sebességgel haladnak az anyagban. Érdekességgként megemlíthetjük, hogy első közelítésben a diszperzió jelenségével magyarázható a napfény vízcseppeken való többszörös törésének eredményeként kialakuló szivárvány is.

- A prizma színekének vizsgálata a fénytán törvényrendszerének történeti útján is jelentős szerepet töltött be. Newton és Huygens vitája arról szólt, hogy a fény hullám vagy részecskék sokasága.



F9. Newton-prizma kísérletei

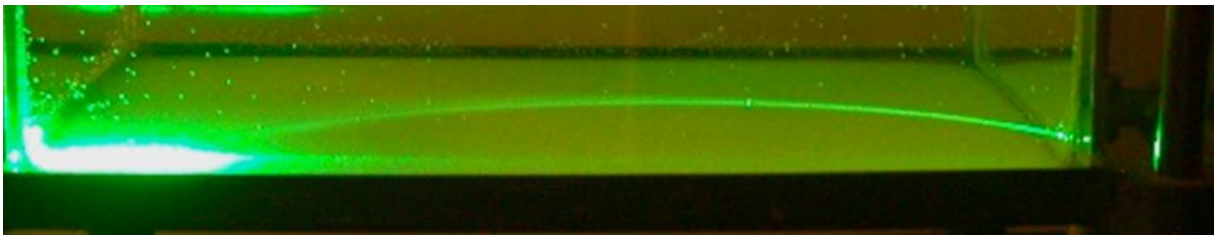
[Részletek >>>](#)



1.4.2. Folytonos törés (kiegészítő tananyag)

Folytonosan változó törésmutatójú közegek esetén a fénysugár útja is folyamatosan változik. A jelenség gyakran előfordul a természetben is, egyszerű kísérlettel jól szemléltethető:

50 gr cukrot öntsünk 100 ml vízbe, és hagyjuk hosszú órákig állni, hogy kiépüljön a folyamatosan változó cukor koncentráció. A tapasztalat szerint a csökkenő oldatsűrűséggel együtt csökken a törésmutató is. Az alulról felfelé haladó fénysugár optikailag egyre ritkább közegbe kerül, folyamatosan nő a törésszög, így bizonyos magasságba érve a sugár teljes visszaverődést szenved.



1.9. ábra: A fénysugár a csökkenő sűrűségű cukoroldaton áthaladva elgörbül

Hasonló módon jön létre a délibáb, illetve a Fata Morgana néven ismert érdekes légköri jelenség is. A levegőben a sűrűségképződés a hőmérséklet különbség hatására jön létre.



F10. Fénytörés a légkörben

[Részletek >>>](#)



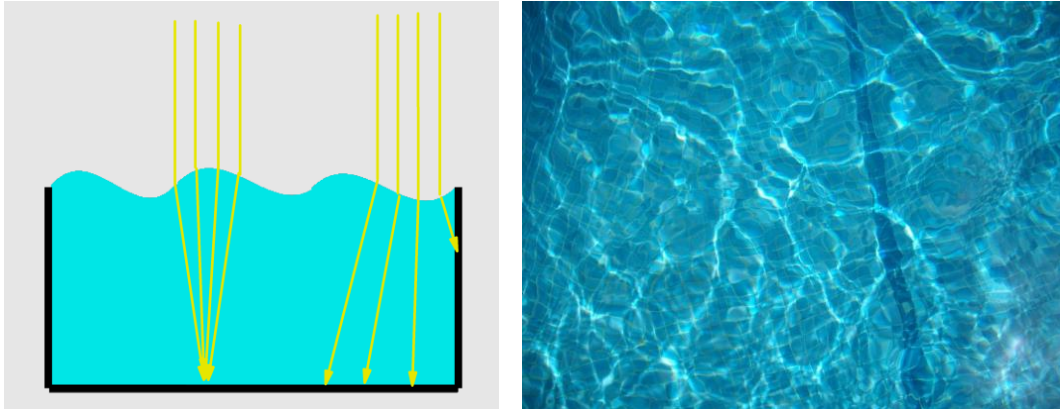
F11. A szivárvány

[Részletek >>>](#)



1.4.3. Törés görbült felületen (kiegészítő tananyag)

Görbült felületek esetén a beesési merőleges iránya a felület mentén változik. Töréskor a párhuzamos fénynyalábot az ilyen felület vagy szétszórja, vagy összegyűjti attól függően, hogy melyik közeg az optikailag sűrűbb, illetve, hogy a fénysugár homorú vagy domború felületre érkezik.



1.10. ábra: A hullámok következtében kialakult görbült alakzatok a görbületnek megfelelően gyűjtik vagy szórják a fényt

Gyakran láthatunk ilyet sekély, hullámzó vízfelület esetén, ha a hullámhegyek és hullámvölgyek által létrehozott görbült felület közel van a medence aljához. A hullámhegyek gyűjtik, a hullámvölgyek szórják a merőlegesen beeső napsugarakat. Ott, ahol hullámheggyel találkozik a fénysugár, a medence alján fényfoltot látunk. A mozgó vízfelszín miatt ez a kép persze nagyon változó lehet.

A legegyszerűbb görbült felületek a gömbök. A gömbfelületekkel határolt törőközegekkel az optikai leképezések tanulmányozása során foglalkozunk.

1.5. Optikai leképezés (alapszintű tananyag)

A geometriai optika egyik legfontosabb alkalmazási területe az optikai képalkotás egyszerű értelmezése. A diákoknak rengeteg tapasztalatuk van az optikai képalkotással kapcsolatban, amelyek összekapcsolhatóak az általános iskola felső osztályaiban, illetve a középiskolában matematikából szerzett ismeretekkel. A matematika órákon, mire a fénytán sorra kerül, már szerepelnek a geometriai leképezések és a függvények értelmezésével is foglalkoznak. Ezek az elméleti ismeretek alkalmasak arra, hogy a geometriai optikában szerzett tapasztalatokat rendezzük és a fogalmak tisztázatlan, pongyola részeit szigorúbb definíciók közé szorítsuk.

A diákok számos tapasztalata ellenére az optikai leképezés részletes tanulmányozása előtt érdemes megmutatni a kísérletezésben használt fontosabb leképező eszközöket, a sík és gömbtükröket, valamint a vékony lencsét. Érdemes felhívni a tanulók figyelmét, hogy ezeket az eszközöket a kísérletek során szinte mindig tengelyszimmetrikus elrendezésben használjuk. Amennyiben több eszközt is használunk a kísérletben, akkor optikai sínnel biztosítjuk, hogy a

rendszer minden elemének közös legyen a szimmetriatengelye. Ez a szimmetriatengely a rendszer optikai tengelye.

1.5.1. Fogalmak, definíciók (tanári háttéranyag)

A következőkben először sorra vesszük a fontosabb fogalmakat és egyszerűsítéseket, amelyek az optikai képalkotás tanulmányozásakor szerepet játszhatnak. Ennek a bevezetésnek az anyagát közvetlen és változtatás nélküli felhasználásra semmiképpen sem ajánljuk még emelt szinten fizikát tanuló gimnáziumi osztályban sem. A fogalmak és definíciók összegyűjtése a későbbi tényleges tanítási ajánlások pontos terminológiájának kialakítását, illetve a tanári áttekintést szolgálja.

Optikai értelemben képről akkor beszélünk, ha valamilyen tárgy (elsődleges vagy másodlagos fényforrás) pontjaiból kiinduló széttartó fénysugarak nem közvetlenül, hanem eredeti irányukat megváltoztatva jutnak a szemünkbe. Szemünk a megváltozott sugarak tartópontját érzékeli a fény forrásának. Ezt a pontot nevezzük a fénysugarak valódi kiindulópontját adó tárgyponthoz képezésnek. A fénysugarak irányváltozásának oka a tükrös visszaverődés vagy a fénytörés. Az irányváltozást a tükröző felület alakja, illetve a fénytörő közeg törésmutatója és a határfelületének alakja szabja meg. Geometriai értelemben egzakt, pontszerű leképezés akkor valósul meg, ha a tárgy és képpont között a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű. (minden tárgyponthoz egy és csak egy képpont felel meg, és minden képpont egy és csak egy tárgyponthoz képezésnek a képe).

Megjegyzés:

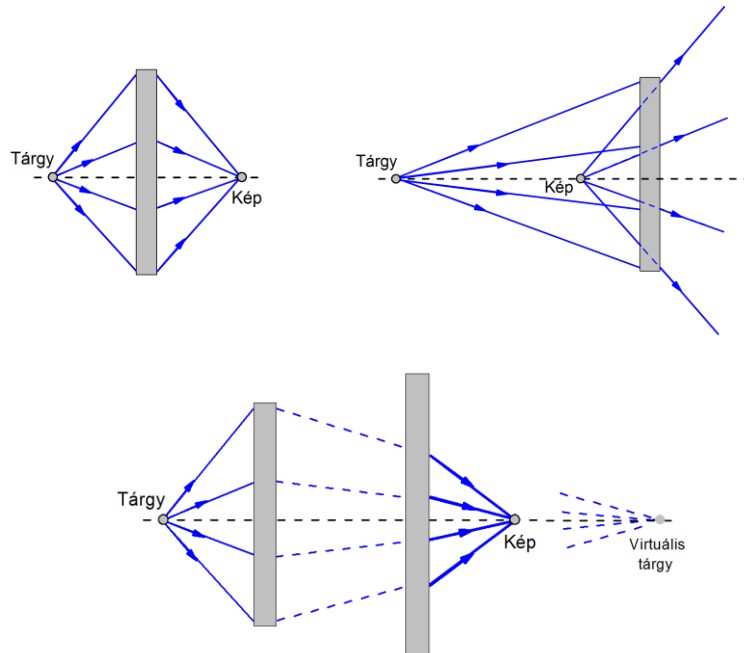
- Egzakt leképezéskor a leképező eszköz a geometriai teret, vagy annak egy részét képezi le önmagára, vagy a tér egy részére. A tárgyponthoz képezésnek a képpontokhoz képezésnek nevezzük. Ilyen leképezést csak a síktükör valósít meg. Minden más esetben az eredetileg egyetlen tárgyponthoz kiinduló sugarak a tér egy kisebb tartományából jutnak a szemünkbe, amit a szemünk általában pontszerűnek érzékel. (Szemünkbe csak keskeny fénynyalábok jutnak, amelyek tartópontjának képe a retinán már pontszerű képként jelentkezik. Hasonló a helyzet, mint a lyukkamera által alkotott képnél.)

A tárgyról mindig széttartó nyaláb indul ki. Ha valamilyen optikai eszköz az egy pontból kiinduló sugarakat közelítőleg egy pontban egyesíti, s szemünk az ebből a pontból kiinduló nyalábot érzékeli, akkor valódi képről beszélünk. Ha az optikai eszköztől széttartó fénysugarak érkeznek szemünkbe, és azokat szemünk egy pontból látja kiindulni, (a szemünkbe érkező fénysugarak meghosszabbításában) akkor virtuális képről beszélünk. A kétféle képet legkönnyebben úgy különböztethetjük meg, hogy a valódi kép felfogható ernyőn, a virtuális kép azonban nem.

Mint már említettük a tárgyponthoz képezésnek mindig széttartó fénynyaláb indul ki. Két leképező eszköz egymás utáni használatakor az első által alkotott kép jelenti a második számára a tárgyat. Megtörténhet azonban az, hogy az egyik optikai eszközzel valódi képet állítanánk elő, de a fénysugarak útjába újabb leképező eszközt helyezünk, mielőtt a sugarak a képpontban

találkoznának. Ekkor a második eszközt összetartó fénynyaláb éri, amelynek tartópontját csak a fénysugarak meghosszabbítása jelöli ki, valójában nem létezik. Ilyenkor a második eszköz ezt a nem létező tartópontot képezi le. Az ilyen tárgyat nevezzük virtuális tárgynak.

A 1.11. ábra összefoglalva mutatja a valódi és virtuális tárgy, illetve kép jellegzetes sugármeneteit.



1.11. ábra: Valódi tárgy-valódi kép, valódi tárgy-virtuális kép, virtuális tárgy, valódi kép

Az optikai leképező eszközök legfontosabb jellemzője a fókuszpont és a fókusz távolság. Ezek a fogalmak kulcsszerepet játszanak mind a képszerkesztésben, mind pedig a leképezési törvényben. A fókusz távolság reciproka lényegében az optikai eszköz „törőerejét” mutatja, hiszen minél kisebb a fókusz távolság, annál nagyobb mértékben törik meg az eszköz hatására a beeső fénynyaláb. Tetszőleges optikai rendszer fókuszpontja az a pont, ahol a rendszer optikai tengelyével párhuzamosan beeső fénysugarak összegyűlnek, illetve az a pont, amelyből kiinduló fénysugarak párhuzamosan hagyják el a rendszert. Ha a rendszer a beeső párhuzamos fénysugarakat egy pontba gyűjti össze, akkor a fókuszpont valódi. Ha a rendszert elhagyó fénysugarak széttartóak, és csak nem valódi fényt jelentő meghosszabbításuk metszik egymást, akkor a fókuszpont virtuális. Fókusz távolságnak a fókuszpont optikai rendszertől mért távolságát nevezzük.

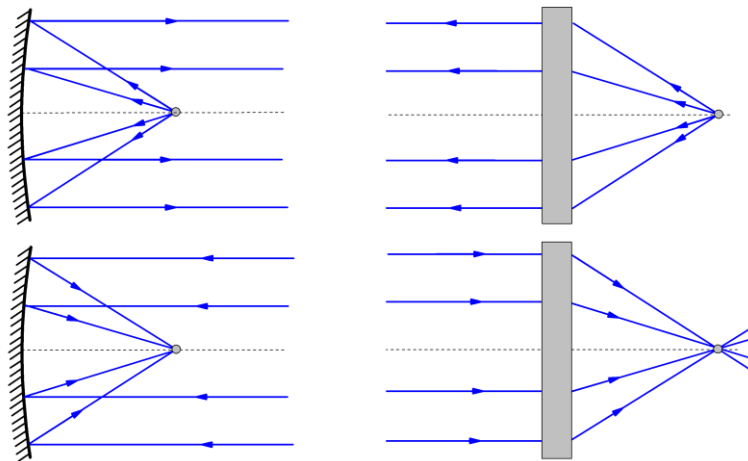
Megjegyzés:

- A leképezési törvény tárgyalása során mutatjuk meg, hogy a virtuális tárgy, a virtuális kép és a virtuális fókusz távolság értékét célszerű negatív előjelűnek tekinteni.

1.5.2. Leképezés az általános- és a középiskolában

Az optikai képalkotás tárgyalását az általános iskolában képszerkesztésre alapozzuk. Annak ellenére, hogy azonnal beleütközünk a virtuális kép fogalmába, a képszerkesztést a síktükörrel

érdeemes kezdeni, mert a síktükör esetén visszaverődés után a tárgypontból kiinduló fénysugarak mindegyike a képpontból látszik kiindulni. A leképezés tehát matematikai értelemben is egzakt. Érdeemes rámutatni, hogy egzakt leképezés esetén elegendő két sugármenetet ismerni a kép pontos megszerkesztéséhez, hiszen bármely két fénysugár a képpontban metszi egymást. Ez a tény használható fel a későbbiekben a gömbtükrök és a lencsék által alkotott képnek a „nevezetes” fénysugarakkal való megszerkesztéséhez. A síktükör képének megszerkesztéséhez csak a fény visszaverődés törvénye szükséges, a gömbtükrök és lencsék esetén azonban a fókuszpont fogalmára is szükség van. Ha pontosan akarunk szerkeszteni, akkor célszerű a szerkesztés során egyszerűsített geometriával dolgozni. Az egyszerűsített szerkesztéshez a tükröt és a lencsét az optikai tengelyre merőleges síkkal (fősík) helyettesítjük. A fősíktól mérjük a tárgy és kép távolságát, valamint a fókusz távolságot. Az erre a síkra az optikai tengellyel párhuzamosan beeső fénysugarak visszaverődés, illetve törés után úgy folytatják útjukat, hogy vagy maguk a fénysugarak, vagy a haladási irányukkal ellentétes irányban vett meghosszabbításuk a fókuszpontban metszik egymást (lásd 1.12. ábra). A fénysugár útjának megfordíthatóságából azonnal adódik, hogy a fókuszon átmenő fénysugarak az optikai tengellyel párhuzamosan folytatják útjukat.



1.12. ábra: Optikai tengellyel párhuzamosan beeső fénysugarak (visszaverődés, illetve törés után) a fókuszpontban metszik egymást, illetve az onnan kiinduló fénysugarak az optikai tengellyel párhuzamosan haladnak tovább

Feltételezzük, hogy ez a síkba összenyomott eszköz tökéletes leképező eszköz, amely minden tárgyponthoz egyértelműen rendel képpontot. A fősíkkal végzett szerkesztések könnyen elvégezhetők és mindig az egzakt leképezésnek megfelelő eredményt adják. A képpont megszerkesztéséhez elegendő ez a két *nevezetes sugármenet*, amelynek létezése a fókuszpont tulajdonságaiból következik, így, ha a szerkesztést négyzethálós papíron méretarányosan végezzük (pl. a tárgy és a lencse távolságát és a lencse fókusz távolságát ismerve arányosan rajzolunk) a megszerkesztett kép lencsétől való távolsága a rajzról leolvasható, a kapott távolság egyszerű kísérlettel is igazolható. A képszerkesztés így lényeges előrelépés a leképezés kvantitatív tárgyalása felé, jóval több a megfigyelések egyszerű összefoglalásánál.

A tanítás során a tükrök és a lencsék képalkotásának tárgyalásakor minden esetben újra és újra át kell gondolni a fenti szerkesztéssel kapcsolatos lehetőségeket és azt, hogy az egzakt leképezéssé tett eljárás milyen közelítéseket tartalmaz. A középiskolában az általános iskolai

képszerkesztés geometriai tulajdonságaira építve egyszerűen levezethető a *leképezési törvény*. A törvény segítségével pontos szerkesztés nélkül vázlatrajzok alapján számítással oldhatjuk meg az optikai feladatokat. A lencsetörvény meghatározásával a geometriai optika közelítései már mennyiségileg is világossá tehetők.

A képalkotás természetesen nemcsak a geometriai optika egyszerű módszereivel tárgyalható, hanem a hullámoptika alapján is. Ennek részletes tárgyalásával a középiskolában nem foglalkozunk, csak néhány speciális probléma kapcsán jön elő. Így például az optikai eszközök korlátozott felbontóképességének magyarázatára. Szakköri kiegészítő anyagként a képalkotáshoz kapcsolódva tárgyalható a háromdimenziós képalkotást megvalósító holográfia.

1.5.3. A síktükör képalkotása (alapszintű tananyag)

A síktükör képalkotásának megértetése a diákokkal, az általános iskolai optika egyik kiemelt feladata. Ha a síktükör képét tudja értelmezni a kisdíák, nagy valószínűséggel a többi optikai eszköz által létrehozott kép sem fog nehézséget okozni.

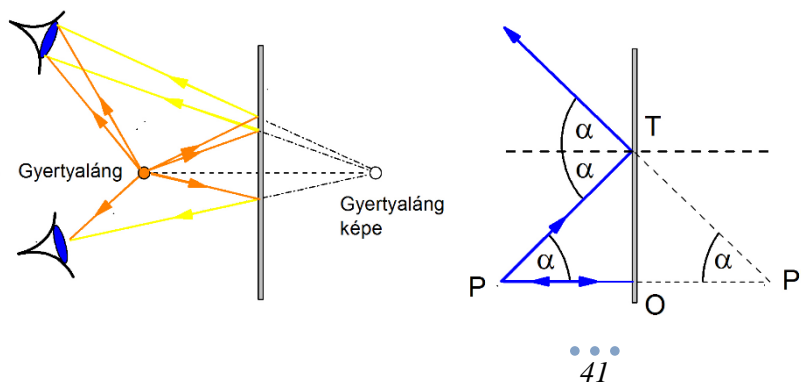
A témát a síktükör képalkotására vonatkozó hétköznapi ismeretek összegyűjtésével, megbeszélésével érdemes kezdeni, majd a pontszerű fényforrás visszatükrözésének példáján vezetjük be a virtuális kép fogalmát. Ezt követően térünk rá a kiterjedt testek képének értelmezésére.

Pontszerű fényforrás tükörképe

Helyezzünk égő gyertyát az asztalra! A gyertyaláng a tér minden irányába, gömbszimmetrikusan bocsát ki fénysugarakat. Az osztály diákjai, ha gyertya felé néznek, jól látják a gyertyát, hiszen a minden irányba terjedő sugarakból mindnyájuk szemébe bőven jut.

Helyezzünk nagyobb síktükröt a gyertya mögé! (A tükör legyen viszonylag közel a gyertyához, hogy az oldalsó padokban ülő diákok is lássák a tükörképet.) A tükör elhelyezése után a korábban letett gyertyán túl a diákok egy második gyertyát is látnak, ami mintha az elsővel egyvonalban, de a tükör mögött állna, és még a lángja is egyszerre mozdul az elsővel.

Vizsgáljuk meg, hogyan jön létre a láng tükörképe! A szerkesztéshez érdemes megbeszélni a diákokkal, hogy ha a láng mérete lényegesen kisebb, mint a tükör és a gyertya távolsága, a gyertyaláng pontszerűnek tekinthető fényforrás, így sugarai egyetlen pontból gömb szimmetrikusan kiindulónak tekinthetők. A geometriai megfontolásokhoz kiválaszthatjuk a láng egyetlen rögzített pontját, s akkor a láng mérete nem befolyásolja a gondolatmenetet.



1.13. ábra: Pontszerű fényforrás tükörképe

A gyertya világító lángjából széttartóan kilépő sugarak közül több-kevesebb (ez a tükör nagyságától és a gyertya tükör távolságtól függ) beleütközik a tükörbe és a visszaverődik. Amint a 1.13. ábra bal oldalán is látszik, a kis lángból kiinduló széttartó sugarak a visszaverődés után is széttartóak.

Itt fontos, hogy tisztázzuk szemünk szerepét a kép érzékelésében, és ennek kapcsán vezethetjük be a virtuális kép fogalmát. Az ábrában két szem sematikus rajzával két megfigyelőt is feltüntettünk. A megfigyelő szemébe a pupilla nyílásán keresztül csak nagyon kis nyílásszögű fénykúpban jutnak be sugarak. Esetünkben mindkét megfigyelő szemébe jutnak olyan széttartó fénysugarak, amelyek közvetlenül a lángból indultak (narancssárga sugár) és olyanok is, amelyek a tükörről visszaverődve érkeztek (citromsárga sugár). Szemünk automatikusan onnan látja jönni a sugarakat, ahol a beérkező sugárirányok visszafelé meghosszabbítva találkoznak. (A közvetlenül a gyertyáról érkező sugarak metszéspontja maga a gyertya lángja.) A tükrös visszaverődés után a szemünkbe érkező széttartó sugárnyalábot úgy érzékeljük mintha meghosszabbításuk tükör mögötti metszéspontjából indulnának ki. A tükörről visszaverődő sugarak látszólagos kiindulási pontját a gyertyaláng képének nevezzük. Mivel a sugarak valójában nem a *képpontból* jönnek, csak úgy látszik, mintha onnan indulnának, ezért látszólagos (virtuális) képről beszélünk.

A tükrös visszaverődés törvényéből következik, hogy a láng látszólagos képe ugyanolyan távol van a tükör mögött, mint a gyertyaláng a tükör előtt. Ezt igazolja a 1.13. ábra jobb oldali képén látható szerkesztés. Amennyiben a diákok matematikából már foglalkoztak az egybevágó háromszögekkel, akkor a bizonyítás egyszerű. Az ábrán látható POT és P'OT háromszög egybevágó, hiszen megfelelő szögeik megegyeznek és az OT oldaluk közös. Így a PO és P'O távolság, vagyis a tárgy és képtávolság is egyenlő. Még egyszerűbb a helyzet, ha a tengelyes tükrözés is ismert már matematikából. Amennyiben ezek az ismeretek nem állnak rendelkezésre, akkor 4-5 sugármenetnek a visszaverődési törvény szerinti pontos megszerkesztéséből általánosítva vonhatjuk le a következtetést, hogy síktükör esetén a kép és tárgytávolság megegyezik

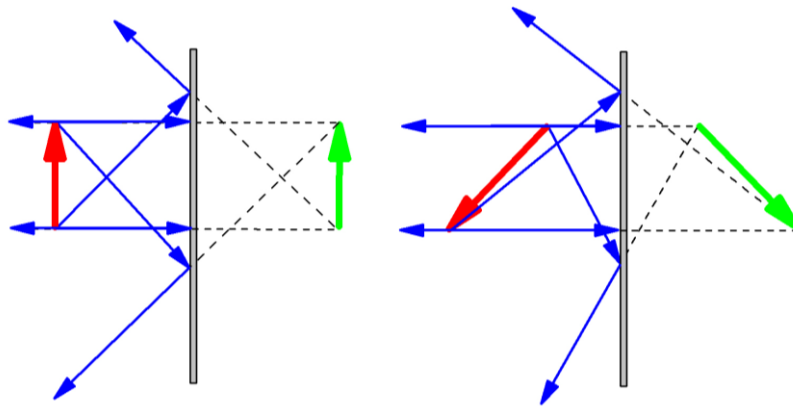
A tükrös leképezés tulajdonságainak ismeretében tetszőleges pont képének a megszerkesztéséhez elegendő a tárgy-pontból kiinduló sugarak közül kettő visszaverődését megszerkeszteni. A képpontot a két sugár tükör mögötti meghosszabbított vonalának metszéspontja adja. Erre sincs azonban szükség, ha a tükörré merőlegesen beeső sugárral dolgozunk, hiszen ez önmagába verődik vissza, így a szögek megszerkesztésével nem kell bajlódni, csak a beeső sugár egyenesét tükör mögött meghosszabbítani, és rámérni a tükör túloldalára a tárgytávolságot. Az összes többi fénysugár, ami a tárgy-pontból kilépve elérte a tükröt és visszaverődik, az előbbi két sugár segítségével megszerkesztett ponton halad át. Mint már említettük a síktükör ebből a szempontból kitüntetett a leképező eszközök között, mert az egyetlen, amely pontszerű leképezést valósít meg.

Kiterjedt tárgyak tükörképe (középszintű tananyag)

Általában a tükörben nem pontszerű fényforrás, hanem kiterjedt test (kiterjedt fényforrás) képét nézzük. A kiterjedt fényforrás minden egyes pontjából széttartó sugarak indulnak ki és a

tükörről visszaverődve minden tárgypontnak létrejön a képpontja. A képpontok szemünkben a tárgyhoz hasonló képet adnak. A síktükör képalkotása „távolság- és szögtartó”. Ez azt jelenti, hogy a kiterjedt tárgy három tetszés szerint kiválasztott pontját összekötő szakaszok hossza, illetve az azok által bezárt szög megegyezik a három képpont megfelelő szakaszának hosszával, illetve szögével. A tárgy és a kép geometriailag egymással egybevágó alakzatpár.

A kiterjedt testek képének szerkesztéséhez síkban legalább két, térben legalább három különböző pont képének megszerkesztése szükséges. Az iskolai képszerkesztések során a kiterjedt testeket általában egy nyíl ábrázolja. A kép megszerkesztéséhez a nyíl két végpontjának képét kell megszerkesztetni, a két képpontot összekötő szakasza adja a teljes képet. Ha a tárgy-nyíl merőlegesen áll a tükör síkjának normálisára, akkor a képnek is hasonlóan merőlegesnek kell lenni a normálisra. A 1.14. ábra a legegyszerűbben szerkeszthető merőleges állású és egy általános helyzetű nyíl (tárgy) képének szerkesztését mutatja. Megjegyezzük, hogy a szerkesztésben olyan sugarakkal is dolgozhatunk, amelyek a valóságban nem vehetnek részt a képalkotásban, mert például a tükör túl kicsi. A tükröt gondolatban meghosszabbíthatjuk, hiszen a síktükör képalkotása nem függ a tükör méretétől.



1.14. ábra: Kiterjedt test tükörképének szerkesztése



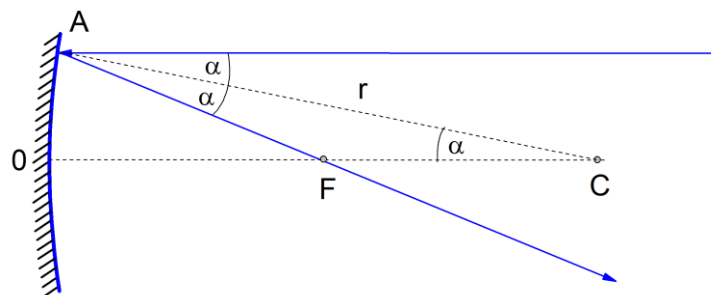
A síktükör képalkotását igazoló kísérletet mutat a fotó. Két egyforma gyertya közé, a gyertyákat összekötő egyenes felezőpontjában függőleges üveglapot állítottunk. A hozzánk közelebbi gyertyát meggyújtottuk. A gyertyák közt álló üvegen keresztül nézve úgy látjuk, mintha mindkét gyertya égne. Az üveglemez részben áttereszti, részben visszaveri a rá eső fényt. A láng tükörképe éppen az üveg mögött álló, de nem égő gyertyára esik, ezért úgy látjuk, mintha az is égne.

1.15. ábra: A meggyújtott gyertya lángja a tükör mögött lévő, nem égő gyertyára képződik le

1.6. Gömbtükrök képalkotása (középszintű tananyag)

A görbült felületű tükrök közül csak a kis nyílásszögű homorú, illetve domború gömbtükrök képalkotásával foglalkozunk. A gömbtükrök tulajdonságait kísérletekre alapozva kezdjük tárgyalni, először a homorú tükrökkel foglalkozunk, amelyek sugármenetei könnyen követhetőek. A homorú tükrök képalkotásának tárgyalásakor érdemes Hartl-korongra szerelt kétdimenziós modellen bemutatni, hogy a tükrös visszaverődés szabályai itt is érvényesek. Egyszerűen bemutatható, hogy az optikai tengellyel párhuzamos sugarak visszaverődés után egy ponton a fókuszponton haladnak keresztül. Már általános iskolában megmutathatjuk azonban, hogy ez csak közelítőleg érvényes, nagyobb nyílásszögű tükröt használva a fókuszpont az optikai tengely egy szakaszává szélesedik. Középszintű iskolában itt érdemes megmutatni a gömbtükör fókusz távolságának és görbületi sugarának összefüggését, amit a Hartl-korongon ellenőrizni is tudunk. A gondolatmenet egyben rámutat arra is, hogy az összefüggés csak közelítőleg és kicsiny nyílásszögű tükrök esetén érvényes.

A Hartl-korongos bemutatóhoz kapcsolva célszerű definiálni a későbbi képszerkesztések szempontjából fontos alapfogalmakat (optikai tengely, optikai középpont, geometriai középpont, fókuszpont, fókusz távolság, fókusz sík stb.). A Hartl-korongos bemutató azért fontos, mert a kísérlet nagyon hasonló elrendezésű a későbbi, papíron végzett kétdimenziós szerkesztésekhez, így közvetlenül alapozza meg a szerkesztések fizikai tartalmát. A kétdimenziós modell után valódi homorú gömbtükörrel folytatjuk a kísérletezést. Hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a tükör tengelyszimmetriája miatt a korábbi kétdimenziós elrendezés a tükör bármelyik, az optikai tengelyt tartalmazó síkmetszetével azonosítható. Határozzuk meg a tükör fókusz távolságát, majd távolról közelítsünk a tükörhöz fényforrást (pl. kis kompaktlámpát) és figyeljük meg, hogyan változnak a távolság csökkenésével a kép jellemzői. A megfigyeléseket érdemes azonnal szerkesztéssel is illusztrálni a táblán, illetve a tanulók füzetében. A táblai munka közben mutatjuk be a tanulóknak a „nevezetes sugarak” használatát. A homorú tükör képalkotásának vizsgálata során kiemeljük, hogy a tárgy távolságától függően valódi és látszólagos kép is keletkezhet.



1.16. ábra: Homorú gömbtükör az optikai tengelyével párhuzamosan érkező nyalábot a fókuszpontba (F) töri. C a gömb középpontja

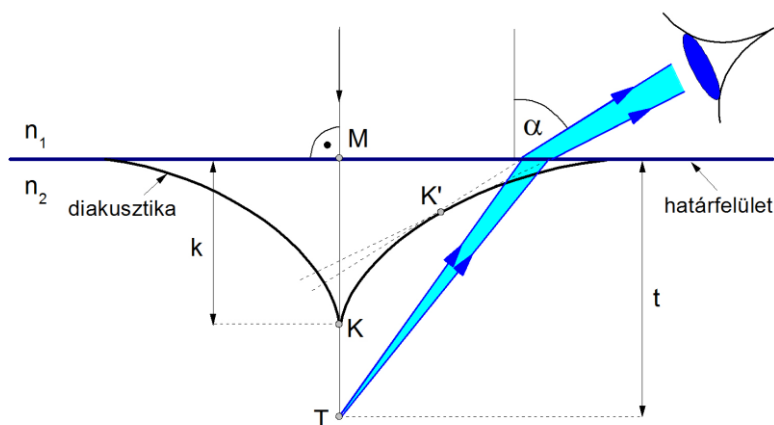
Középszintű iskolában a szerkesztést a leképezési törvény matematikai megfogalmazásával és a geometriai optika közelítéseinek mennyiségi jellemzésével bővítjük.



1.7. Leképezés sík közeghatáron történő fénytörés következtében (emeltszintű tananyag)

A képalkotás a közfelfogásban a lencsékhez kötődik. Ezért szemléletformáló szerepe van annak, hogy bemutassuk; már két átlátszó közeg sík határfelületén megtörő fénysugarak esetén is képalkotásról beszélhetünk. Ha a fénysugarak az egyik közegben lévő tárgyról a határon irányt változtatva jutnak a szemünkbe, akkor más pontból látjuk őket kiindulni, mint ahonnan valóban indulnak. A kép helye attól függ, hogy a megfigyelő milyen irányból néz a határfelületre.

A jelenséget egyszerű képszerkesztéssel tárgyaljuk. Az alábbi ábra azt az egyszerű esetet illusztrálja, amikor a vizes medence alján lévő pontszerű tárgyat fentről különböző irányokból nézzük.



1.17. ábra: Folyadékfelszín alól induló és megtörő fénysugarak és képalkotás

A pontszerű tárgyról induló széttartó sugárnyaláb sugarai közül azok, amelyek a teljes visszaverődés határszögénél kisebb szögben érik el a határfelületet, a határon megtörve lépnek ki a levegőbe, de változatlanul sugarasan széttartóak maradnak. A képalkotás annak köszönhető, hogy szemünkbe csak keskeny fénynyaláb jut, amelynek tartópontját a szem egy pontnak érzékeli. A 1.17. ábra adott szem helyzet mellett mutatja a képalkotásban résztvevő keskeny nyalábot (kékkel színezett terület). A kétágú görbe, az úgynevezett diakusztika a különböző irányból nézett T tárgy pont képhelyzeteit köti össze. A görbe csúcspontja a merőleges ránézés esetén létrejövő kép. A jelenséget egyszerű kísérlettel is szemléltethetjük:

Helyezzünk átlátszatlan falú tál aljára (a falhoz közel) pénzérmét! Keressünk olyan megfigyelői pozíciót, amelyből a tálra nézve az érmét nem látjuk, mert takarásban van! Öntsünk vizet a tálba! Ha a tálban a vízszint elég magas, akkor az érme láthatóvá válik, pedig a megfigyelési pozíción nem változtattunk. Természetesen szemünket állványra szerelt fotókamera is helyettesítheti. A mellékelt fotók az utóbbi módon készültek.



1.18. ábra: Az érme az üres tálban nem látható, a tálat vízzel feltöltve, képe láthatóvá válik; (jobb) az érméből kiinduló fénysugár útja

Amint a magyarázó ábrán látható, a pohár alján lévő érméről kiinduló fénynyaláb a víz-levegő határfelülethez érve megtörik, irányt változtatva jut a szemünkbe. Szemünk (és a kamera is) az érme virtuális képét látja a megtört fénysugár meghosszabbításában.

1.8. Lencsék képképzése

A lencsék képképzésének tanítása során hasonló gondolatmenetet követünk, mint a gömbtükrök esetén. Fontos rámutatni arra, hogy görbült felületek esetén a beesési merőleges iránya pontról pontra változik, ez az oka annak, hogy a lencsék a párhuzamos fénynyalábot vagy egy pontba gyűjtik, vagy pedig úgy szórják, mintha a nyaláb egy pontból indult volna ki. Az általános és a középiskolában is csak vékony lencsék képképzésével foglalkozunk, azaz olyan lencsékkel, amelyek legnagyobb vastagsága is sokkal kisebb, mint a fókusz távolságuk.

1.8.1. A fókusz fogalma (alapszintű tananyag)

A lencse fénytörésének jellemzésére a tükrökhöz hasonlóan először a fókusz, illetve a fókusz távolság fogalmát vezetjük be. Az alapozó oktatásban kísérleti alapon megkülönböztetünk gyűjtő- és szórólencsét majd meghatározzuk a fókusz, illetve a fókusz távolság fogalmát. A fókusz (gyűjtőpont) az a pont, ahol az optikai tengellyel párhuzamosan érkező fénysugarak a lencse után összegyűlnek, a fókusz távolság a lencse és a fókuszpont távolsága. Gyűjtőlencse esetén ennek megértése még 7. évfolyamon sem jelent gondot. A szórólencse látszólagos fókuszpontja és fókusz távolsága már jóval nehezebben érthető a diákoknak. Az alapfogalmak bevezetését a Hartl-koronra helyezett kétdimenziós lencsemodellel végzett kísérletekkel érdemes illusztrálni. Fontos, hogy a kísérletek során megfigyelt jellemző sugármeneteket a későbbi képszerkesztés előkészítésére azonnal táblai rajzon, illetve a füzetben is rögzítsük.

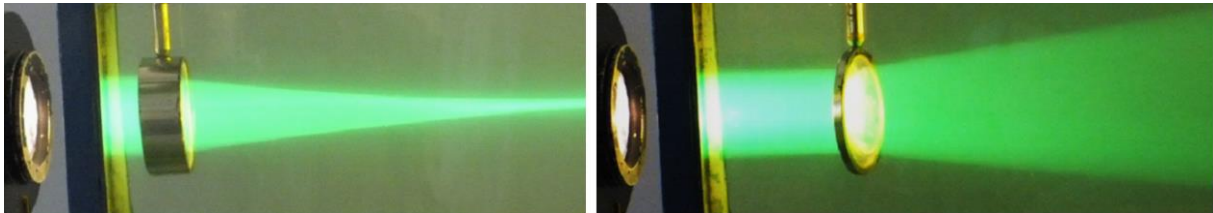
1.8.2. A leképezési törvény (emelt szintű tananyag)

A középiskolában az általános iskolai ismereteket azzal bővítjük, hogy megadjuk a fókusz távolság, a törésmutató és a lencse alakját meghatározó görbületek kapcsolatát:

$$\frac{1}{f} = (n_{a,b} - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

ahol f a fókusz távolság, $n_{a,b}$ a lencse anyagának a környező közegre vonatkoztatott relatív törésmutatója, R_1 és R_2 a lencsét határoló két gömbfelület görbületi sugara.

A formula használatakor fontos a görbületi sugarak előjelezése. Ha a lencse határfelülete kifelé domború, a görbületi sugár értéke pozitív ($R > 0$), homorú határfelület esetén pedig negatív. A tapasztalat szerint gyűjtőlencsék esetén a fenti képlettel számolva a fókusz távolságra pozitív érték adódik. Szórólencsék esetén a fókusz távolság negatív, a lencsére eső, az optikai tengellyel párhuzamos fénynyaláb a lencse után széttartóvá válik, a széttartó nyaláb tartópontja kijelöli a lencse virtuális fókuszpontját. A fókusz távolság előjelét természetesen nemcsak a görbületi sugarak határozzák meg, hanem a relatív törésmutató értéke is. Ez utóbbi szemléltetésére érdemes bemutatni, hogy a vízbe merített domború levegőlencse (ilyen lencse házilag is elkészíthető a kémiai kísérletekhez használt „óraüvegek” összeragasztásával) szórólencseként működik, míg a homorú levegőlencse a vízben gyűjtőlencse.



1.19. ábra: A homorú levegő lencse vízben összegyűjti a fényt, a domború levegő lencse viszont szórja

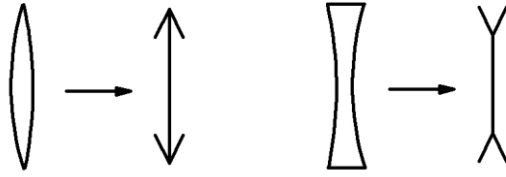
1.8.3. A gyűjtő- és szórólencse képalkotása (alapszintű tananyag)

A lencsék képalkotását az általános iskolában lényegében kvalitatív szinten vizsgáljuk. Természetes módon, a gyűjtőlencsékkel végzett kísérletekkel érdemes kezdeni. Figyeljük meg, hogyan változik a gyűjtőlencse világító tárgyról (pl. égő gyertya, vagy jól látható izzószálú, kis teljesítményű izzólámpa) alkotott képe, ha a tárgyat messziről közelítjük a lencse felé, és egy ernyővel megkeressük a képet. A tapasztalatokat szóban is és szerkesztéssel is lépésről lépésre rögzítjük.

A szerkesztést meg kell tanítani a gyerekeknek! Ebben sokat segít, ha a tükrökre vonatkozó egyszerűsített szerkesztési eljárást alaposan végiggondoltuk és begyakoroltattuk a tanulókkal. A tükrökkel végzett egyszerűsített szerkesztés ismeretében a tanulók természetesnek veszik, hogy a vékony lencsét egyetlen síkkal, a lencse fősíkjával (a síkbeli szerkesztéskor egyetlen vonallal) helyettesítjük, aminek végén nyíl-szerű jelzéssel különböztetjük meg a domború (gyűjtő) és a homorú (szóró) lencsét (ábra).

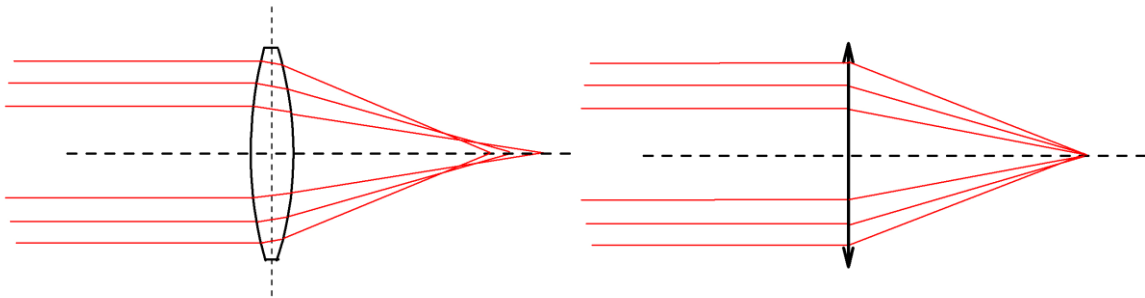
Megjegyzés:

- A fősík elnevezés a vastag lencsék elméletéből származik. A vastag lencsék két fősíkját a lencse egységnyi nagyítással kölcsönösen egymásba képezi le. Vékony lencsék esetén a két fősík egybeesik.



1.20. ábra A lencsék fősíkkal helyettesített képe

Az egyszerűsített szerkesztés során a fősíkot ruházzuk fel a lencse leképezési tulajdonságaival, amit a fókuszpont(ok) és a fókusz távolság megadásával egyértelműen jellemezhetünk. Ekkor tehát a lencse vastagságát nem vesszük figyelembe, a lencsében haladó fény útját nem követjük, a lencse belsejében haladó fénysugarak menetét nem ábrázoljuk. Az így kapott idealizált lencse, az idealizált gömbtükrökhöz hasonlóan kölcsönösen egyértelmű leképezést létesít a tárgy és a kép pontjai között. (A valóságban a lencsének nincs egzakt fókuszpontja, az optikai tengellyel párhuzamos fénysugarak a tengely egy szakaszára gyűlnek össze, a lencse optikai tengelytől távolabbi gömbhéjai a lencséhez közelebb egyesítik az optikai tengellyel párhuzamos nyalábot, mint a közelebbi gömbhéjak.) Ennek megfelelően a képalkotás sem egyértelmű.

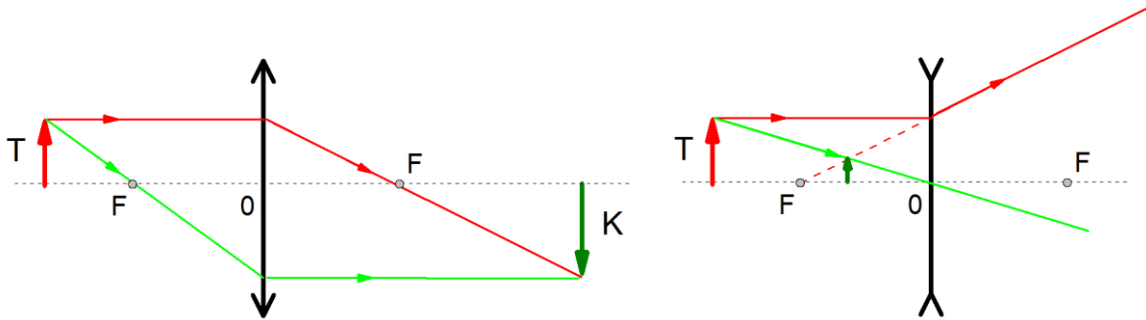


1.21. ábra: A valódi lencséknek nincs egzakt fókuszpontja. Az idealizált lencse az optikai tengellyel párhuzamos nyalábokat jól meghatározott pontban gyűjti össze

Rajzban, a tükrök tárgyalásakor már alkalmazott módon a tárgyat is egyszerűsítjük, rendszerint az optikai tengelyre merőlegesen álló nyíllal ábrázoljuk. Ennek megfelelően a szerkesztéssel kapott kép is az optikai tengelyre merőleges nyílként adódik. Ilyenkor a kép megszerkesztéséhez elegendő a „tárgy-nyíl” hegyének képét két belőle kiinduló nevezetes sugárral megszerkeszteni és a képpontból optikai tengelyre merőlegest állítani.

A fókuszpont definíciója alapján egy nevezetes fénysugár azonnal adódik, gyűjtőlencse esetén a tárgyponton átmenő és az optikai tengellyel párhuzamos fénysugár a lencsének a tárggyal ellentétes oldali fókuszpontján megy át, szórólencse esetén pedig ez a sugár a tárgyoldali fókuszpontból látszik kiindulni. A fénysugár útjának megfordíthatóságából következik a másik nevezetes fénysugár. Gyűjtőlencse esetén a tárgyoldali fókuszponton és a tárgyponton átmenő fénysugár a lencse után az optikai tengellyel párhuzamosan halad tovább, szórólencse esetén pedig a tárgyponton át a lencse képoldali fókusz felé haladó fénysugár halad az optikai tengellyel párhuzamosan a lencse mögött. A fény útjának megfordításából adódó sugármenet megértése különösen a szórólencse esetén nem egyszerű a tanulók számára. Meg kell érteniük, hogy a sugár útjának megfordíthatóságából hogyan következik az áttérés az egyik

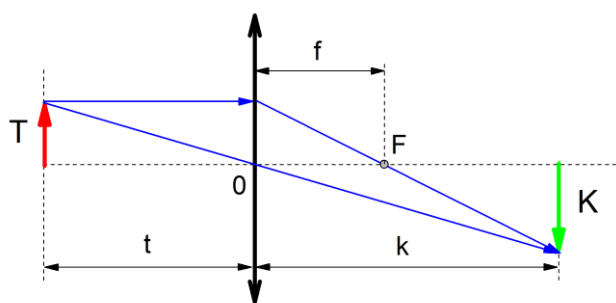
fókuszponttól a másikra. (A tárgy helyben marad, tehát olyan sugarat kell választanunk, amely a tárgy felől halad a lencse felé.)



1.22. ábra: Gyűjtő és szórólencse nevezetes sugarai (piros és zöld sugármenetek)

Szokásos még a lencse optikai középpontján átmenő fénysugarat is a nevezetes sugarak közé sorolni. Ez a sugár, mint ismeretes irányváltozás nélkül halad át a lencsén. A sugármenet indoklása azonban nem nyilvánvaló. Egyszerű érvként használható, hogy az idealizált lencse az optikai középponthoz képként az optikai középpontot kell, hogy hozzárendelje, így a fénysugár útjának megfordíthatósága miatt nem törhet meg a lencsén. A gondolatmenet nagyon absztrakt, emiatt a tanulók nehezen fogadják el. Mivel azonban ez a fénysugár nagyon jól használható a képszerkesztésben, érdemes tapasztalati úton ellenőrizni menetét és elfogadni, hogy a lencsén áthaladva nem változik az iránya. (Végezzünk pontos képszerkesztést a fókusz fogalmából adódó két nevezetes fénysugárral, kössük össze a tárgypontot és a képpontot, azt tapasztaljuk, hogy ez az egyenes mindig átmegy a lencse optikai középpontján.)

Az idealizált lencsét használva a tárgy-távolságot (t) a képtávolságot (k) a lencsét jelző egyenestől mérjük, csakúgy, mint a lencse fókusztávolságát (f). Általános iskolában a t , k , f adatokkal nem számolunk, de a szerkesztési rajzon jelöljük őket. Hasonlóan jelöljük a tárgyat (T) és a képet (K) is. Itt T és K egyúttal a tárgy és a kép nagyságát (a nyíl hosszát) is jelöli. A K/T méretarány határozza meg a kép nagyítását (kicsinyítését).



1.23. ábra: Gyűjtőlencse leképezése: tárgy valódi képének megszerkesztése a nevezetes sugármenetekkel

Fontos, hogy a tanulók megértsék és elfogadják, hogy az idealizált lencse általában pontosan közelíti a valódi lencse képalkotását, azaz a valóságban is jól teljesül, hogy a tárgypontból kiinduló és a lencsére eső fénysugarak mindegyike a képpontban találkozik, így a tárgyról kiinduló két fénysugár menetében a kép már megszerkeszthető. Tudnunk kell azonban azt, hogy a képet általában nem a könnyen megszerkeszthető „nevezetes fénysugarak”

hozzák létre. A nevezetes fénysugarak csak hasznos segítségként szolgálnak a kép helyének kijelölésében, mert sugármenetük egyszerűen megszerkeszthető.

A fókusz távolságon belül álló tárgyról a gyűjtőlencse virtuális képet ad. A kép megszerkesztése és értelmezése a tanítás során kiemelt figyelmet kíván.

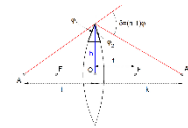
A középiskolában a lencsék képalkotásával kapcsolatban korábban tanultakat a leképezési törvény matematikai megfogalmazásával és a vele való számításokkal bővítjük:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

A fenti összefüggés levezetése az idealizált lencse sugármenetei alapján igen egyszerű, hasonló a tükrök esetén fentebb már bemutatotthoz. Most is a kép-szerkesztési rajzon felismert hasonló háromszögek megfelelő oldalainak arányát felírva jutunk az egyenletekhez, amikből a t , k , f adatok összefüggése kifejezhető.



F13. A lencsetörvény levezetése (középszintű kiegészítő anyag)



[Részletek >>>](#)

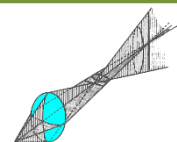
Természetesen a lencsék esetén is fontos a k és t mennyiségek előjelezése. A tükröknél bevezetett szabályokhoz hasonlóan a valódi értékek mindig pozitív, a virtuális értékek pedig negatív előjelűek.

Megjegyzés:

- Az idealizált lencse felhasználása a szerkesztésekben és a lencsetörvény levezetésekor azt a hitet erősíti diákjainkban, hogy a lencsék leképezése geometriailag egyértelmű. A feladatmegoldásban, különösen a grafikus megoldások során, amikor pontos szerkesztések ábráiról kívánjuk leolvasni az eredményt, az idealizálás sokat segít. A tanítás során azonban mindenképpen meg kell mutatnunk, hogy a lencsék leképezése is közelítő jellegű. Emiatt érdeklődő osztályokban érdemes a lencsetörvényt a lencsén belüli fénytutak figyelembevételével is levezetni. Ott ugyanis egyértelműen látható a geometriai optika közelítéseinek jellege. Hasznos az is, ha kísérletekkel illusztráljuk a lencsehibákat.



F14. Lencsehibák (fakultatív kiegészítő anyag)

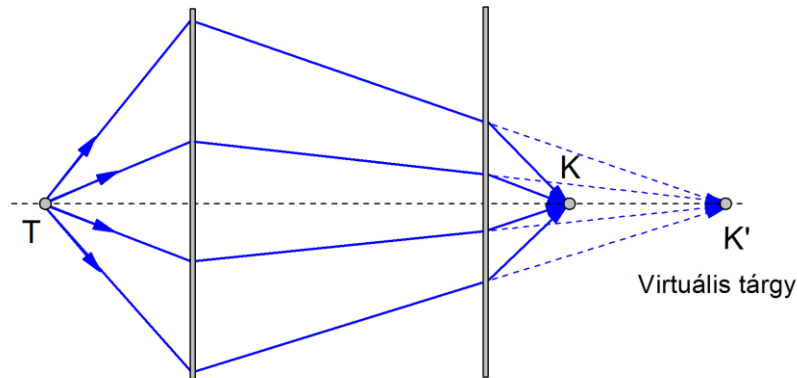


[Részletek >>>](#)

Valódi és virtuális tárgy (emelt szintű kiegészítő tananyag)

A t tárgytávolság egyetlen leképező lencse esetén mindig pozitív. Több leképező eszköz együttes képalkotását vizsgálva előfordulhat, hogy a második lencsére érkező fénysugarak összetartó nyalábot alkotnak (1.24. ábra). Ilyenkor a sugarak a második lencsén megtörnek,

mielőtt az első lencse által alkotott képpontban találkoznának. A második lencsére eső nyalábnak ezt a nem létező találkozási pontját a lencse virtuális tárgy pontjának tekintjük. A lencsétől mért távolságát pedig virtuális tárgytávolságnak, ami negatív előjelű. (A valódi tárgyból mindig széttartó sugarak érik a lencsét.)



1.24. ábra: A második leképező eszköz számára a T tárgyról összetartó nyaláb érkezik

A diákoknak nem kell minden esetben elmondanunk, de tanárként látnunk kell, hogy a képszerkesztés és az ennek segítségével kapott leképezési törvény is a valóság idealizált közelítése. A közelítés az, hogy a lencsék valójában nem pontszerű leképezését pontszerűként kezeljük.

1.9. A geometriai optika beépülése a fizika egészébe (tanári háttéranyag)

A korábbiakban már szoltunk a geometriai optika tantervi elhelyezéséről, most mégis érdemes erre visszatérni, mert a fizika fejezetei között talán a geometriai optika az, amelynek helye a tantervekben a legkevésbé egységes. Adott fizikai fejezet helyét a tantervben, ha nem is teljes pontossággal, de viszonylag meghatározottan az jelöli ki, hogy a középfokú tanulmányok végére megcélzott természettudományos szemlélet kialakításában az adott fejezet milyen szerepet töltsön be. A geometriai optika helyének szélsőséges változása a különböző tantervekben talán éppen arra utal, hogy a tanterv kialakításakor éppen ezt a távolabbi célt kell átgondolnunk. (Ismerünk olyan tanterveket, amelyek az általános iskolai tanítást a geometriai optikával kezdik, de vannak olyanok is, amelyek csak gimnáziumban a hullámoptika után tárgyalják igen röviden.) A geometria optikának a távlati célok elérésében betöltött szerepére, illetve helyére a fizika egészében talán Feynman markáns véleménye világít rá legjobban.

Feynman máig is nagyhatású tíz kötetes *Mai Fizika* című sorozatának harmadik kötete foglalkozik az optikával. A geometriai optikát a Fermat-elvre alapozva, de a variációs számítás formális alkalmazását elkerülve tárgyalja. A geometriai optika új bevezetését azzal indokolja, hogy a geometriai optika szokásos tárgyalásmódja kizárólag a fizikának ebben a szűk fejezetében használható, más fizikai fejezetekkel ellentétben az elemi tárgyalásmód nem kapcsolható szervesen a fizika egészébe, közelítései esetlegesen, nem alapulnak általános elveken. A fizikai szemlélet kialakítása, a fizika egységes egészének megismerése szempontjából, a geometriai optika elvesztegetett időt jelent. Ezen kívánt változtatni Feynman!

A Fermat-elv szerinti bevezetés utat nyit a fizika más variációs elvei felé, a felhasznált közelítések általános elven alapulnak, ezáltal a geometriai optika már szervesen illeszthető a fizika rendszerébe. Feynman gondolatai impresszívek, és hatottak a tantervekre is. A geometriai optika a közoktatásban visszaszorult. Fontosnak tartjuk tehát, hogy kitekintésként bemutassuk a Feynman-féle tárgyalásmódot is. Szakkörön, vagy a tehetséggondozás egyéb keretein belül érdemes az igényesebb diákokkal a geometriai optika alaptörvényeit levezetni a Fermat-elv alapján.

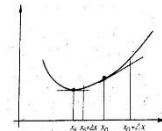
Tovább növeli a Fermat-elvvel való tárgyalásmód értékét az a tény, hogy a Fermat-elv a fény terjedését leíró hullámegyenletből a $\lambda \rightarrow 0$ határesetben levezethető. Méltán nevezte tehát Schrödinger a Fermat-elvet a hullámelmélet kvintesszenciájának

Az általános gondolatokat elfogadva annyit azonban mindenképpen meg kell jegyezni, hogy éppen a fizika tanulás megkezdésekor a geometriai optika olyan önálló kísérletezési lehetőséget nyújt a diákok számára, ami didaktikai értékénél fogva enyhíti a közelítések esetlegességének hátrányait.



F15. A Fermat-elv (emelt szintű kiegészítő tananyag)

[Részletek >>>](#)



1.10. A geometriai optika alkalmazása (kiegészítő anyagok)

Az előző fejezetben átgondoltuk a geometriai optika szerepét a fizika egészének szempontjából. Ebben a részben, olyan példákat sorakoztatunk fel a természettudományok szélesebb értelemben vett területéről, ahol a geometriai optika érdemi hozzájárulást ad a jelenség megértéséhez (az emberi szem működése, szivárvány, délibáb stb.). Iskolai viszonylatban ezek a tantárgyközi integrációt jól szolgálják. Ugyancsak fontosnak tartjuk felhívni a fizikatanárok figyelmét a geometriai optika olyan technikai alkalmazásaira is, amelyek közismertek és működésüknek megértése a hétköznapi életben hasznos lehet.

A geometriai optika az érdekes természeti jelenségek magyarázata mellett elsősorban az optikai képalkotó berendezések tulajdonságainak magyarázata során hozható kapcsolatba a gyakorlati élettel. A mindennapokban használt eszközök; nagyító, szemüveg, fényképezőgép, mikroszkóp stb. működése felkelti a gyerekek figyelmét és a fizikai háttér megismerése segít az eszközök használatának megértésében is. Tudatában vagyunk, hogy a kiegészítő anyagok terjedelme messze túlhaladja a tantervek időkereteit. Emellett a fogalmi mélység sem mindenben illeszkedik az átlagos diákcsoporthoz teljesítőképeségéhez. A válogatásban és az eszközök leírásában nem közvetlenül a tanórákon használható tananyagot kínálunk, hanem annak lehetőségét mutatjuk meg, hogy a gyakorlatban használatos leképező eszközök hogyan építhetők be adott esetben a tananyagba. Semmiképpen sem gondoljuk, hogy ez a fejezet önálló egységként bekerülhet az iskola tantervébe.

A különböző eszközök működése sok új technikai fogalom bevezetését teheti szükségessé. Ebben a tekintetben is mindig figyelembe kell venni a tanulócsoport teherbíró képességét és a tanterv szabta időkereteket. Bármennyire is érdekes lehet egy-egy eszköz részletekbe menő ismertetése, ne feledkezzünk meg arról, hogy fizikát tanítunk és a cél a fizika törvényeinek mély megértése, amit a technikai részletekbe való belebonyolódás akár meg is nehezíthet.

A válogatás és az anyag feldolgozásának szintje mindig kicsit szubjektív, hiszen tükrözi az ajánló fontossági sorrendjét és szempontjait. A leképező eszközök közül azokat választottuk ki, amelyekkel a tanulók találkozhatnak a mindennapi életben. A feldolgozásban pedig három szintet céloztunk meg. Az eszközök képalkotása legyen mindig követhető pusztán képszerkesztéssel. Az eszközök technikai részleteinek taglalása csak olyan mélységig történjék, hogy a vékony lencsék leképezési törvényénél a matematikai leírásban sem legyen többre szükség. Végül igyekeztünk az anyag leírását olyan bőre szabni, hogy biztosítsa a tanár számára a megfelelő háttértudást.

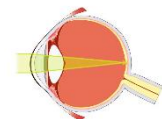
Befejezésül egyetlen kiegészítő rész fontosságát, az emberi szem leírását szeretnénk kiemelni. Ez nem csupán a biológiával közöst témája miatt fontos, de azért is, mert a szokásos leképező eszközök alkalmazásakor mindig szerepet játszik maga a szem is. A képalkotás a szembe jutó keskeny fénynyaláb nélkül nem jönne létre. Ez a rész azonban elsősorban a tanárok számára íródott. Iskolai tárgyalásában szinte mindig a redukált szem-modellre érdemes korlátozódni. A bonyolultabb modellt a dioptria fogalom tisztázása érdekében mutatjuk be.

A fejezetben tárgyalt kiegészítő anyagok egyszerűek, tanórai feldolgozásuk mégis időigényes, mert időnként bonyolultnak tűnő ábrák precíz megértését, és pontos megrajzolását igényli. Ha a tantervi korlátozások ellenére sikerül néhány optikai eszköz működését is beiktatni, akkor az hasznos lehet a tanulók geometriai ismereteinek elmélyítésében is, és az eszközök bemutatása megerősítheti a tanulóknak a fizika gyakorlati alkalmazásába vetett hitet.



F16. Az emberi szem (kiegészítő tananyag)

[Részletek >>>](#)



F17. A látószőgnagyítás, az egyszerű nagyító (a lupe)
(kiegészítő tananyag)

[Részletek >>>](#)





F18. A mikroszkóp (kiegészítő tananyag)

[Részletek >>>](#)



F19. Távcsövek (kiegészítő tananyag)

[Részletek >>>](#)



F20. A fényképezőgép (kiegészítő tananyag)

[Részletek >>>](#)



F21. Tanulságos feladatok a geometriai optika tárgyköréből

[Részletek >>>](#)



F22. Emelt szintű érettségi mérések geometriai optikából

[Részletek >>>](#)

2. HULLÁMOPTIKA

Bevezetés

A geometriai optika törvényeinek segítségével a hétköznapokban tapasztalható fényjelenségek széles körét tudjuk értelmezni. Könnyen találhatunk azonban olyanokat is, amelyek a geometriai optika legalapvetőbb törvényének a fény egyenesvonalú terjedésének is ellentmondanak. Közismert például, hogy vékony, de sűrű szövésű esernyőszöveten keresztül nézve a pontszerű fényforrások, (pl. este messze lévő lámpák fényét) fehéren fénylő pont helyett szivárványszínű szabályos elrendezésű pontok csoportjának látszik. Ha két üveglemezt összeszorítunk úgy, hogy egyik végük közé selyempapírt teszünk, majd egyszínű fényrel például nátriumlámpával megvilágítjuk, akkor az üveglapon világos és sötét sávok jelennek meg. Jól ismert az is, hogy a víz felszínén szétterülő olajfolt a szivárvány színeiben játszik, és a színek attól is függenek, hogy milyen irányból nézünk a foltra. Ezek a tapasztalatok semmiképpen sem magyarázhatók a geometriai optika törvényeivel! Az esernyőszövet mögött a pontszerű fényforrás helyett megjelenő ponthalmaz és a színes olajfolt látványának hatására szinte a fénysugár fogalma is értelmét veszíti.

A geometriai optika alapján megválaszolhatatlan kérdések miatt már a 18. században felvetődött a gondolat, hogy a fény, lényegét tekintve a hanghoz hasonló hullám. Az új elképzelés megosztotta a fizikusokat. Christian Huygens és Augustin-Jean Fresnel a fény hullámtermészete mellett érvelt. Isaac Newton szerint a fényben részecskék terjednek. A vitát sokáig nem sikerült egyértelműen lezárni, mert az arra irányuló próbálkozások, hogy a fény hullámtermészetét interferencia-kísérlettel igazolják, sokáig nem hoztak eredményt.

Mai ismereteink szerint a kezdeti sikertelenség jól érthető, hiszen két független fényforrás nem ad észlelhető interferenciát (ellentétben pl. két hangvillával) Az észlelhető interferencia feltétele ugyanis az, hogy a tér adott pontjában találkozó fényhullámok fáziskülönbsége időben ne változzék. Ha ez nem teljesül, akkor az erősítés-kioltás helye időben olyan gyorsan változik, hogy szemmel nem követhető.

A fénykibocsátás atomi folyamat, a fényforrás atomjai statisztikus összevisszaságban sugároznak, még két teljesen egyforma fényforrás sem ad koherens hullámokat. Észlelhető fényinterferenciát csak akkor kapunk, ha egyazon fényforrás fényét vezetjük két különböző úton, így a fényforrás fényét önmagával interferáltatjuk. Az észlelhető interferenciához azonban még ez sem elegendő! Hiába származnak ugyanabból a fényforrásból az útkülönbséggel találkozó hullámok, ha az útkülönbség túlságosan nagy. A fénykibocsátás időben korlátozott folyamat, az egyes atomok hullámvonulatokat sugároznak ki. Az észlelhető interferenciához ezért még az is szükséges, hogy az útkülönbség ne legyen nagyobb, mint az elemi hullámvonulat hossza. Ha ez nem teljesül, akkor bár ugyanabból a fényforrásból érkező, de különböző fénykibocsátási aktusból származó, s emiatt nem koherens hullámok találkoznak.

A fénykibocsátás folyamatáról a 18. század mélyen gondolkozó nagy fizikusai ténszerűen kevesebb ismerettel rendelkeztek, mint amennyit a mai középiskolások tudnak fénytan

tanulmányaik elején. Ennek tudható be, hogy a fénynek a geometriai optikát felváltó elmélete, komoly viták során és nehezen született meg.

A fogalmi váltás a diákok számára sem egyszerű, különösen, ha mély megértést (és nem bemagolt, csak a fizikaórák számára fenntartott, hanem más tantárgyakban és a hétköznapi életben is alkalmazható tudást) szeretnénk kialakítani bennük.

2.1. A fényhullám középiskolai bevezetése és a hullám leírás elhelyezése a tananyagban

A fényhullám fogalmának leírása jól elkülöníthető szintekre tagolható. A bevezetést mindenképpen kísérletekre, a hullám fogalmának a fényre való intuitív alkalmazására kell alapozni. Erre építhető a fényhullám matematikai leírása, és a fényvel végzett sokféle interferencia és elhajlási kísérlet értelmezése. Ennek kapcsán térhetünk át az egyszerű, hullámfüggvénnyel történő leírásról a Huygens- és Huygens–Fresnel-elv bevezetésével az elhajlás és interferencia jelenségek összekapcsolására, valamint a geometriai optika és a hullámoptika közötti kapcsolat megmutatására. Eddig a szintig a tárgyalás iskolai sorrendje tulajdonképpen megszabott, az egyszerűtől haladunk a bonyolult felé.

A következő szint esetén, ahol a fényhullámot az elektromágneses hullámokkal azonosítjuk, vagyis kiderítjük a fényhullám fizikai jellegét is, a helyzet már nem ilyen egyértelmű. Erre nyilvánvalóan csak akkor kerülhet sor, amikor az elektromágneses hullámok már szerepeltek a tananyagban. A feldolgozásmód itt azon múlik, hogy a hullámoptikát egyetlen blokkban, az elektromágneses hullámok után tárgyaljuk, vagy a fényhullámok bevezetése a mechanikai hullámok tárgyalásához kapcsolódva történik. Az utóbbi esetben az elektromágneses hullámok tárgyalását a mechanikai hullámokkal vett analógiák mellett fénytani analógiák is könnyíthetik. A másik úttal, a fény teljes hullámelméletének az elektromágneses hullámok feldolgozásába való beolvasztásával, bár időt takaríthatunk meg, sokat veszíthetünk a hullámtulajdonságok fénytani kialakításának szemléletességéből.

Az elektromágneses természet ismeretében széles ismeretanyag értelmezésére nyílik lehetőség a fény és anyag kölcsönhatására vonatkozó sokféle kísérleti tapasztalat (fénynyomás, kettőtörés stb.) tárgyalásakor. Amennyiben az elektromágneses hullámok energiaviszonyaival és terjedésével elegendő mélyen és megfelelő matematikai alapok birtokában foglalkoztunk, akkor az interferencia jelenségek és a fényelnyelés energetikai értelmezésére is jó lehetőség nyílik.

A mechanikai hullámokról többnyire már a bevezető kísérletekből kiderül, hogy transzverzálisak vagy longitudinálisak-e. Ez a kérdés természetesen merül fel a fény esetén is. A választ a polarizáció jelensége szolgáltatja. Bár a témakör gazdagon illusztrálható könnyen bemutatható kísérletekkel, a kísérletek értelmezése nem egyszerű. A fénypolarizáció, bár a hullámtermészet ismeretében az elektromágneses természet megismertetése nélkül is feldolgozható, igazán érthetővé az elektromágneses hullámok tárgyalása után és anyagszerkezeti ismeretek birtokában tehető.

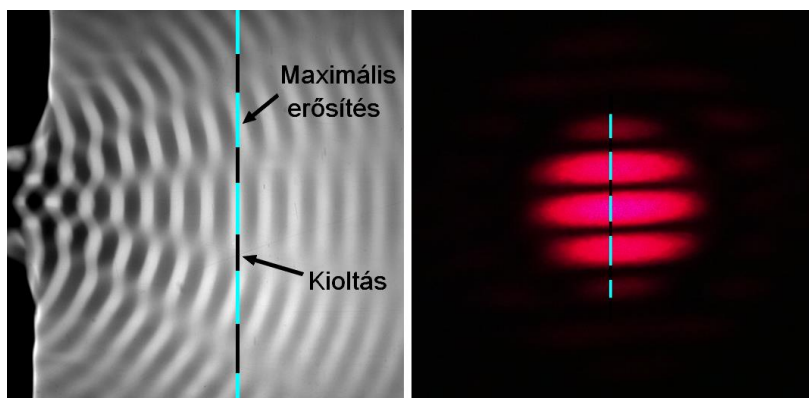
2.2. Miért hullám a fény? (bizonyítékok, analógiák)

A hullámtulajdonság tanítását a fénytan új megalapozásának szükségességét mutató, a geometriai optikával nem értelmezhető (a bevezetésben már említett egyszerűen tapasztalható) jelenségek felvillantása után gondosan válogatott kísérletekkel, szisztematikusan kell megalapozni. Bár szemünk kifejezetten a fény érzékelését szolgáló szerv, a fény érzékelése során a hullámjelleg közvetlenül nem tapasztalható. A fényhullám fogalma nagyon absztrakt gondolatmenet következménye, és a fogalom megalapozását szolgáló kísérletek is csak rendkívül áttételesen mutatják a fény hullámjellegét. A hullámjelleg az interferencia és az elhajlási kísérletekre érdemes alapozni. A kísérletek bemutatása során ki kell emelni, hogy ezek a kísérletek ellentmondanak a fény egyenes vonalú terjedésének, hiszen az elhajlás jelenségek mutatják, hogy a fény behatol az árnyéktérbe, az interferencia jelenségek pedig arra utalnak, hogy a fénysugarak találkozási pontján lokálisan változást hoz létre az adott helyen észlelt fényhatásban. Ebből természetesen csak a geometriai optika hiányosságaira következtethetünk, a hullámjellegre nem.

A hullámjelleg az interferencia és elhajlásjelenségekben észlelhető periodikus erősítések és gyengítések mechanikai hullámokkal való analógiájának alapján mondható ki. Az analógiákat azonban pontosan kell értelmezni és tudatosan bemutatott mechanikai és optikai kísérletek összevetésével kell megalapozni.

Bevezetésként a fénytani kísérletek részletes analízise nélkül érdemes néhány kulcsfontosságú kísérleten az analógiákat részletesen értelmezni. Fénytani kísérletként a két lyukon áthaladó lézervfény interferenciájának, illetve a lézervsugár egyetlen résen történő elhajlásának bemutatását ajánljuk. Az analógiákat ezeknek a kísérleteknek a víz felszínén terjedő hullámokkal bemutatott megfelelő változataival kezdjük. A tanítási tapasztalat azt mutatja, hogy esetenként maga az analógia sem világos a diákok számára, ezért érdemes a mechanikai- és fény-interferencia képeket egymásmellé helyezve vizsgálni.

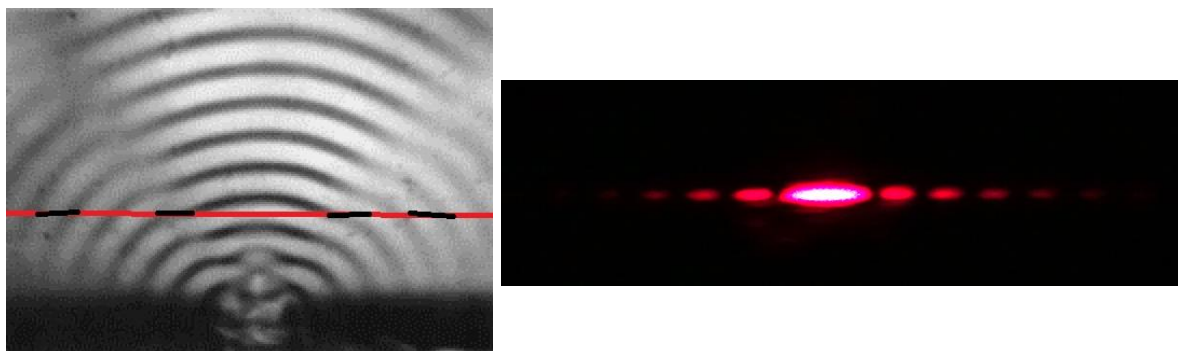
A hullámkádban keltsünk egyenes hullámokat és helyezzünk az útjába (párhuzamosan a hullámfrontokkal) két rést tartalmazó, egyenes akadályt. Az akadály utáni térben erősítési és kioltási sávok láthatóak (lásd 2.1. bal ábra). Az erősítések szélesebbek, hiszen a maximális és részleges erősítések széles vonalakat adnak. A hullámképen kék vonallal bejelöltük az „ernyő” helyét, és az ernyőn befeketítettük a kioltási helyekkel vett metszéseket. A 2.1. jobb ábrán kétréses interferencia kísérlet ernyőn felfogott képe látható. A kép vonalsorozata ugyancsak erősítések és kioltások periodikus ismétlődésének következménye. A fény hullámterébe tett ernyő a hullámter síkmetszetét mutatja, a vízhullámok síkban terjednek, ezért hullámterébe helyezett ernyőt egyenes reprezentálja.



2.1. ábra: Kétréses interferencia kísérlet (bal) hullámkáddal és (jobb) lézerfényvel

A két lyukon áthaladó fénynek az ernyőn látható képét is piros vonallal metszettük el, és a metszeten befeketítettük a kioltási helyeket. A mechanikai hullámkép és az optikai hullámkép metszet vonala pontosan megfelel egymásnak! (Világosan kell látnunk azonban, hogy míg a mechanikai képen a vonal a terjedő hullám síkjának metszete, az optikain a hullámterjedés irányára merőleges ernyő síkjában látható képet metsztük el a piros vonallal.)

Hasonlóképpen járhatunk el a rés elhajlási képével is a 2.2. ábrán. Az ábrák rendre egyrészes elhajlási kísérletekről készült felvételeken mutatják a hullámkádas, illetve vörös lézerfényvel végzett kísérletek az analóg metszeteit.



2.2. ábra: Egyrészes elhajlási kísérlet (bal) hullámkáddal és (jobb) lézerfényvel

A fenti kísérleti alapozás után mondható ki, hogy a fény hullámként terjed. A kísérleteket azért is előnyös lézerfényvel végezni, mert a lézerfény egyszínű (monokromatikus), így az interferencia és elhajlási képek nem válnak színessé. Ha ezután fehér fényvel is bemutatunk interferencia és elhajlási képet, akkor egyszerűen kimondhatjuk, hogy a kép azért válik színessé, mert a különböző színű fények hullámhossza is különböző, emiatt az erősítések és gyengítések más és más helyre kerülnek.

Megjegyzés:

- A bevezetés szintjén még nem szükséges a koherencia kérdését feszegetni, hacsak a tanulók nem kérdeznak rá, hogy miért nem lehet két fényforrással interferenciát létrehozni. Ebben az esetben is érdemes a kérdést a hulláminterferencia feltételeinek tárgyalásáig elodáztatni.

- A hullámfogalom kialakítását a vízhullámok megfigyelése mellett segíthetik a háromdimenziós animációk, amelyek mutatják a hullámfrontokat, valamint a maximum és minimum helyek mozgását.
- Az interferenciáról alkotott intuitív kép kialakulása is segíthető megfelelő animációkkal. Ezen a területen nagyon hasznos lehet a Moivre-ábrák felhasználása is
- A hulláminterferenciával kapcsolatos terminológia a szakirodalomban nem egységes. A találkozó hullámok egymásra rakódása a szuperpozíció elvvel fejezhető ki, azaz a hullámot képviselő mennyiségek (kitérés. elektromos és mágneses térerősség stb.) adott helyen és adott időpillanatban egyszerűen összeadódnak. Az összeadó hullámok képe általában nem ad stacionárius (időben állandó) képet, hanem változik. Sok szerző a hullámok szuperpozícióját nevezi interferenciának és látható, vagy észlelhető interferenciáról beszél akkor, ha a szuperponálódó hullámok hullámterének képe időben állandóvá válik. Vannak azonban olyan tankönyvek is, amelyekben interferencián az észlelhető interferenciát értik. A konfúzió elkerülése érdekében mindenképpen döntenünk kell, hogy saját gyakorlatunkban melyik terminológiát választjuk. Ebben a jegyzetben a második lehetőséget preferáljuk, tehát interferenciáról akkor beszélünk, ha a szuperpozíció eredménye stacionárius, esetleg kvázistacionárius, azaz időben lassan változik.
- Felvetődik a gondolat, hogy nem lenne-e célravezetőbb és könnyebb ebben az esetben a deduktív gondolatmenet alkalmazása. A fény hullámtermészetének axiómaként történő kimondása után a síkhullám és a gömbhullám matematikai formáját megadva, valamint a szuperpozíció elvét elfogadva, sok-sok kísérleti tapasztalat értelmezésével igazolható, hogy a fény hullámelmélete gyümölcsözően alkalmazható, és a tapasztalatok értelmezésében helyes eredményre vezet. A gondolat csábító, de a deduktív tárgyalásmódnak a fényhullámok bevezetésekor vett alkalmazása megtörné a középiskolában mindvégig ajánlott induktív gondolatsor alkalmazását, kimaradna a tapasztalatszerzés fázisa a tanításból. További nehézséget okozna, hogy a hullám matematikai leírása középiskolai szinten nehéz matematikai anyag biztos kezelését tenné szükségessé. A deduktív gondolatmeneteket középiskolai szinten még matematikailag jól képzett tagozatos osztályokban is csak a megfelelő tapasztalati alap és a fogalmak kialakítása után részproblémák megoldására érdemes alkalmazni.

2.3. A fényhullám matematikai leírása (emelt szintű tananyag)

A fényhullám matematikai leírásának iskolai feldolgozása erősen függ attól, hogy milyen előzményekre támaszkodhatunk. Ha a mechanikában matematikai leírással is megerősített hullámfogalmat alakítottunk ki, akkor a fényhullámok leírásakor egyszerű a helyzet, a kísérleti bevezetés után közvetlenül alkalmazhatjuk a térben és időben periodikus hullámfüggvényt a fényjelenségek leírására.

Ezen a ponton érdemes röviden tárgyalni a szuperpozíció elvet és bevezetni a koherencia fogalmát. Mind a szuperpozíció elvet, mind a koherencia fogalmát csak igen egyszerű formában szabad tárgyalni, a későbbiek során mindkettő tartalmilag bővül és pontosabbá válik.

A szuperpozíció elvet a víz hullámok analógiájára mondjuk ki! A fény hullámok találkozásakor adott pontban a két fény hullám hatása minden pillanatban egyszerűen összeadódik.

A hullámtalálkozás akkor ad jól megfigyelhető interferencia képet, ha az észlelt hullámkép időben állandó marad. Ez csak akkor lehetséges, ha a találkozó hullámok frekvenciája és fázisa is időben állandó marad. Az ilyen hullámok koherensek. Első közelítésben csak ilyen hullámok találkozásával foglalkozunk

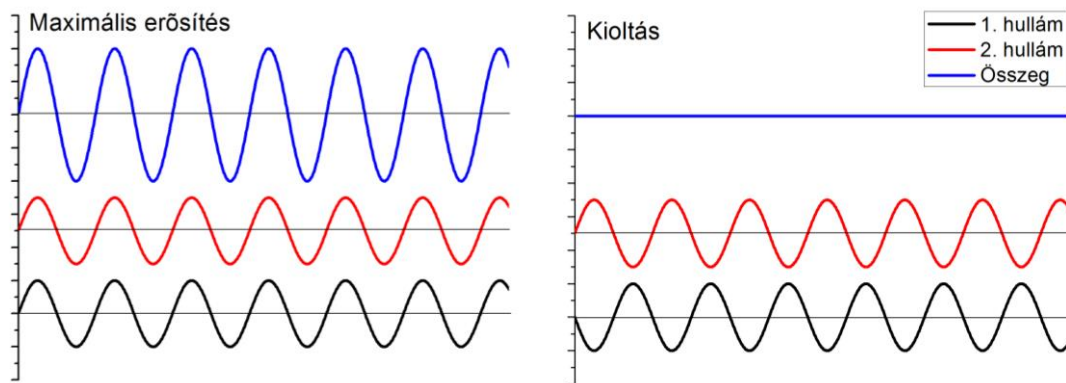
Megjegyzés:

- A koherencia fogalom pontosítása azért szükséges, mert mint a bevezetőben már említettük a fény kibocsátás atomi folyamat, a fényforrás atomjai statisztikus összeviszásokban sugároznak, és még két teljesen egyforma fényforrás sem ad koherens hullámokat. Észlelhető fényinterferenciát csak akkor kapunk, ha ugyanannak a fényforrásnak a fényét vezetjük két különböző úton, így a fényforrás fényét önmagával interferáltatjuk. Az észlelhető interferenciához azonban még ez sem elegendő! Hiába származnak ugyanabból a fényforrásból az útkülönbséggel találkozó hullámok, ha az útkülönbség túlságosan nagy. A fény kibocsátás időben korlátozott folyamat, az egyes atomok hullámvonulatokat sugároznak ki. Az észlelhető interferenciához ezért még az is szükséges, hogy az útkülönbség ne legyen nagyobb, mint az elemi hullámvonulat hossza. (Első közelítésben ezt a hosszúságot nevezhetjük koherenciahossznak.) Ha ez nem teljesül, akkor bár ugyanabból a fényforrásból érkező, mégis különböző fény kibocsátási aktusból származó, s emiatt nem koherens hullámok találkoznak. További probléma, hogy a véges hullámvonulatok nem egzaktul monokromatikusak. Az interferencia vizsgálatakor tehát csak kvázi monokromatikus hullámok találkozásáról beszélhetünk. Minél hosszabb az elemi hullámvonulat, annál inkább teljesül a monokromatikuság, az egyetlen harmonikus függvénnyel leírható, tökéletesen monokromatikus fény hullám kiterjedésének végtelen nagynak kellene lennie.

2.3.1 Az interferencia és elhajlás jelenségek leírásához szükséges minimum

Az interferencia jelenségek nagy részének mennyiségi leírásához a hullámfüggvény felírása nem is szükséges, hiszen az észlelt hatást lényegében a találkozó hullámok fáziskülönbsége szabja meg. (Ezt már a mechanikai hullámok esetén felismertük.) (Természetesen a gyengítés vagy erősítés mértéke az amplitúdóktól is függ.). A mechanikából hozott ismeretek ellenére azonban sok diák számára nehéz a fázis fogalom megértése. Azt kell pontosan megértetni, hogy az adott pontba érkező hullámok pillanatnyi értékei egyszerűen összeadódnak, (szuperponálódnak). Érdekes ezt két azonos frekvenciájú fényforrásból kiinduló harmonikus hullám találkozásáról alkotott pillanatfelvételen megmutatni. (Itt természetesen problémát okozhat, hogy a fény esetében egyelőre még nem ismerjük az amplitúdó fizikai jelentését csak a mechanikai analógiára támaszkodhatunk.) A fázis fogalom azonban pusztán a geometriai ábrák segítségével világossá tehető.

Ezután áttérhetünk a probléma mennyiségi leírására. Érdekes először egyenes mentén terjedő hullámokkal foglalkozni. Adott pontba különböző út megtétele után érkeznek a fény hullámok.



2.3. ábra: Pillanatkép két azonos frekvenciájú és amplitúdójú hullámról és összegükről maximális erősítés és gyengítés (kioltás) esetén

A $\Delta\varphi$ fáziskülönbség a hullámok Δs útkülönbségéből és a kezdőfázisokból határozható meg. Az útkülönbségből származó

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s$$

járulékhöz kell hozzáadni a kezdőfázisok különbségéből adódó $\Delta\varphi_0$ járulékot (ellentétes fázisban mozgó azonos hullámok esetén például π -t), azaz a teljes fáziskülönbség:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s + \Delta\varphi_0$$

Hasonló összefüggés érvényes a felület mentén terjedő körhullámokra, illetve a gömbhullámokra. A tér adott pontjába érkező hullámok fáziskülönbsége a pont és a hullámforrások r_1 és r_2 távolságával, valamint a hullámok φ_1 és φ_2 kezdőfázisával az

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 + \omega \frac{r_2 - r_1}{c} = \varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

alakban fejezhető ki (ω , c és λ rendre a hullámok körfrekvenciája, terjedési sebessége, illetve hullámhossza). Két azonos frekvenciájú hullám maximálisan erősíti egymást, ha a fáziskülönbségre fennáll a

$$2k\pi = \varphi_2 - \varphi_1 + \omega \frac{r_2 - r_1}{c} = \varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

összefüggés. A maximális gyengítés feltétele pedig:

$$(2k + 1)\pi = \varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

Interferenciát természetesen csak akkor észlelhetünk, ha a koherencia feltétel teljesül, ami ebben az esetben a kezdőfázisok különbségének állandóságát jelenti: $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$

Megjegyzés:

- A pusztán a fáziskülönbség úthosszal kifejezett formájára épített interferencia leírás még a Huygens–Fresnel-elv alkalmazásához is többnyire elegendő. A matematikai leírásnak ez az erősen lecsökkentett változata természetesen nem segíti a hullám fogalom elmélyítését, a hullámhossz és a periódusidő közötti kapcsolat, valamint a

diszperzió jelenségének megértését. Konfúzióra vezethet az egyenes mentén terjedő és a gömb, valamint síkhullámok megkülönböztetésében, valamint gondot okozhat a véges hullámvonalatok (hullámcsomagok) és a monokromatikus hullámok közötti kapcsolat megértésében is.

- A síkban és térben terjedő kör, illetve gömbhullámok esetén a hullámok útkülönbsége nemcsak a koherencia feltétel miatt kell, hogy kicsi legyen. Az útkülönbséget az is korlátozza, hogy a hullámok amplitúdója a távolsággal csökken, így, ha valamelyik hullám sokkal nagyobb utat tesz meg, mint a másik, akkor hatása elhanyagolhatóvá válik.

2.3.2. A fényhullámot leíró függvény

Az előző pontban leírt tapasztalati tényekre támaszkodva és a mechanikában kidolgozott hullámleírás birtokában viszonylag egyszerűen megválaszthatjuk a fényjelenségek leírására alkalmas matematikai módszereket. Érdekes mégis röviden megismételni a mechanikában már alkalmazott gondolatmenetet. Foglalkozunk először egyenes mentén terjedő (egydimenziós hullámokkal). Minthogy már megállapítottuk, hogy a fény véges c sebességgel terjed, kimondhatjuk, hogy a fényforrástól (hullámforrástól) induló hatás időkésséssel érkezik a megfigyelés helyére. Ezt matematikailag is egyszerűen megfogalmazhatjuk. Vegyük fel koordináta-rendszerünk x tengelyét a fény terjedési irányában. Ekkor a fénykibocsátás helyétől x távolságban lévő pontban a fényhatás

$$y = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

alakú függvénnyel írható le. Fontos megértetni a tanulókkal, hogy az x helyen észlelhető hatás adott pillanatban a fényforrás által korábbi időpontban kibocsátott fényvel egyezik meg. A hullámfüggvénnyel az adott helyen észlelhető fényhatást a forrás által kibocsátottra vezetjük vissza azzal, hogy a függvény argumentumaként t helyett $\left(t - \frac{x}{c}\right)$ -t használunk.

Az interferencia és elhajlás alapján a pusztán a fényhatás terjedését kifejező függvénykapcsolatot pontosabban is megadhatjuk. A jelenségek arra utalnak, hogy az f függvényt periodikus függvénynek kell választanunk. Legegyszerűbb, ha az f függvénykapcsolatot egyetlen szinuszos vagy koszinuszos taggal helyettesítjük:

$$y = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right]$$

ahol $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a körfrekvencia. Ez a térben és időben periodikus függvény alkalmas tetszőleges, egyenes mentén haladó monokromatikus hullám, így fényhullám leírására is. A függvényt a hullámhossz segítségével az

$$y = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ hullámszám bevezetésével pedig az

$$y = A \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

alakban is felírhatjuk. A függvény utóbbi két alakja jobban kifejezi, hogy a hullám térben és időben egyaránt periodikus. Természetesen a függvény ebben a formában semmiféle kifejezetten fényre vonatkozó tulajdonságot sem tartalmaz, a hullám fizikai jellegét az amplitúdó határozza meg.

A tanítás során ritkán mehetünk tovább a fenti hullámforma tárgyalásánál. Tagozatos osztályokban azonban érdemes tisztázni a gömb és síkhullámok jelentését, illetve matematikai alakját is, valamint a koherencia fogalom mélyebb jelentését. Az utóbbi keretében érdemes a hullámcsomag fogalmát is előkészíteni. Ezekhez a témákhoz a következő mellékletek adnak segítséget. A koherencia fogalom több szinten tárgyalható, a jegyzet fő sodrában csak a legegyszerűbb értelmezéssel foglalkoztunk. Már közepes képességű csoportokban is ajánljuk azonban a továbblépést.



F23. Gömb- és síkhullámok

[Részletek >>>](#)



F24. A hullámcsomag és a csoportsebesség

[Részletek >>>](#)



F25. A koherenciafogalom

[Részletek >>>](#)

Megjegyzés:

- Az általános, $y = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ függvényalak tetszőleges c sebességű zavar terjedésének leírására szolgál. A függvénykapcsolat megértése gyakran nagy nehézséget jelent a diákok számára, ezért többnyire érdemes azonnal a periodikus hullámformát felírni, amelyben már ismert függvénykapcsolat szerepel.
- A hullámfüggvény értelmezése még így sem könnyű, gyakori félreértés, hogy a diákok a függvény argumentumába negatív előjel helyett pozitívát írnak, hiszen a t időpillanatban kibocsátott fény az x helyre $\frac{x}{c}$ -vel később érkezik. A félreértés csak akkor osztható el, ha megértetjük, hogy a függvényben az idő mindig az adott időpillanatot jelenti, az x helyen észlelt hatást pedig a fényforrás helyén korábban kibocsátottal fejezzük ki.
- A fény elektromágneses hullám, így a hullámfüggvényben szereplő A amplitúdót az elektromos, illetve mágneses térrel azonosíthatjuk. Emiatt a fényhullám leírására nem elegendő egyetlen hullámfüggvény, mind az \vec{E} , mind a \vec{B} vektor hullámát fel kell írni.

Ennek részletezésére azonban csak az elektromágneses hullámok tárgyalása után kerülhet sor.

2.4. Fényinterferencia kísérletek értelmezése

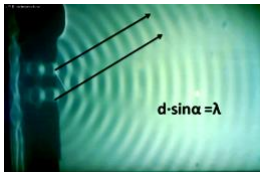
2.4.1. Young történelmi kísérlete a fény hullámtermészetének igazolására (középszintű tananyag)

A hullámtermészetet egyértelműen igazoló interferencia létrehozása 1804-ben Thomas Young angol fizikusnak sikerült. Young kísérleti összeállításában egyetlen fényforrást használt, amellyel két nagyon közeli rést világított meg. Így a fényt a résekkel két nyálábra bontotta, ami két rés mögött lévő távoli ernyőn találkozott újra. Az ernyőn megfigyelhető fényfoltot sötét interferencia-sávok mintázták.

Young kétréses interferencia-kísérlete a legkülönbözőbb hullámok esetén elvégezhető hasonló eredménnyel. Javasolt, hogy a gimnázium 11. évfolyamán, ahol a mechanikai hullámok, (ezen belül a felületi víz hullámok és a térbeli hanghullámok) valamint az elektromágneses mikrohullámok általános hullámsajátágaival a fénytán előtt foglalkozunk, mutassuk is be minél több hullámfajttával a kétréses Young-interferenciát. Ez azért is fontos, mert a modern fizika fejlődésében is mérföldkövet jelentett az elektronokkal végrehajtott kétréses interferencia kísérlet, hiszen bizonyította az anyag kettős természetét.



Jenei Péter, Juhász András, Enreiter Ádám, Nagy Mária: [Kísérletek hullámokkal](#), in.: Természetudományok tanítása korszerűen és vonzóan, Budapest 2011., 79-85. oldal

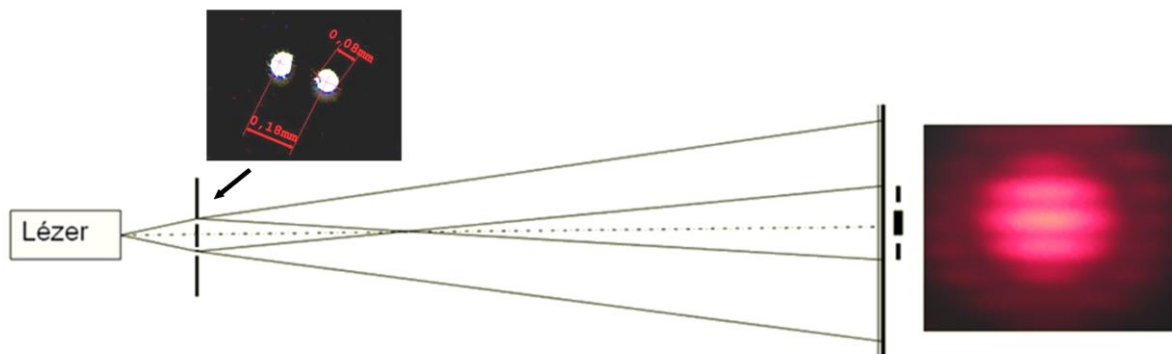


Young történelmi kísérlete, mint a fényinterferencia bizonyítéka az osztályteremben is megismételhető. A kísérlethez fényforrásként nagyon alkalmas a lézer-fénymutató, a kettős rés helyett használható két közeli lyukat, pedig tűszúrással magunk készíthetjük el.

Kisimított vastagabb alufóliából vágjunk ki kb. 2×2 cm-es négyzetet, helyezük sima fa alátétre és a négyzet közepére szúrjunk vékony tüvel két nagyon közeli, nagyon kicsiny lyukat! A kísérlet csak akkor sikerül, ha a lyukak valóban nagyon kicsik és közelieliek! A lyukak méretéről és közelségéről érdemes mikroszkóp segítségével meggyőződni. A mellékelt fotó alufólián szúrt két kis lyukról a WebCam Laboratory webkamerás mérőrendszer „Mikroszkóp” funkciójával készült. A WebCam Laboratory, azonnal biztosítja a számítógépes távolságmérés lehetőségét is. A lyukak átmérője 0,1 mm-nél kisebb, középpontjuk távolsága 0,18 mm.

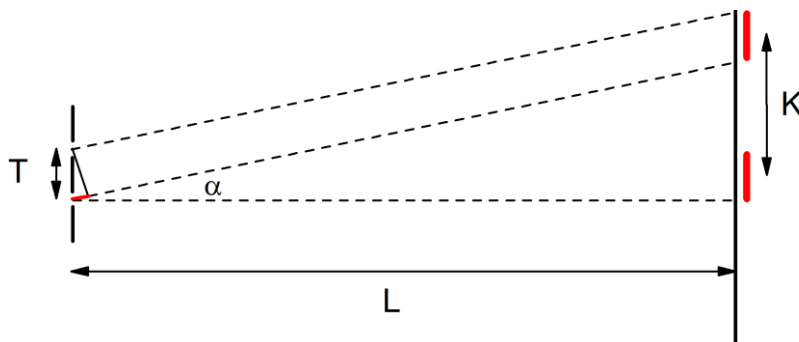
A kísérlet bemutatásakor a lézert rögzítjük, majd eléje helyezzük a két lyukat tartalmazó fóliát úgy, hogy a fénynyaláb mindkét nyílást elérje. A két kis lyuk, két koherens hullámforrásként

működik, és a lyukakból induló két enyhén divergens nyaláb átfedési tartományában a távoli ernyőn megfigyelhető az interferencia jellegzetes sávrendszere. Az osztálytermi kísérlet elrendezését és a kapott interferencia-képet az ábra mutatja.



2.4. ábra: Young-féle interferenciakísérlet. A két lyukból kiinduló enyhén divergens nyaláb az ernyőn interferál. Jobb oldalon látható az interferenciakép, fölül a két lyukat tartalmazó fólia mikroszkópi képe

Ha a kísérletet mérésenként is használni akarjuk, le kell mérnünk a két lyuk T távolságát, az alufólia és az ernyő távolságát L , továbbá az ernyőn az első erősítési helyeknek a középvonaltól mért K távolságát. A mért adatok alapján a fény hullámhossza nagyságrendileg pontosan meghatározható.



2.5. ábra: Young-féle interferenciakísérlet sugármenetei

A 2.5. ábrán látható, hogy a két lyukból kiinduló sugarak úthossz-különbsége

$$\Delta s = T \sin \alpha = \lambda$$

Felhasználva, hogy $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = K/L$, azt kapjuk, hogy

$$\lambda = \frac{TK}{L}$$

A kétlyukas Young-interferencia napfényben egyénileg is egyszerűen megfigyelhető. A kísérlethez természetesen most is el kell készíteni a két kis lyukat tartalmazó alufóliát. Fényforrásként fényes acélgolyót helyezünk a napra úgy, hogy felülete pontszerű fényes foltként tükrözze vissza a Napot. Tartsuk közvetlenül szemünk elé a kilyukasztott fémfóliát és nézzünk a két lyukon keresztül a golyón fénylő pontba (lásd 2.6. ábra).



2.6. ábra: A kétlyukas interferencia egyéni megfigyelése. A Napot tükröző fényes foltot sötét csíkok mintázzák, a folt körül ugyancsak megfigyelhető a világos és sötét foltokból álló interferenciakép

Ha szemünket webkamerával helyettesítjük az interferenciakép egyszerűen lefényképezhető. Az emberi szem jobban alkalmazkodik a fényviszonyokhoz, mint a kamera, ezért a Nap tükrözött fényes képében és a környezetében is jól látjuk az interferenciaképet. A sikeres fotózáshoz a kamera érzékenységet és az expozíciós időt minimálisra kell beállítani. A fényerő csökkentésével először a golyón tükröződő Nap-kép környezetében jelenik meg a foltrendszer. Amikor a kamerába jutó fény már minimális a Nap fénylő foltjában is megfigyelhetővé válnak az interferenciacsíkok, miközben a környezet besötétedik.

Megjegyzés:

- A webkamerás fotózással sok más a Young-kísérlethez hasonlóan fénysegény interferenciakísérlet is jól bemutatható.
- Az interferenciakísérletek közös vonása, hogy ugyanazon fényforrás fényét bontjuk fel két nyalábra, majd a nyalábokat különböző úton vezetve találkoztatjuk. A fénysugár útjának különböző úton való vezetésére több lehetőség is rendelkezésre áll: például a biprizma, a kettős tükör, a Michelson-Morley-elrendezés vagy a vékonyréteg. A kísérletek lényegében csak abban különböznek, hogy milyen gyakorlati megoldást alkalmazunk az eredeti sugárnyaláb kettéosztására. A nyaláb kettéosztása azonban elvileg kétféle módon történhet. Az egyik a hullámfront osztás, amikor az eredeti nyaláb hullámfrontjának különböző helyéről származó fényt vezetjük különböző úton (ezt példázza Young kétréses kísérlete), a másik, az amplitúdóosztás, amikor a fényt a hullámfront ugyanazon helyéről pl. félig áteresztő réteggel vezetjük különböző úton (Ez történik a Michelson-Morley-féle interferométerben).
- Néhány további interferenciakísérlet leírását és az interferenciakép matematikai tárgyalását az alábbi két melléklet tartalmazza



F26. Michelson–Morley-kísérlet (fakultatív kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)



F27. Fényinterferencia hullámfront osztással (biprizma, Fresnel-féle kettőstükör, Lloyd-tükör) (fakultatív kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)



- A tanítás során a bevezető kísérleteket egyszerűbb és gyorsabb lézertípussal bemutatni. Amennyiben azonban van rá lehetőség, érdemes a kísérleteket összetett fényel is elvégezni annak meggyőző szemléltetésére, hogy a különböző színű fénynyalábok valóban különböző hullámhosszal rendelkeznek.
- Az interferencia jelenségeket többnyire Fraunhofer-féle elrendezésben vizsgáljuk, ami azt jelenti, hogy az ernyőt igen nagy (végtelen) távolságban helyezzük el a hullámforrástól. Ezzel az interferenciakép magyarázatát párhuzamos nyalábok találkozására vezethetjük vissza.
- Mindenképpen magyarázatot kell adnunk a diákoknak arra, hogy az interferencia következtében kialakult mintázatnak mi a fizikai tartalma. Anélkül, hogy a részletekbe belemennénk, két észrevételt tehetünk. Az egyik: Az interferenciakép fotólemezre felfogható, tehát minden bizonnyal a lemez különböző pontjaira lokálisan érkező fényenergiával arányos. A másik: Az interferencia két nagyon gyorsan változó hullám egymásra rakódása, ami időben nagyon gyorsan változó képet ad. Szemünk a fényhullám frekvenciájával változó jelenséget nem tudja követni, az észlelt jelenséget a találkozó hullámok energiaáramának időátlagosa szabja meg. (Pontosabban: A látható mintázat a fény energiaáram-sűrűségének időátlagával arányos, az ernyőn látható kép kontrasztjai a lokális fényintenzitás különbségektől függenek.)
- Ez a magyarázat még élesebben felveti a kérdést: Milyen fizikai mennyiség „hullámzik” a fényben? Tanári közlésként érdemes elmondani, hogy a fény elektromágneses hullám, amelynek tulajdonságaival a későbbiekben részletesen foglalkozunk.



F28. Az interferencia energiaviszonyai (csak tanároknak, tanári háttéranyag)

[Részletek >>>](#)

2.4.2. Vékonyréteg interferencia (kiegészítő tananyag)

Környezetünkben legtöbbször vékonyréteg interferenciával találkozunk, ezért érdemes ezzel kicsit részletesebben foglalkozni. Az olajréteg, a szappanhártya, a festékmáz vagy a két üveglemez közötti levegőhártya vékony lemezek tekinthető. A rajtuk észlelt fényjelenségeket ugyancsak a fény interferenciájával magyarázhatjuk. Utalnunk kell arra, amit a geometriai optikában már megtanultuk; ha a fény közeghatárhoz érkezik, akkor egy része visszaverődik, más része pedig behatol az új közegbe. Ez történik ebben az esetben is. A vékony rétegre eső fény részben visszaverődik a réteg első felületéről, részben pedig megtörve behatol a hártya

közegébe, amelynek hátsó felületéről részben ugyancsak visszaverődik. Ha a réteg elegendően vékony, akkor a visszaverődések után kétféle úton haladó fény találkozásakor az útkülönbség miatt interferencia jön létre.

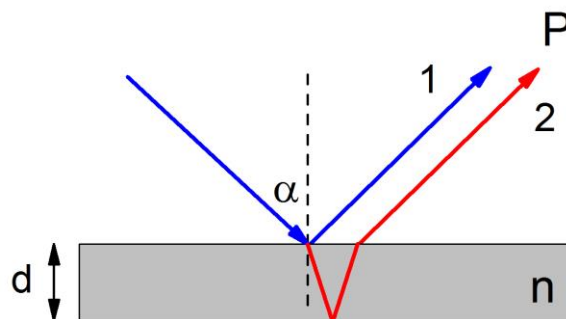
Meg kell válaszolnunk azt a kérdést, hogy miért nem látjuk a jelenséget vastag hártya esetén? Ennek egyik oka az, hogy a vastagabb lemezekbe behatoló fény nagy része elnyelődhet, másrészt vastag lemezek esetén már egészen kicsit különböző hullámhosszú fénynyalábok maximum-és minimum helyi egybeeshetnek. Lehetetlenné teszi az interferenciát az is, ha réteg első és hátsó felületén visszaverődő fény útkülönbsége meghaladja a fény koherenciahosszát.

Akár plánparallel, akár ék alakú a réteg, az interferencia mennyiségi leírással kísért pontosabb értelmezését nehezíti, hogy a hullámok a visszaverődéskor fázisugrást is szenvedhetnek. A pontos matematikai leírás így bonyolultabbá válik, középiskolában csak tagozatos osztályokban tárgyalható. Általános tantervű osztályokban csak, kvalitatívan a számítások elvégzése nélkül beszélhetünk a jelenségről.

Az interferenciát ezekben az esetekben igen sok tényező befolyásolja: függ a fénysugarak beesési szögétől, a lemez vastagságától és törésmutatójától, a lemezre eső fény hullámhosszától, és a szemünk helyzetétől is.

Egyenlő beesés görbái

A legegyszerűbb a helyzet, ha párhuzamos felületekkel határolt (plánparallel) rétegre esik a fény, ilyenkor a rétegvastagság állandó (2.7. ábra).



2.7. ábra: A vékony lemezre beeső fénysugár két különböző úton (1. és 2.) ér a P pontba

Az 1. és 2. sugár közötti útkülönbség adott irányban a geometriai adatokból kiszámítható:

$$\Delta s = 2d\sqrt{n^2 - (\sin \alpha)^2}$$

Ha a réteg vastagsága mentén a törésmutató azonos, akkor az interferencia a beesés szögének függvénye. Egyes irányokra az erősítés, másokra a gyengítés feltételei valósulnak meg. Az interferencia magán a lemezen jön létre. Különböző hullámhosszúságú színekre más és más irányból teljesül az erősítés feltétele, irányfüggő színeket látunk.

Kicsit elforgatva a tárgyakat, megváltozik a színük. Az ilyen ún. *irizáló színek* a természetben mindig interferencia révén jönnek létre. Az interferencia természetesen most is csak akkor figyelhető meg, ha a rétegvastagság nem nagyobb, mint a fény koherenciahossza.

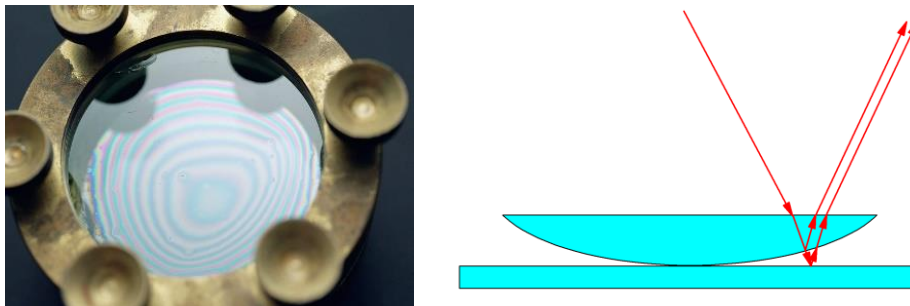


2.8. ábra: A kagylók gyöngyházfénye, valamint a Zsolnay-féle eozi nmáz szivárványszíne is a vékonyréteg interferencia következménye

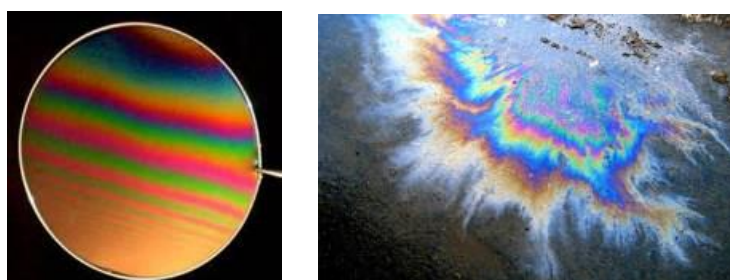
Egyenlő vastagság görbéi

Ha változó rétegvastagságú vékonyrétegre párhuzamos sugárnyaláb esik, akkor az úthossz különbség alapvetően a vastagságtól függ, a különböző színek különböző vastagságú helyeken erősítik egymást.

Az azonos vastagságú helyeken ugyanazokra a színekre adódik erősítés így ezek a helyek azonos színűek is lesznek. A felületre szemből, meghatározott irányból ránézve a megjelenő színmintázat az azonos rétegvastagságokat azonos színnel jelöli ki. Az egyenlő vastagság görbéit látványosan illusztrálják a Newton gyűrűk, a kifeszített szappan hárták és a vízfelszínen szétterülő olajfolt szivárvány színei.



2.9. ábra: Newton gyűrűk keletkezése



2.10. ábra: Lefelé vastagodó szappanhártya színei (bal), olajfolt a víz felszínén (jobb)



A természetben látható szerkezeti színekről bővebben olvashat: Rajkovits Zsuzsa [Gyűjtemény a fizika interdiszciplináris szemléletű tanításához](#) című jegyzetében



F29. Newton-gyűrűk

[Részletek >>>](#)

2.5. Fényelhajlás (diffrakció) (fakultatív kiegészítő anyag)

Az elhajlási jelenség fogalmilag az egyik legnehezebben megérthető hullámjelenség a középiskolában, mélyebb matematikai leírására többnyire nem is kerülhet sor. Ugyanakkor különösen a lézerek megjelenése óta rendkívül látványos és gyakran igen egyszerűen bemutatható kísérletekkel illusztrálható. Lényege, hogy a fény bizonyos körülmények között behatol az árnyéktérbe és ott az interferencia kísérletekben tapasztalható pontsorra, vagy csíkrendszerre észlelhetünk. Az elhajlási jelenség legfontosabb tanulsága, hogy a fény egyenesvonalú terjedése nem mindig teljesül.

A jelenségek tárgyalását célszerű néhány igen egyszerű kísérlettel kezdeni. Világítsunk meg például lézerral hajszaalat. A szál mögé helyezett távoli ernyőn fénylő pontok sora jelenik meg. Vetítsük kiterjesztett ujjakkal tartott kezünk árnyékát erős pontszerű fényforrással fehér falra, vagy ernyőre. Az árnyékképen ujjaink széle fényesebbnek tűnik és a fényes kontúr mellett sötét és világos csíkok sorozata jelenik meg. Ezek a jelenségek a fényelhajlást illusztrálják. Természetesen mutassuk be az egyetlen résen bekövetkező elhajlás jelenségét is. (Ezt tegyük meg akkor is, ha a fény hullámtermészetének igazolására a kísérletet már bemutattuk.)

A kísérletek bemutatásakor érdemes rámutatni, hogy az elhajlás jelensége általános hullámtulajdonság, amely a víz felszínén terjedő hullámok, a hanghullámok, az elektromágneses hullámok teljes spektruma, sőt az anyaghullámok esetén is tapasztalható.

Megállapíthatjuk, hogy az elhajlás többnyire akkor jön létre, ha a hullámok a hullámhosszuk nagyságrendjébe eső méretű nyílásokon haladnak át, vagy ilyen méretű akadályokba ütköznek. Hétköznapjainkban, például a hanghullámok esetén is tapasztalható, hiszen a tanterembe akkor is behallatszik a folyosó zaja, ha a hangforrás nem látható, tehát a hang (ellentétben a fényel) „bekanyarodik” az ajtón. Ez azért lehetséges, mert a hallható hang hullámhossza levegőben (kb. 2 cm-20 m) az ajtó nagyságrendjébe esik, és ezen a nyíláson „hangelhajlás” lép fel. A fényelhajlás az ajtón nem észlelhető, mert fény hullámhossza sok nagyságrenddel kisebb az ajtó méreténél.

2.5.1. Az elhajlási jelenségek értelmezése (tanári háttéranyag)

A fényelhajlás tárgyalásához szükséges időkeret és feldolgozási módszer erősen függ attól, hogy a mechanikai hullámok tárgyalásakor milyen részletességgel foglalkoztunk a jelenség értelmezésével. Középszintű szinten a hullámok terjedési jelenségeinek (visszaverődés, törés) a magyarázatára a Huygens-elvet, az elhajlására a Huygens–Fresnel-elvet használhatjuk. Amennyiben ezeket az elveket a mechanikai hullámok esetén kellő részletességgel tárgyaljuk, akkor a fénytanban az elméleti háttér kidolgozását a mechanikában tanultak felidézésével érdemes kezdeni. Elképzelhető ugyan, hogy mindkét elv kimondására csak a fénytanban kerül sor, mert a mechanikában a hullámjelenségeket csak felületesen érintettük és a Huygens–Fresnel-elv tartalma igazán a fénytanban bontható ki. Ezt azonban nem ajánljuk, hiszen egyik elv sem alapozható meg a szemléletes mechanikai analógiák nélkül. A fénytanban mind a Huygens, mind a Huygens–Fresnel-elv különösen fontossá válik, mert rajtuk keresztül kapcsolható legegyszerűbben a geometriai optika a fény hullámelméletéhez. (A kapcsolatteremtés lehetséges a Fermat elven keresztül is, azonban az matematikailag sokkal nehezebb fogalmakat igényel.) Megjegyezzük, hogy a mechanikai hullámok esetén nincsen a geometriai optikához hasonló tisztán a terjedés irányában haladó „sugarakra” alapozott elmélet, így indokolt, hogy mindkét elv a fénytanban szerepeljen nagyobb súllyal.



F30. A Huygens-elv

[Részletek >>>](#)



F31. A Huygens–Fresnel-elv

[Részletek >>>](#)

A Huygens–Fresnel-elvet a fénytanban is a mechanikában kimondott formában alkalmazzuk:

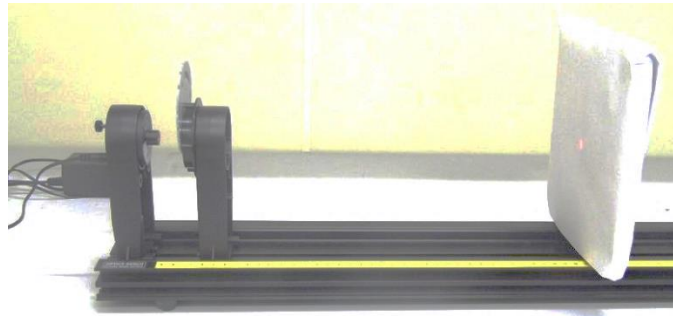
- A hullámfelület minden pontja elemi gömbhullámok kiindulópontja
- Az adott pontban kialakuló fényhatást az elemi hullámok interferenciája alakítja ki.

A diffrakció tárgyalását fénytanban kísérletek sorának értelmezésével bontjuk ki. A kísérletek sokaságából és értelmezésük különböző bonyolultságú leírásából az adott diákcsoport felkészültségéhez mérten válogatunk. A fénytan hullámtani része a tudomány jelenleg is gyorsan fejlődő része, így különösen gazdag és a leírás mélységében is változatos témák közül válogathatunk. Az alapjelenségek, a rés és rács elhajlása után már nehezen adható egységes vezérfonal a válogatásra.

2.5.2. Elhajlás résen (tanári háttéranyag)

A résen való elhajlási kísérlet során párhuzamos fénycsugárment eljuttatunk merőlegesen a d szélességű résre. A kísérletet lézer fényvel és változtatható méretű résszel végezzük. Az elhajlás bemutatása nemcsak lézer fényvel lehetséges, azonban a lézer használata a jelenségek gyakorlati bemutatása során óriási kísérlettechnikai könnyebbséget jelent, mert a lézernyalábkoherens és párhuzamos, így segítségével a jelenség sikeresen bemutatható. (Fraunhofer-elrendezés).

A rés méretét kellőképpen csökkentve az ernyőn világos-sötét mintázat alakul ki. A kísérletek során azt tapasztalhatjuk, hogy minél kisebb a rés mérete, annál nagyobb lesz az ernyőn a világos-sötét foltok távolsága.

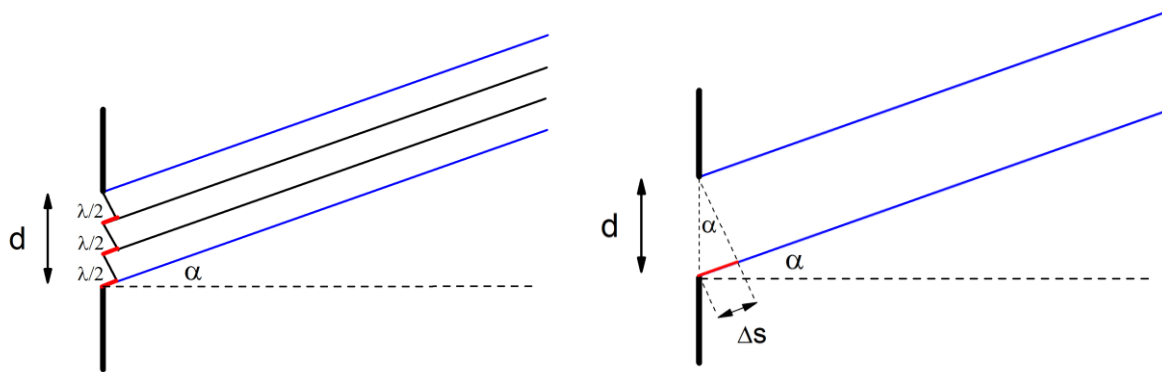


2.11. ábra: Kísérleti összeállítás résen való elhajlás vizsgálatához

Két alapvető kérdést kell tisztáznunk: mi okozza a mintázatot, és mennyire kell lecsökkenteni a rés méretét? A kísérlet értelmezését a Huygens–Fresnel-elv segítségével a víz hullámok esetén alkalmazott közelítésekkel végezhetjük. A jelenség értelmezését megkönnyíti, hogy a rés nyílása éppen a ráeső fény hullámfelülete, a hullámok fázisa a rés minden pontjában azonos, így a rés mögötti pontban találkozó elemi hullámok fáziskülönbsége időben állandó marad és csak az útkülönbségtől függ. A számítás azonban még így sem egyszerű, hiszen, mert az elv szerint végtelen sok elemi hullámot kellene összegezni. Egyes osztályokban megmaradhatunk a jelenség pusztá megfigyelésénél, általában azonban érdemes a Fresnel-féle zóna módszer alkalmazásáig eljutni, mert azzal a kioltási helyek pontosan, a maximális erősítések pedig jó közelítéssel mennyiségileg is meghatározhatók.

A zóna módszeres számítást itt csak nagy vonalakban tárgyaljuk (a részletek megtalálhatóak a Huygens–Fresnel-elv az [F31.](#) mellékletben)

A zóna módszer alkalmazása során a hullámfronton olyan zónákat alakítunk ki, melyekben páronként $\frac{\lambda}{2}$, útkülönbségű sugármenetek találhatók, így a szomszéd zónák interferencia révén kioltják egymást.



2.12. ábra: Fresnel-féle zónamódszer: az egymás mellett lévő $\lambda/2$ -es zónák kioltják egymást

Adott α irányban az elemi hullámok között a legnagyobb útkülönbség: $\Delta s = d \sin \alpha$. Ennek alapján a végtelen távoli ernyőn sötét csíkot (kioltást) kapunk, ha az útkülönbség:

$$2k \frac{\lambda}{2} = d \sin \alpha$$

A sötét csíkok tehát a

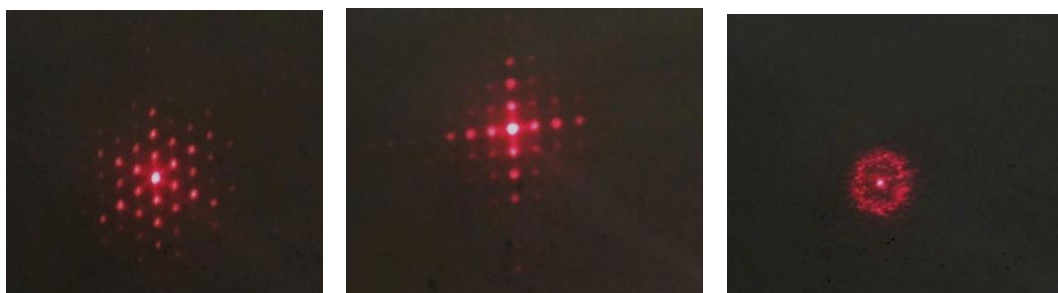
$$\sin \alpha_{k,min} = k \frac{\lambda}{d}$$

irányokban helyezkednek el. A maximális erősítések irányaira pedig az útkülönbség a $\lambda/2$ páratlan számú többszöröse lesz:

$$\sin \alpha_{k,max} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2d}$$

A kapott eredmények igazolják kísérleti megfigyelésünket. Ahhoz, hogy észlelhető elhajlási szög jöjjön létre, a rés méretét minél jobban csökkentenünk kell, hogy közelítőleg a hullámhossz nagyságrendjébe essen. Amennyiben összetett fénnel végeztük a kísérletet, azt is megmutathatjuk, hogy a kép közepén minden hullámhosszra erősítést, vagyis fehér foltot kapunk, a további erősítési helyeken pedig színeképet, mivel az elhajlás mértéke arányos a fény hullámhosszával.

Ha a rendelkezésre álló kísérleti eszközök megengedik, az érdeklődő diákok számára érdekességként meg bemutatható, hogy különböző alakú réseket használva hogyan módosul az elhajlási maximumok térbeli eloszlása.



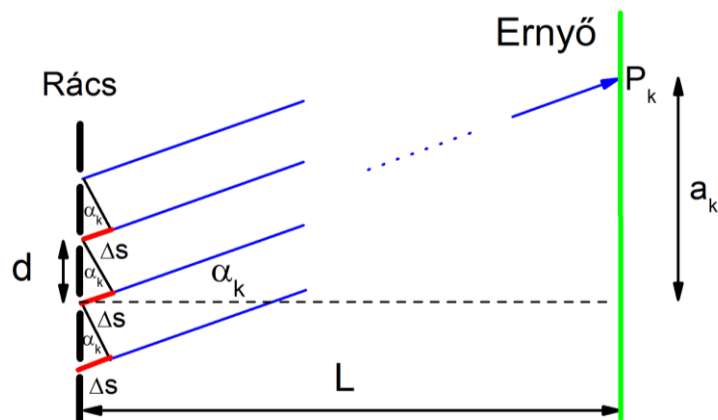
2.13. ábra: Elhajlási képek hatszög alakú (bal), négyzet alakú (középső), és kör alakú réseken (jobb)

2.5.3. Elhajlás optikai rácson: diffrakció (középszintű tananyag)

A fény rácson való elhajlásának részletes elemzését indokolt itt megtenni, mert később az elektromágneses hullámoknál, illetve a modern fizika tanítása során az anyaghullámoknál hivatkozhatunk majd az analógiára. A fényhullám látható, ezért segítségével az elhajlás és az interferencia jelenségek kísérleti bizonyítékait az osztályteremben is bemutathatók, ami a mikrohullámok, a röntgensugár vagy az elektron nyáláb esetében nehéz lenne.

A kísérleti elrendezés a lézerfényvel történő kísérlet esetén hasonló a résen való elhajlás bemutatásakor alkalmazotthoz. A rácsot a résekre merőlegesen beeső síkhullámmal világítjuk meg. A távol elhelyezett ernyőn (Fraunhofer-féle elrendezés) olyan elhajlási képet kapunk, amelyben a világos sávok keskenyebbek, élesebbek, a közöttük lévő sötét sávok pedig lényegesen szélesebbek, mint a rés elhajlási képén.

Az optikai rácson a rések azonos távolságban vannak egymástól, és méretük elhanyagolhatóan kicsi a távolságukhoz képest: ezért első közelítésben minden rés „végtelenül keskeny” vonalszerű fényforrásnak tekinthető. Ily módon a rések a rájuk merőleges síkmetszeten olyan fényforrással helyettesíthetők, amelyből körhullámok indulnak ki. (Akár azt is mondhatjuk, hogy a rések olyan keskenyek, hogy belőlük elemi hullámok indulnak.)



2.14. ábra: Az optikai rácson az erősítés irányában elhajló nyálábok

A rács elhajlási képét a Young-féle kétréses interferencia kísérletre emlékezve értelmezhetjük. Ha adott irányban két szomszédos résből induló hullámra teljesül az erősítés feltétele, akkor a rács periodicitása miatt bármely két résre is teljesül. Az erősítés tehát akkor következik be, ha a szomszédos résekből induló sugarak között az útkülönbség a hullámhossz egész számú többszöröse legyen. A k -ik maximum iránya eszerint:

$$d \cdot \sin \alpha_k = k\lambda$$

A kioltás feltétele nem fogalmazható meg ennyire könnyen. Ha a szomszédos rések között az útkülönbség $\lambda/2$ páratlan számú többszöröse, akkor páros számú rés esetén kioltást kapunk, páratlan számú rés esetén azonban az egyetlen résen átmenő nyáláb hatása észlelhető. Ez a nyáláb az erősítési helyekhez képest igen gyenge, így fényjelenség szinte nem észlelhető ebben az esetben sem.

A fentiekben a rács elhajlási képét közelítőleg adtuk meg. Az elhajlási kép finomszerkezetét csak akkor érthetjük meg, ha figyelembe vesszük, hogy a valóságban a rések véges szélességűek, ezért a résekből induló fénynyalábot az adott résen létrejövő elhajlás szabja meg. A rács elhajlási képének teljes szerkezete középiskolai szinten a fázor vektorok segítségével értelmezhető. A gondolatmenet nem egyszerű ezért tárgyalását fakultatív csoportokban, még inkább szakkörökön javasoljuk.

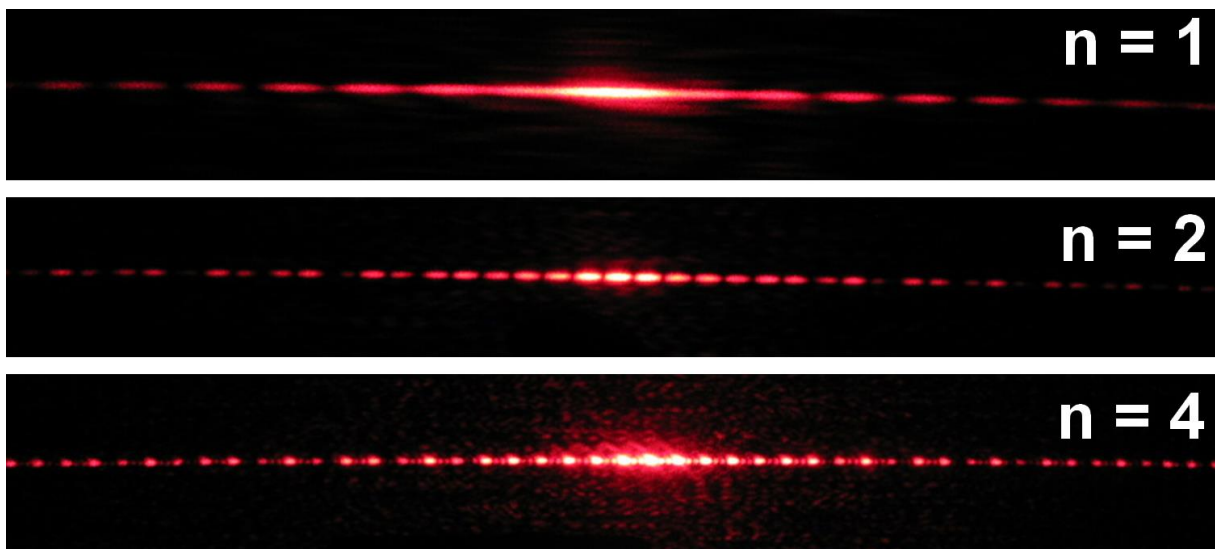


F32. A rács elhajlási kép meghatározása fázorokkal

[Részletek >>>](#)

Megjegyzés:

- Minden periodikus szerkezet, ha karakterisztikus mérete a hullámhosszhoz közeli nagyságrendű, optikai rács lehet. Könnyen mutathatunk ilyen példát osztálytermi körülmények között is: erős lézerefénnyel világítsunk át sűrűn szőtt selyemsálat, vagy akár az osztálytermi függönyt. Reflexiók optikai rács lehet a vonalzó vagy a CD lemez is. Ha egy szerkezet többféle periodicitással is rendelkezik, az elhajlási képen ez is láthatóvá válik. Megmutathatjuk, ha madártollat lézerefény útjába teszünk.
- Ha lehetőség van rá, akkor megmutathatjuk, hogy annál élesebbek és fényesebbek a maximumhelyek, minél több résből áll a rács (2.15. ábra).



2.15. ábra: Lézerefénnyel készített elhajlási képek különböző résszámok (n) esetén

- A rács elhajlási képet érdemes fehér (összetett) fényben is tanulmányozni. Ilyenkor az elhajlási kép maximumhelyein éles vonal helyett színeképet látunk. Megmutatható, hogy a rácsszíneképen az egyes színek eltérülése arányos a hullámhosszal. Nagyszámú résből álló rácsban a különböző hullámhosszúságú fényösszetevők jobban szétválnak, mint a prizma színeképeiben. A rácsnak nagyobb a felbontóképessége, mint a prizmának.

2.5.4. Rácsparaméter meghatározása

Az optikai rács éles diffrakciós képén a maximumok távolsága jól mérhető, ezért ismert rácsállandó esetén hullámhosszmérésre, ismert hullámhossz esetén pedig rácsparaméter mérésre használható.

Mivel kis szögekről van szó, ezért közelítőleg $\sin \alpha_k \approx \alpha_k$, így a maximális erősítés irányára:

$$\alpha_k = k \frac{\lambda}{d}$$

A 2.15. ábra alapján a kísérlet geometriai elrendezéséből a szög közelítőleg meghatározható:

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{a_k}{L}$$



F33. A fényelhajlás jelensége optikai rácson, a fény hullámhosszának meghatározása (érettségi feladat)

[Részletek >>>](#)

Érdekes és osztálytermi körülmények között is kivitelezhető a CD lemez rácstávolságának meghatározása. A CD reflexiós rács, megvilágítva a barázdákról visszaverődő fény interferenciáját láthatjuk rajta. Megemlíthetjük, hogy az optikai adattárolással működő adathordozóknál az adatok rögzítése és kiolvasása is lézerrel, optikai úton történik.



F34. CD lemez (mint reflexiós rács) rácstávolságának meghatározása

[Részletek >>>](#)

A lézerefény madártollon létrejövő diffrakciójával pedig könnyen megmutatható, milyen egy rács elhajlási képe akkor, ha kétféle ismétlődési távolsággal rendelkezik.



F35. Madártoll periódikus szerkezetének meghatározása kétféle módszerrel

[Részletek >>>](#)

2.5.5. Diffrakciós szerkezetkutatás (fakultatív kiegészítő anyag)

Amint az előzőekben bemutattuk, a rendezett, adott ismétlődési távolságú szerkezetekről diffraktálódó fénysugarak intenzitás eloszlásából a szerkezet méretei meghatározhatóak. Ez nagy lehetőségként adódott a tudományos szerkezetkutatásban. Nemcsak a fényvel, hanem röntgen- és elektronsugarakkal végzett kísérletek segítségével bonyolult, háromdimenziós

rács szerkezetek méretei határozhatók meg. A méréshez megfelelő hullámhosszúságú sugarak kiválasztásakor a vizsgálandó szerkezet jellemző méreteinek nagyságrendjét kell figyelembe vennünk.

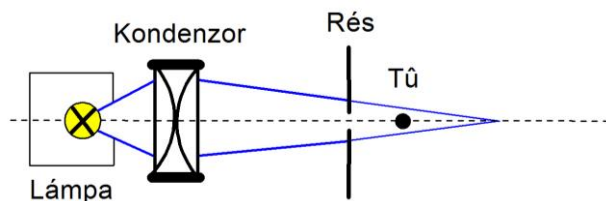


F36. Diffракció, mint a szerkezetkutatás egyik alapvető módszere

[Részletek >>>](#)

2.5.6. Elhajlás kicsiny akadályokon (fakultatív kiegészítő anyag)

Az elhajlási kísérletek viszonylag egyszerűen bemutatatható, ugyanakkor nehezebben értelmezhető körét képezi a keskeny akadályokra (hajszál, vékony dróthuzal, tű hegye) vagy kicsiny testekre (korong, csapágygolyó) ejtett fény diffrakciója. A diffrakció lézernyalábbal viszonylag egyszerűen létrehozható, de megvalósíthatósága közönséges fényvel sem bonyolult. A drótszál elhajlási képe például a következőképpen hozható létre: állítsunk optikai sínre lámpát, kondenzort, állítható szélességű függőleges rést és függőleges helyzetű tűt vagy drótszálát! Képezzük le az izzószálat a kondenzorral, az előtte 50 cm-re álló tű távolságába! A drót (keretbe feszítve) vagy a tű (dugóba szúrva) kb. 30 cm-re álljon a réstől! Húzzuk a rést elegendően szűkre, és figyeljük az elhajlási interferenciaképet a dróttól 3-4 méterre állított pausz ernyőn, átmenő fényben!



2.16. ábra: Tű diffrakciós képének vetítésére alkalmas optikai összeállítás

Az ernyőn két, struktúrájában jól elkülöníthető csíkrendszert kapunk. Az egyik a tű árnyékterében látható, a dróttal párhuzamos, páros számú fekete vonalból áll. Az árnyéktér közepe világos. A sötét csíkok száma a drót ernyő távolságtól és a tű vastagságától függ. Vékony dróttal csak kettőt láthatunk. (Két minimumcsík.) A másik csíkrendszer a geometriailag várható árnyéktéren kívül figyelhető meg. Ez a csíkrendszer elszíneződött, elmosódott, és az árnyéktértől kifelé sűrűsödik.

A kicsiny akadályokra eső fény elhajlásának közös jellemzője, hogy az árnyéktér közepe pontosan ott, ahol leginkább kioltást várnánk, mindig világos. A drótszál közepe mögött fehér csík van, a tű hegyének árnyéka megkettőződik, és az apró korong közepén világos folt (Poisson-folt) látható.

A jelenség bemutatása nemcsak meglepő volta, hanem fizikatörténeti jelentősége miatt is érdekes.

1814-ben Fresnel a diffrakció elméletéről szóló versenydolgozatot nyújtott be a Francia Akadémia pályázatára. A neves tudósokból álló bíráló bizottság (Pierre Laplace, Jean B. Biot,

Siméon D. Poisson, Dominique F. Arago, és Joseph L. Gay-Lussac) először hibásnak ítélte, majd végül első díjjal jutalmazta. Poisson, aki élesen kritizálta fény hullámelméletét, a Fresnel dolgozatában leírt elméletből levezette, hogy a korong alakú akadályok elhajlási képén a korong közepe mögött mindig világos foltnak kellene lenni. Ezt teljesen abszurdnak tartotta, s úgy érezte sikerült halálos csapást mérnie a hullámelméletre. A világos folt létezését azonban Arago szinte azonnal kísérletileg is igazolta. (Korábban 1723-ban már Maraldi is tapasztalta a folt létezését, azonban munkája feledésbe merült.) A sors fintora, hogy a korong interferenciaképében észlelhető világos foltot ma már Poisson-foltnak nevezzük. További érdekes tény, hogy a kicsiny lyukon elhajló fény esetén az interferenciakép közepén a lyuk ernyő távolság növelésével, tehát a megfigyelési hely változtatásával, felváltva kapunk sötét és világos foltot.

Ez azt jelenti, hogy a jelenség nem értelmezhető az eddig használt Fraunhofer-féle diffrakcióra adott magyarázatok gondolatmenetével, hiszen a Fraunhofer elrendezésben az ernyő „végtelen” távolságban van a kísérleti eszköztől, így helyzetének változtatása nem befolyásolhatja. Az eredményt. A pontos értelmezés csak magasabb matematika használatával lehetséges, középiskolai szinten a Fresnel-zóna módszer segítségével adhatunk közelítő magyarázatot.



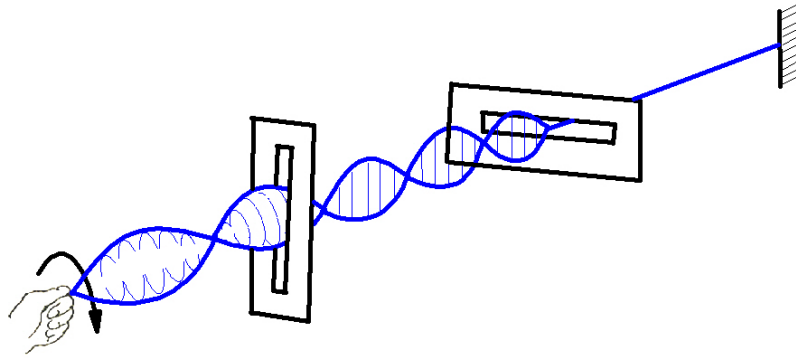
F37. A Poisson-folt értelmezése a Fresnel-féle zóna módszerrel

[Részletek >>>](#)

2.6. Fénypolarizáció (középszintű tananyag)

A fényinterferencia és a fényelhajlás egyértelműen igazolja a fény hullámtermészetét. Ezek alapján azonban nem mondható meg, hogy a fény longitudinális vagy transzverzális hullám. A fényhullám transzverzálitásának igazolására ún. *polarizációs kísérleteket* használunk. A fénypolarizációs kísérletek megértését a transzverzális gumikötél-hullámokkal végzett polarizációs kísérlet felidézése segíti.

Amikor a gumikötél végét periodikusan mozgatjuk, akkor a rezgő gumikötélen végigfutó hullámok transzverzálitása teljesen természetes, hiszen látjuk, hogy a kötélen a hullám terjedési irányára merőlegesen (többnyire egy síkban) mozog. Az ilyen hullámokat síkban polárosnak nevezzük és a gumikötél esetén inkább az okoz nehézséget, hogy a keltett hullám ne legyen síkban poláros. Ez is megoldható azonban, ha a kifeszített gumikötél egyik végével körözve keltünk állóhullámokat a kötélen orsó alakú állóhullámok alakulnak ki, jelezve, hogy a kötélen a terjedési irányra merőleges minden térrészben rezeg. Ebből a nem poláros hullámzásból úgy választhatunk ki egyetlen rezgésirányt, hogy a gumikötélet szűk résen fűzzük át. A rés minden rezgést lefog, kivéve a nyílásába esőket, amelyek akadálytalanul keresztülhaladhatnak a rajta. A sok hullám közül így kiválasztott hullám már síkban polarizált. Ha a kötelelet második résen is átvezetjük, akkor az utóbbi helyzetétől függ, hogy a polarizált hullám átjut-e rajta. Ha a második rés az elsővel párhuzamos, a hullám akadálytalanul halad át, ha merőleges, akkor nem jut át rajta. A két rés természetesen felcserélhető, az eredmény nem változik. A klasszikus kísérletet a 2.17. ábra mutatja.



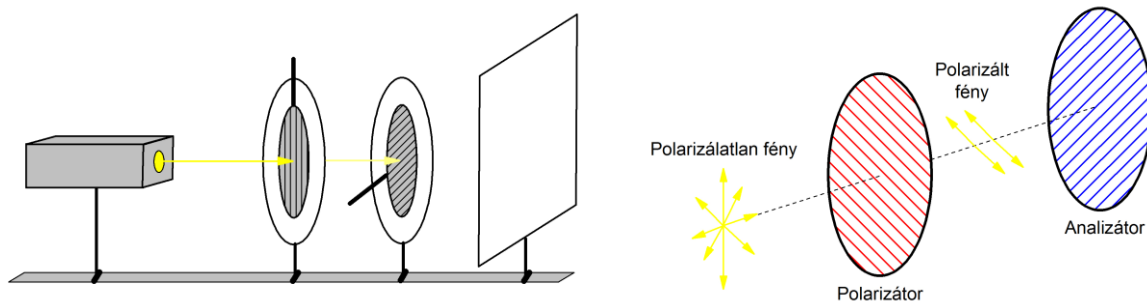
2.17. ábra: Polarizáció jelenségének mechanikai bemutatása

A jelenség úgy is megfogalmazható, hogy a forgatva rezgetett gumikötél mozgása szimmetrikus a hullámok terjedési irányára. Amikor a kötelet résen vezetjük át, megszüntetjük a szimmetriát és a kötélgörbéit egy síkba kényszerítjük.

(Nagyon hasonló kísérlet végezhető el mikrohullámmal is. Ott fémkeretbe foglalt párhuzamos fémdrótok irányától függ, hogy a polarizált hullám mennyire tud terjedni.)

A természetes fény a forgatva rezgetett kötélnél hasonlóan polarizálatlan, de megfelelő polarizátorok segítségével síkban polárossá tehető. A fény esetén a rés szerepét speciális anyagú apró kristályokat tartalmazó üveglemez ún. *optikai polárszűrő* tölti be. az apró kristályok szerkezete biztosítja, hogy a lemezre eső fényből csak meghatározott rezgésirányú haladjon át a szűrőn. A legegyszerűbb esetben a jelenség kísérleti bemutatásához elegendő egy fényforrás, két polarizátor (polárszűrő) és az ernyő. A kísérleti összeállítást a 2.18. ábra mutatja. Tegyük a fény útjába az egyik polárszűrőt, (ezt polarizátornak nevezzük), majd az így előállított síkban poláros fény útjába helyezük el az előbbihez teljesen hasonló második szűrőt is. A második szűrő az analizátor. Az analizátor forgatásával, 90° -os szögenként felváltva kapunk maximális erősítést és kioltást. A mechanikai analógiát idézve maximális erősítés esetén a polarizátorok azonos állásúak (egyirányúak), kioltáskor pedig keresztezett állásúak (keresztezettek). Közbülső helyzetben a fény intenzitása a polarizátorok állásszögétől függ.

Az ábra a kísérleti elrendezést, és a fényvektor változását mutatja keresztezett állású polárszűrők esetén.

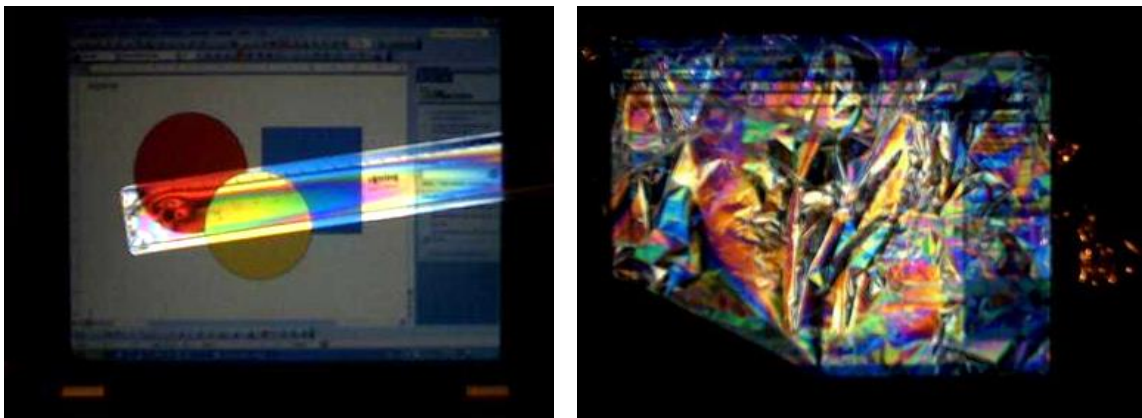


2.18. ábra: (bal) A polarizáció egyszerű demonstrációjára alkalmas kísérleti összeállítás és (jobb) a fényvektor változását mutatja keresztezett állású polárszűrők esetén

A polarizált fény tehát a terjedési irányára merőleges síkban aszimmetrikusan viselkedik. Ez csak abban az esetben lehetséges, ha a fény transzverzális hullám, azaz a fényvektor a hullám

terjedési irányára merőlegesen rezeg. A longitudinális (terjedési irányba eső) rezgések a terjedési irányra vonatkozóan hengerszimmetrikusak, a terjedési irányra merőlegesen aszimmetriát nem mutatnak. A gondolat nem egyszerű, és a mechanikai analógia bemutatása nélkül legtöbb diák számára szinte érthetetlen lenne. A poláros fény megismeréséhez azonban még átlagos osztályokban is érdemes eljutni, mert nagyon sok érdekes természeti jelenség és technikai alkalmazás kapcsolódik hozzá.

Bár a nem fizikaigényes tananyagot tanuló osztályokban idő hiányában nem nagyon juthatunk azon túl, hogy a mechanikai kísérlet analógiájaként értelmezett polarizációs kísérlet alapján kimondjuk, hogy a fény transzverzális hullám, diákköri, szakköri témaként azonban a fénypolarizáció jelenségkörének tárgyalása nagyon ajánlható. Kísérletei, látványosak, színesek és értelmezésük is tanulságos, akár a jelenségkör megismeréséhez vezető történelmi utat követjük a 18. században felfedezett kettőstörő kristályoktól, a laptop-képernyő poláros fényén keresztül, a molekulaszervezeti vizsgálatokig, akár válogatott kísérletekkel illusztráljuk a témakört. A mellékelt két fotó a poláros fényt adó laptop-képernyőről készült úgy, hogy a fényképezőgép objektívje elé kereszttezett helyzetű polárszűrőt rögzítettünk, majd a képernyő és a fényképezőgép lencséje közé közönséges műanyagvonalzót, illetve kicsit összegyűrt befűző celofánt tartottunk.



2.19. ábra: Polarizációs jelenségek bemutatása laptop képernyővel

WWW

[További színes kísérletek, poláros fényel](#) (Fizikai kísérletek gyűjteménye I. IX. 4 fejezet)



Ha a poláros fényel kapcsolatos kísérletek pusztán bemutatásán túl kívánunk lépni, akkor a legegyszerűbb magyarázatok során sem kerülhetjük el a fény természetének kérdését, azaz azt a kérdést, hogy „mi rezeg a fényben?” Ezért a fénypolarizáció jelenségének részletesebb tárgyalását a fény elektromágneses hullám elméletébe ágyazva érdemes tantervbe iktatni. Azt,

hogy a fény elektromágneses hullám, legegyszerűbben azzal indokolhatjuk, hogy amint Maxwell kimutatta, az elektromágneses hullámok fénysebességgel terjednek. Fényvektornak akár az elektromos, akár a mágneses tér vektorát tekinthetjük. Középiskolában célszerű az elektromos térerősség vektort használni fényvektorként.

A polarizációs jelenségek magyarázatakor többnyire szükségünk lesz a fény és anyag kölcsönhatásának értelmezésére is. Ha a fény elektromágneses hullám, akkor a hullám elektromos és mágneses tere nyilván az anyag töltött részecskéivel lép kölcsönhatásba, a kölcsönhatás értelmezéséhez azonban ismernünk kell az anyag felépítését is.

Összességében a középiskolai tanítás szempontjából látnunk kell, hogy a poláros fény „kétarcú” témakör. A rendkívül látványos kísérletek nagy motiváló erőjűek lehetnek, de a kísérletek értelmezése sok buktatót rejt, a fizikai magyarázat gyakran mély ismeretek összekapcsolását teszi szükségessé az elektromágneses hullámokra és az anyagszerkezetre vonatkozóan. Az esetek döntő többségében kvalitatív szinten kell maradni, mennyiségi összefüggések alkalmazására nem is gondolhatunk.



F38. Képzőművészet és hullámoptika (tanári háttéranyag)

[Részletek >>>](#)

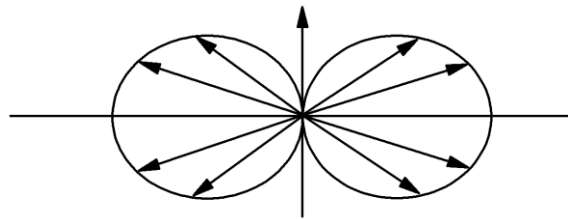
3. FÉNY ÉS ANYAG KÖLCSÖNHATÁSA (FAKULTATÍV KIEGÉSZÍTŐ ANYAG)

Már az eddigiekben is említettünk a fény és az anyag kölcsönhatásával kapcsolatos kérdéseket, hiszen a törés és visszaverődés is ennek eredménye. Eddig azonban, megelégedtünk a jelenségek fenomenologikus leírásával, és nem foglalkoztunk a fény és anyag kölcsönhatási mechanizmusával.

Amennyiben ezt a mechanizmust is részletezni kívánjuk, elsősorban egyszerű „anyagmodell” kell kialakítanunk. A különböző anyagok azonban az elektromágneses hullámokkal való kölcsönhatás szempontjából rendkívül különböző módon viselkednek. Egységes tárgyalásmód nem lehetséges. Esetünkben a két szélső típust a szigetelők és a jó vezetők, tehát a fémek képviselik.

Tudjuk, hogy a szigetelők elektronjait harmonikus erők kötik az atomszerkezethez, míg a fémekben a vezetési elektronok „majdnem” szabad elektronként kezelhetők. Ennek megfelelően a továbbiakban kétféle anyagmodellel dolgozunk. Szigetelők esetén csak annyit használunk a magyarázatokhoz, hogy az elektronok harmonikus erőkkel kötődnek az atomokhoz, így az atom gerjesztett állapotában rezgő dipólként viselkedik. Ez a megállapítás már elegendő ahhoz, hogy a kölcsönhatás folyamatát érzékeltetni tudjunk. A rezgő dipólusok ugyanis elektromágneses hullámokat bocsátanak ki. Minden dipól irányítottan sugároz,

mégpedig legerősebben a rezgés irányára merőleges egyenes mentén, míg a dipól rezgésének irányában egyáltalán nem bocsát ki sugárzást! A dipólsugárzás intenzitáseloszlását a 3.1. ábra mutatja.



3.1. ábra: A dipólsugárzás intenzitáseloszlása

A fény és anyag kölcsönhatását ezután úgy képzelhetjük el, hogy az \vec{E} fényvektor az anyag atomjaiban levő elektronokat kényszerrezgésre gerjeszti, s a gerjesztés hatására az atomok a gerjesztésnek megfelelő frekvenciával sugározni kezdenek. Az észlelt hatás az eredeti hullám és az egyes atomok sugárzásának interferenciájából adódik. Ez az interferencia rendkívül bonyolult, matematikailag nehezen tárgyalható jelenség. Végeredményben azonban az átlátszó anyagra eső fénycsugár tényleg a törési törvénynek megfelelően halad tovább, úgy, ahogyan a geometriai optikában kísérleti úton meghatároztuk, vagy a hullámtanban a hullám terjedési törvényei segítségével (Huygens-elv) kiszámíthatjuk. Első közelítésben szintén megmaradhatunk annál, hogy a szigetelők nem nyelik el a rájuk eső fény energiáját, ezért átlátszóak.

Fémek esetén az optikai tulajdonságokat teljes mértékben a vezetési elektronok mozgásával magyarázzuk. Feltételezzük, hogy a fém vezetési elektronjai kollektív mozgást végeznek, s ezt a kollektív mozgást sebességgel arányos csillapító erő akadályozza. Az elektronok “súrlódó” mozgása disszipálja a fény energiáját, ezért a fémek átlátszatlanok. (A frekvencia növekedésével azonban a veszteségek csökkennek, a röntgen tartományban a fémek (néhány már az ultrabolyában is) átlátszóak.)

Általában mind a szigetelők, mind a vezetők esetén a fény és anyag kölcsönhatása izotróp jelenség. Egyes kristályokban azonban a kölcsönhatás anyagszerkezeti okok miatt irányfüggővé válik. Ilyenkor az adott anyagban a fény terjedési sebessége is irányfüggővé válik, a fény polarizációs állapotától függően különböző irányban különböző sebességgel terjed. Az ilyen anyagokat mutatják a kettőtörés jelenségét.

Az poláros fény előállításának és vizsgálatának anyagszerkezeti háttere rendkívül érdekes kérdés. Kitekintésként a következő két melléklet ilyen témákat ajánl.



F39. Polarizáció visszaverődéskor: a Brewster-törvény

[Részletek >>>](#)

3.1. Fényszórás

Ha a fény olyan közegben halad, ahol apró, a fény hullámhosszával összemérhető részecskék találhatók rendezetlen eloszlásban, (apró diszpergált részecskék folyadékban, por, vízcsepprészecskék levegőben stb.), akkor fényszórás jön létre: az észlelt hatás most is az eredeti hullám és az egyes atomok sugárzásának interferenciájából adódik. Ebben az esetben az oldalról megfigyelhető szórt fény poláros lesz, és megfelelő részecskeméret esetén még hullámhosszfüggő is (Mie-szórás, Rayleigh-szórás).

Az alábbiakban néhány olyan, a mindennapokban is gyakori jelenséget mutatunk, amelyek érdekességként, motivációként felhasználhatók a téma tanításánál.

Az anyagok egy része nemcsak szórja, hanem el is nyeli a ráeső fényt, vagy annak egy részét. Ennek elektronszerkezeti magyarázata van. A látható fény frekvencia tartományába eső elektronátmenettel rendelkező anyagok a megfelelő hullámhosszúságú fényt elnyelik, szelektív abszorpció következik be. Ennek következtében a látható fény spektrumából az adott hullámhosszúságnak megfelelő helyen fekete sávot láthatunk. Ez a színek jellemző az anyag szerkezetére, ezért az analitikában vizsgálati módszerként használatos.

A szelektív abszorpció jelenségének következménye a festékek színe.

Ha egy test minden fényt elnyel, akkor feketének látjuk, ha mindent visszaver, akkor fehérnek, ha mindent átenged, akkor pedig átlátszó. Ha szelektíven abszorbeálja a fényt, akkor színes lesz. Ha csak egy hullámhosszt nyel el, akkor a többi szín keverékét látjuk, ha csak egy hullámhossznak megfelelő fényt ver vissza, és a többit elnyeli, akkor a visszavert színt érzékeljük.

Iskolai kísérletre ajánljuk a káliumpermanganát vizes oldatával, illetve a klorofil alkoholos oldatával bemutatható kísérleteket.

4. FÉNYERŐSSÉG, FÉNYFORRÁSOK (ALAPSZINTŰ TANANYAG)

A fény – mint elektromágneses hullám – energiát hordoz. A fény intenzitását jellemezhetjük a hullám W/m^2 egységben megadott teljesítménysűrűségével (azaz azzal az energiával, ami egységnyi felületen időegység alatt áthalad) – függetlenül a hullámhossztól. Ez a definíció azonban nem használható a látással kapcsolatos jelenségek esetében. Az azonos teljesítménysűrűségű, ám más hullámhosszúságú (különböző színű) fényeket más és más erősségűnek látjuk: szemünk legérzékenyebb a sárga fényre, kék és vörös fényt kevésbé jól

látjuk, az ibolyántúli és vörösön inneni (ultraibolya és infravörös) fényt pedig egyáltalán nem látjuk.

Azért, hogy a fényforrások fényét, megvilágítások erősségét összehasonlíthassuk, bevezettek mérhető fénytechnikai mértékegységeket, melyek közül a lumennel szoktunk lámpavásárláskor találkozni: ez azt adja meg, hogy egy fényforrás által kiadott összes fényt az emberi szem milyen erősségűnek érzékeli. Az általában szobai világításra használt 60W-os izzólámpa kb. 700-1000 lumen fényt ad ki. Sok elektromos energiát takaríthatunk meg modern fényforrásokkal: ugyanekkora fényt 10-15 W teljesítményű fénycső, vagy 6-10 W-os LED-ekkel is el lehet érni.

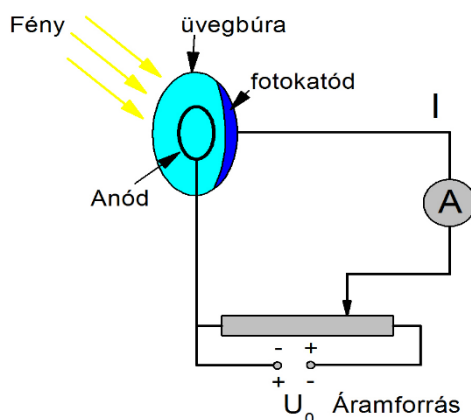


4.1. ábra: A modern fényforrások dobozain a teljesítmény (Watt) mellett a fényerősséget is feltüntetik lumen egységben (lm)

5. A FÉNY FOTONELMÉLETE (KÖZÉPSZINTŰ TANANYAG)

5.1. Fényelektromos jelenség (fotoeffektus)

A küszöbszintnél nagyobb frekvenciájú elektromágneses sugárzás (például látható fény vagy ultraibolya sugárzás) hatására a fémek felszínéről elektronok léphetnek ki. A fotoeffektus a fény kvantumtermészetének alapvető bizonyítéka, aminek magyarázatáért Einstein 1921-ben Nobel-díjat kapott.



5.1. ábra: Kísérleti összeállítás a fotoeffektus bemutatására

A kutatók sokáig nem találtak magyarázatot azokra a kísérleti tapasztalatokra, amely szerint:

- A kilépő elektronok energiája nem a megvilágítás erősségétől, hanem a megvilágítás színétől, vagyis a févre eső fény frekvenciájától függ.
- Ha ugyanolyan frekvenciájú, de erősebb (nagyobb intenzitású) fényt használunk, akkor a fémből kilépő elektronok energiája változatlan marad, csak az elektronok száma nő meg.

Az anyag kettős természetének elméletéhez vezető fontos lépés volt Einstein értelmezése a fényelektromos jelenségre.

A jelenséget Einstein Planck elemi energiakvantum hipotézisének továbbfejlesztésével magyarázta. A fény elemi energia adagokból, fotonokból áll, amelyek a fénysebességgel egyenes vonalban terjednek, mintha $h \cdot f$ energiájú kis részecskék lennének, ahol h a Planck-állandó és f a fény frekvenciája:

$$E = h \cdot f$$

A fémekben az elektronok kötött állapotban vannak, ezért maguktól azt nem hagyják el, csak a *kilépési munka* befektetése árán.

Fotoeffektus során a szükséges energiát a fény adja át az elektronnak. A sugárzásra vonatkozó elképzelés szerint a fotoeffektus elemi folyamata az, hogy egy foton nekiütközik a besugárzott anyag egy elektronjának, és ha energiája legalább akkora, mint a kilépési munka, akkor az elektron a foton energiaadagját elnyeli és kilép az anyagból. Az energiaadag elnyelésével a foton eltűnik. A kilépés energiaviszonyait meghatározó összefüggés most az elemi folyamatra felírt energia-megmaradási tétel alkalmazásával kapjuk meg:

$$h \cdot f = W_{ki} + \frac{1}{2} m v^2$$

Ez alapján érthetővé válik, hogy a megvilágító fény frekvenciájának növelésével a kilépő elektronok energiája mozgási energiája nő. Ha a megvilágító fény intenzitását növeljük, akkor több lesz a fotonok száma, így több elektron tud kilépni.

A fotoeffektus legfontosabb alkalmazása a fotocella, ezzel gyakran találkozhatunk a mindennapi életben, ezért érdemes vele kicsit részletesebben foglalkozni.

A fotoeffektus osztálytermi körülmények között is bemutatható, például cink lemez ultraibolya fényvel való megvilágításával.

FÉNYTAN MELLÉKLETEI

F1. Egyszerű kísérletek a lézerfény tulajdonságainak bemutatására

A lézerfény lényegét tekintve hasomló a többi fényforrás által kibocsátott elektromágneses sugárzáshoz, vannak azonban olyan tulajdonságai, amelyeknek különleges jelentőségük van a gyakorlati alkalmazások szempontjából, beleértve a fizika tanítását is. A lézer tárgyalása nem tartozik a fizika törzsanyagába sem alapozó-, sem középszinten, a diákok többsége azonban már hallott róla és érdekli a téma. Ezt az érdeklődést érdemes kihasználnia a fizikatanárnak. Sajnos a lézer működésének lényegi tanítása meghaladja még a középiskola lehetőségeit is, ezért a lézerrel kapcsolatos ismereteket az aktuális iskolai alkalmazásaihoz kapcsolva, a mindenkori életkori tudásszintnek megfelelően részletekben érdemes adagolni. Az első érdemi alkalmazása a lézernek az optika alapszintű tárgyalása történik, ahol a lézert, mint fényforrást használjuk. A középiskolában a lézerfény a hullámoptikai kísérletekben kap fontos szerepet. Itt a lézerfény koherenciáját lehet kiemelni és fakultatív témaként a holográfia alapjaival érdemes foglalkozni. A lézerek működésére a modern fizika tárgyalása során célszerű kitérni. Jegyzetünkben is ezt a tárgyalásmódot követjük.

A 7-8. évfolyam geometriai fizika témakörének számos kísérletében használjuk a közismert lézer-pointert, mint praktikus fényforrást. 7-8 évfolyamos tanítványaink legtöbbje már hallott valamit a lézerről, ezért különösen érdekli őket a téma. Itt az érdeklődés kielégítésére annyit tehetünk, hogy elmondjuk tanítványainknak miért különleges fényforrás a lézer, illetve milyen fontos tulajdonságai vannak a lézerfénynek. A szóbeli információkat egyszerű és szemléletes kísérleti demonstrációkkal tehetjük élményszerűvé.

A lézerfény kiemelt tulajdonságai

1. A lézerfény vékony fénynyalábként koncentrálódik, nagy távolságon is csak igen kevésbé szóródó fény.

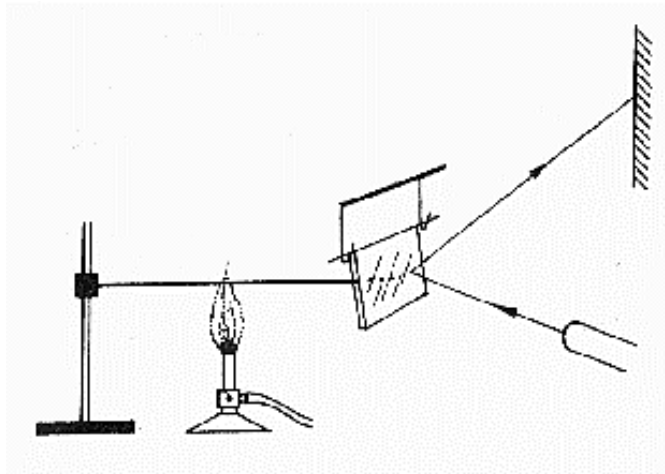
Ez a sajátossága teszi alkalmassá a tanítás során arra, hogy virtuális mutatópálcaként alkalmazzuk. E célra készült praktikus eszköz a közismert *lézer-pointer*



A geometriai optikában a lézernyaláb az egyenesen terjedő fénysugár illusztrálására szolgál. Lézersugár segítségével tanulmányozható legegyszerűbben a tükrös fényvisszaverődés, ill. a fénytörés és a teljes visszaverődés jelensége.

A lézert, mint „fénymutatót” azonban más kísérletekben is alkalmazzuk. Számos érzékeny fizikai jelenséget nehéz közvetlenül megfigyelni. Ilyenkor valamilyen segédmegoldást keresünk, ami „felnagyítva” mutatja meggyőzően az effektust. Így mutatható ki például egy kerékpárküllő vagy kötőtű hőtágulása melegítés hatására.

- Rögzítsük kötőtű vagy kerékpárküllő egyik végét szorítóval Bunsen-állványhoz úgy, hogy a rudacska vízszintesen álljon, és szabad vége a rajzon látható módon egy elforgatható tükörhöz támaszkodjék! A tükröt állványba rögzített lézer-pointerrel világítjuk meg úgy, hogy a visszavert fényfolt szabad falfelületre, vetítőernyőre vagy akár a táblára essen! A kötőtű lánggal melegítve gyorsan tágul, és a tükröt támasztó szabad vége elmozdul, és a tükröt tengelye körül megbillenti. A hőtágulás jelenségét a megbillenő tükrőről visszaverődő fényfolt elmozdulása jelzi az ernyőn. Az eszköz annál érzékenyebb, minél közelebb esik a tükrő forgástengelyéhez a fém-pálca támasztási pontja.



2. A lézerfény fény egyszínű (monokromatikus) és poláros fény

A fehér fény különböző színű fények keveréke. Ha fehér fény prizmán halad keresztül felbomlik színeire. A színekre felomlott nyalábot gyűjtőlencsével újra fehér fénné egyesíthetjük. A lézerfény megtörik a prizmán, de színe nem változik.

- Bevezető fizikatanítás szintjén a polarizáció bemutatásához két fényképzeti polárszűrőt vagy két polaroid napszemüveget használhatunk. Először erős fényű LED-lámpa fényével kísérletezünk: megmutatjuk, hogy egyetlen polárszűrőn átvezetett fénynyaláb kicsit gyengül, de lényeges változást nem tapasztalható, bárhogymegfordítjuk el a polárszűrőt. Két egymás után elhelyezett polárszűrő azonban érdekes jelenséget mutat. Tartsuk változatlan helyzetben az első szűrőt és forgassuk el tengelye körül egy teljes fordulatnyit a második szűrőt! egy körbefordítás során a lámpa, ami fénye mindkét szűrőn keresztülhaladva érdekesen változtatja fényerejét, két helyzetben maximális erősségű, míg ezekhez képest 90 fokkal elfordítva elsötétül. Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a második szűrőt hagyjuk változatlan helyzetben és az első szűrőt forgatjuk.

- A kísérletet lézerefénnyel is elvégezhetjük. (Mivel a lézerefény nagyon koncentrált a polárszűrő elé ún. *nyalábtágító lencsét* kell elhelyezni, hogy a vékony, de nagyon intenzív fénynyaláb ne égesse ki a szűrőt! (Nyalábtágítóként helyezzünk a keskeny párhuzamos lézernyaláb el rövid gyűjtőtávolságú ($f = 20-30$ mm) gyűjtőlencsét! A nyaláb párhuzamos sugarait a lencse először a fókuszpontba gyűjti, ahonnan azok táguló nyalábként haladnak tovább. A polárszűrőt a kúpszerűen táguló fénynyaládba helyezzük!)
- A lézerefénnyel végzett kísérlet során már egyetlen polárszűrő esetén tapasztaljuk, hogy a szűrő forgatásakor az átmenő fénysugár erőssége változik, két helyzetben maximális a fényereje, a közti helyzetben pedig minimális.
- A kísérleti tapasztalat azt mutatja, hogy a lézerekből származó fény hasonló ahhoz a fényhez, ami a természetes fényvel végzett kísérletben a lámpa után elhelyezett szűrőn már keresztül ment. Az ilyen fényt poláros fénynek nevezzük. A lézer fénye poláros fény.

3. A lézerefény segítségével kicsiny felületeken nagy energiasűrűség érhető el.

Sok kisdíák hallott már arról, hogy a nagy teljesítményű lézereket anyagmegmunkálásra használják. Ezekben az eljárásokban a lézereket lényegében lokális hőforrások, ahol a lézerefényt az anyagon egy pontra fókuszálják, a fénypont alatt az anyag nagyon rövid idő alatt annyira felmelegszik, hogy megolvad és elpárolog, miközben a pont környezetének felmelegedni sincs ideje. Lézerrel fémek, műanyagok hegeszthetők, vágható. Hasonló hatásokon alapul a lézerek sebészeti felhasználása is. Közismert a levált retina lézeres „visszahegesztése”, valamint a lézeres fogfúrás, kés helyett lézersugárral is lehet operálni, aminek előnye az, hogy a vágási felület nem vérzik.

Ezen példák elmondása után beszélhetünk a lézersugár energiájáról. Mivel élő kísérlet bemutatásához az iskolai lézereknél nagyobb teljesítményű lézerekre lenne szükség, élményt adó illusztrációként meg kell elégednünk az internetes video megosztó oldalakon található lézeres videó-kísérletekkel.

- <https://www.youtube.com/watch?v=aOFY1Bh3GT4>

Hologram tanítása az iskolában:

- <https://www.litiholo.com/education.html>
- <https://www.litiholo.com/hologram-kits.html>

A fenti tulajdonságok folytán a lézerefénynek rendkívül sokféle technikai alkalmazása lehetséges. A szerteágazó alkalmazásokból ízelítőül érdemes néhányat az órán felsorolni.

Lézereket alkalmaznak a hírközlésben és az információtechnikában is. Az alkalmazások elvileg talán legérdekesebb ága a holográfia, amelyről külön szólunk.

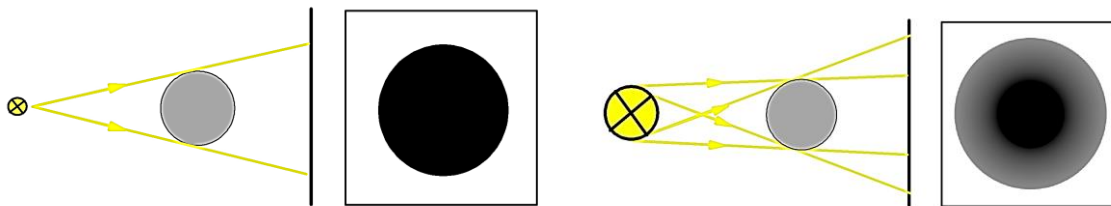
[Vissza >>>](#)

F2. Árnyékjelenségek megfigyelése, értelmezése

A fény egyenes vonalú terjedésének következményei az árnyékjelenségek. Ha pontszerű fényforrásból kiinduló fény útjába makroszkopikus méretű tárgyat helyezünk, akkor a tárgy mögé a fény nem jut be, árnyék keletkezik. A pontszerű fényforrásból minden irányban indulnak fénysugarak, így egyes sugarak helyett a sugarak összességéeként homogén fényt látunk. A test mögötti árnyék irányából azonban következtethetünk a fényforrás helyére is.

Érdekes felhívni a figyelmet arra; ha a testet több fényforrással világítjuk meg, több árnyékképet kapunk, ahány fényforrást használunk, annyi árnyékkép keletkezik. Gyakran látni ezt a jelenséget este, ha a tér különböző pontjától világítanak meg egy területet, például futballpályát. A játékost mindegyik reflektorlámpa megvilágítja, több árnyék is keletkezik, ami kellően messziről jól látható.

Érdekes kísérletileg megvizsgálni és szerkesztéssel követni a kiterjedt fényforrások által megvilágított testek árnyékképét is. Amint az ábra mutatja itt a teljes árnyék mellett, ahol a test a fényforrás teljes fényét kitakarja, félárnyék is keletkezik azokon a helyeken, ahol a tárgy a fényforrás fényét csak részben takarja (ábra).

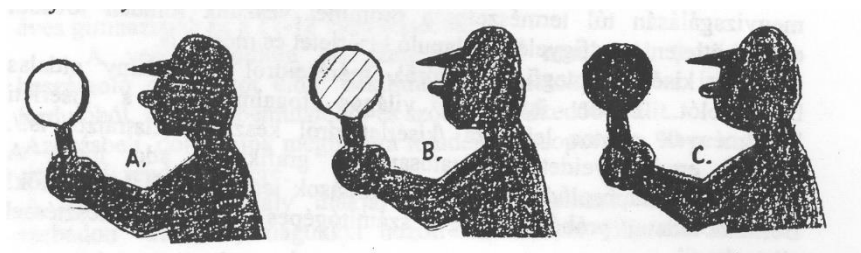


Mindennapi tapasztalat, hogy a Nap sugarai miatt a testek árnyékot vetnek, így saját árnyékunk is keletkezik. Ha a Nap mögöttünk van, akkor árnyékunk előttünk lesz. Sokszor idézzük is azt a régi mondást, hogy „senki sem tudja átlépni a saját árnyékát”.

Érdekes feladatok

1) Egy gyerek áll a napsütötte házfal előtt kb. 1 m távolságban és árnyékot vet a falra. A gyerek kezében egyszerű nagyító van (amelyet a bélyeggyűjtők szoktak használni). A nagyító ugyancsak árnyékot vet a falra.

Vajon milyen lesz a lencse árnyéka? Melyik rajz a helyes? Miért?



Megoldás:

A nagyító árnyéka a falon sötét lesz, mert a rövid fókustávolságú lencse a ráeső párhuzamos sugarakat a fal nagy területére szórja szét. (A fal és a lencse távolsága ugyanis jóval nagyobb, mint a nagyító néhány cm-nyi fókustávolsága.) Így a lencse mögött kevesebb fény éri a falat, mint a környező részeket.

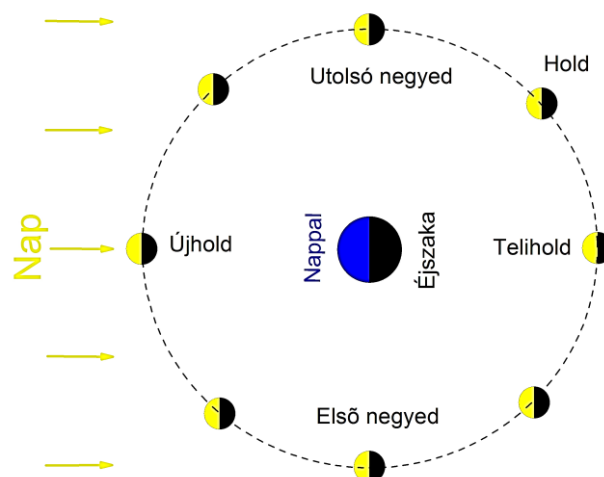
2) Delelő Nap: Az alábbi két fénykép a nyári delelő Nap árnyékát mutatja két földrajzilag nagyon eltérő helyen: az egyik az egyenlítő közelében, a másik pedig Magyarországon van. Döntsd el és pusztán a fák által vetett árnyék alapján indokold meg, hogy szerinted melyik hol készült!



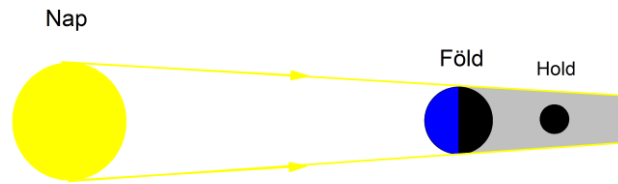
Napfogyatkozás-Holdfogyatkozás

A csillagászat érdekli a diákokat, ezért motivációként érdemes ilyen jellegű jelenségeket is elemezni a tanórán. Árnyékjelenségnek tekinthetők a holdfázisok, a napfogyatkozás és a holdfogyatkozás is.

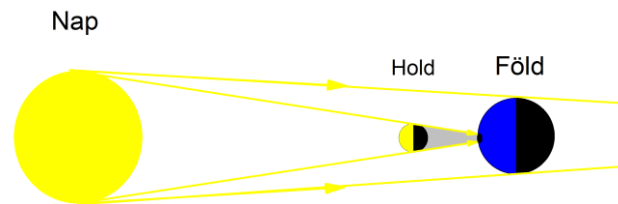
Holdfázisok:



Holdfogyatkozásakor a Föld a Hold és a Nap közé kerül, így a Föld árnyéka rávetődik a Holdra. A Földről a Holdra nézve a Hold a Föld árnyékkúpjába kerül, így nem látható.



A Napfogyatkozásakor a Hold kerül a Nap és a Föld közé, így árnyéka rávetül a Földre. A Földről nézve Napot, a hold árnyéka a Napon végigvonulva sötét foltként jelenik meg.



Ezek a jelenségek adott földrajzi helyen viszonylag ritkán figyelhetők meg jól. Részleges Napfogyatkozás Magyarországon legutoljára 2015. március 22-én volt látható. Közvetlenül a Napba nézni az erős sugárzás miatt nagyon veszélyes, de lyukkamera segítségével a jelenség könnyen láthatóvá tehető. Ekkor készült az alábbi felvétel is. A roló keskeny rései az ablakon besütő Nap számára lyukkameraként viselkedtek, és leképezték a Nap fogyatkozó alakját.



[Vissza >>>](#)

F3. A lyuk-kamera (Camera obscura) készítése és egyszerű kísérletek

Vágjunk kartonlap közepébe kb. 2-3 cm átmérőjű nyílást, és ragasszunk a nyílásra vékony fekete papírt (célszerű a papírt nedves állapotban felragasztani, hogy a száradás után jól kifeszüljön)! Szűrjük át a feszülő papírt izzó tűvel (az izzó tű pontszerű környílást éget a papíron)!

Helyezzünk ernyőt a függőlegesen állított kartonlaptól kb. 30 cm távolságra, vele párhuzamosan! Rögzítsünk izzólámpát a lyukkal azonos magasságban a kartonlap elé, kb. 30-40 cm távolságban! Az izzó képe megjelenik az ernyőn. (Az összeállítást célszerű optikai padon végezni.) Mozgassunk egy másik izzót a rögzített izzó körül, kb. 15 cm sugarú kör mentén! Figyeljük a két izzó képét az ernyőn!

Fúrjunk izzó tűvel, egymáshoz egészen közel több lyukat a fekete papírra, majd állítsunk a kartonlap elé ismét egyetlen izzót! Az ernyőn több egymáshoz közel eső vagy egymást fedő képet figyelhetünk meg.

Tágítsuk a nyílásokat egyetlen nyílássá! Figyeljük meg, hogy míg a kép fényereje megnő, élessége csökken!

Készítsünk sötétkamrát a Nap megfigyeléséhez!

Nagyjából 1 m hosszú, 5-10 cm átmérőjű PVC- vagy kartoncső egyik végére feszítsünk fekete papírt, a másik végére pauszpapírt vagy zsírpapírt! Izzó tűvel szűrjük lyukat a fekete papír közepébe! Irányítsuk a csövet a Nap felé úgy, hogy a kis lyukon belépő sugarak a cső végére feszített pauszpapírra vetítsék a Napkorong képét. A Napkorong képének átmérőjét lemérve, a cső hosszának és a Föld-Nap távolságnak ismeretében a Nap átmérője meghatározható.

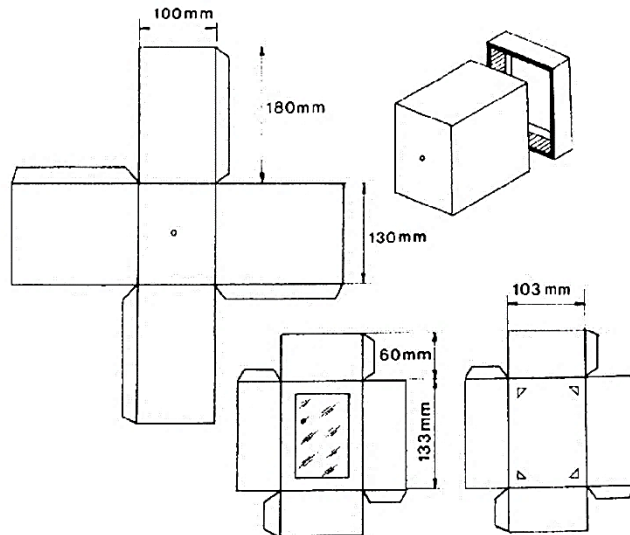
Fényképezés sötétkamrával (szakköri kísérletre)

Készítsünk kartonpapírból a következő ábra méretei szerint ötoldalú dobozt! Fessük belsejét matt feketére! Égessünk izzó tűvel elülső lapja közepére kb. 1 mm átmérőjű lyukat, és készítsük el a szemközti (nyitott) oldalra illeszkedő két zárófedele! Vágjunk az egyikre "ablakot", és ragasszuk be pauszpapírral: ez a fedél lesz a "fényképezőgép" keresője! A másik fedél belsejébe ragasszunk négy fotósarkot, 9×12 cm-es nagyítópapírok rögzítésére! Ennek a fedélnek fénymentesen kell zárnia, ezért a dobozra illeszkedő szegélyének belső felületére 6 cm széles posztócsíkot ragasztunk.

A sötétkamrával szabadban is jó minőségű képek készíthetők. Az első felvételeket azonban célszerűbb szobában készíteni. Tűzzünk a falra kontrasztos, vonalas rajzot, és egyenletesen világítsuk meg! Állítsuk elé a kamerát úgy, hogy „keresőjében” a tárgy képe látható legyen! (Ehhez a művelethez – a régi idők fényképészeihez hasonlóan – sötét kendő alá kell bújni.) Jelöljük be a kamera helyét, hogy majd (a fotópapír behelyezése után) visszaállhassunk!

A fényérzékeny papírt sötétben vagy vörös szűrő gyenge fénye mellett rögzítsük a záró fedélbe ragasztott fotósarkokba. A fedelet a dobozra illesztjük, a lyukblendét ujjunkkal letakarjuk, és a kamerát visszatesszük a bejelölt helyre.

Az exponálást a lyukblende ki- és betakarásával végezzük! Az expozíciós idő (a fotópapír érzékenységétől, a megvilágítás erősségétől, a tárgy reflektáló képességétől és a lyukblende átmérőjétől függően) tág határok (1 perc-30 perc) között változhat. A helyes expozíciós időt azonban behatároló módszerrel már 3-4 próbafelvételből meg lehet állapítani.



A papírt a szokásos eljárás szerint kell előhívni, fixálni, mosni és szárítani. A kapott fénykép negatív kép. Ha pozitív képet akarunk, akkor a negatívot átmásoljuk. Fektessünk sötétben fotópapírt az asztalra, fényérzékeny felületével felfelé. Borítsuk rá a negatív papírképet, és a kettőt szorítsuk össze üveglappal, majd felülről világítsuk meg. Az expozíciós időt itt is kísérletezéssel kell bejátszani.

A kísérletekhez célszerű FORTE BN0 jelű nagyítópapírt használni. De negatív filmmel – pl. 6×6-os rollfilmből levágott darabokkal – is próbálkozhatunk. Szerencsés fényviszonyok mellett kitűnő képeket készíthetünk.

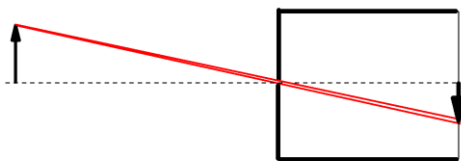
Feladat:

A fenti rajz alapján készített „sötétkamrába” 9×12 cm méretű fényérzékeny papírt ragasztottunk, hogy lefényképezzünk egy 24 m magas tornyot.

- Legalább mekkora távolságra álljunk a toronytól, hogy az aljától a tetejéig rajta legyen a fotón?*
- Hogyan változik a kép, ha a kamra előlapján lévő lyukat kitágítjuk?*
- Befolyásolja-e a lyuk mérete a kép készítésének (a megvilágításnak) az idejét?*

Megoldás:

a) A Camera obscurával történő fotózáskor a tárgyról kiinduló és a szűk nyíláson átjutó fénysugarak alkotják a képet. A mellékelt sematikus rajz mutatja a tárgy felső pontjából kiinduló keskeny nyaláb fénysugár, a kép és a tárgy geometriai viszonyait.



A hasonló háromszögekéből következik, hogy a tárgy és a kép nagyságának aránya megegyezik a tárgytávolság és a képtávolság arányával. Legalább olyan távol kell lennünk a 24 m magas toronytól, hogy a kép ráférjen a 12 cm-es fotópapír felére, azaz 6 cm legyen. A tárgy nagysága tehát $T = 24$ m, a kép mérete $K = 6$ cm, a képtávolság (a doboz hátsó falára helyezett fotópapír a távolsága a doboz nyílásától) $k = 13$ cm. A keresett t tárgytávolság:

$$t = \frac{T \cdot k}{K} = \frac{2400 \cdot 13}{6} = 5200 \text{ cm} = 52 \text{ m}$$

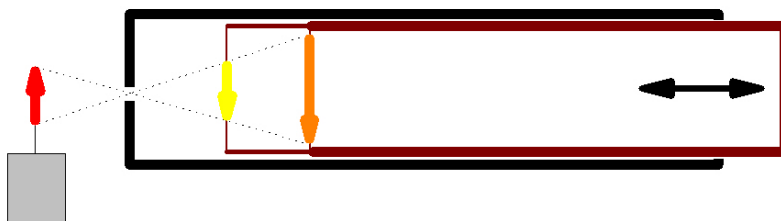
b) A kamera előlapján lévő lyuk tágításával a kép életlenebb lesz, mert a tárgy minden pontjáról induló széttartó sugarak közül egyre több jut át a nagyobb nyíláson. Ha a lyuk elég szűk, csak nagyon kis nyílásszögű sugárnyaláb jut át rajta, amely az ernyőn (fotópapíron) csak kicsi, szinte pontszerű területet világít meg, ilyenkor éles képet látunk.

c) A lyuk szűkítésével a kép élesebb, de egyúttal fényszegényebb is lesz. A fotózáskor a papír fényérzékeny rétegében a fény hatására szerkezeti változások lépnek fel. A változások mértéke függ a megvilágítás erősségétől és idejétől. Amikor a képet előhívjuk, az addig szemmel nem látható szerkezeti változásokat tesszük a vegyszerekkel láthatóvá. A fotópapír a fekete és szürke különböző árnyalataira színeződik el attól függően, hogy exponálásakor több vagy kevesebb fény esett a papír adott helyére. A Camera obscura szűk nyílásán át csak kevés fény jut a dobozba, ezért hosszú idejű megvilágítással kell biztosítani, hogy a fotópapír fényérzékeny rétegében a kép keletkezéséhez szükséges szerkezeti változások végbemenjenek. Minél kisebb a lyuk mérete, annál hosszabb megvilágítási időre van szükség.

Camera obscura, amivel változtatható a kép mérete

Készítsünk Camera obscurát két egyforma hosszú egymásba tolható papírhengerből! A külső henger egyik végét zárjuk le alufóliával, aminek közepébe túvel kis lyukat ütöttünk. A belső henger alufólia felé eső végére feszítsünk pauszpapírt! A belső cső mozgatásával a lyuk-kamera képét felfogó pausz-ernyő helyzete változtatható, közelíthető, illetve távolítható a lyuktól.

Fordítsuk a kamera nyílását égő gyertya felé, nézzünk be a belső cső szabad nyílásán és a cső irányításával keressük meg a gyertyaláng képét a pausz-ernyőn!



Az eszköz működését a rajz szemlélteti. A gyertyaláng fénye a külső hengert lezáró fémfólián lévő lyukon halad keresztül. A belső hengert lezáró pauszpapír ernyőn a láng kissé elmosódott, fordított állású nagyított képe figyelhető meg.

- Figyeljük meg, hogyan változik a kép, miközben a belső hengert fokozatosan kifelé mozgatva az ernyőt távolítjuk a lyuktól!

- Mikor kapunk a lángról kétszeres nagyítású képet az ernyőn?

A kép nagysága a belső cső ki-be húzogatásával változik. Ha a belső csövet betoljuk, a kép kisebb, ha kihúzzuk, nagyobb.

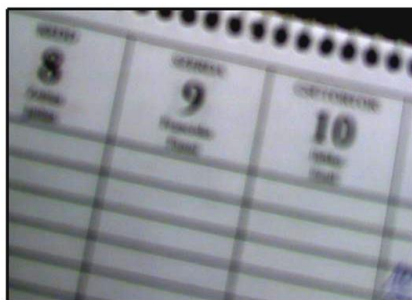
A sugármenetek szimmetriájából következik, hogy az eredeti lánggal azonos méretű kép akkor keletkezik, ha a gyertya-lyuk távolság éppen megegyezik a lyuk-ernyő távolsággal. Kétszeres nagyítású képet akkor kapunk, ha a lyuk-ernyő távolság kétszerese a gyertya-lyuk távolságnak.

Egyszerű kísérlet a „látásjavító lyuk-szemüveg” működésének bemutatására

Gyakori időskori probléma, hogy a szemlencse veszít rugalmasságából, nem képes megfelelően fókuszálni a tárgyról jövő fénysugarakat, így a kép nem éles. Ilyenkor segít az apró lyukakat tartalmazó fekete műanyag szemüveg. Az apró lyukakon keresztül sokkal élesebb a kép, a rosszul látó ember akár egész apró betűket is képes olvasni.



A jelenséget egyszerűen bemutatható fényképezőgéppel. Állítsuk az állványra rögzített fényképezőgépet „manuális” üzemmódra, irányítsuk egy apró betűkkel nyomtatott szövegre és a távolságot állítsuk úgy be, hogy a betűk a képen kissé elmosódjanak! Készítsük el a felvételt, majd anélkül, hogy a gép beállításán és a szöveg helyzetén változtatnánk, helyezzünk a lencse elé lyukszemüveget! A korábban életlen kép a lyukakon keresztül sokkal élesebb. A jelenséget szemléltetik a mellékelt fotók.



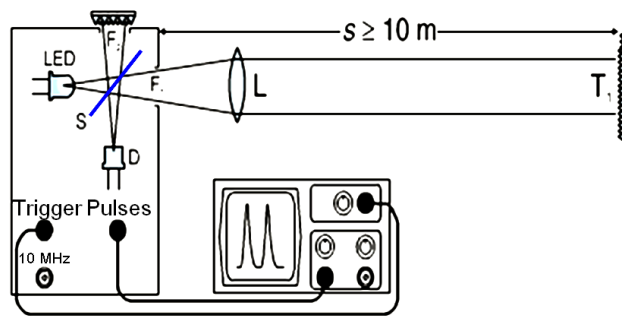
[Vissza >>>](#)

F4. „High-tech” tantermi demonstrációs mérés a fénysebesség meghatározására

A méréshez 10 m-nél kevéssel hosszabb szabad fényútra van szükség, így a kísérlet már nagyobb osztályteremben (előadóban) vagy az iskola valamelyik időlegesen lezárható folyosóján is bemutatható. A kísérlet előkészítése kb. 20 percet vesz igénybe, a mérés maga, a szükséges helyszíni magyarázatokkal együtt sem tart tovább 10 percnél.

A sebességmérés azon alapul, hogy elektronikusan megmérjük azt a nagyon rövid időtartamot, ami alatt egy fényimpulzus megteszi a kísérleti összeállítással megszabott 10 m-nél nagyobb, előre lemért távolságot.

A demonstrációs fénysebességmérés kísérlet kísérleti összeállítását és a mérés elvét az ábra illusztrálja.



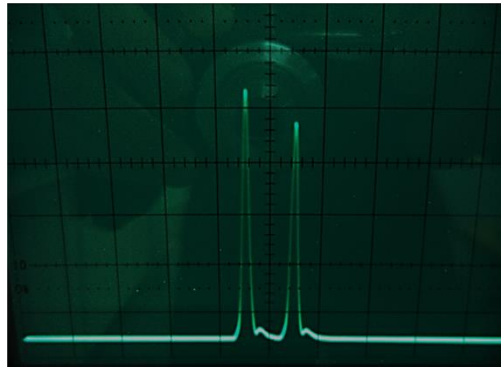
A kísérleti összeállítás négy egységből áll:

- 1) A mérőegység zárt doboza, amiben az elektronika, a fényforrás, a nyalábosztó tükör és fénydetektor van elhelyezve. (A dobozt kábellel csatlakoztatjuk az elektromos hálózatba és összekötjük kijelzőként használt oszcilloszkóppal)
- 2) Kétsugaras oszcilloszkóp
- 3) Optikai sínen előre-hátra mozgatható gyűjtőlencse, ami a készülékből kilépő divergens fénynyaláb párhuzamossá tételéhez szükséges.
- 4) Fényvisszaverő tükör

Az összeállítás során a tanterem egyik végében kell elhelyezni az elektronikus mérőegységet, a kilépő sugarakat párhuzamosító gyűjtőlencsét és a kijelzőként használt kétsugaras oszcilloszkópot, a terem ellenkező végén a fénynyalábot önmagába visszaverő tükröt.

A mérés elve a következő: Az elektronikus egységben elhelyezett LED nagyon rövid idejű fényimpulzusokkal világít. A kibocsátott fényt egy ferdén elhelyezett féligáteresztő tükör (S) két fénynyalábra osztja. A függőleges irányban visszavert nyaláb a műszerház felső ablakára helyezett tükrön (F) visszaverődik, majd az S tükör ismételt nyalábosztása után a függőlegesen lefelé haladó sugarai elérik a D fénydetektort. A LED által kibocsátott fénynyalábnak az a része, amely a ferde tükrön vízszintes irányban továbbhaladt a műszerdoboz oldalán lévő nyíláson kilép a szabad térbe. (A nyílás elé úgy kell elhelyezni az L gyűjtőlencsét, hogy

fénykibocsátó LED a fókuszába essék, és így az enyhén divergens nyaláb párhuzamossá válik. Az így párhuzamossá tett fénynyaláb szabadon terjed a tükörig. A fényútra merőlegesen beállított tükör a beleütköző fénynyalábot önmagába veri vissza. A visszavert fényimpulzus a műszerdobozba visszaérve ismét áthalad a ferde helyzetű féligáteresztő tükrön (S), ami kettéosztja. A visszavert fény egy része így szintén eljut a fénydetektorba. Így minden fényimpulzusból két jel jut el a detektorba, az egyik attól a fénytől származik, ami csak a készülék belsejében haladt, a másik attól, ami a tanteremben is megtett oda-vissza kb. 10 m utat. A két jel időeltérése az oszcilloszkóp képernyőjén leolvasható (lásd alsó ábra).

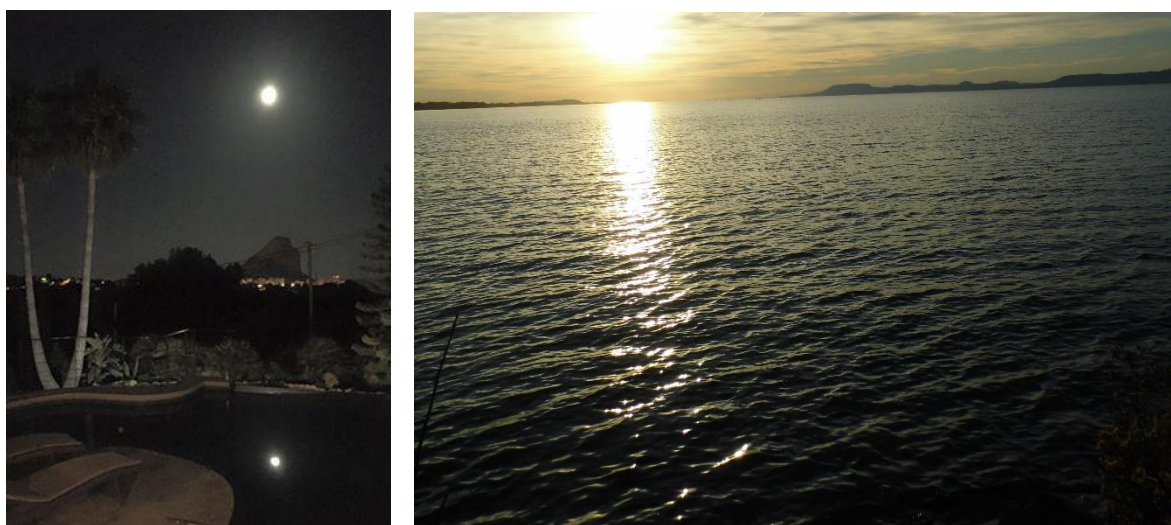


Ez az idő az, amíg a fény a teremben elért a tükörig, majd onnan vissza a kibocsátó egységig. A műszerdoboz nyílásának és a tükörnek a lemért távolságát osztva az oszcilloszkóp képernyőjén leolvasott idővel, megkapjuk a fénysebesség értékét.

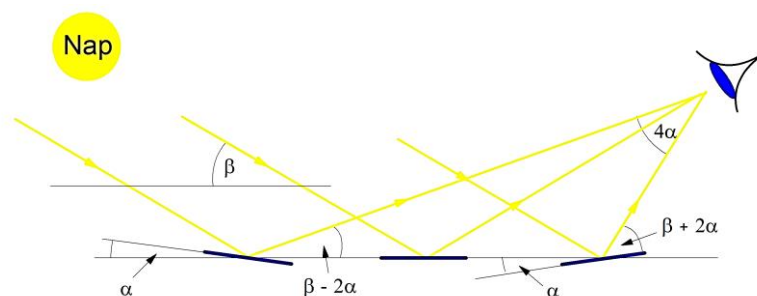
[Vissza >>>](#)

F5. Aranyhíd kialakulása hullámzó vízfelszínen

A lemenő Napot vagy a feljövő teliholdat figyelve gyakran látunk tükröződő fénysávot a víz felületén. Ezt a szép látványt a víz hullámzó felülete okozza. Ha a vízfelület hullámmentes, akkor a Napot vagy a Holdat a vízfelszín a síktükörhöz hasonlóan képezi le, egyetlen fényes pontot látunk. Hullámzás esetén a hullámhegyek és völgyek ferde felületén azonban több ponton is visszaverődik a fény: hosszú, keskeny fénysáv keletkezik. Ha jobban megfigyeljük a jelenséget, akkor láthatjuk, hogy ez a fénysáv apró tükröző pontok sokaságából áll össze. Nem állandó a jelenség, ahogyan a vízfelület a hullámzás közben mozog, úgy mozog, változik a látható kép is. A következő ábrákon a feljövő Hold nyugvó vízfelületen keletkező képe, valamint a lemenő Nap hullámzó víz felületén létrejövő aranyhídja látható.



Az *aranyhíd* hosszúsága, más szóval a látószöge meghatározható a geometriai optika visszaverődési törvényének felhasználásával. Hullámzáskor a párhuzamosan beeső nap sugarai nem sík felülettel találkoznak, ezt mutatja a következő értelmező ábra:



A két szélső helyzetben lévő hullámvölgy és hullámhegy vízszintessel bezárt szöge α , a bejövő napsugaraké pedig β . Ezekre a maximális szöget bezáró felületelemekre eső fénysugár $(\beta - 2\alpha)$, illetve $(\beta + 2\alpha)$ szög alatt érkezik, és a törési törvénynek megfelelően róluk ugyanilyen szöggel verődik vissza, és jut el a szemünkhöz. A fénysugarak útját megszerkesztve és felhasználva, hogy a háromszög külső szöge megegyezik a nem mellette fekvő belső szögek összegével, adódik, hogy a fénysávot 4α szög alatt látjuk

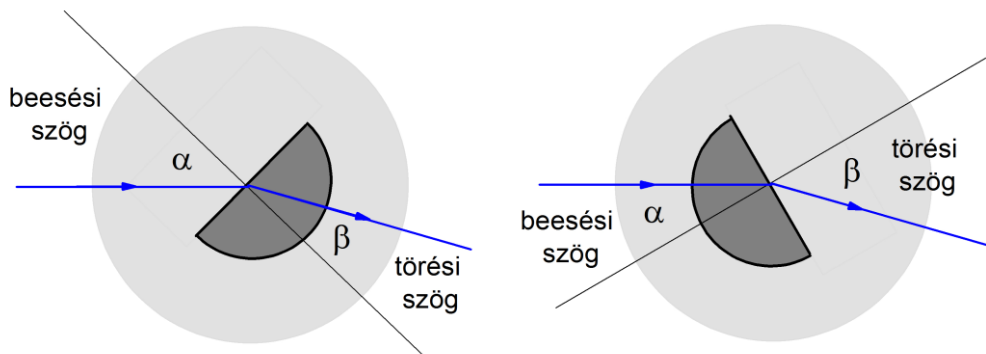
Tópartról figyelve a jelenséget, amennyiben a túlsó partot ennél a látószögnél már nagyobb szög alatt látjuk, kialakulhat a két partot összekötő aranyhíd. Ha a lemenő Nap közel kerül a horizonthoz, a híd megrövidül. Ha a fénysugár β beesési szöge már kisebb, mint az α határszög, akkor a fénysáv eltűnik.

Természetesen lemenő, vagy feljövő Hold esetében is megfigyelhetjük ugyanezt a jelenséget (*ezüsthíd*).

[Vissza >>>](#)

F6. Műanyag-levegő határfelület törésmutatójának meghatározása Hartl-koronggal

A mérés során a beesési és a törési szög közötti összefüggést határozzuk meg egy félkorong alakú műanyag réteg segítségével. A félkorongot rögzítsük a Hartl-korong szögbeosztással ellátott mérőtáblájára úgy, hogy a fény mindig a korong félkör alakú alaplapjának középpontjába essék. Hívjuk fel a diákok figyelmét arra, hogy fénytörés csak a lencse sík felületén történik, mert a kör középpontjában megtörő fény mindig merőlegesen érkezik a körvonalra, ezért iránya nem változik. A mérés során először a beesési és a törési szög közötti összefüggést vizsgáljuk, amikor a fény a levegőből az optikailag sűrűbb közegbe lép. Ezután megnézzük, mi történik, ha megfordítjuk a fénysugár útját úgy, hogy az optikailag sűrűbb közegből érkezzék a törő felülethez.



A mérés menete

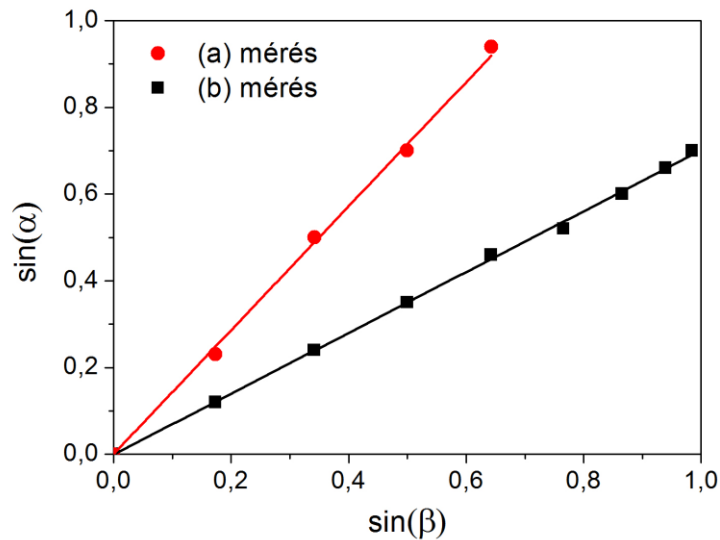
a) Helyezzük a félkör alapú műanyag lencsét a tábla közepére, a táblán kijelölt helyre, és állítsuk be a táblát úgy, hogy a fénysugár a síkfelületen lépjen be a lencsébe (lásd fent, bal ábra). A tábla elforgatásával növeljük az α beesési szöget, és olvassuk le az egyes beesési szögekhez tartozó β törési szögeket. Az összetartozó értékeket foglaljuk táblázatba.

b) Állítsuk át a táblát úgy, hogy a beeső sugár a félkörös felületen lépjen be a lencsébe (lásd fent, jobb ábra). Ezzel most megfordítottuk a fénysugár útját. Mérjük végig az összetartozó beesési és visszaverődési szögeket az előbbi összeállításhoz hasonlóan! A szögértékeket foglaljuk táblázatba.

A mérés kiértékelése

A mérés grafikus kiértékelése jó lehetőséget ad a függvényábrázolás gyakorlására. Az alapfokú oktatásban a szögfüggvények még nem ismertek, de a törési szöget a beesési szög függvényében ezen a szinten is ábrázolhatjuk. Az eredmény megmutatja, hogy ez a függvény nem lineáris, a beesési és a visszaverődési szög nem egyenesen arányos egymással. A szögfüggvények ismeretében a későbbi tanulmányok során erre érdemes visszatérni.

Felsőbb osztályokban vagy tagozaton a megfelelő matematikai ismeretek birtokában a mért eredmények alapján grafikonon ábrázolhatjuk a törési szög szinuszának függvényében a beesési szög szinuszt, és bizonyíthatjuk a két mennyiség közötti egyenes arányosságot. Ha a törési törvény $\sin \alpha = n_{21} \sin \beta$ matematikai alakja már ismert, az összetartozó adatpárokból a megfelelő törésmutató meghatározható. A függvény grafikonjának ismeretében az egyenesek meredekségéből is meghatározhatjuk a két közeg egymásra vonatkoztatott törésmutatóját. A következő ábra mutatja a) és b) mérés adatainak grafikus ábrázolását.



Az grafikonokon ábrázolt egyenesek meredekségéből a törésmutató meghatározható, és megmutatható, hogy a két törésmutató értéke egymás reciproka:

$$n_{21} = \frac{1}{n_{12}}$$

Hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a törésmutató számértéke akkor nagyobb egynél, ha a nyaláb optikailag ritkább közegből lép optikailag sűrűbb közegbe. Fordított esetben a törésmutató értéke egynél kisebb lesz. Ezzel a méréssel egyben a grafikus ábrázolást, és a grafikonolvasást is gyakorolni lehet. A későbbiekben, a Huygens-elv, vagy a Fermat-elv megismerése után a kísérletileg kimért törési törvényt elméletileg is igazolhatjuk.

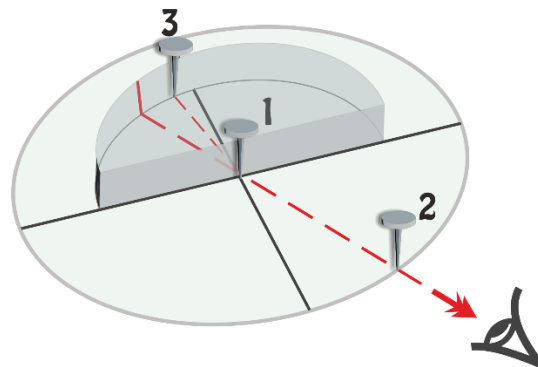
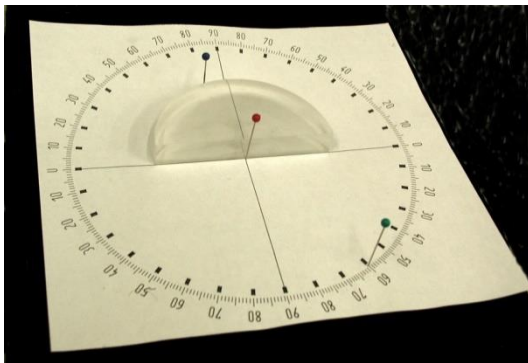
Alternatív mérés gombostű módszerrel

A félhenger törésmutatójának meghatározása fokbeosztással ellátott Hartl-korong hiányában is egyszerűen elvégezhető.

Helyezzünk tiszta papírlapot vastagabb újságpapírra vagy parafaalátétre! Rajzoljunk a lapra körzővel a félkorong sugaránál nagyobb sugarú kört, majd rajzoljuk be a kör két egymásra merőleges átmérőjét! A félkorongot helyezzük a körbe úgy, hogy vágási felülete az egyik átmérőre illeszkedjék és közepe a kör középpontjával essék egybe! Szúrjuk le az első gombostűt a félhenger közepe elé a kör középpontjába! (A parafa- vagy újságpapír-alátétben a gombostű a papírlapra merőlegesen megáll.) A második gombostűt szúrjuk le a félhengerrel szemben megrajzolt kör egyik kerületi pontjába (lásd alsó ábra)! Nézzünk a 2. gombostű felől az 1.

gombostű irányába a papírlap síkjával párhuzamosan! Ha ez sikerül, a két gombostű éppen fedésben áll. A harmadik gombostűt mozgassuk a félgömb palástja mentén úgy, hogy az üvegtesten keresztül nézve az is fedésbe kerüljön az előző kettővel. Ebben a helyzetben szúrjuk le a 3. gombostűt is! A három gombostűt a félgömben keresztül nézve egy egyenesben látjuk, ha azonban felülről nézzük őket, jól látszik, hogy valójában megtört vonalra illeszkednek. Vegyük le a papírlapról a félgömböt, húzzuk ki a gombostűket és a tűnyomok által jelzett pontok közé húzzunk egyenes ceruzavonalakat! Az 1. és 2. gombostű által meghatározott vonal jelöli a levegőben haladó fénysugár irányát, az 1. és 3. gombostű nyoma az üvegben haladó sugárét. A kör berajzolt két átmérője a közegetartást, illetve a beesési merőlegest jelöli. A sugármenetek és a beesési merőleges közt szögmérővel megmérhető a beesési és a törési szög. A törésmutató meghatározásához azonban erre sincs szükség. Húzzuk meg a beeső és a megtört sugár kerülettel alkotott metszéspontjának merőleges vetületét a beesési merőlegesre! A két párhuzamos szakasz aránya a beesési és törési szög szinuszaival egyezik meg.

A kísérleti összeállítást és az ennek alapján végzett szerkesztést az ábra mutatja.

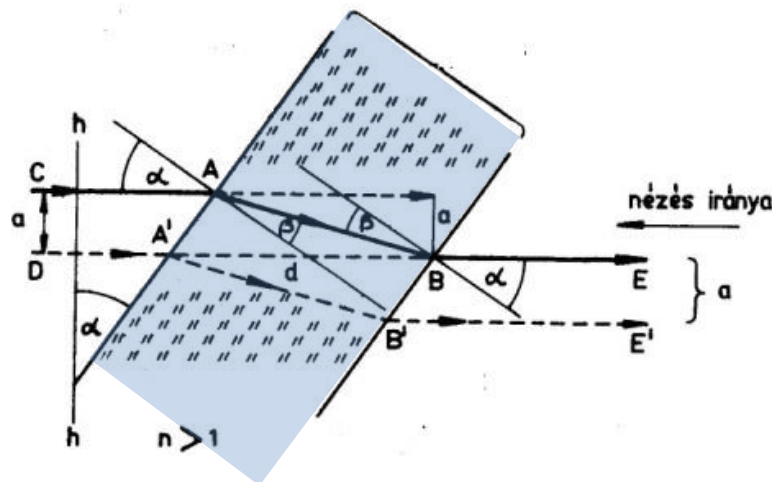


[Vissza >>>](#)

F7. Síklapokkal határolt törőközegek: fénytörés plánparallel lemezen és prizmán

A plánparallel lemez

Közismert, de gombostűkísérletekkel egyszerűen igazolható, hogy a plánparallel lemezre ferdén beeső párhuzamos fénynyaláb irányváltozás nélkül, de párhuzamos eltolódással halad át a lemezen. Az eltolódás kiszámítása jó gyakorlatot jelent az elemi geometria és az optika összekapcsolására.



Az ábráról közvetlenül leolvasható, hogy a plánparallel lemezre beeső CA és onnan kilépő BE sugár párhuzamos, hiszen a beeső sugár beesési szöge a fénysugár útjának megfordíthatósága következtében meg kell, hogy egyezzen a kilépő sugár törési szögével. A sugarak a eltolódása az ábra alapján:

$$a = \overline{AB} \sin(\alpha - \beta)$$

Az AB szakasz pedig az AB'B háromszögből kifejezhető a lemez d vastagságával:

$$\overline{AB} = \frac{d}{\cos\beta}$$

Az eltolódás tehát:

$$a = \frac{d}{\cos\beta} \sin(\alpha - \beta)$$

A β törési szög szinuszát kifejezhetjük a törési törvényből $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$, ennek megfelelően a szög koszinusza:

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)^2}$$

Ezekkel, valamint a $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ trigonometriai azonosság felhasználásával, és némi algebrai átalakítással azt kapjuk, hogy

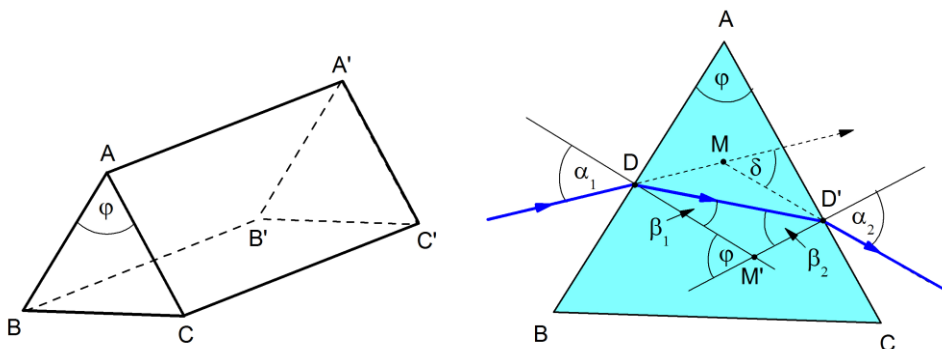
$$a = d \sin \beta \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right)$$

Megjegyzés:

- A plánparallel lemez felhasználható kicsiny távolságok, (például az ábrán látható C és D pontok távolságának) pontos mérésére. A mérés elve a következő. Állítsuk párhuzamosra a lemezt a CD szakasszal, majd forgassuk el addig, míg a két pontot a lemezen keresztül fedésben látjuk. A törésmutató, a lemezvastagság és az elforgatás szögének ismeretében a két pont távolságát éppen a fent levezetett képlet adja.
- A levezetésben hallgatólagosan feltételeztük, hogy a lemez 1 törésmutatójú közegben (a gyakorlat szerint levegőben) helyezkedik el, azaz n a lemez anyagának abszolút törésmutatója.

A prizma

Amikor a prizma fénytörésével foglalkozunk, akkor néhány alapfogalom, illetve elnevezés jelentését világossá kell tennünk a tanulók számára. Ezek a fogalmak természetesen, általában azonban az elnevezések nincsenek benne a tanulók szókincsében. Az optikában prizmán legtöbbször háromszög alapú átlátszó anyagból készült egyenes hasábot értünk. A prizma $ABB'A'$ és $ACC'A'$ lapján törik meg, akkor AA' a prizma törőéle, a lapok által bezárt φ szög pedig a prizma törőszöge. A törőélre merőleges sík a prizma főmetszete. Általában csak a főmetszetben haladó sugármenetekkel foglalkozunk.



A fénysugár eltérülésének (deviáció) meghatározása

A prizma a ráeső fénynyalábot eltéríti eredeti irányától. Elsődleges célunk a prizma α_1 szögben beeső sugár δ eltérülési szögének meghatározása (ábra). A δ szög $DD'M$ háromszög külső szöge, így a két lap beesési és törési szögeivel kifejezve:

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2)$$

A $DM'D'$ szöget a D és D' pontbeli beesési merőlegesek alkotják, így φ és a DMD' szög merőleges szárú szögek, amelyek csúcsa egymás szögtartományán belülre esik, ezért a $DM'D'$ szög nagysága $(180^\circ - \varphi)$. A DMD' háromszögből azonban következik, hogy a DMD' szög

nagysága $[180^\circ - (\beta_1 + \beta_2)]$, vagyis $\varphi = \beta_1 + \beta_2$. Következésképpen a két lapon megtörő sugár eltérülési szöge:

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi$$

A D és D' pontban felírhatjuk a törési törvényt

$$\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1$$

$$\sin\alpha_2 = n\sin\beta_2$$

Ebből α_2 meghatározható α_1 és a prizma adatainak függvényében, azonban egyszerű zárt alak nem adható.

Kis nyílásszögű prizmák

Amennyiben a prizma nyílásszöge kicsiny, és a vizsgált sugármenetek közel merőlegesek a prizma törőszögének szögfelezőjére (a prizmákat általában ilyen feltételek mellett használjuk) akkor a D és D' pontokban felírt törési törvényekben alkalmazhatjuk a $\sin\alpha \approx \alpha$ közelítést:

$$\alpha_1 = n\beta_1$$

$$\alpha_2 = n\beta_2$$

Az egyenleteket összeadva és felhasználva, hogy $\varphi = \beta_1 + \beta_2$:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = n(\beta_1 + \beta_2) = n\varphi$$

Ezzel a deviációra:

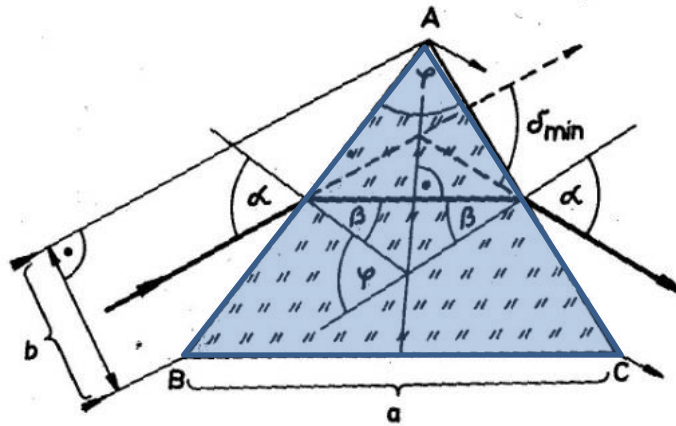
$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi = (n - 1)\varphi$$

adódik. Kis nyílásszögű prizmák esetén tehát a sugarak deviációja jó közelítéssel független a beesési szögtől, csak a törésmutatótól és a prizma törőszögétől függ

A minimális deviáció

A tapasztalat szerint, ha az α_1 szöget változtatjuk, akkor a δ eltérülési szögnek létezik minimális értéke. Ez a Hartl-korongon könnyen bemutatható és adott prizma esetén mind a minimális eltérülési szög, mind a hozzá tartozó beesési szög meghatározható.

A fénysugár útjának megfordíthatóságából következik, hogy a minimális deviáció esetén az α_1 beesési és α_2 kilépési (törési) szögnek meg kell egyeznie. Ebből adódik, hogy $\beta_1 = \beta_2$. Ily módon könnyen látható, hogy a minimális eltéréshöz tartozó sugármenetnek szimmetrikusnak kell lennie a prizma törőszögének szögfelezőjére, vagyis a sugármenet prizmán belüli része merőleges a szögfelezőre.



Az ábrából azonnal adódik, hogy $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ következményeként ebben az esetben:

$$\beta = \beta_1 = \beta_2 = \frac{\varphi}{2}$$

Behelyettesítve ezt a deviációs szögre kapott általános összefüggésbe, azt kapjuk, hogy:

$$\delta = 2\alpha - \varphi$$

Mivel a deviációs szög nagy pontossággal mérhető, felhasználhatjuk a prizma törésmutatójának meghatározására. Mérjük δ_{min} értékét, és fejezzük ki a hozzátartozó $\alpha = \frac{\delta_{min} + \varphi}{2}$ beesési szöget.

A törésmutatót meghatározhatjuk a törési törvényből adódó

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{\delta_{min} + \varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

összefüggésből.

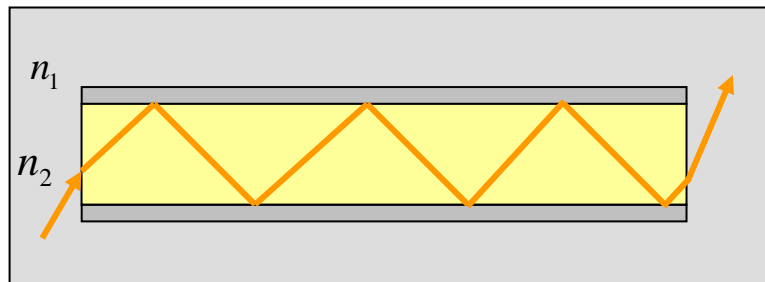
Megjegyzés:

- A plánparallel lemezhez hasonlóan – az optikai gyakorlatnak megfelelően – itt is feltételeztük, hogy a prizma levegőben helyezkedik el, azaz az n törésmutató a prizma anyagának abszolút törésmutatóját jelenti.

[Vissza >>>](#)

F8. Optikai szálak és alkalmazásuk

A technikában a teljes visszaverődés elvén működő optikai szálakat sokrétűen használják a fény hosszútávon történő irányított vezetésére. A szál végének sík lapjával lapos szöget alkotó fénysugár a szálba bejutva, a felülethez mindig a határszögnél nagyobb beesési szöggel érkezik, így teljes visszaverődést szenved. A többszörös teljes visszaverődés, akárhogy is görbítjük is a szálakat, a fényt csak a szál másik végét lezáró sík lapon engedi kilépni. Optikai szálakat üvegből vagy műanyagból készítenek, egy szál átmérője 50- 60 mikrométer.



$$n_1 < n_2$$

Fénysugár előrehaladása optikai szálban

Egy optikai összeköttetés tipikusan 2 db optikai szálra épül (külön szál az egyik, illetve másik irányú átvitelre). Az optikai kábelben több optikai szál fut, a megfelelően rendezett szálak képátvitelre is alkalmasak. A száloptikát a technikában információ továbbítására használják, nagy átviteli sebesség érhető el vele. Az orvosi gyakorlatban képalkotás lehetőségét kihasználva diagnosztikai célokra alkalmazzák: a száloptikának nagy internetes irodalma van, érdemes megbízni az érdeklődőbb tanulókat a téma feldolgozásával kutatási feladatként.

[Vissza >>>](#)

F9. Newton-prizma kísérletei

Isaac Newtont a 17-18. század legnagyobb teoretikus fizikusaként tartja számon a tudománytörténet, aki a dinamika róla elnevezett törvényeivel forradalmasította a mechanikát és megváltoztatta a tudományos világszemléletet. Jóval kevesebben vannak azok, akik tudnak a fizika más területein, így az optikában folytatott munkáiról is. E munkák megismerése nemcsak azért fontos, mert Newton üvegprizmákkal végzett kísérleteit az iskolai fizikaórákon is bemutatjuk, de azért is, mert bemutatja, hogy Newton nem kizárólag elméleti tudós volt, a kísérletezés sem állt távol tőle.

Newton munkásságát, kiemelve az optikai kísérleteit hitelesen és diákok számára is érdekesen mutatja be a National Geographic Channel ismeretterjesztő TV-csatorna „Hat kísérlet, ami megváltoztatta a világot” című sorozat Newton kísérleteit bemutató videója, ami az iskolai fizikaórák kiegészítő anyagaként is jól használható.



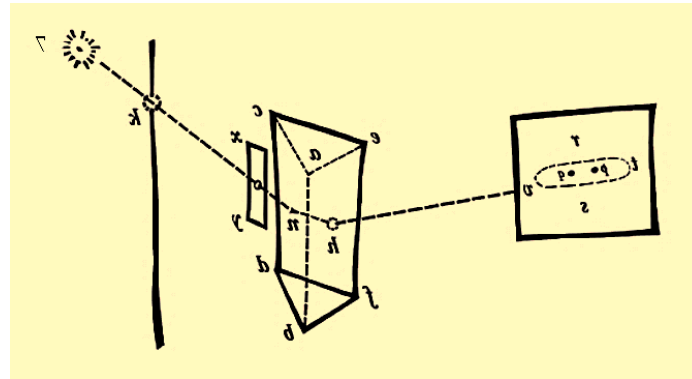
[Hat kísérlet, ami megváltoztatta a világot –
Newton](#)



A 17. század második felében a fizikusok egy jelentős csoportját (Descartes, Huygens, Hooke, Newton) a fényvel kapcsolatos jelenségek és eszközök foglalkoztatták. A fényjelenségek magyarázatát illetően, illetve a fény mibenlétének meghatározásában gyakran éles vitákat folytattak. Newtont döntően a fényhez kötődő színek magyarázata érdekelte. Az akkortájt nagy népszerűségnek örvendő üvegprizmákkal a fehér fényből szép színeket lehetett előállítani. Descartes ún. *modifikációs elmélete* szerint a prizma tulajdonsága, hogy a fehér fényt színessé alakítja át. A korabeli tudósok többsége elfogadta ezt a magyarázatot, de Newtont nem győzte meg Descartes állítása. Inkább azt valószínűsítette, hogy a fehér fény eleve színeket tartalmaz, amiket a prizma fénytörése valahogyan „előhív”. Az 1665 nyarán kitört pestisjárvány miatt Newton hosszabb időre hazaköltözött szülőfalujába és ottani magányában kezdte kísérletekkel vizsgálni a prizma fénytörését. A kísérletek pontos leírását és vázlatrajzait, továbbá a megfigyeléseket, eredményeket rögzítő jegyzetek fennmaradtak. Ezek alapján részletes és pontos ismereteink vannak a 24 éves Newton optikai kísérleteiről.

Első feljegyzéseiben Newton beszámol arról, hogy üvegprizmára irányított napsugarakkal miként sikerült színeket vetítenie lesötétített szobája falára. Newton szülőházának egy emeleti szobájában kísérletezett. A szoba ablakát kívülről csukható fatábla védte. Erre lyukat fűrt, így a lesötétített szobába csak a lyukon keresztül jutott be a napfény. A napsugár útjába egy kisebb lyukat tartalmazó ernyőt rakott, ami után úgy helyezte el az üvegprizmát, hogy a prizmatól 22

lábnyira lévő meszelt falon megjelenjen a színek sorozata. Newton eredeti szabadkézi rajzát a kísérletről az ábra mutatja.

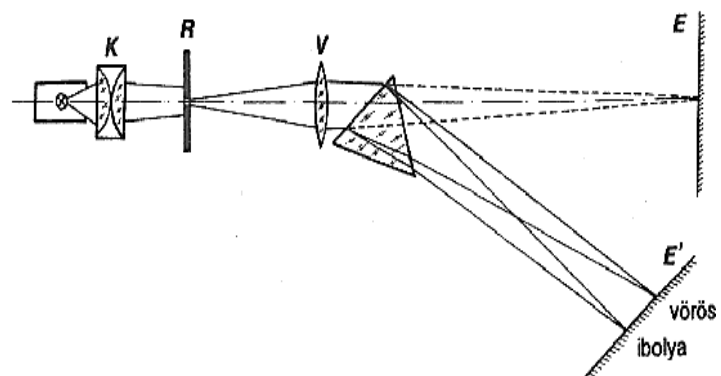


A kísérlet fontos tapasztalataként jegyzi fel, hogy pontosan szűk kör-keresztmetszetű fénynyaláb a prizma után eltérő irányban halad tovább a falig, amin nem kör alakú foltot világít meg, hanem mintegy 13,5 inch (34,3 cm) hosszú, 2,5 inch (6,4 cm) széles sávot, ami szivárványszerűen egymásba olvadó színekből áll, a két vége félkör alakban záródik.

Newton kísérletének szokásos iskolai változata alig mutat eltérést az eredetitől.

A lényeges különbség csak abban van, hogy napfény helyett izzólámpa fényével dolgozunk, hogy ne legyünk kitéve a napsugár esetlegességének.

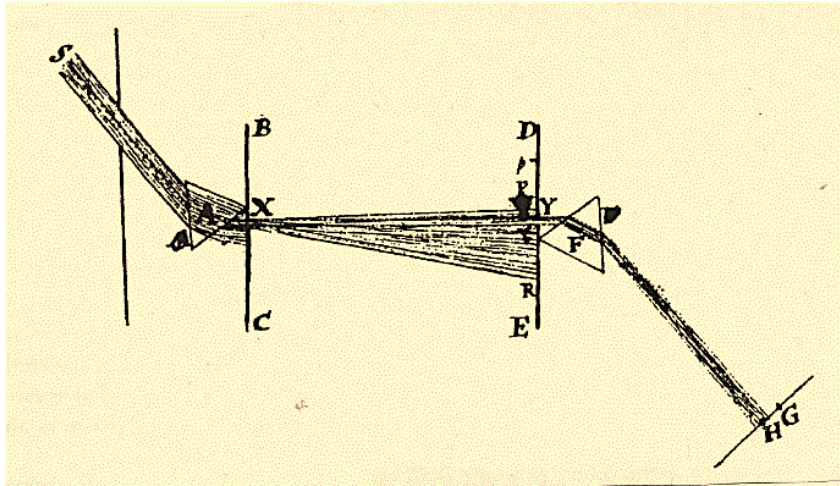
Az erős pontfénylámpa fényét kondenzorral egy kör-diafragmára összpontosítjuk, majd a diafragma megvilágított nyílását egy vetítőlencsét leképezzük az ernyőre. A vetítőlencse után elhelyezett prizma a fénynyaláb eredeti irányát megtöri. Az ernyőt áthelyezzük a megváltozott fenyútba távolságának finom korrigálásával megkeressük



megkeressük, mikor kapunk optimális színeképet. A színeképet akkor szép, ha a diafragma fénypontját a vetítő lencse éles kontúrokkal vetíti ki az ernyőre. Mivel a prizma a különböző színű fényeket más irányokba törve különválasztja, a spektrum a különböző színű diafragma-képek sorozatából adódik.

Newton kísérletei megerősítették abban az elképzelésében, hogy nem a prizma különleges tulajdonsága az, hogy a fehér fényt a színekké alakítja. Feltételezte, hogy a fehér fényben jelen vannak a különböző színek, a prizma szerepe az, hogy ezeket érzékelhetővé teszi. Elméletének igazolására Newton egy perdöntő kísérletet talált ki, amit munkáiban „experimentum crucis”-nak nevez. Kísérletéhez két egyforma prizmat használt. Az egyik prizmával, a már leírt módon előállította a színeképet, majd azt egy kis lyukat tartalmazó árnyékoló ernyővel letakarta úgy, hogy a kis lyukra csak egyetlen színű fény essen, és haladjon át rajta. Az így nyert egyszínű fénynyaláb útjába helyezte a második prizmat és az ezen átjutó fényt vetítette a falra. Az

izgalmas kérdés az volt, hogy mi látható a prizma után. Ha a modifikációs elmélet igaz, a prizma megváltoztatja a ráeső fény színét, ha Newton álláspontja a helyes, a prizma megváltoztatja az egyszínű fénynyaláb irányát (fénytörés) de a fény színe nem változik meg. A kísérlet vázlatát Newton rajza mutatja.

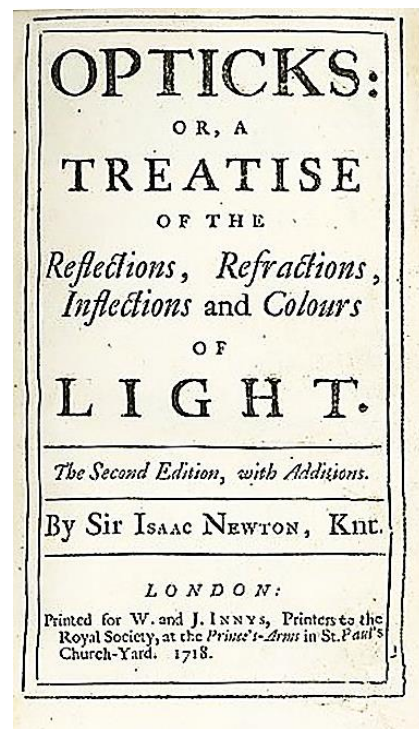


A rajzon látszik, hogy az első prizmán áthaladó sokszínű divergens fénynyalábból kétszeres blendeléssel választotta ki a második prizmára vezetett egyszínű sugarakat. A monokromatikus nyaláb a prizmán a szokásos módon megtört, de párhuzamos maradt és színét is megtartotta, nem bomlott fel újabb színekre.

Newton e második kísérletének osztálytermi keretek közt ritkán mutatjuk be. Ennek az az oka, hogy a jelenség, még optimális beállítás esetén is nagyon fényszegény. Mivel teljes sötétítést szükséges és az ernyőn megjelenő színes fényfolt így is csak közelről megfigyelhető, ajánljuk, hogy széles körben elégedjünk meg Newton kísérletének elmondásával, a kísérlet megismétlésével csak szakköri keretek közt, szűk körben próbálkozzunk.

Newton színnek iránti érdeklődését, kiváló kísérleti érzékét és gyakorlati szemléletét a leírt prizmás kísérletek mellett bizonyítja az is, hogy részletesen tanulmányozta a vékonyrétegeken megfigyelhető színes sávok (ún. *Newton-gyűrűk*) tulajdonságait, foglalkozott a lencsék kromatikus hibáival és a lencsés távcsövek kromatikus hibájának ellensúlyozására megalkotta a róla elnevezett tükrös távcsövet (Newton-távcső).

Newton 1704-ben megjelent könyvében foglalta össze a fényjelenségekkel kapcsolatos vizsgálatait (az itt leírt prizmás kísérleteit is) és a fényjelenségekre adott értelmezéseit. Ezekkel kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy Newton korát megelőzve döntően intuitív alapon vallotta a fény részecsketermészetét, miközben több olyan utalása is ismert, ami azt mutatja, hogy Newton a fény viselkedésének magyarázatául bizonyos hullámszerű viselkedést is elfogadott.



[Vissza >>>](#)

F10. Fénytörés a légkörben

Folyamatos fénytörés olyan közegben alakul ki, amelyben a fény haladási irányában a törésmutató folytonosan változik. Ennek sok oka lehet, gázokban többnyire a sűrűség változása.

A természetben is találkozhatunk ilyen jelenségekkel a légkörben (délibáb és a Fata Morgana), ahol a változó sűrűséget a levegőrétegben kialakuló hőmérsékletkülönbség okozza. A távoli égitesteket sem ott látjuk, ahol vannak, mert a róluk érkező fénysugár „elgörbül”, szemünk pedig a beérkező fény pillanatnyi irányában érzékeli az égitestet. Az elgörbülés oka a levegő sűrűségének gyors csökkenése a Földtől való távolság függvényében.

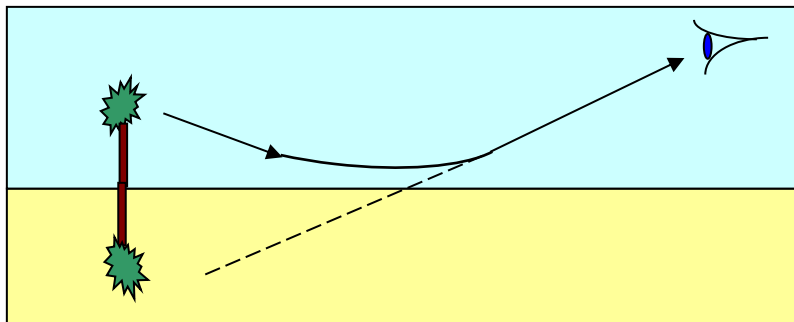
Délibáb

Nyári melegben a forró aszfalt közelében a levegő melegebb, mint a magasabban lévő légrétegekben. A Nap sugarai a hidegebb, optikailag sűrűbb levegőből érkezve folyamatosan elgörbülnek, és teljes visszaverődést szenvedve jutnak a szemünkbe. A teljes visszaverődés következtében a nyári melegben a forró aszfalt fölött vizesnek látjuk az utat. Az így létrejövő visszaverő felület tükörré válik, melyben a környező tárgyak jól tükröződnek.



Délibáb az országúton

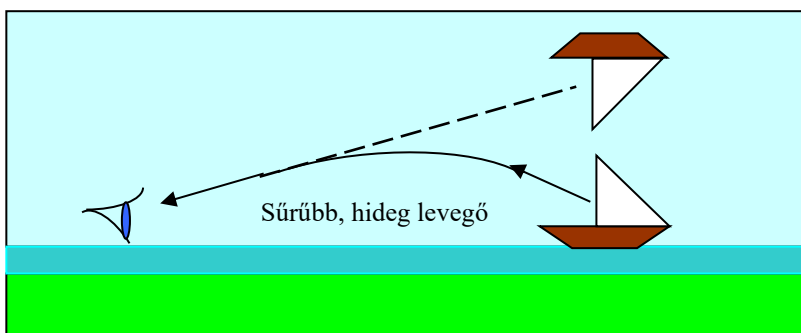
A sivatagban a vándorok is így, az elgörbült napsugarak játéka miatt észlelnek nem létező vízfelületet, vagy látják nagyon távoli tárgyak fordított állású képét a tükröző forró levegőről visszaverődő fénysugarak miatt.



A fénysugár útja délibáb esetén

Fata Morgana

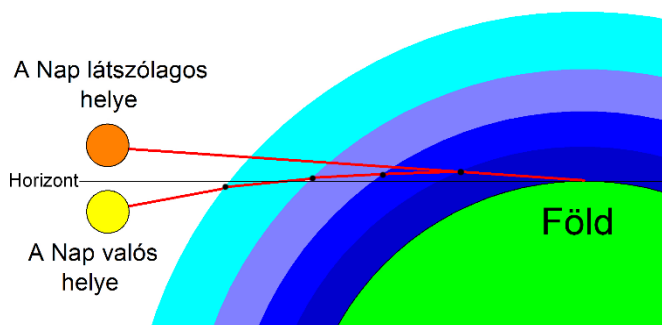
A Fata Morgana fordított délibábnak is nevezhető. Forró nyári reggeleken jöhet létre vízpartokon. A Nap a levegőt gyorsan felmelegíti. A víz, nagy fajhője miatt, lassabban melegszik, így a vízfelülettel érintkező légréteg még hideg. A távoli hajóról kiinduló fénysugár fölfelé haladva egyre melegebb, így optikailag ritkább levegőrétegbe érve végül teljes visszaverődést szenved. Ilyenkor látjuk a messze lévő hajók fordított képét a víz felett.



Fata Morgana: a fénysugár útja

Csillagok megfigyelése

A csillagok és a lemenő Nap sem ott vannak, ahol látjuk őket. A felfelé ritkuló levegőben a törésmutató változása miatt a csillagokból érkező fénysugár a légkörbe érve megtörik. Ugyanez a helyzet a lemenő Nap esetében is. Mi még látjuk a levegő hullámhosszfüggő Fényszórása miatt vöröslő Napot, miközben ő már a horizont alá bukott.

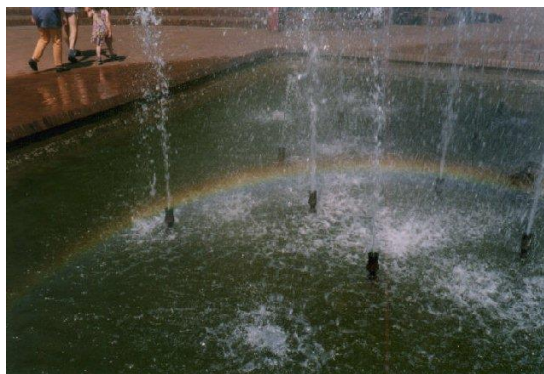


[Vissza >>>](#)

F11. A szivárvány

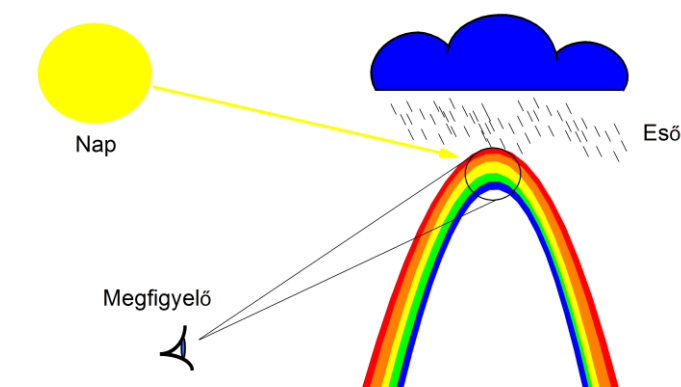
A légkör fénytünetményeinek tárgyalását mindenképpen a szivárvánnyal érdemes kezdeni. A jelenség csodálatos és jó alkalmat teremt az Interneten található szivárvány képek összegyűjtése mellett saját felvételek készítésére. A természetes körülmények között készített saját felvételek mellett igen szép képek készíthetők a kerti locsolók szórt vízcseppjein kialakuló szivárványokról is.

Szivárvány bármikor keletkezhet, ha apró vízcseppek kerülnek a levegőbe, így locsoláskor, vízesések közelében szintén megfigyelhető.

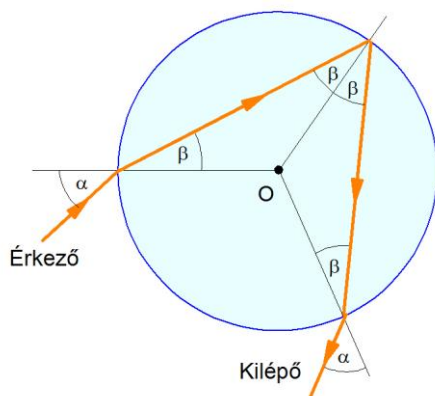


A két kép jól mutatja a szivárvány keletkezésének geometriáját, ha magasan van a Nap, akkor a szivárvány íve közel a horizonthoz látható.

A szivárvány sok egyszerű elméleti megfontolásra is alkalmat adhat, szép példa a geometriai optikai ismeretek alkalmazására, mert keletkezésekor törés, visszaverődés és diszperzió együtt játszódik le. A szép színes jelenség akkor jön létre, ha a Nap összetett fénye megfelelő méretű és mennyiségű vízcseppel találkozik. Az észlelés feltétele az, hogy a megfigyelő háttal álljon a lemenő, vagy feljövő Napnak.

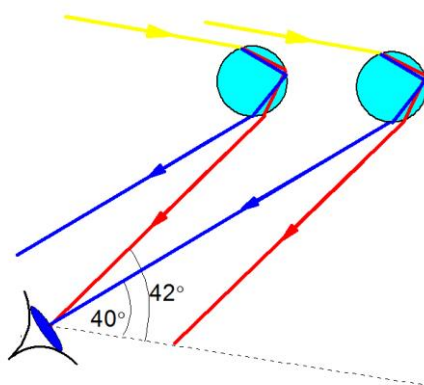


A szivárvány keletkezését a történelem során sokan próbálták megmagyarázni, az első igazán helyes értelmezés Descartes nevéhez fűződik. Descartes színelmélete nem volt alkalmas a szivárvány színeinek magyarázatára, pontosan megadta azonban a szivárványív szögét, és létrejöttének feltételét. Descartes szerkesztéssorozat útján jutott el a jelenség magyarázatához.



Modellként vízzel töltött üveggömböt használt. Eredményeit táblázatba foglalva állapította meg, hogy a szivárványív kialakításában csak meghatározott irányból érkező sugarak vesznek részt.

A folyamat lényege a fénysugarak törés és visszaverődés következtében létrejövő eltérése, deviációja. Az felső ábra idealizált, gömb alakú vízcsepp esetén mutatja a szivárvány keletkezéséhez vezető sugármenetet. Kövessük a fénynyaláb útját a vízcseppben. A vízcseppet elérő fénynyaláb egy része a felületen visszaverődik, másik része pedig törés után bejut a csepp belsejébe. Ott egy része visszaverődik, majd a visszavert rész egy része a csepp határán újra megtörve kilép. (Felhívjuk a figyelmet arra, hogy gömb alakú vízcseppet feltételezve a csepp belsejében haladó fénysugár nem szenvedhet teljes visszaverődést, mert akkor sehol sem léphetne ki a csepptől.) A különböző színű nyalábok a különböző törésmutató miatt minden törés során különböző mértékben törnek meg (diszperzió), emiatt végül más-más szögben hagyják el a cseppet. Ez azt eredményezi, hogy a különböző színű fénynyalábok az eredeti beeső sugarhoz képest különböző szöggel térülnek el, így különböző látószöggel érkeznek a szemünkhöz. A vörös szín látószöge 42° , a kék színé pedig 40° . Mindegyik cseppben lejátszódik a diszperzió, de egy cseppből csak egyféle színű sugár éri el szemünket. A látószögeknek megfelelően a különböző magasságban lévő cseppeket más színben látjuk.

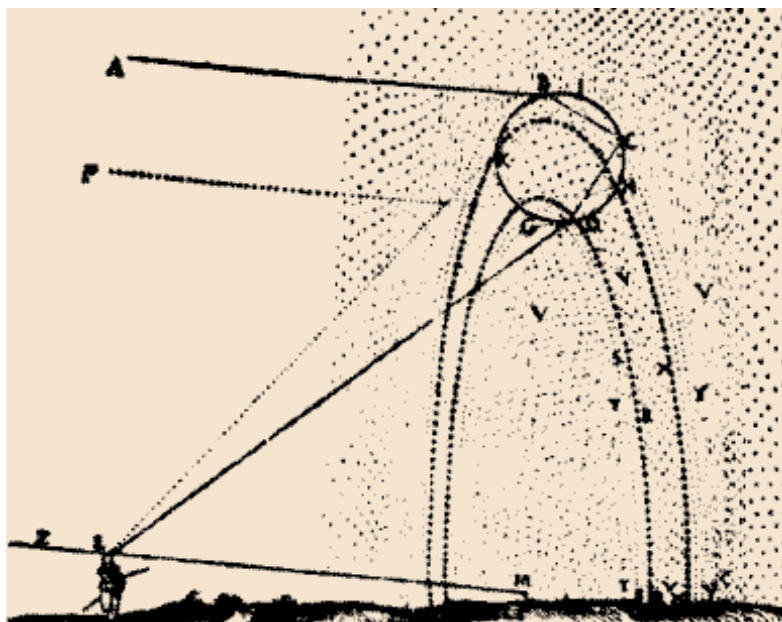


Megmutatható, hogy az eltérésnek (deviációnak) meghatározott beesési szög mellett szélsőértéke van. A kilépő keskeny nyalábot ugyanis ott érzékeljük, ahol kilépés után is jó közelítéssel párhuzamos marad, azaz az eltérés nem érzékeny a belépési szögre.

Általános tény továbbá az, hogy a fénysugarak a minimális deviáció szöge körül sűrűsödnek. Ez azt jelenti, hogy a vízcseppeket elhagyó, majd szemünkbe érkező fénysugarak közül a legtöbb a minimális deviáció szöge körüli értékkel térült el. Ennek következtében az általunk észlelt kép létrehozásában a minimális deviáció szögével eltérülő fénysugarak dominálnak. Emiatt rendelkezik a szivárványív jól meghatározott geometriával, látószöge (a Nap körüli, illetve a Naphoz viszonyított helyzete) változatlan. Ha a Nap magasabban áll, akkor a szivárvány íve a horizont felé süllyed: deleléskor a szivárvány már nem látszik, lebukik a horizont alá. Repülőről, vagy magas hegycsúcsokról a körív nagyobb része válik láthatóvá (lásd következő ábra).



A következő, Descartestól származó ábra, a minimális eltérülésű fénysugarakból álló szivárványívet mutatja.



Mindenképpen érdemes megjegyezni, hogy minden megfigyelő „saját” szivárványát látja, más megfigyelő szemébe más domináns fénysugarak érkeznek. Ebből a szempontból Descartes ábrája is „hamis”, hiszen a berajzolt ívet oldalról nem láthatja senki

Többszörös szivárványok

Az előzőekben vázlatosan áttekintettük a szivárvány keletkezését, azt tételeztük fel, hogy a vízcseppek belsejében csak egyszeri visszaverődés következik be. A tapasztalat szerint azonban

nem túl gyakran ugyan, de kettős szivárványívet is észlelhetünk. A megszokott szivárvány ív felett látható jelenséget mellékszivárványnak nevezzük.

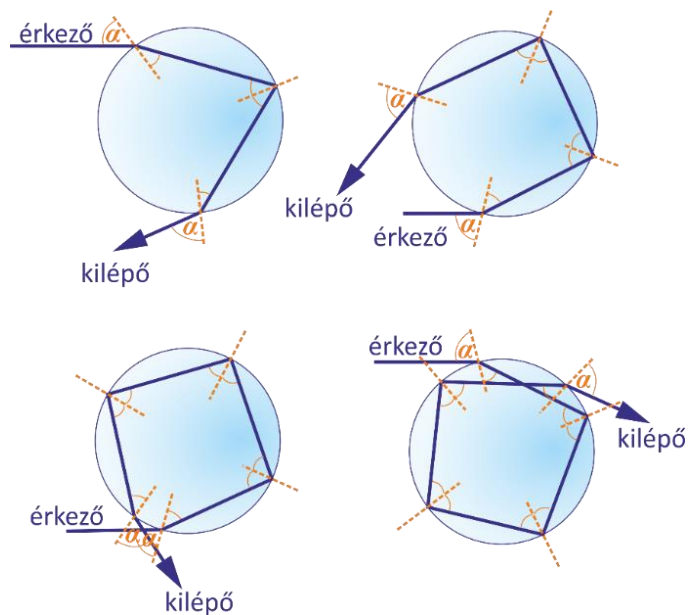


A többszörös visszaverődések geometriáját megvizsgálva, megállapítható, hogy a mellékszivárvány pontosan értelmezhető a vízcseppekből kétszeri visszaverődés után kilépő fénysugarak segítségével.

Az elméleti gondolatmenetet érdemes azonban általánosabban, kettőnél többszörös visszaverődések esetén létrejövő sugármenetekre is elvégezni. Matematikai érdeklődésű osztályokban a kör geometriáját alkalmazhatjuk és egyszerű szélsőérték számítást is végezhetünk.

Az oldalsó ábrásozat olyan lehetséges sugármeneteket mutat, ahol a gömb alakú vízcseppben rendre egy-, két-, három-, illetve négyszeres visszaverődés történik a cseppek belsejében. A csepp szimetriatulajdonságait felhasználva szép alkalmazása a geometriai ismereteknek az ábrásozat által illusztrált sugarak eltérülési szögének, majd megfelelő analízisbeli ismeretekkel a minimális eltérés szögének meghatározása. Az analógia miatt az ábrán látható négy eset együtt tárgyalható. A beesési szöget, valamint a törési szöggel egyenlő visszaverődési szögeket rendre, α -val és β -val jelöljük.

Többszörös visszaverődéskor a körmetszet geometriájából következően az egymást követő visszaverődések mind ugyanakkora beesési és visszaverődési szöggel következnek be, és a kilépő fénysugár szöge megegyezik az érkező sugár belépési szögével. A két törés során a fénysugarak minden esetben $(\alpha - \beta)$ szöggel, a visszaverődések következtében pedig $(180^\circ - 2\beta)$ szöggel térülnek el eredeti irányuktól. Ennek megfelelően az eltérülés szögére:



egyszeres visszaverődéskor:

$$\delta = (\alpha - \beta) + (180^\circ - 2\beta) + (\alpha - \beta) = 180^\circ + 2\alpha - 4\beta$$

kétszeres visszaverődéskor:

$$\delta = (\alpha - \beta) + 2(180^\circ - 2\beta) + (\alpha - \beta) = 360^\circ + 2\alpha - 6\beta$$

háromszoros visszaverődéskor:

$$\delta = (\alpha - \beta) + 3(180^\circ - 2\beta) + (\alpha - \beta) = 540^\circ + 2\alpha - 8\beta$$

négyszeres visszaverődéskor:

$$\delta = (\alpha - \beta) + 4(180^\circ - 2\beta) + (\alpha - \beta) = 720^\circ + 2\alpha - 10\beta$$

adódik.

A törési törvényből az α szög minden esetben kifejezhető és meghatározható a $\delta(\beta)$ deviációs szög-függvény, aminek a szélsőértékét keressük.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \rightarrow \alpha = \arcsin(n \cdot \sin \beta)$$

Ennek megfelelően a $\delta(\beta)$ függvény:

egyszeres visszaverődéskor: $\delta = 180^\circ + 2 \cdot \arcsin(n \cdot \sin \beta) - 4\beta$

kétszeres visszaverődéskor: $\delta = 360^\circ + 2 \cdot \arcsin(n \cdot \sin \beta) - 6\beta$

háromszoros visszaverődéskor: $\delta = 540^\circ + 2 \cdot \arcsin(n \cdot \sin \beta) - 8\beta$

négyszeres visszaverődéskor: $\delta = 720^\circ + 2 \cdot \arcsin(n \cdot \sin \beta) - 10\beta$

Az eltérülési szögnek ott van szélsőértéke, ahol teljesül, hogy $\delta(\beta)' = 0$.

Ennek megfelelően:

egyszeres visszaverődéskor:

$$2 \frac{n \cos \beta}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \beta}} - 4 = 0$$

kétszeres visszaverődéskor:

$$2 \frac{n \cos \beta}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \beta}} - 6 = 0$$

háromszoros visszaverődéskor:

$$2 \frac{n \cos \beta}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \beta}} - 8 = 0$$

négyszeres visszaverődéskor:

$$2 \frac{n \cos \beta}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \beta}} - 10 = 0$$

Az egyenletekből az $n = 1,33$ törésmutató értékkel β -ra:

egyszeres visszaverődéskor:

$$\sin^2 \beta = \frac{4 - n^2}{3n^2} \rightarrow \beta = 40^\circ 25'$$

kétszeres visszaverődéskor:

$$\sin^2 \beta = \frac{9 - n^2}{8n^2} \rightarrow \beta = 45^\circ 38'$$

háromszoros visszaverődéskor:

$$\sin^2 \beta = \frac{16 - n^2}{15n^2} \rightarrow \beta = 47^\circ 5'$$

négyszeres visszaverődéskor:

$$\sin^2 \beta = \frac{25 - n^2}{24n^2} \rightarrow \beta = 47^\circ 43'$$

adódik. Ezekkel a β szögekkel és a törési törvény segítségével számolható α szögekkel meghatározhatjuk a minimális deviáció szögét az egyes esetekben.

egyszeres visszaverődéskor: $\alpha = 59^\circ 35', \delta_{min} = 137^\circ 30'$

kétszeres visszaverődéskor: $\alpha = 71^\circ 56', \delta_{min} = 230^\circ 4'$

háromszoros visszaverődéskor: $\alpha = 76^\circ 55', \delta_{min} = 317^\circ 10'$

négyszeres visszaverődéskor: $\alpha = 79^\circ 41', \delta_{min} = 402^\circ 12'$

A háromszoros és négyszeres visszaverődésekhez tartozó mellékszivárványokat a Nappal megegyező oldalon láthatnánk, de ezeket a Nap fénye elnyomja. A főszivárvány és a kétszeres visszaverődéshez tartozó mellékszivárvány viszont sok esetben kiválóan látható. (Természetesen a mellékszivárvány fényerőssége, mint már említettük, mindig sokkal gyengébb, mint a főszivárványé.) A további, nappal szemközti oldalon megjelenő magasabb rendű mellékszivárványok már nem láthatók, mert intenzitásuk nagyon kicsi.

A szivárvány színeit alkotó ívek pontos meghatározása csak akkor lehetséges, ha figyelembe vesszük a fény diszperzióját is. Normális diszperzió esetén a frekvencia növekedésével (azaz a hullámhossz csökkenésével) a törésmutató értéke nő, anomális diszperzió esetén pedig, csökken. A fény látható tartományában mind a víz, mind a jég normális diszperziót mutat, azaz mindkét fázis esetén a nagyobb hullámhosszú vörös fényre vonatkozóan kisebb a törésmutató, mint a rövidebb hullámhosszúakra vonatkozóan. Ha ezt figyelembe vesszük, akkor α , β , és ezáltal a minimális deviáció szöge is változik. A törésmutató értékek a következők: $n_{vörös} = 1,3289$, illetve $n_{kék} = 1,3435$. Ha ezeket behelyettesítjük a fenti képletekbe, akkor:

a főszivárvány kék színére: $\beta = 39^\circ 33'$

a főszivárvány vörös színére: $\beta = 40^\circ 30'$

a mellékszivárvány kék színére: $\beta = 44^\circ 54'$

a mellékszivárvány vörös színére: $\beta = 45^\circ 41'$ adódik.

Az α értékek, és a megfelelő minimális deviáció pedig:

a főszivárvány kék színére: $\alpha = 58^\circ 48', \delta_{min} = 139^\circ 20'$

a főszivárvány vörös színére: $\alpha = 59^\circ 39', \delta_{min} = 137^\circ 18'$

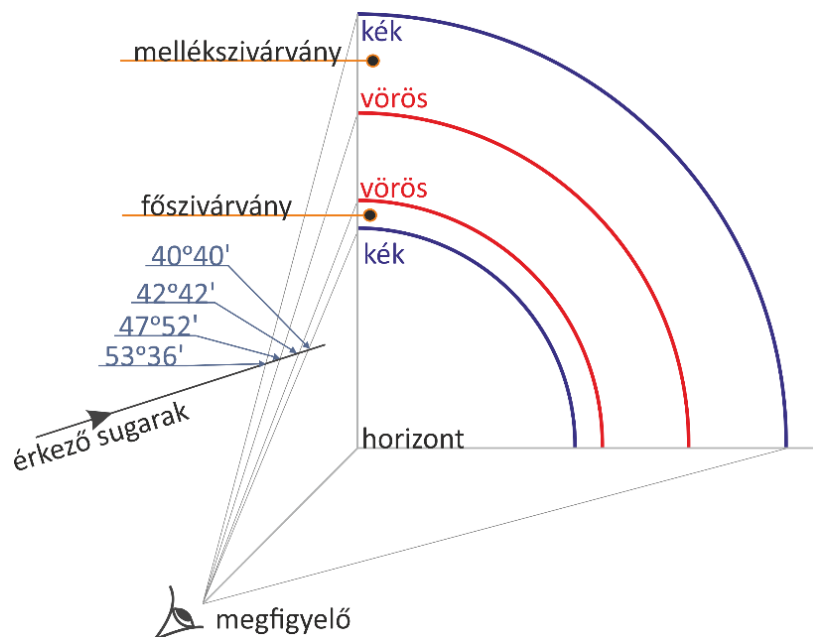
a mellékszivárvány kék színére: $\alpha = 71^\circ 30', \delta_{min} = 233^\circ 36'$

a mellékszivárvány vörös színére: $\alpha = 71^\circ 59', \delta_{min} = 227^\circ 52'$

Így a főszivárvány kék íve $40^\circ 40'$ szög, vörös íve pedig $42^\circ 42'$ szög alatt látszik a Napból érkezőkhöz képest. A mellékszivárvány kék íve $53^\circ 36'$ szög, vörös íve pedig $47^\circ 52'$ szög alatt látszik a Napból érkezőkhöz képest.

A diszperzió figyelembevételével adódó eredményeket a következő ábra foglalja össze. Az ábra mutatja, hogy a megfigyelő a Nappal ellentétes oldalon két színes ívet lát, az alsó ív

(főszivárvány) alsó széle kék, felső széle vörös; a felső szélesebb és egyben halványabb ív (mellékszivárvány) alsó széle vörös, felső széle kék.



A tisztán geometriai elméletek azonban korántsem alkalmasak még a szivárvány színeinek pontos leírására sem. Az ív szélessége, a szivárvány polarizációja pedig, semmiképpen sem fér a geometriai elmélet keretébe. Pontosabb leírást a fény hullámtermészetének figyelembevételével kaphatunk.

Ajánlás: A geometriai leírás első közelítésben helyesen magyarázza a szivárvány keletkezését, és a vele kapcsolatos jelenségeket. Azonban, ha a cseppek mérete 2-3 mm-nél kisebb, akkor az interferencia jelenségek figyelembevételével az elmélet pontosítására van szükség. Ez már meghaladja a középiskolás szintet. A szivárvány keletkezésének a részletesebb matematikai leírása a matematikában jártasabb diákok számára ajánlható. Ehhez ajánljuk az alábbi, Középiskolai Matematikai Lapokban, illetve a Fizikai Szemlében megjelent cikkeket:

WWW

Honyek Gyula: [A szivárvány](#), in.: Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 1991/1 33-37. oldal

Cserti József: [Az esőcseppek fényszórási jelenségei](#), in.: Fizikai Szemle 2005/9. 297. oldal

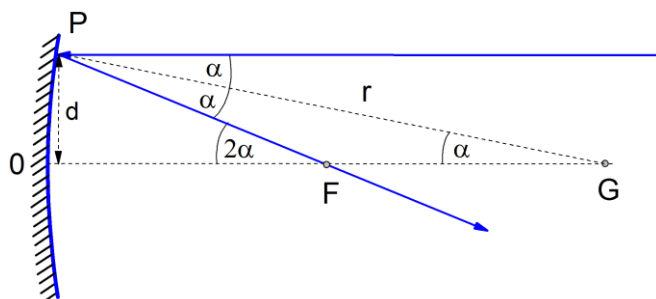
Cserti József: [Fizikus szemmel a szivárványról](#), in.: Fizikai Szemle 2006/9. 320. oldal

[Vissza >>>](#)

F12. A gömbtükrök képalkotásának mennyiségi leírása

A homorú gömbtükör képalkotása

A leképezési törvény levezetése előtt célszerű megbeszélni, hogy a gömbtükör nem tökéletes leképező eszköz, a Hartl-korongra feltett nagy nyílásszögű tükörré irányítsunk résekkel szétbontott párhuzamos fénysugarakat! Jól látható, hogy a tükör nem egyetlen pontba gyűjti össze őket. (A nagy nyílásszögű tükör fókuszpontjának elmosódása észlelhető akkor is, ha az asztalra tett karikagyűrűben távoli fényforrásról érkező (jó közelítéssel párhuzamosnak tekinthető) fénysugarak képét tanulmányozzuk. A fókuszpont helyett úgynevezett katakausztiikus felület rajzolódik ki.) Minél kisebb azonban a tükör nyílásszöge, annál pontosabban teljesül, hogy a párhuzamos fénysugarak egyetlen pontban gyűlnek össze. Az ábra alapján vizsgáljuk meg, hogy mit jelentenek a geometriai optika közelítései.



Az ábrán OG a tükör optikai tengelye, G a geometriai középpont, F a fókuszpont, $r = GO$ a tükör sugara, $f = FO$ pedig a fókusz távolság. Rajzoljuk be a P pontba érkező, optikai tengellyel párhuzamosan fénysugár visszaverődését. A visszavert sugár az optikai tengelyt a fókuszpontban metszi. A visszaverődés törvénye szerint az ábrán α val jelölt szögek egyelőek. (A GP egyenes a P pontbeli beesési merőleges) A PFO szög a POG háromszög külső szöge, így nagysága 2α . Ebben a közelítésben az O pont és a P pontból az optikai tengelyre bocsátott merőleges talppontja jó közelítéssel azonosnak tekinthető. A d távolság kifejezhető a PGO és PFO háromszögből is, amivel a

$$f \operatorname{tg} 2\alpha = r \operatorname{tg} \alpha$$

Amennyiben a tükör nyílásszöge kicsiny, akkor a PO ív jó közelítéssel megegyezik a d távolsággal, azaz $\tan \alpha \approx \alpha$ és $\operatorname{tg} 2\alpha \approx 2\alpha$. Következésképpen

$$f = \frac{r}{2}$$

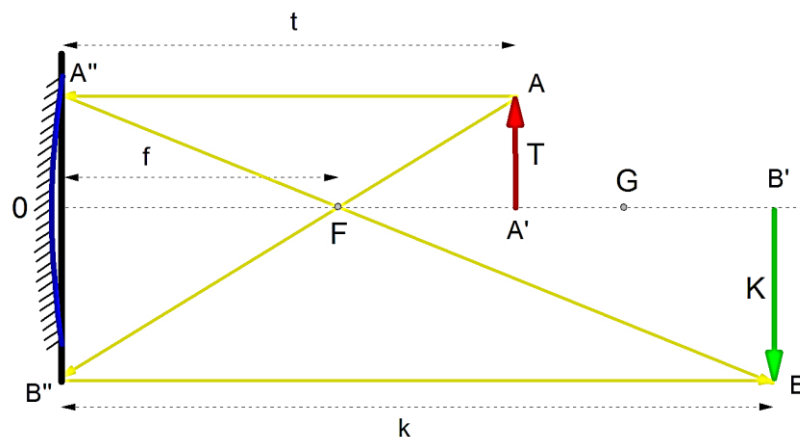
Érdeemes emlékeztetni a tanulókat arra, hogy hasonló közelítéssel már éltünk a fonalinga mozgásegyenletének felírásakor, amikor a $\sin \alpha \approx \alpha$ egyszerűsítést használtuk. A kis nyílásszög azt jelenti, hogy a $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ közelítés a geometriai középpontból a tükör széléhez vezető fénysugárra is teljesül. Megjegyezzük azonban, hogy a hibamentes leképezéshez nem elegendő pusztán az, hogy a tükör nyílásszöge kicsi legyen! A pontos feltétel az, hogy a leképezésben is csak paraxiális, azaz az optikai tengellyel közel párhuzamos sugarak vegyenek részt. (A kérdésre a lencsehibák kapcsán még visszatérünk az [F14.](#) mellékletben.)

A közelítések állandó ellenőrzése nagyon megnehezítené a képszerkesztést, ezért olyan egyszerűsítést alkalmazunk, amely geometriailag egzakt leképezésre vezet. A szerkesztéskor a tükröt egy síkkal (vonallal) helyettesítjük, amely a rá eső fénysugarakat a tükrőhöz hasonló módon fókuszálja. A tükröt helyettesítő síkként (vonalként) a tükrő széléről az optikai tengelyre (a tükrő szimmetriatengelyére) merőleges síkot (vonalat) használjuk. Ezzel ideális geometriai leképező eszközt hozunk létre. Az így végzett szerkesztések „kiküszöbölik” a tükrő leképezési hibáit.

Megjegyzés:

- Természetesen ilyenkor nem várhatjuk, hogy konkrét esetben az elrendezés geometriáját pontosan követhetjük, a szerkesztésből tehát nem kapunk figyelmeztetést arra, hogy fizikailag lehetetlen esettel kerültünk szembe.

Az ábra homorú gömbtükör képalkotását mutatja. A szerkesztéshez csak a fókuszpont definíciója alapján behúzható sugármenetet és megfordítását használtuk. Felhasználtuk továbbá, hogy a tükrő az optikai tengelyre merőleges tárgyat az optikai tengelyre merőleges képbe viszi át, tehát elegendő a tárgy legfelső pontjának képét megszerkeszteni. A szerkesztés mutatja azt is, hogy bár a fókuszpon átmenő fénysugár már nem esik a tükrőre, a szerkesztéshez felhasználhatjuk, mert a tükröt helyettesítő sík (vonal) tetszés szerint meghosszabbítható.



Az ábra alapján hasonló háromszögek felhasználásával egyszerűen meghatározhatjuk a leképezési törvényt. Az $A''FO$ és $FB'B$ háromszögek hasonlóságából és az AFA' , valamint FOB'' háromszögek hasonlóságából rendre az

$$\frac{K}{T} = \frac{k - f}{f}$$

$$\frac{K}{T} = \frac{f}{t - f}$$

egyenletek adódnak. (Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy mindkét háromszögpár esetén az egyik oldalon a nagyítás szerepel.) Innen

$$\frac{f}{t - f} = \frac{k - f}{f}$$

és a nevezőkkel átszorozva

$$f^2 = (k - f)(t - f)$$

A leképezési törvénynek ez az úgynevezett Newton-féle alakja. Azt mutatja, hogy a fókusztávolság a fókuszponttól mért tárgy és képtávolság mértani közepe.

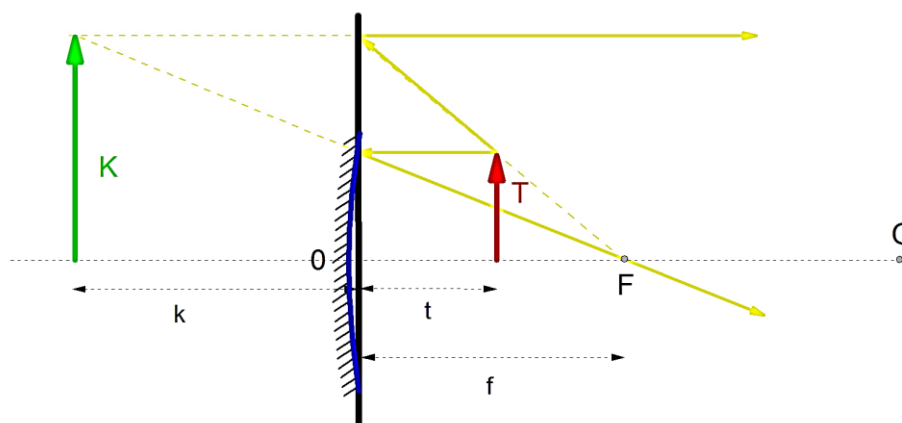
Elvégezve a beszorzást és $k \cdot f \cdot t$ -tel végigosztva, rendezés után a leképezési törvény szokásos

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

alakjához jutunk.

A leképezési törvény és a képszerkesztések összekapcsolására érdemes a végigkövetni a „végtelen távolból” a tükörhöz közeledő tárgyról alkotott képet néhány jellegzetes pontban (tárgy a geometriai középponton kívüli pontban, a geometriai középpontban, a geometriai középpont és a fókuszpont között, a fókuszponton belül) megszerkeszteni és a képtávolságot a lencsetörvényből is meghatározni. Továbbá érdemes meghatározni a nagyítást, valamint megvizsgálni a kép és a tárgy egymáshoz képesti helyzetét. (A fókuszon belüli tárgy kivételével a kép és a tárgy mindig fordított állású.)

Különösen fontos a fókuszon belüli tárgy virtuális képének megszerkesztése, valamint a leképezési törvényből adódó negatív képtávolság értelmezése. A homorú gömbtükör „gyűjtő” tükörként is ismert, hiszen a Napból ráeső fénysugarakkal gyűjtani lehet vele, mert a tükör a távoli fényforrásból érkező fénysugarakat összegyűjti. Meglepő lehet, hogy a homorú tükörrel széttartó nyaláb is létrehozható! A homorú gömbtükör a fókuszon belüli pontszerű fényforrás fényét divergenssé teszi, a tükörről visszaverődő széttartó nyaláb sugarainak csak látszólagos tartópontja van a tükör mögött. Bár a virtuális kép fogalmát a síktükör képalkotásának tárgyalásakor már bevezettük, nagyon fontos a fogalom megerősítése és a negatív képtávolsággal való összekapcsolása. (Ha a tárgytávolság kisebb, mint a fókusztávolság, akkor $\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} - \frac{1}{t} < 0$, azaz $k < 0$). A következő ábra mutatja a fókuszon belüli tárgy képének szerkesztését.

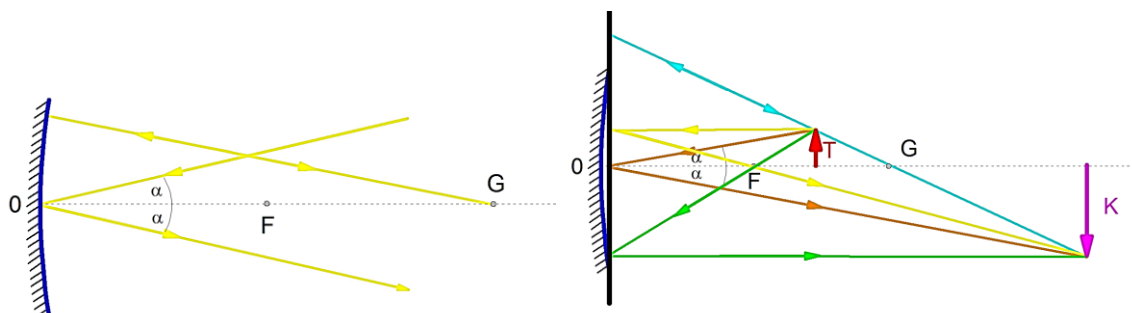


Megjegyzés:

- A szerkesztés és a levezetés alapján érdemes néhány további egyszerű szerkesztést, illetve közvetlenül adódó következtetést is megbeszélni:

- A leképezési törvény levezetésekor csak azt használtuk fel, hogy létezik fókusz-távolság, a fókusz-távolság és a tükör sugara közötti összefüggésre nem volt szükségünk. Következésképpen a leképezési törvényből meghatározhatjuk a fókusz-távolságot. A fókuszpont annak a végtelen távoli pontnak a képe, amelyről az optikai tengellyel párhuzamos sugarak érkezik a tükörrre.
- A tükörrre az optikai tengellyel szöget bezárva érkező párhuzamos nyaláb, a fókusz-síkban találkozik. (A fókusz-sík a fókusz-pontban az optikai tengelyre merőlegesen emelt sík. A leképezési törvényből következik, hogy a végtelen távoli tárgyakhoz tartozó képtávolság megegyezik a fókusz-távolsággal, azaz a sugárnyaláb valóban a fókusz-síkban gyűlik össze. A visszavert sugarak tartópontját pedig kijelölhetjük a párhuzamos nyaláb fókusz-ponton átmenő és a tükörről visszaverődő sugarának és a fókusz-síknak a metszéspontjával.)
- A fókusz-távolság definíciójából adódó nevezetes sugarak mellett még két nevezetes sugármenetet használhatunk. Az egyik a geometriai középponton átmenő sugár, amely önmagába verődik vissza, a másik az optikai középpontba érkező fénysugár, amely visszaverődés után az optikai tengellyel a beeső sugárral azonos szöget alkotva halad tovább. (ábra). A felső ábra a tükört alkotó gömbsüveghez képest mutatja a sugármeneteket. Az ábrából azonnal látszik, hogy a két sugármenet a gömb geometriájának nyilvánvaló következménye, hiszen a geometriai középponton áthaladó sugár a gömbfelszínre merőlegesen éri, azaz a beesési merőlegesben halad. Az optikai középpontban pedig az optikai tengely a beesési merőleges, így a sugármenet a visszaverődési törvény közvetlen következménye.

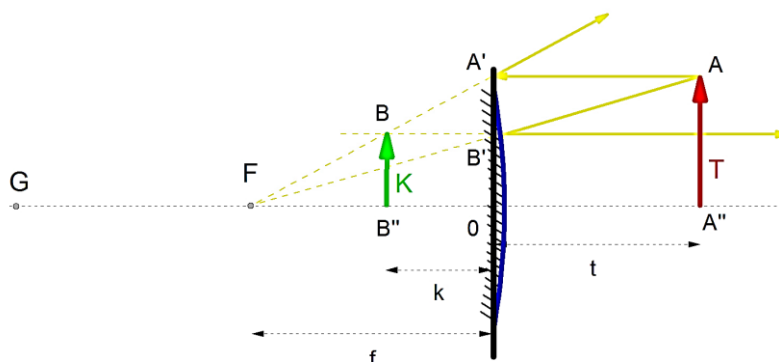
Az alsó ábra az egyszerűsített szerkesztési képen mutatja, a két új sugármenetet. Minthogy az egyszerűsített szerkesztésben csak a fókusz-pont fogalmából következő két sugármenet használható, a két új nevezetes sugármenetét ebben az esetben bizonyítani kell! Az alsó ábrán a piros, vastag nyíllal vonallal jelölt tárgy képét a fókusz-ponton átmenő sugarakkal szerkesztettük meg. A képalkotás egyértelműsége miatt ezen a ponton kell átmennie minden a tárgypontból kiinduló sugárnak visszaverődés után. Így a geometriai középponton átmenő sugárnak és az optikai középpontba érkező sugárnak is. Ha pontosan szerkesztettünk, akkor az ábráról leolvasható, hogy ezek a sugarak valóban az állításnak megfelelően haladnak tovább, azaz a tárgypont a képpont és a geometriai középpont egy egyenesre esik, valamint, hogy az ábrán α -val jelölt szögek valóban egyenlők.



- Ezután már négy nevezetes sugár áll rendelkezésre a képszerkesztéshez, bár az optikai középpontba beeső sugarat szabadkézi vázlatrajzokhoz nem ajánljuk, mert a beesési szöggel egyenlő visszaverődési szög berajzolása általában nagyon pontatlan.
- Itt érdemes bevezetni a tükrök törőerejének mérésére a fókusztávolság reciprokját, valamint a törőerő mérésére a dioptria fogalmát. Ha a törőerő meghatározásakor a fókusztávolságot méterekben mérjük, akkor a törőerőt dioptriában kapjuk. A geometriai optika megértéséhez és alkalmazásához sem a törőerő, fogalma, sem a dioptria mértékegység bevezetése nem szükséges. A fogalom azonban a szemüvegek lencséinek erőssége kapcsán annyira begyökeresedett a köztudatba, hogy nem érdemes elhagyni.
- A fenti egyszerűsített szerkesztési eljárás általános iskolában is jól használható.

A domború gömbtükör képalkotása

A domború gömbtükör (valódi tárgyról) nem alkot ernyőn felfogható képet. Azt, hogy a tükörben képet látunk, annak köszönhetjük, hogy szemünk a tükörről visszaverődő divergens nyalábot a nyaláb (fizikailag nem létező) tartópontjából látja kiindulni. A képalkotás az egyszerűsített szerkesztési eljárással érthető meg legegyszerűbben:



A képszerkesztéshez csak az optikai tengellyel párhuzamos sugarat és annak megfordítását használtuk fel. Érdemes ebben az esetben újra levezetni lencsetörvényt, és a levezetés kapcsán bevezetni az előjeles kép és fókusztávolságot. A homorú tükörhöz hasonlóan most is a nagyítást írjuk fel két hasonló háromszög segítségével. Az AOF és a BB''F háromszögek és az AA''F és B''OF háromszög is hasonló. Az első háromszögpárból $\frac{K}{T} = \frac{f}{f-k}$ a másodikból $\frac{K}{T} = \frac{f}{t+f}$ adódik a nagyításra. A nagyításokat egyenlővé téve és a nevezőkkel átszorozva a lencsetörvény Newton-féle alakjára:

$$f^2 = (f - k)(f + t)$$

adódik. Beszorzás egyszerűsítés, átrendezés és ftk -val osztás után a lencsetörvény szokásos alakjára az

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{t} = \frac{1}{f}$$

összefüggést kapjuk. Vegyük észre, hogy ebben az összefüggésben a tárgy, kép és fókusz távolság hossza, azaz pozitív számok szerepelnek.

Ha bevezetjük azt a megállapodást, hogy a virtuális kép és fókusz távolságot negatívnak tekintjük, akkor az egyenletben a kép és fókusz távolságot negatív előjellel kell ellátni. Következésképpen a lencsetörvény az előjeles tárgy kép és fókusz távolsággal az

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

alakot ölti, ami formailag is megegyezik a homorú tükör esetén levezetettel.

Megjegyzés:

- A domború gömbtükör esetén is célszerű két további nevezetes sugármenetet bevezetni, a tükör optikai középpontjába érkezőt, amely a visszaverődési törvény szerint az optikai tengellyel a beeső sugárral azonos szöget alkotva verődik vissza, valamint a geometriai középponton átmenő sugarat, amely önmagába verődik vissza.
- Érdemes mindkét tükörré vonatkozóan a nagyítást az optikai középpontba futó nevezetes sugár segítségével is felírni. A következő ábrák alapján az AA''O és B''BO háromszögek hasonlóságából azt kapjuk, hogy

$$N = \frac{K}{T} = \frac{k}{t}$$

- A képletben k és t a kép és tárgy távolság hosszát jelenti, előjeles kép és tárgy távolság esetén tehát:

$$N = \frac{K}{T} = \left| \frac{k}{t} \right|$$

[Vissza >>>](#)

F13. A lencsetörvény levezetése

A lencsetörvény sokféleképpen levezethető, itt három lehetőséget mutatunk meg, az első az idealizált lencse képéhez illeszkedik, és igen egyszerű elemi geometriai eszközökkel elvégezhető. Az idealizált lencse elképzelésnek megfelelően azonban nem adja meg a fókusz távolság függését a lencsét határoló gömbfelületek sugarától és a törésmutatótól. Nem mutat rá a geometriai optikai közelítések jellegére sem.

A másik kettő különböző mértékben, de figyelembe veszi a lencsén belüli fény utakat és megmutatja az alkalmazott közelítések jellegét. A lencsetörvény mellett adódik belőlük a fókusz távolságra vonatkozó összefüggés is.

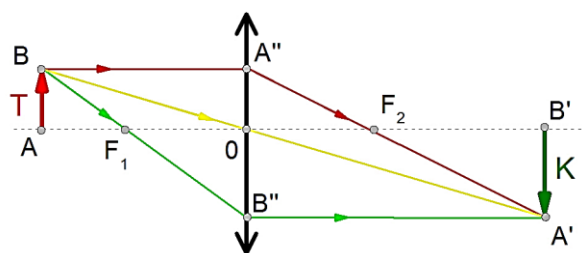
A levezetések, különösen az utóbbi kettő nem egyszerű, sok apró matematikai trükk alkalmazását igényli, ezért csak emelt szintű osztályokban ajánljuk tárgyalásukat.

Megjegyezzük, hogy az utóbbihoz hasonló teljes részletességű eredményre vezető levezetés adható a Fermat-elv alapján is.

A lencsetörvény levezetése az idealizált lencse kép alapján

A gondolatmenetet célszerű gyűjtőlencsére vonatkozóan és fókuszon kívüli tárgy esetén bemutatni.

Szerkesszük meg a nevezetes sugarak felhasználásával a gyűjtőlencse egyszeres és kétszeres fókusz távolsága között elhelyezkedő tárgy képét. A szerkesztéshez mindhárom nevezetes sugarat felhasználtuk.



Használjuk fel az $A''OF_2$ és $A'B'F_2$ háromszögek valamint az ABF_1 és $OB''F_1$ háromszögek hasonlóságát és írjuk fel mindkettőből a $\frac{K}{T}$ nagyítást:

$$N = \frac{K}{T} = \frac{k - f}{f}$$

$$N = \frac{K}{T} = \frac{f}{t - f}$$

Tegyük egyenlővé a két jobboldalt, a

$$\frac{f}{t-f} = \frac{k-f}{f}$$

egyenlethez jutunk. A nevezőkkel átszorozva

$$f^2 = (k-f)(t-f)$$

adódik. Ez a leképezési törvény Newton-féle alakja. Vegyük észre, hogy a levezetés formailag tökéletesen azonos a tükrök esetén alkalmazott gondolatmenettel. A Newton-féle leképezési törvény most is azt mutatja, hogy a fókusz távolság a fókuszponttól mért tárgy és képtávolság mértani közepe.

Elvégezve a beszorzást és kft -tel végigosztva, rendezés után a leképezési törvény szokásos

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

alakjához jutunk.

Az optikai középponton átmenő sugármenet és az optikai tengely, valamint a tárgy és kép által alkotott ABO és A'B'O hasonló háromszögekből adódik a nagyítás szokásos

$$N = \frac{K}{T} = \frac{k}{t}$$

formulája.

A levezetést, ha kellő idő áll rendelkezésünkre, érdemes megismételni a gyűjtőlencse fókuszpontján belül elhelyezkedő tárgyra és szórólencsére is megismételni. Ezután vezethetjük be lencsék esetén a virtuális kép, virtuális fókusz, illetve virtuális tárgy távolságra a negatív értéket. A gondolatmenet teljesen azonos a tükrökre vonatkozóan követett eljárással, ezért itt már nem részletezzük. A leképezési törvény a negatív távolságok bevezetésével mind tükrökre, mind lencsére vonatkozóan egységesen az

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

alakot ölti.

Megjegyzés:

- A lencsetörvény előjeles távolságokra való részletes igazolását csak az absztrakt gondolatmenetekre fogékony tanulócsoporthoz érdemes elvégezni. Egyébként elegendő néhány számpélda kiszámításával megmutatni, hogy az eredmények összhangban vannak a szerkesztések eredményével.
- A nagyítás megállapodás szerint mindig pozitív, így a virtuális távolságokra bevezetett negatív értékek használata esetén az

$$N = \frac{K}{T} = \left| \frac{k}{t} \right|$$

A lencsetörvény levezetése a „szélső sugarak” felhasználásával

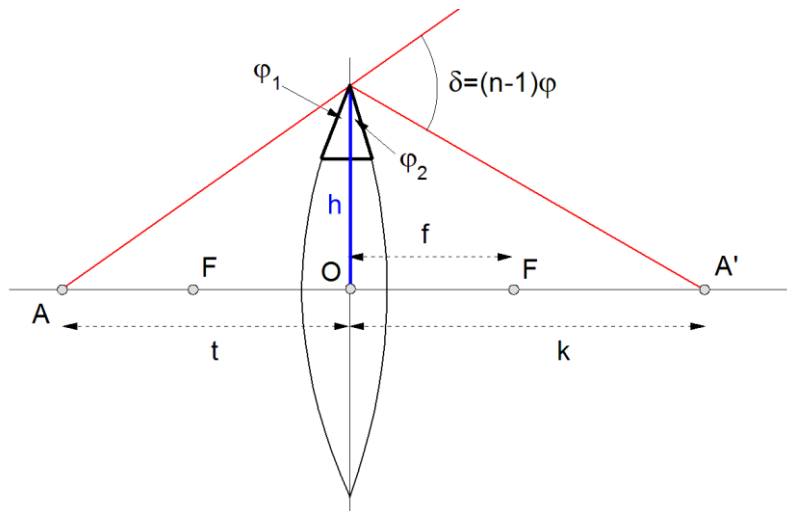
A gondolatmenet azon alapul, hogy jó leképezéskor a tárgypontból kiinduló minden fénysugár a képpontban egyesül, így az optikai tengelyen elhelyezkedő tárgypont esetén elegendő az optikai tengely és a tárgypontból induló és a lencse egyik szélső pontján megtörő sugár metszéspontját meghatározni. A lencse szélső pontja közelében a lencsét kis nyílásszögű prizmának tekinthetjük és felhasználhatjuk, hogy a paraxiális sugármentek esetén a kicsiny φ nyílásszögű prizma a ráeső fénysugarakat $\delta = (n - 1)\varphi$ szöggel téríti el.



F6. Síklapokkal határolt törőközeg: fénytörés plánparallel lemezen és prizmán

[Részletek >>>](#)

Az ábrán az optikai tengely A tárgypontjából a lencse csúcsán keresztül az A' képpontba futó sugármenet látható.



A lencse csúcsánál kivastagítottuk a lencsét helyettesítő prizmát. A prizma az A tárgypontból a C csúcshoz húzott sugarat $\delta = (n - 1)\varphi$ szöggel téríti el. Az eltérülés szöge az ACA' háromszög C -nél lévő külső szöge, így megegyezik a $\alpha = \angle CAO$ és $\beta = \angle CA'O$ összegével:

$$\alpha + \beta = (n - 1)\varphi$$

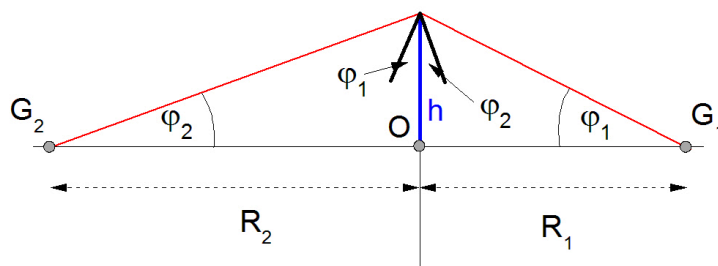
A C csúcsból az optikai tengelyre bocsátott merőleges a prizma törőszögét két részre bontja

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Tehát

$$\alpha + \beta = (n - 1)(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Mivel az egyenletben szereplő minden szög kicsiny, hiszen a lencsét alkotó gömbsüvegek nyílásszöge kicsi, a leképezésben résztvevő sugarak pedig paraxiálisak, a szögek tangensükkel helyettesíthetők: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{t}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{k}$. A $\operatorname{tg}\varphi_1$ és $\operatorname{tg}\varphi_2$ a következő ábrából fejezhető ki.



Az ábrán pirossal a lencsét alkotó göbbsüvegek középpontjához húzott sugarakat jelöltük. Ezek a sugarak merőlegesek a lencse csúcsát helyettesítő prizma lapjaira, így a φ_1 -gyel és φ_2 -vel jelölt két-két szög rendre egyenlő egymással, mert merőleges szárú szögek. Következésképpen: $\text{tg}\varphi_1 = \frac{h}{R_1}$, $\text{tg}\varphi_2 = \frac{h}{R_2}$

Beírva a szögek tangensét a szögek helyett, azt kapjuk, hogy

$$\frac{h}{t} + \frac{h}{k} = (n - 1) \left(\frac{h}{R_1} + \frac{h}{R_2} \right)$$

Az összefüggést h -val elosztva és felhasználva, a fókusz távolság, a törésmutató és a lencse alakját meghatározó görbületek kapcsolatát, a lencsetörvényt:

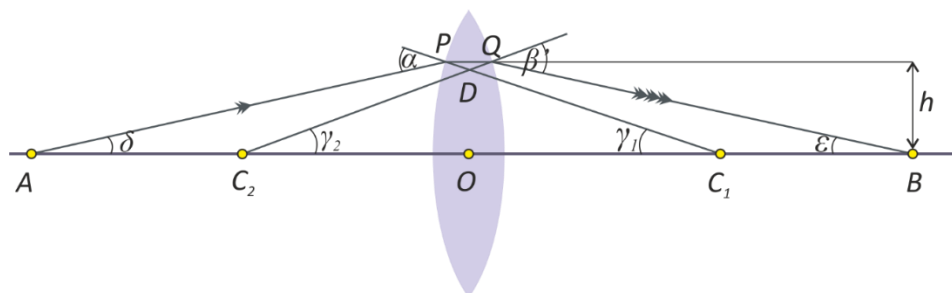
$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

szokásos alakjához jutunk.

A lencsetörvény levezetése a lencsén belüli fény utak figyelembevételével

A tükrökhöz hasonlóan a levezetés előtt érdemes a Hartl-korongon megmutatni a diákoknak, hogy amennyiben nagy nyílásszögű lencsét használunk, akkor az optikai tengellyel párhuzamos fénysugarak metszéspontja már nem egyetlen pont, hanem az optikai tengely egy szakasza lesz.

Az ábra gyűjtőlencse optikai tengelyének A pontjáról alkotott képet mutatja. A B képpontot a lencsén áthaladó $APQB$ sugármenet és az optikai tengely metszéspontja határozza meg.



A lencse P pontjába beeső sugár a lencsét határoló első gömbfelületen megtörve behatol a lencsébe, majd a második gömbfelületen ismét megtörik és kilép a lencséből. Ezután egyenes vonalban halad a B képpontig. Az A pontból induló fénysugár optikai tengellyel bezárt szögét jelöljük δ -val, a képet létrehozó sugárét pedig ε -nal. A lencsét határoló gömbfelületek középpontja C_1 és C_2 , a középpontokból a P , illetve Q ponthoz húzott sugár és az optikai tengely által alkotott szög rendre γ_1 és γ_2 .

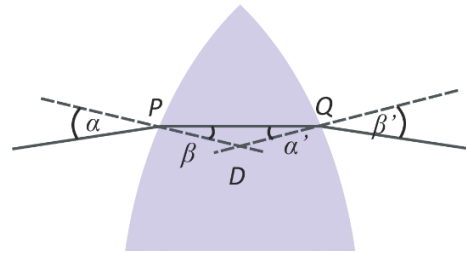
Mivel α az APC_1 , β' pedig a C_2QB háromszög külső szöge, fennáll az

$$\alpha = \delta + \gamma_1 \quad (1)$$

és

$$\beta' = \varepsilon + \gamma_2 \quad (2)$$

összefüggés. Legyen a lencse anyagának törésmutatója n . Írjuk fel a lencsén belüli sugárment kinagyított képének jelöléseivel a törési törvényt a P és Q pontban:



$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = \frac{1}{n}$$

A következőkben tételezzük fel, hogy a lencsét alkotó gömbsüvegek nyílásszöge kicsiny és a leképezésben résztvevő sugármenetek is paraxiálisak (közel párhuzamosak az optikai tengellyel) Ezt azzal indokolhatjuk, hogy egyébként a leképezési hibák elrontanák a képet. A kicsiny nyílásszög, mint a gömbtükrök esetén már tárgyaltuk azt jelenti, hogy élhetünk a $\text{tg } \alpha \approx \alpha \approx \sin \alpha$ közelítéssel.

Ez azt jelenti, hogy a lencsetörvényben a szinusz függvények értékét a szögek radiánban mért értékével közelíthetjük, tehát $\alpha \approx n\beta$ és $\beta' \approx n\alpha'$. Behelyettesítve ezt az (1) és (2) egyenletbe és az egyenleteket összeadva, azt kapjuk, hogy

$$n(\beta + \alpha') = \delta + \varepsilon + \gamma_1 + \gamma_2 \quad (3)$$

Vegyük észre, hogy a PDQ háromszög (a kiemelt kis ábrán látható) és a C_1DC_2 háromszög D -nél lévő szöge megegyezik, mert csúcsszögek. Következésképpen a két háromszög maradék két szögének összege is egyenlő. Tehát:

$$\beta + \alpha' = \gamma_1 + \gamma_2$$

Behelyettesítve ezt a (3) összegbe, adódik, hogy

$$\delta + \varepsilon = (n - 1)(\gamma_1 + \gamma_2)$$

Helyettesítsük ezután a szögeket a tangensükkel. Az ábra alapján: $\text{tg } \delta = \frac{h}{t}$, $\text{tg } \varepsilon = \frac{h}{k}$, $\text{tg } \gamma_1 = \frac{h}{R_1}$, $\text{tg } \gamma_2 = \frac{h}{R_2}$. Az összefüggések felírásakor kihasználtuk, hogy a lencse vékony, és emiatt a P és Q pont közel azonos h magasságban helyezkedik el. Következésképpen:

$$\frac{h}{t} + \frac{h}{k} = (n - 1) \left(\frac{h}{R_1} + \frac{h}{R_2} \right)$$

Az egyenletet h -val egyszerűsítve és bevezetve az

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

jelölést, a lencsetörvény szokásos:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

alakjához jutunk.

Nagyon fontos, hogy a h távolság az összefüggésből kiesett, azaz a tárgy és a képtávolság közötti összefüggés független attól, hogy a levezetéshez melyik fénysugarat használtuk fel.

Az összefüggés a lencsére eső bármely fénysugárra igaz, tehát valóban a lencse leképezési törvényét adja! Természetesen ez az alkalmazott közelítések eredménye, csak addig igaz, amíg a sugármenetek paraxiálisak és minden sugármenetnek az optikai tengellyel alkotott szögére érvényes a $\text{tg } \alpha \approx \alpha \approx \sin \alpha$ közelítés!

Az f távolság jelentése valóban a fókusz-távolság, hiszen az optikai tengellyel párhuzamos nyalábhoz a „végtelen” tárgytávolság tartozik, és a nyaláb a fókuszpontban találkozik. Hasonlóképpen a fókuszpontból induló nyaláb esetén a képtávolság válik végtelenné, azaz a fókusz-ból induló nyaláb az optikai tengellyel párhuzamosan halad tovább. Ennek megfelelően az

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

összefüggés a fókusz-távolságot a lencse geometriai adataival, valamint a lencsének az őt körülvevő közegre vonatkoztatott törésmutatójával fejezi ki.

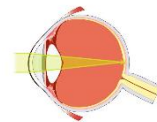
Érdeemes végiggondolni, hogy ha a lencsét határoló gömbfelület sugarát pozitívnak tekintjük, ha a lencsefelület kívülről domború, negatívnak pedig, ha a felület kívülről homorú, akkor előjeles fókusz-távolságot kapunk, amely összhangban van a korábban bevezetett előjel konvencióval, azaz gyűjtőlencsékre pozitív, szórólencsékre pedig negatív fókusz-távolságot ad.

A vékony lencsék esetén a lencse két oldalán ugyanaz a közeg található. Ennek a következménye, hogy a lencsék két oldali fókusz-távolsága azonos. A gyakorlati életben ritkábban előálló helyzet az, amikor a lencse két oldalán különböző törésmutatójú közeg helyezkedik el. (Ez utóbbi eset áll fenn például a szemlencse képződése során.)

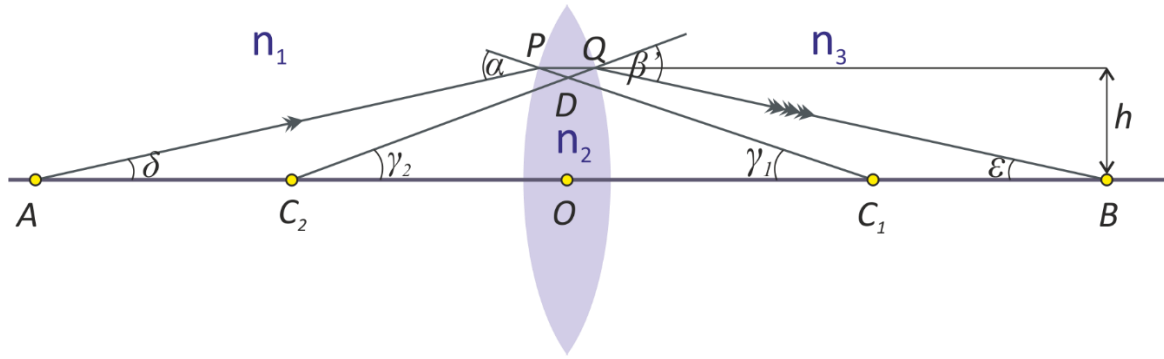


F16. Az emberi szem

[Részletek >>>](#)



A most követett gondolatmenet általánosításával a képződési törvény ebben az esetben is könnyen levezethető. Az ábrának megfelelően a lencse bal oldalán legyen n_1 a jobboldalán n_3 törésmutatójú közeg, míg a lencse törésmutatóját jelöljük n_2 -vel.



A korábbi gondolatmenetnek megfelelően a sugármenetek geometriájából most is felírhatjuk most is felírhatjuk az

$$\alpha = \delta + \gamma_1 \quad (1)$$

$$\beta' = \varepsilon + \gamma_2 \quad (2)$$

$$\beta + \alpha' = \gamma_1 + \gamma_2 \quad (3)$$

egyenleteket. A törési törvény a P és Q pontbeli törésre vonatkozóan az

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta,$$

$$n_2 \sin \alpha' = n_3 \sin \beta'$$

alakot ölti. A kis szögekre vonatkozó közelítést felhasználva ezek az

$$n_1 \alpha = n_2 \beta \quad (4)$$

$$n_2 \alpha' = n_3 \beta' \quad (5)$$

alakra egyszerűsödnek. Fejezzük ki a (4) és (5) egyenletből α -t és β' -t és helyettesítsük be az (1) és (2) egyenletbe, és azokból fejezzük ki β -t és α' -t:

$$\beta = \frac{n_1}{n_2} \delta + \frac{n_1}{n_2} \gamma_1$$

$$\alpha' = \frac{n_3}{n_2} \varepsilon + \frac{n_3}{n_2} \gamma_2$$

Adjuk össze ezeket az egyenleteket, és írjuk be (3) alapján $(\beta + \alpha')$ helyett $(\gamma_1 + \gamma_2)$ -t:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{n_1}{n_2} \delta + \frac{n_1}{n_2} \gamma_1 + \frac{n_3}{n_2} \varepsilon + \frac{n_3}{n_2} \gamma_2$$

Hozzuk ezt az összefüggést az

$$\frac{n_1}{n_2} \delta + \frac{n_3}{n_2} \varepsilon = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \gamma_1 + \left(1 - \frac{n_3}{n_2}\right) \gamma_2$$

Helyettesítsük ezután a szögeket tangensükkel:

$$\frac{n_1}{n_2} \frac{h}{t} + \frac{n_3}{n_2} \frac{h}{k} = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \frac{h}{R_1} + \left(1 - \frac{n_3}{n_2}\right) \frac{h}{R_2}$$

Egyszerűsítés után a rendszer leképezési törvényére azt kapjuk, hogy:

$$\frac{n_1}{t} + \frac{n_3}{k} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n_3}{R_2}$$

A tárgyoldali (első közegbéli) f_1 fókusz távolságot a tárgytávolság adja, ha a képtávolság végtelenhez tart, vagyis

$$\frac{1}{f_1} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 R_1} + \frac{n_2 - n_3}{n_1 R_2} \rightarrow f_1 = \frac{n_1 R_1 R_2}{R_2(n_2 - n_1) + R_1(n_2 - n_3)}$$

A képoldali (második közegbéli) f_2 fókusz távolság megegyezik a képtávolsággal, ha a tárgytávolság végtelenhez tart, tehát

$$\frac{1}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{n_3 R_1} + \frac{n_2 - n_3}{n_3 R_2} \rightarrow f_2 = \frac{n_3 R_1 R_2}{R_2(n_2 - n_1) + R_1(n_2 - n_3)}$$

Ha beszorozzuk az

$$\frac{f_1}{n_1} = \frac{f_2}{n_3} = \frac{R_1 R_2}{R_2(n_2 - n_1) + R_1(n_2 - n_3)}$$

összefüggéssel, akkor leképezési törvény jól használható alakjához jutunk:

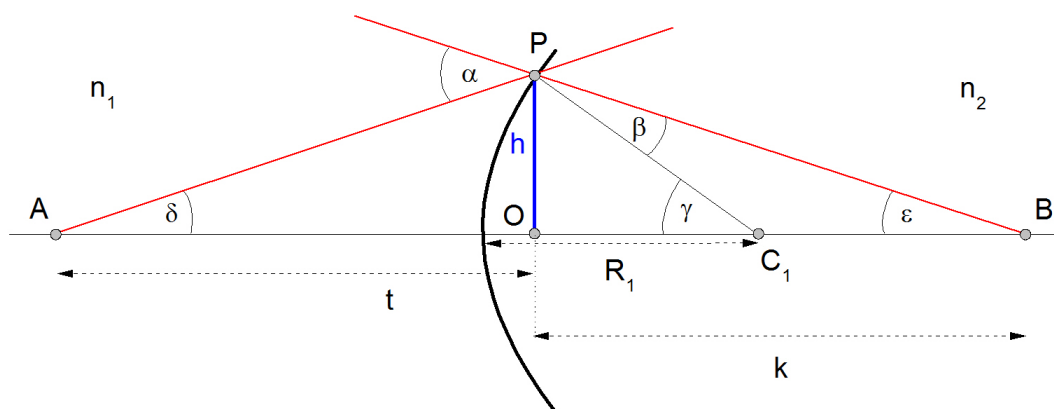
$$\frac{f_1}{t} + \frac{f_2}{k} = 1$$

Megjegyzés:

- Érdemes ellenőrizni, hogy a formulák az $n_1 = n_3 = 1$ esetben visszaadják a vékony lencsékre vonatkozó szokásos leképezési törvényt és fókusz távolságot.

Egyetlen gömbfelülettel határolt törőközeg leképezési törvénye.

A lencsetörvény levezetésében alkotott gondolatmenetet követve egyszerűen megadható az egyetlen gömbfelülettel határolt törőközeg leképezési törvénye is.



Az ábra szerint az optikai tengelyen fekvő A tárgy pontot a gömbfelület a B képpontba képezi le. C_1 az R_1 sugarú leképező gömbsüveg geometriai középpontja. A gömbfelület előtti teret n_1 a mögötte lévő pedig $n_2 > n_1$ törésmutatójú közeg tölti ki. Az ábra az optikai tengely mellett még egy sugármenetet (APB) mutat, amely részt vesz a leképezésben. Mínt hogy feltételezzük, hogy minden az A pontból kiinduló fénysugár a gömbfelületen bekövetkező törés után a B

pontba jut, több sugárra nincs is szükségünk a kép meghatározásához. (Természetesen ez csak akkor teljesül, ha a leképezést leíró egyenlet nem függ a APB sugármenet jellemző α szögtől.).

Az eddigiekhez hasonlóan feltételezzük, hogy a leképezésben résztvevő sugarak paraxiálisak és azt, hogy a leképező gömbsüveg nyílásszöge kicsiny. Ekkor a P pontban a törési törvény az

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

helyett az

$$n_1 \alpha = n_2 \beta$$

összefüggéssel közelíthető. A sugármenetek tengellyel alkotott szögére vonatkozóan pedig felírhatók a következő összefüggések. Mivel α az APB háromszög, β pedig a PC₁B háromszög külső szöge:

$$\alpha = \delta + \gamma$$

$$\gamma = \beta + \epsilon$$

Szorozzuk meg az első egyenletet n_1 , a másodikat n_2 -vel és adjuk össze az egyenleteket, továbbá vegyük észre, hogy az α -t és β -t tartalmazó tagok a törési törvény miatt kiesnek. Azt kapjuk, hogy

$$n_2 \gamma = n_1 \delta + n_1 \gamma + n_2 \epsilon$$

Rendezzük át az egyenletet:

$$(n_2 - n_1) \gamma = n_1 \delta + n_2 \epsilon$$

és helyettesítsük a szögeket az ábra alapján tangensükkel:

$$(n_2 - n_1) \frac{h}{R_1} = n_1 \frac{h}{t} + n_2 \frac{h}{k}$$

Innen a gömbsüveg leképezési törvényére

$$\frac{(n_2 - n_1)}{R_1} = \frac{n_1}{t} + \frac{n_2}{k}$$

adódik.

Megállapítható, hogy most a „gömbsüveg lencse” két oldali fókusz távolsága nem egyenlő egymással. A képoldali (második közegbéli) f_2 fókusz távolság megegyezik a képtávolsággal, ha a tárgy távolság végtelenhez tart, tehát

$$\frac{1}{f_2} = \frac{(n_2 - n_1)}{n_2 R_1}, \text{ illetve } f_2 = \frac{n_2 R_1}{(n_2 - n_1)}$$

A tárgyoldali (első közegbéli) f_1 fókusz távolságot a tárgy távolság adja, ha a képtávolság végtelenhez tart, vagyis

$$\frac{1}{f_1} = \frac{(n_2 - n_1)}{n_1 R_1}, \text{ illetve } f_1 = \frac{n_1 R_1}{(n_2 - n_1)}$$

Osszuk végig a leképezési egyenletet és a fókusz távolságokat meghatározó összefüggéseket n_1 -gyel, és vegyük észre, hogy $n = \frac{n_2}{n_1}$ a második közeg elsőre vonatkoztatott törésmutatója. A leképezési törvény az

$$\frac{(n-1)}{R_1} = \frac{1}{t} + \frac{n}{k}$$

a fókusz távolságokra vonatkozó összefüggések pedig az

$$\frac{1}{f_2} = \frac{(n-1)}{nR_1}, \text{ illetve } f_2 = \frac{nR_1}{(n-1)}$$

és

$$\frac{1}{f_1} = \frac{(n-1)}{R_1}, \text{ illetve } f_1 = \frac{R_1}{(n-1)}$$

alakot öltik.

Látható, hogy a leképezés szimmetriája most is megbomlik, azonban ez természetes, hiszen a törőfelület két oldalán nem ugyanaz a közeg van.

A leképezési törvényt $\frac{R_1}{n-1}$ -gyel beszorozva fókusz távolságokra kapott összefüggések felhasználásával a leképezési törvény ismét az

$$\frac{f_1}{t} + \frac{f_2}{k} = 1$$

alakot ölti. A leképezési törvénynek ez az alakja tetszőleges optikai leképező rendszerre érvényes.

Megjegyzés:

- A geometriai optika gyakorlatában a lencsék törőerejét többnyire a fókusz távolsággal fejezzük ki, mert a lencse két oldalán ugyanaz a közeg található. Az egyetlen gömbfelülettel határolt törőközeg esetén azonban, minthogy a törőfelület kétoldali fókusz távolsága nem azonos, a törőerőt szokás lencse két oldalára azonos értéket adó

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}$$

- formulával definiálni. A szem fizikájának tárgyalásakor a törőerőnek ez a szokásos definíciója.

Vékony lencséből álló lencserendszerek

A leképezési törvény birtokában egyszerűen meghatározhatjuk vékony lencséből álló lencserendszerek eredő fókusz távolságát. Különösen egyszerű a helyzet, ha a lencsék egymást érintik.

Az egyszerűség kedvéért a levezetést gyűjtőlencsékre vonatkozóan illusztráljuk. Foglalkozunk először két szorosan egymás mellett elhelyezett lencse képalkotásával. Írjuk fel a leképezési törvényt a rendszer első lencséire

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{k_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{f_2}$$

A rendszer geometriájából következik, hogy az első lencse által alkotott kép a második számára virtuális tárgy, ezért $k_1 = -t_2$. Következésképpen:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{k_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{-k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{f_2}$$

Adjuk össze a két egyenletet:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Míthogy t_1 és k_2 egyben rendre a két lencséből álló rendszer tárgy és képtávolsága, megállapítható, hogy a rendszer olyan egyetlen lencsével helyettesíthető, amelynek fókusztaávolságára fennáll a

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Megállapítható tehát, hogy a szorosan egymás mellé tett vékony lencsék törőereje (a fókusztaávolság reciproka) összeadódik.

A levezetésben alkalmazott gondolatmenet elvileg tetszés szerinti számú lencse esetére is kiterjeszhető, azaz általában n egymásmellé helyezett lencse esetén:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \dots + \frac{1}{f_n}$$

Az összefüggés természetesen csak közelítő érvényű, hiszen a vékony lencsék is véges vastagságúak, és vastagságuk elhanyagolása annál nagyobb hibát okoz, minél több lencsét teszünk egymás mellé.

A levezetést érdemes arra az esetre is megismételni, amikor a második lencse mögött más törésmutatójú közeg helyezkedik el, mint az első előtt.

[Vissza >>>](#)

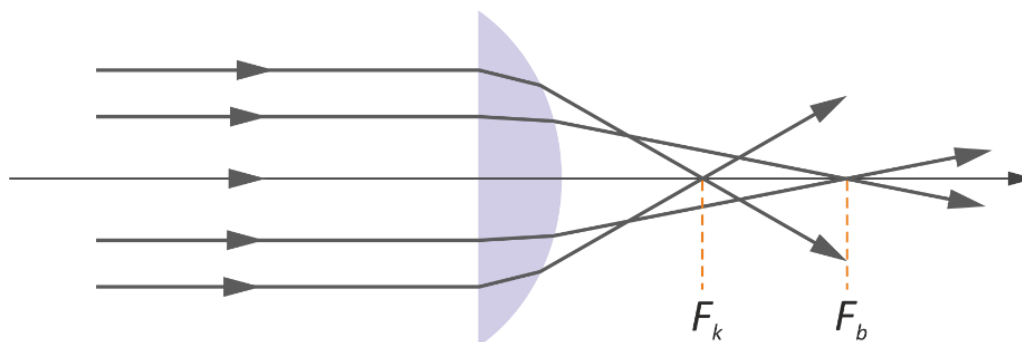
F14. Lencsehibák

A fénytani kísérletek túlnyomó részében leképezéseket hajtunk végre. Ilyenkor elkerülhetetlenül jelentkeznek a leképező eszközök – elsősorban a lencsék – hibái (ahogy már említettük a síktükör kivételével nincs egzaktul leképező eszköz). A lencsehibákat ma már minden igényt kielégítő mértékben tudják korrigálni azzal, hogy több – megfelelően méretezett – lencséből állítanak össze egyetlen objektívet. Ezek azonban igen költségesek, a tanórai kísérletezés során többnyire csak egyszerű, tehát hibás lencsék állnak rendelkezésre. (Megjegyezzük, hogy ez utóbbiak kis helyigényük miatt sokszor kényelmesebben használhatók, mint a rendszerint nagy geometriai méreteik miatt nehézkes korrigált objektívek.) A lencsék hibái már a jó beállítással is csökkenhetők. Ezért az alábbiakban röviden foglalkozunk a lencsehibákkal, és azok lehetséges csökkentési módjaival, a jelenségek fizikai okainak részletesebb tárgyalása nélkül.

A jelentkező hibák a következők:

- 1) *Szférikus aberráció (nyíláshiba, avagy gömbi eltérés)*
- 2) *Asztigmatizmus*
- 3) *Kóma*
- 4) *Képfelület görbülése*
- 5) *Kromatikus aberráció*
- 6) *Disztorzió*

1) *Szférikus aberráció (nyíláshiba, avagy gömbi eltérés)*

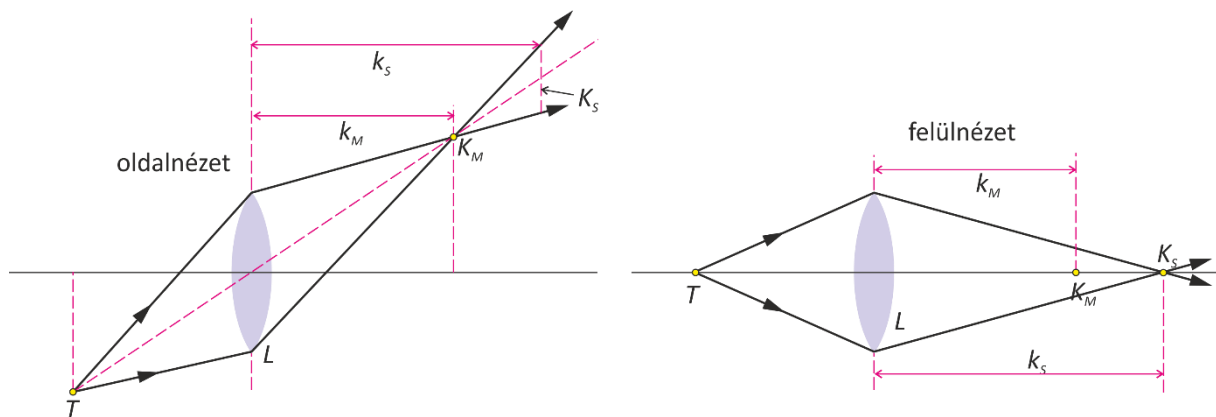


Gondolatban osszuk fel a lencsefelületet koncentrikus körökkel körgyűrű alakú részekre, zónákra. A külső zónák gyújtótávolsága a legtöbb esetben kisebb, mint a belsőké (lásd oldalsó ábra). Ez a szférikus aberráció, vagy nyíláshiba. Ennek az a következménye, hogy a véges tárgy távolságban levő T tengelypontot az egyes zónák a tengely különböző pontjaira képezik le. Így a tengelyen levő pontszerű T tárgy képe az aberrációtól függő méretű körfelület lesz. Ez a hiba tehát az egyértelmű (éles) leképezést teszi lehetetlenné. A szférikus hiba annál nagyobb, minél kisebbek a törő felületek görbületi sugarai, továbbá minél nagyobb az átmérő, és rövidebb a gyújtótávolság. Vagyis függ a d/f lencsenyílástól. Lényeges tudni azt, hogy a hiba nagysága egy adott lencse esetében az alkalmazás fénytani viszonyaitól is erősen függ. Legkisebb akkor, ha a nyaláb sugarai szimmetrikusan haladnak át a lencsén (a helyzet azonos a prizma minimális deviációjával), tehát amikor az első felületen a beesési szög azonos a második

felületnél a törési (kilépési) szöggel. Nagyon távoli tárgy leképezésénél célszerűbb síkdomború lencsét alkalmazni (fordított esetben is, ha $t \ll k$). A közel azonos tárgy- és képtávolság esetében sokkal jobban beválnak a szimmetrikus lencsék. A szférikus hiba természetesen csökkenthető kördiafragmával, amely a külső zónákat kizárja a leképezésből, de ez fényvesztéssel jár. Emellett a hiba redukálható úgy, hogy a fénynyalábot eleve a lencse középpontjába koncentráljuk. Gyűjtőlencse szférikus hibáját csaknem teljesen meg lehet szüntetni egy jól megválasztott szórólencsével, de csak egyetlen tárgy-képtávolságra.

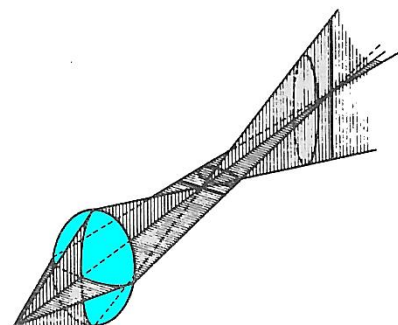
2) Asztigmatizmus

Az asztigmatizmus, a kóma és a képfelület görbülése abban az esetben válnak észlelhetővé, ha a tárgy pont nincs az optikai tengelyen, tehát a fősugár szöget zár be a tengellyel (nem paraxiális sugarakkal dolgozunk), illetve a tárgy erősen kiterjedt. A következő ábra ugyanazt a leképezést tünteti fel oldal-, illetve felülnézetben.



A T tárgy pont az optikai tengely alatt van (bal oldali ábra). A belőle induló és a lencsét áthaladó divergens nyalábból válasszunk ki (hosszú, nagyon keskeny réssel) egy olyan lapos, felületszerű nyalábot, amely az ábra síkjában, tehát a beesési síkban fekszik. Ennek a síknak a neve meridionális sík. A lencse (L) a meridionális nyaláb révén a tárgyat K_M -be képezi le. A T -ből kiinduló teljes nyalábból hasonlóképpen kiválaszthatunk egy a meridionálisra merőleges síkban, a szaggitális síkban haladó (lapos) nyalábot. A jobb oldali ábra ebben a szaggitális síkban tünteti fel a helyzetet (T itt a tengelyen látszik, mert az a szaggitális síkra – a rajz síkjára merőleges – meridionális síkban van). A lencse T képét, a szaggitális nyaláb révén távolabb, K_S -ben hozza létre. Ennek a különbségnek az az oka, hogy a nyaláb a lencsén más görbületet „érez” a meridionális síkban, mint a rá merőlegesben. Ha mindkét nyalábot átengedjük a lencsén, akkor T képe két, egymásra merőleges egyenes vonal lesz, egymástól ($k_S - k_M$) távolságban. Ha egyáltalában nem határoljuk be a T -ből induló kúpos nyalábot, akkor is megkapjuk a tárgy pont két képét: a két egymásra merőleges egyenes vonalat (K_S -ben és K_M -ben). A lencse után a nyaláb keresztmetszete – helytől függően – ellipszis-kör, illetve a képeknél egyenes.

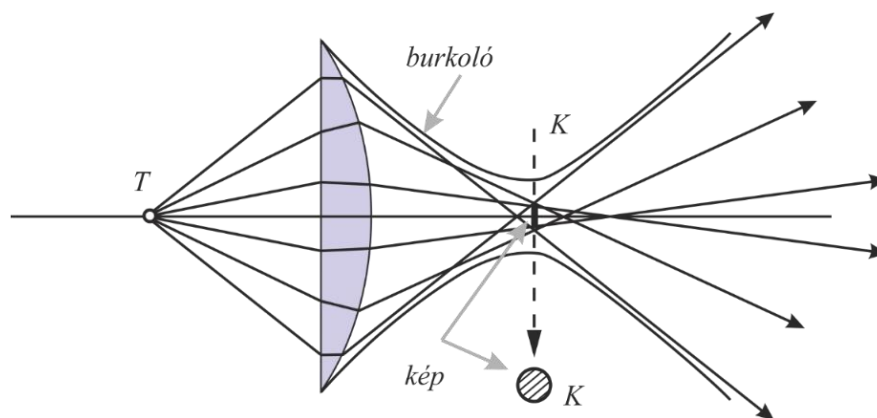
Mivel ez a hiba akkor jelentkezik, amikor a lencsét a nyaláb ferdén éri (a fősugár-tengely szöge nem zérus),



csökkentése egyszerű lencsék esetében is lehetséges. Gondoskodnunk kell arról, hogy a nyaláb fősugara egybeessen a lencse tengelyével. Kiterjedt tárgy esetében ez az eljárás természetesen nem célravezető. Ilyen esetben a lencse előtt jól elhelyezett, megfelelő méretű diafragma segíthet. Az asztigmatizmus is az egyértelmű leképezést rontja el: a lencse pontot egyenesbe képez le. Lényeges tudni azt, hogy az asztigmatizmus akkor is felléphet, amikor a fény síkfelületű törőközeg határán halad át. Ez az eset fordulhat elő pl. a prizmánál, amikor színeképet állítunk elő. Itt az asztigmatikus hibát a prizma minimális deviációra való állításával lehet megszüntetni.

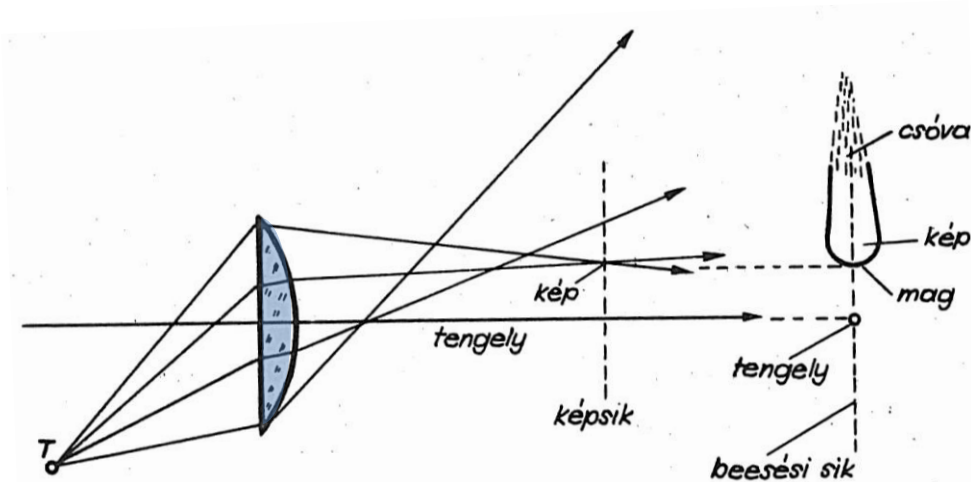
3) Kóma

Egy a tengelyen levő pont egzakt leképezésénél, reális kép esetében, az ideálisnak képzelt lencse után olyan konvergens nyalábot kellene kapnunk, amelynek burkolófelülete kúpfelület (a kép a kúp csúcsa). Valóságos lencse esetében a szférikus hiba következtében ez a burkoló felület nem kúp. Ennek a diakausztikus felületnek a tengelyre merőleges síkmetszete mindenütt kör (a legkisebb ilyen kör felel meg a tárgy pont képének), mely a tengely dőléspontjára centrálisan szimmetrikus felület (lásd következő ábra).



Ha a tárgy pont nincs a tengelyen (fősugár szöget zár be a tengellyel), akkor a diakausztikus felület torzul (lásd következő ábra). Tengelyre merőleges síkmetszete már csak a beesési síkra lesz szimmetrikus (fősugár-főtengely síkja). Az ábra jobboldalán a tengely irányából észlelhető (a képsíkban levő) kép van feltüntetve: a T pont képe üstököshöz hasonlít, amelynek (többé-kevésbé) élesen határolt fényes magja a lencse tengelye felé néz, míg az egyre halványodó, elmosódó, csóva, tőle sugárirányban távolabb látható. Az ilyen szerkezetű kép jellemző a kóma hibára. A kóma hibás lencsék külső zónái, ferde beesés esetében pontszerű tárgyról sohasem alkotnak pontszerű képet. A külső zónák alkotta képek a beesési síkra szimmetrikus, többé-kevésbé komplikált zárt görbék.

Megjegyezzük, hogy bár a kómát és a szférikus aberrációt egyaránt a külső zónák hozzák létre, a két hiba nem azonos. A kóma akkor is felléphet, ha a leképező eszköznek nincs szférikus hibája. Olyankor szokott erősen jelentkezni, ha nagyon kiterjedt tárgyat nagy nyílású, egyszerű lencsével képezünk le, és a lencse teljes nyílását ki kell használnia. A kóma hibát diafragmázással (a nyaláb beszűkítésével) jelentősen csökkenthető.



4) A képfelület görbülése

Erről a hibáról röviden teszünk említést. Lényege az, hogy a lencse a síkfelületű (tengelyre merőleges) tárgyat görbült felületre képezi le (homorú oldalával a lencse felé). Az asztigmatizmusnál tárgyalt meridionális, illetve szaggitális képtávolságok, adott tárgytávolság esetében annál rövidebbek, minél nagyobb a tárgy pont távolsága a tengelytől. Ez a két képtávolság (k_M és k_S) egyenlő, és legnagyobb akkor, ha a tárgy (így a kép is) a tengelyen van. Tehát látható az, hogy kiterjedt tárgy leképezésekor két olyan görbült képfelület keletkezik, amelyek a tengelypontban érintik egymást. Többek között ez a hiba is oka annak, hogy egyszerű lencsével csak kis látószögben lehet elfogadható élességgel fényképezni. (Nagyobb felületű képek szélei elmosódtak.) A képfelület görbülését egyszerű módszerekkel nem lehet megszüntetni. Ha a tárgy és a lencse közé, megfelelő helyre, kellő méretű kördiafragmát helyezünk, az asztigmatizmus és kóma meglepő mértékben csökken, valamint javul a görbültségi hiba is (1. asztigmatizmus).

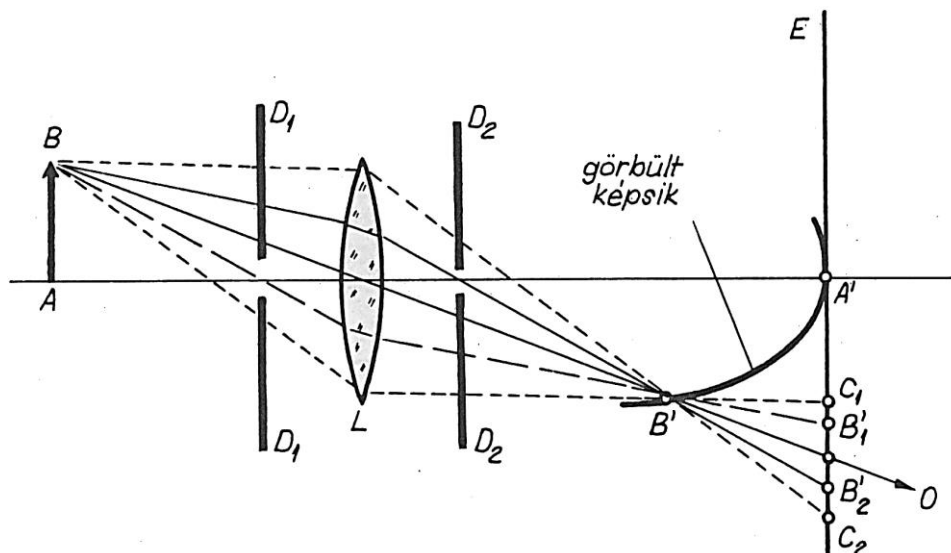
5) Kromatikus aberráció

A lencse gyújtótávolsága, a törésmutató révén, a hullámhossz függvénye. Minthogy minden lencseanyagnak diszperziója van, az egyszerű lencse gyújtótávolsága minden színre más. Ennek az a következménye, hogy a lencse az adott tárgyat változatlan tárgytávolságnál, szintől függően, különböző képtávolságban, különböző nagyítással képezi le. Tehát van színes eltérés a gyújtótávolságban, képhelyben, és képnagyságban. Egyszerű, hosszú gyújtótávolságú, vékony lencse esetében a távolságokat a lencse síkjától lehet mérni: minden színre más a gyújtótávolság, tehát adott esetben a képtávolság, és a nagyítás is. Vastag lencsék esetében nagyon változik a helyzet. Itt a távolságokat a fősíktól mérjük, de ezek helye is függ a törésmutatótól, tehát a fény színétől. Így előfordulhat az, hogy bár van kromatikus gyújtótávolság eltérés, a gyújtópontok (két színre) mégis azonosak, továbbá azonos helyre kerülhetnek a különböző színű képek, de különböző nagyságban (képtávolságok természetesen különbözők) stb. A kromatikus hiba, mint minden más hiba csak csökkenthető, de teljesen meg nem szüntethető. Legegyszerűbb módszer az, amikor két különböző törésmutatójú, és

diszperziójú lencséből – egy gyűjtő, és egy szórólencséből – állítanak össze egyetlen akromatikus lencsét. A kromatikus hibát általában csak két, illetve három színre szokták megszüntetni.

6) Disztorzió (elrajzolás, képtorzulás)

Ez a hiba jellegében különbözik az eddig tárgyaltaktól, amelyek kivétel nélkül az egyértelmű leképezést akadályozzák (a kép életlenségének okozói). Disztorzió esetében a jó leképezés másik feltétele, az alakhűség (a leképezés linearitása) nem teljesül. Fellépésében több tényező játszik szerepet. Egyik: az egyes zónák nagyítása nem azonos. A másik: a képfelületgörbülése. De a hiba csak olyankor észlelhető amikor kiterjedt tárgy leképezésekor diafragmát alkalmazunk. A jelenség közismert: négyzetrács képe tárgyterben levő diafragmánál hordó, képtérbelinél párna alakúra torzulhat (hordó-párna torzítás). A jelenséget legtöbbször, mint a diafragma okozta hibát tartják nyilván. A diafragma szerepe annyi, hogy – helyzetétől függően – kiválasztja a hibásan leképező nyálábrészt, és annak mélységelességét fokozza (lásd következő ábra).



Ezen az ábrán három különböző állapot van feltüntetve:

- 1) D_1 és D_2 diafragmák nincsenek a rendszerben, a leképező nyaláb a pontozott vonalak között halad;
- 2) D_1 diafragma a lencse előtt áll (D_2 nincs), a szűk nyáláb fősugara a szaggatott vonal;
- 3) Csak D_2 diafragma van: a leképező nyáláb fősugara a folytonosan kihúzott vonal.

Az L lencse az AB tárgy A pontját A' -be képezi le az ernyőre (E). A képsík görbült: a tengelyen kívüli B pont képe B' nem az ernyőn keletkezik. Diafragma nélkül ennek a képnek az ernyőn a C_1C_2 folt felel meg. Jó leképezés esetében O -ban kellene B képének megjeleníteni. A D_1 diafragmán áthaladó nyáláb fősugara $BB'B'_1$ (szaggatott vonal). Ha a diafragma elég szűk, akkor kép B'_1 -ben, tehát a tengelyhez közelebb keletkezik. A képtérbeli D_2 diafragma szerepe hasonló, ennél B képe B'_2 , távolabb esik a tengelytől. Ezért lesz a négyzetrács képe egyszer hordó, máskor párna alakú. Ez a hiba demonstrációs vetítésnél, észrevehető mértékben, ritkán

jelentkezik. Amennyiben mégis észlelhető, akkor a kérdéses diafragmát a lencséhez közelebb kell elhelyezni. Ritkán előfordulhat az, hogy a rendszerbe jutó nyaláb (már a kondenzor után) magában pupillát képez (az izzószál képe itt jelenik meg), és ez a keresztmetszet lesz a képtorzítás okozója. Ilyen esetben a kondenzor elmozdítása segít. A disztorzió megszüntetése csak úgy lehetséges, ha a – legalább két részből álló – összetett lencse tagjai közé építik be a diafragmát.

[Vissza >>>](#)

F15. A Fermat-elv

A következőkben a geometriai optika alapjainak tanítására alkalmas tananyagot mutatunk be. A tananyag foglalmilag nehéz, erősen elméleti érdeklődésű és matematikából jól felkészült osztályok számára ajánlható.

A kettő, illetve négy vagy öt órára elosztható anyagrészt a bevezető példa után a második órán a visszaverődési és törési törvény levezetésével folytatódik. Ezután a tematika visszacsatlakoztatható az optika leképezés szokásos tárgyalásába, folytatható azonban a leképezési törvények levezetésével, valamint a felbontóképesség magyarázatával. Ehhez bevezetesként célszerű egy tanórányi időt a Fermat-elv optikai úthosszra történő átfogalmazásával tölteni.

Az anyag tárgyalása deduktív, a feldolgozás kiindulópontja az axiómaként kimondott Fermat-elv. A Fermat-elv a fizika szélsőértékeltelvi közé tartozik, megértéséhez szükség van a differenciálszámítás alapelemeinek tartalmi megértésére. A gimnáziumi tanulmányok vége felé tagozatos osztályokban a fakultációs órákon vagy szakkörön a megfelelő matematikai ismeretek birtokában érdemes vele foglalkozni, és megmutatni, hogy az eddig kísérletekkel igazolt törési és visszaverődési törvény a Fermat-elvből levezethető. A módszer nemcsak a fizika szempontjából fontos, hanem matematikából is új utat nyit a szélsőértékszámításon keresztül a variációszámítás felé. Természetesen szó nincs arról, hogy a variációszámítás technikáját próbáljuk megtanítani. A Feynman nyomán ajánlott mintapélda inkább csak a függvényeknek a szélsőérték hely környezetében mutatott viselkedésének mélyebb megértésén alapul.

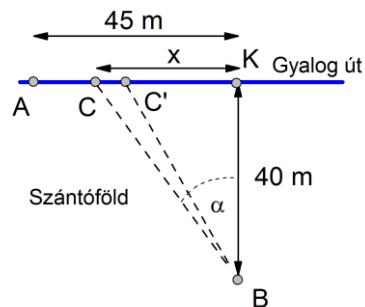
A geometriai optika a fénysugárral, mint fiktív matematikai fogalommal dolgozik és lényegében sztatikus képet alakít ki a fényjelenségekről. A fény terjedési törvényeit alapvetően csak kísérleteken keresztül tárgyalja, és nem veszi figyelembe, hogy a fény terjedéséhez időre van szükség. A fényjelenségek geometriai optikai tárgyalásától a hullámoptikai szemlélethez vezető első lépés Pierre Fermat azon felismerése volt, hogy a fény, különböző közegekben más és más sebességgel terjed.

A Fermat által megfogalmazott minimum elv szerint adott feltételek mellett *a fény két pont között mindig azon az úton halad, amelynek megtételéhez a legrövidebb időtartam szükséges.* A Fermat-elv szerinti tárgyalásból a geometriai optika minden törvénye származtatható. A fény terjedése alapvető feltétele az elmélet felhasználásának, így a levezetésekben a fény sebessége vezető szerepet kap, ezáltal megszűnik a geometriai optikának a sugármenetekre alapozott képből adódó statikus jellege.

Kinematikai feladat a Fermat-elv bevezetéséhez

A Fermat-elv alkalmazását érdemes egyszerű mechanikai analógiával, a következő, Feynman által ajánlott kinematika feladat megoldásával kezdeni (Feynman: Mai Fizika, 26. fejezet):

Egy ember 1,5 m/perc sebességgel tud a gyalogúton menni, a járda melletti szántóföldön azonban csak 0,9 m/perc sebességgel halad. Egy faltól 45 m-re, lévő A pontból indul, és a gyalogúttól 40 m-re délre a fal mellett lévő B pontba akar eljutni (ábra). Milyen ACB útvonalon kell az illetőnek haladnia, hogy az egész utat a legrövidebb idő alatt tegye meg?



Megoldás

Ha a diákok ismerik a deriválási szabályokat, akkor a feladat a differenciálszámítás felhasználásán alapuló szélsőérték számítással megoldható. Ez fakultációs és tagozatos osztályokban már elvárható. Az ember a szántóföldön lassabban tud menni, ezért első pillantásra az AKB útvonal látszik célszerűnek, mivel KB minimális volta miatt a legkevesebb a szántóföldön töltendő idő. Könnyen beláthatjuk azonban, hogy ebben az esetben a gyalogúton több időt veszít, mint amennyit a szántóföldön töltött idő megrövidítésével nyer. Ha a gyalogútról C-ben tér le az ember, és a CK távolságot x -szel jelöljük, akkor az ábra adataival a gyalogúton:

$$t_1 = \frac{\overline{AK} - x}{v_1} = \frac{45 - x}{1,5}$$

a szántóföldön pedig

$$t_2 = \frac{\overline{CB}}{v_2} = \frac{\sqrt{40^2 + x^2}}{0,9}$$

időt kell a gyalogosnak eltölteni. Ha a legrövidebb ideig tartó utat akarjuk meghatározni, akkor a

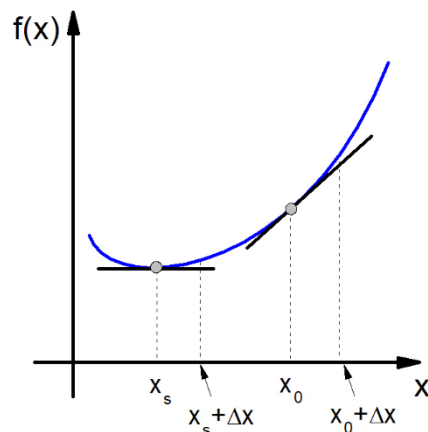
$$t = \frac{45 - x}{1,5} + \frac{\sqrt{40^2 + x^2}}{0,9}$$

függvény minimumát kell megkeresnünk. A függvény minimumhelye ott van, ahol az idő szerinti deriváltja nulla:

$$\frac{-1}{1,5} + \frac{1}{0,9} \frac{x}{\sqrt{40^2 + x^2}} = 0$$

Innen kiszámítva $x = 30$ méter adódik. Egyszerű szélsőérték számítás segítségével eljutottunk a keresett út meghatározásához. (A fizikai feltételekből nyilvánvaló, hogy csak minimumról lehet szó.)

A szélsőérték tulajdonságainak felhasználásával az utak „variálásával” is megoldhatjuk a feladatot. A matematikát emelt szinten tanuló, a differenciálszámítással már megismerkedő diákok már tudják, hogy a függvény azon a helyen veszi fel lokális szélső értékét, ahol a helyettesítési értéket kissé változtatva (variálva) a függvényérték állandó marad. A fizikában gyakran alkalmazzuk a lineáris közelítést! Ha az $f(x)$ függvény, valamint deriváltjának értéke az x_0 helyen ismert ($f(x_0), f'(x_0)$), akkor a függvény $x_0 + \Delta x$ helyen vett értéke jól közelíthető a függvény x_0 helyen vett érintőjével: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$. A szélsőérték helyen (x_s), miután ott $f'(x_s) = 0$ ez a közelítés arra a furcsa eredményre vezet, hogy az x_0 helyről kicsit eltávolodva a függvény értéke állandó, a minimumhelyen felvett érték marad. (ábra) Ha ezt a tényt ügyesen használjuk, akkor a szélsőérték helyet deriválás nélkül is megtalálhatjuk.



Legyen a most tárgyalt példában C a szélsőértékhez tartozó hely, ha ezt kissé megváltoztatjuk (C'), akkor a szélsőérték hely tulajdonsága alapján a függvényérték (a mi esetünkben most az idő) nem változik.

Ez csak úgy lehetséges, ha a gyalogútról letérés helyének kis megváltoztatása miatt a gyalogos éppen annyival több időt tölt a gyalogúton, amennyivel kevesebbet megy a szántóföldön. (csak így lehetne a két idő összege ugyanakkora). Tehát:

$$\frac{\overline{CC'}}{v_1} = \frac{\overline{CC'} \sin \alpha}{v_2}$$

Behelyettesítve az adatokat, $\overline{CC'}$ vel egyszerűsítve, és figyelembe véve, hogy $\sin \alpha = x/\overline{CB}$, az

$$\frac{1}{0,9} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 40^2}} = \frac{1}{1,5}$$

egyenlet adódik.

Megoldva az egyenletet az $x = 30$ m eredményt kapjuk. A mintapéllda megértése után megmutathatjuk, hogy ezt az eljárást alkalmazva a Fermat-elvből hogyan vezethetők le a geometriai optika törvényei.

Megjegyzés:

- A szélsőérték hely megkeresésekor a pályát variáltuk a szélsőérték környezetében. Az idő tehát egy geometriai görbéhez, mint független változóhoz volt hozzárendelve. A szokásos szélsőérték számítással a problémát csak azért tudtuk megoldani, mert a pályát nagyon egyszerűen egyetlen paraméterrel szabtuk meg. Bonyolultabb problémák esetén, amikor a sebesség a hely függvényében változik, ilyen egyszerűsítés általában nem is lehetséges. A kérdés felvetés általában az, hogy milyen pályagörbét kell választani ahhoz, hogy az A pontból a B pontba minimális idő alatt jussunk el, azaz a

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v}$$

integrál minimumát keressük a pálya görbe függvényében (v a mozgás sebessége a pálya adott kicsiny ds ívelemén.).

Természetesen még matematikailag magasan képzett tanulócsoporthoz sem akarunk a vonalintegrálokkal kapcsolatos problémákat megoldani. Feltételezhető azonban, hogy a vonalintegrál fogalmával a tanulók az elektromosságban már megismerkedtek.

- A pálya variálásának gondolata a matematikában rendkívül termékenynek bizonyult, a matematikai analízis új ágának a variációszámításnak a kifejlesztéséhez vezetett.

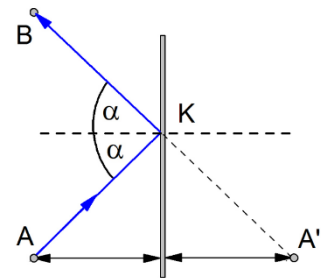
A geometriai optika törvényeinek levezetése a Fermat-elvből

Megmutatjuk, hogy a Fermat-elvből a geometriai optika két alaptörvénye a visszaverődési és a törési törvény levezethető. A két törvény levezetése után lényegében már visszacsatlakozhatunk a geometriai optika szokásos tárgyalásához. Látni fogjuk azonban, hogy a Fermat-elv a geometriai optika részproblémáira (lencsetörvény, felbontóképesség stb.) is alkalmazható hatékony eszköz.

A visszaverődési törvény

Kérdés, milyen pályán halad az A pontból induló fénysugár, ha tudjuk, hogy a közegethatárról való visszaverődés után a B pontba jut?

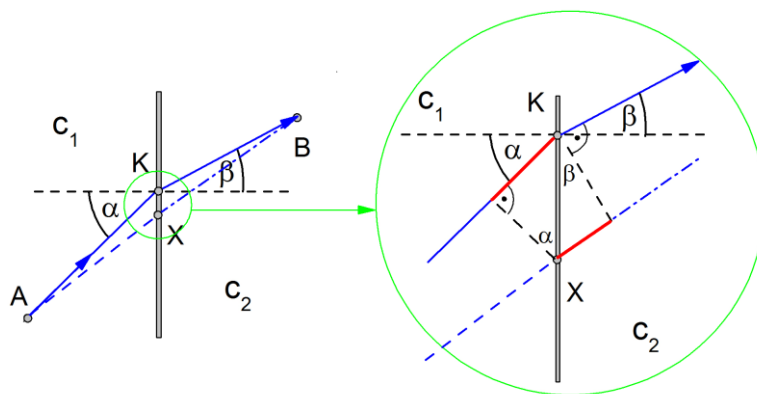
A Fermat-elv alapján azt az utat kell megtalálnunk, amelyiket a fény a legrövidebb idő alatt teszi meg. Visszaverődéskor a fény mindig ugyanabban a közegben halad, terjedési sebessége nem változik. A terjedéshez szükséges idő akkor lesz minimális, ha a megteendő út is az. Innen ez már egyszerű geometriai feladattá válik: Az *ábra* alapján az AKB út akkor lesz a legrövidebb, ha az A pontnak a közegethatárra vett A' tükörképe, valamint a K és B pontok egy egyenesbe esnek. Ebből pedig azonnal következik, hogy a beeső és visszavert fénysugár a beesési merőlegessel azonos szöget zár be.



A törési törvény

Kérdés, milyen úton halad az A pontból induló B pontba érkező fénysugár, ha a két pont különböző közegekben van, amelyekben a fény terjedési sebessége c_1 , illetve c_2 ?

A Snellius–Descartes-törvény igazolása az utak variálásával megoldott mechanikai mintafeladat alapján történhet. Haladjon a fény a két homogén közeg között az AKB úton. Változtassuk kis mértékben ezt az utat (AXB útvonal). Mint már megállapítottuk, a függvény minimumhelyének közelében a terjedési időn ez első közelítésben nem változtat, tehát:



$$\frac{\overline{XK} \sin \alpha}{c_1} = \frac{\overline{XK} \sin \beta}{c_2}$$

Ezt átrendezve az ismert Snellius–Descartes-törvényhez jutunk:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{2,1}$$

A beesési és törési szög közötti kapcsolatról mérésekkel csak annyit tudtunk megállapítani, hogy szinuszaik hányadosa a két közeg anyagi minőségétől függő állandó. A Fermat-elv alapján ennél többet is megtudunk: a törésmutató a fény két közegben lévő sebességének a hányadosa.

A Fermat-elv néhány egyéb alkalmazása

Említettük, hogy a Fermat-elv a geometriai optika törvényeiből kikövetkeztethető egyes részproblémákra közvetlenül is alkalmazható. Egyszerűen megmutatható például, hogy a tükrök és lencsék valódi képet adó leképezésének törvényei a Fermat-elvből közvetlenül levezethetők. (Némi ügyeskedéssel azonban a virtuális képre vonatkozó törvények is levezethetők.) Ebben a fejezetben a lencsék leképezésére vonatkozó alkalmazásokat mutatunk be.

A Fermat-elv megfogalmazása az optikai úthosszal

A lencsék esetén a fény mindenképpen legalább kétféle törésmutatójú közegben halad. Ennek megfelelően célszerű a Fermat-elvet az optikai úthosszal megfogalmazni. Az átfogalmazást érdemes egyszerű esettel kezdeni. Tegyük fel, hogy a fény kétféle közegben halad és a minimális idő eléréséhez az egyik közegben s_1 utat tesz meg v_1 , a másikban pedig s_2 utat v_2 sebességgel, azaz

$$t_{min} = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}$$

Fejezzük ki a közegbeli fénysebességeket a két közeg rendre $n_1 = \frac{c}{v_1}$ és $n_2 = \frac{c}{v_2}$ abszolút törésmutatójával, ahol c a fény vákuumbeli (levegőbéli) törésmutatójával. A minimális időre

$$t_{min} = \frac{n_1 s_1 + n_2 s_2}{c}$$

adódik. Mivel c állandó, az $(n_1 s_1 + n_2 s_2)$ szorzatösszegnek is minimálisnak kell lennie. Az ns szorzatot optikai úthossznak nevezzük. Arra jutottunk tehát, hogy a fenti egyszerű esetben az idő minimum helyett kereshetjük az optikai úthossz minimumát is. Az egyszerű példát általánosítva az elvet ennek alapján általánosan is elfogadhatjuk.

Megjegyzés:

- Ha a tanulók tisztában vannak a vonalintegrál fogalmával, akkor a szélsőérték problémát, mint már említettük általánosan is megfogalmazhatjuk, azaz, ha változik a fény közegbeli terjedési sebessége, akkor azt a görbét keressük, amelyen az A pontból a B pontba jutva a

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v}$$

integrál minimális. A törésmutató $n = \frac{c}{v}$ definíciójából a sebességet az integrálba helyettesítve azt kapjuk, hogy a

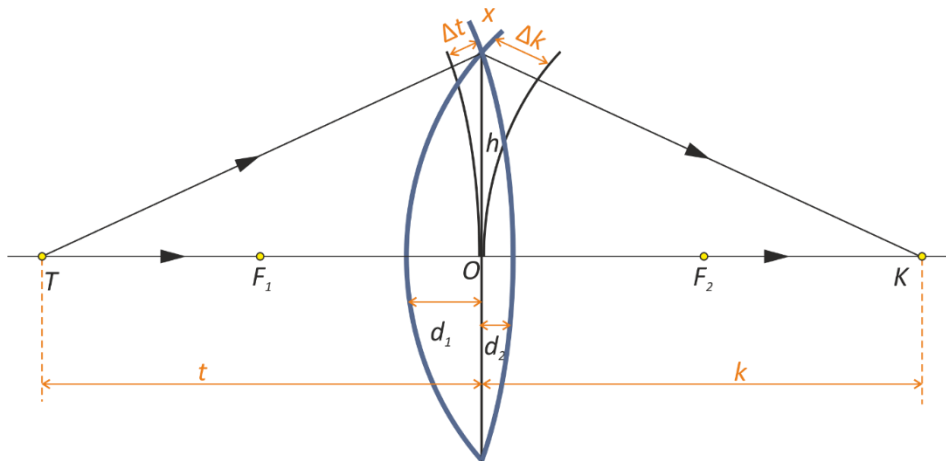
$$t = \frac{1}{c} \int_A^B n ds$$

integrál minimumához tartozó görbét kell megkeresnünk, ami egyenértékű az $\int_A^B n ds$ optikai úthossz minimumát adó pályagörbre meghatározásával.

A Fermat-elv alapján fontos következtetés fogalmazható meg az optikai leképezésekre. A jó leképezést biztosító optikai eszközök az ugyanabból tárgypontból kiinduló fénysugarakat egyetlen képpontban gyűjtik össze. Minthogy a tárgypontból minden irányban indulnak fénysugarak, és minden az optikai eszközt elérő fénysugár a képpontba jut, a fény számára a tárgy és a képpont közötti minden fényút egyenrangú kell legyen. A Fermat-elv szerint ez azt jelenti, hogy a tárgy és képpont között tetszőleges sugármenetre az optikai úthossz minimális, és a minimum értéke ugyanannyi.

A vékony lencsék leképezési törvényének levezetése

Határozzuk meg az n_2 törésmutatójú anyagból készített R_1 és R_2 sugarú gömbhékkel határolt kétszer domború vékony lencse leképezési törvényét. A lencse mindkét oldalán $n_1 < n_2$ törésmutatójú közeg van. Használjuk az ábra jelöléseit! Mivel a lencse az egy pontból kiinduló sugarakat egy pontban gyűjti össze, az optikai úthosszaknak tetszőleges sugármenetre meg kell egyezniük. Legyen az optikai tengelyen fekvő T tárgypont képe K . A leképezési törvény meghatározásához válasszuk az optikai tengelyben haladó TOK és a lencse szélső pontján megtörő TXK sugármenetet.



A két sugármenet optikai úthossza úgy válik egyenlővé, hogy TXK sugármenet n_1 törésmutatójú közegben mért geometriai úthossztöbbletét a TOK sugármenet a d_1 és d_2 szakasz nagyobb törésmutató miatt megnövelt optikai úthosszával egyenlíti ki. Ennek megfelelően az ábra jelöléseivel:

$$n_1(\Delta t + \Delta k) = (n_2 - n_1)(d_1 + d_2) \quad (1)$$

Az úttöbbletek és a lencse vastagságát adó szakaszok egyszerű közelítéssel adhatók meg. A közelítés jól összehasonlítható a geometriai optika szokásos közelítéseivel. A korábban használt közelítések azt fejezik ki, hogy a sugármenetek és a lencse nyílásszöge is kicsi. Most a szélső ponthoz húzott sugármenetek Δt és Δk geometriai úthossztöbblete a TOX és KOX háromszög átfogójának és hosszabbik befogójának különbsége adja.

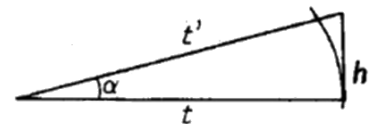
Vizsgáljuk meg ezért általánosan, hogy kicsiny nyílásszögű derékszögű háromszög esetén ez a különbség hogyan közelíthető.

Az ábrán látható háromszögre írjuk fel a Pitagorasz-tételt a

$$t'^2 - t^2 = h^2$$

Alakítsuk a baloldalt szorzattá:

$$(t' + t)(t' - t) = h^2$$



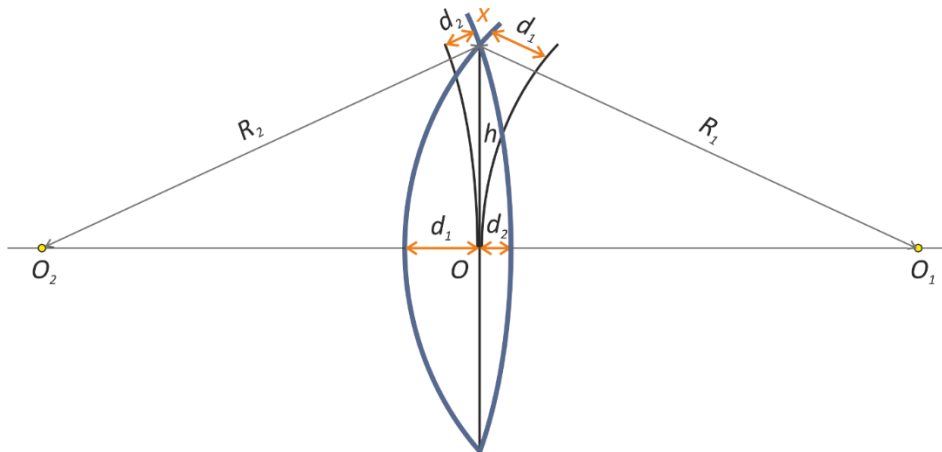
majd vezessük be a $t' + t \approx 2t \approx 2k$ közelítést. (Ez felel meg a korábban használt kis szögekre vonatkozó közelítésnek! A közelítést felhasználva a derékszögű háromszög átlójának és hosszabbik befogójának különbsége:

$$(t' - t) \approx \frac{h^2}{2t} \approx \frac{h^2}{2t'}$$

Ezt a közelítést alkalmazva

$$\Delta t \approx \frac{h^2}{2t}, \Delta k \approx \frac{h^2}{2k}$$

A lencse vastagságát adó szakaszok a lencsét határoló gömbhéjak sugarával fejezhetők ki.



Ha a gömbhéjak középpontját összekötjük a lencse szélső pontjával, majd körívezünk középpontokból rendre az O_2O és O_1O sugárral, akkor látható, hogy az O_2OX háromszög átfogója éppen d_2 -vel, az O_1OX átfogója pedig éppen d_1 -gyel hosszabb, mint a háromszög hosszabbik befogója. A fentiekben bebizonyított közelítés alapján tehát

$$d_1 \approx \frac{h^2}{2R_1}, \quad d_2 \approx \frac{h^2}{2R_2}$$

Beírva a közelítéseket az (1) egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$\frac{n_1 h^2}{2t} + \frac{n_1 h^2}{2k} = (n_2 - n_1) \left(\frac{h^2}{2R_1} + \frac{h^2}{2R_2} \right)$$

amiből egyszerűsítés után adódik a lencsetörvény

$$\frac{n_1}{t} + \frac{n_1}{k} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

alakja. Ha az összefüggést n_1 -gyel végigosztjuk és bevezetjük az $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$ relatív törésmutatót, akkor a lencsetörvény a szokásos

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = (n_{21} - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

alakot ölti. A fókusz távolság definíciója alapján azonnal következik, hogy a lencse kétoldali fókusz távolsága azonos és

$$\frac{1}{f} = (n_{21} - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

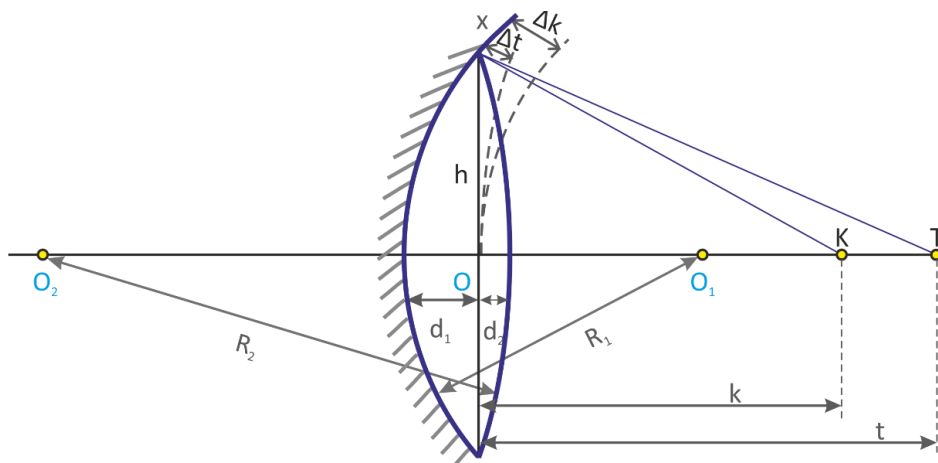
Egyik oldalán beüzemelt lencse leképezési törvénye

Határozzuk meg az előző pontban vizsgált lencse leképezési törvényét, ha a lencse egyik oldalát beüzemeltük, azaz tükrözővé tesszük. Hasonlítsuk össze ismét az optikai tengelyen futó TOK és a lencse szélső pontján megtörő és visszaverődő TOX sugármenetek optikai úthosszát. A két sugármenet optikai úthossza most is egyenlő. A TOX sugármenet geometriai úttöbblete az n_1 törésmutatójú közegben a

$$\Delta t + \Delta k \approx \frac{h^2}{2t} + \frac{h^2}{2k}$$

közelítéssel adható meg. Ezen a szakaszon az optikai úthossztöbblet:

$$n_1(\Delta t + \Delta k) \approx \frac{n_1 h^2}{2t} + \frac{n_1 h^2}{2k}$$



Ezt a többletet a TOK sugármenet a nagyobb törésmutatójú $d_1 + d_2$ szakasz

$$2n_2 d_1 + (n_2 - n_1) d_2$$

optikai úthossztöbbletével egyenlíti ki. A lencse vastagságát adó szakaszok a kis nyílásszögű közelítés következtében a lencsét határoló gömbhéjak sugarával az

$$d_1 \approx \frac{h^2}{2R_1}, \quad d_2 \approx \frac{h^2}{2R_2}$$

összefüggésekkel adhatók meg.

Az egyik oldalán tükrözővé tett lencse leképezési törvénye az optikai úthossztöbbletek egyenlővé tétele után tehát:

$$\frac{n_1 h^2}{2t} + \frac{n_1 h^2}{2k} = 2n_2 \frac{h^2}{2R_1} + (n_2 - n_1) \frac{h^2}{2R_2}$$

Egyszerűsítés és az $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$ relatív törésmutató bevezetése után azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{2n_{21}}{R_1} + \frac{2(n_{21} - 1)}{R_2}$$

Innen a „tükröző” lencse fókusz távolsága:

$$\frac{1}{f} = \frac{2n_{21}}{R_1} + \frac{2(n_{21} - 1)}{R_2}$$

A kapott összefüggés egyszerűen ellenőrizhető, ha felhasználjuk, hogy a szorosan egymás mellé tett vékony lencsék és tükrök törőereje, esetünkben fókusz távolságaik reciproka összeadódik. Esetünkben a fény átmegy a lencsén, visszaverődik az R_1 sugarú homorú tükrön, majd ismét átmegy a lencsén. Következésképpen:

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{f_{lencse}} + \frac{1}{f_{tükör}}$$

Beírva ide a lencse fókusz távolságára vonatkozó

$$\frac{1}{f_{lencse}} = (n_{21} - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

valamint a tükör fókusz távolságára vonatkozó:

$$\frac{1}{f_{tükör}} = \frac{2}{R_1}$$

összefüggést, visszakapjuk a Fermat-elv segítségével levezetett

$$\frac{1}{f} = \frac{2n_{21}}{R_1} + \frac{2(n_{21} - 1)}{R_2}$$

formulát.

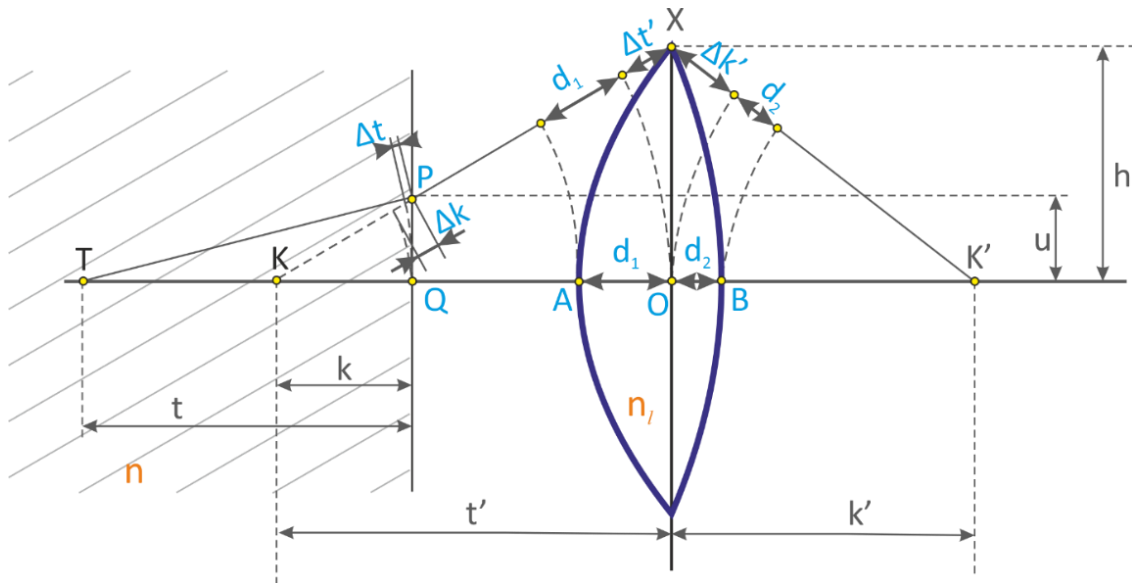
A Fermat-elv alkalmazása széttartó sugárnyaláb esetén

Fermat-elv a valódi optikai utakra vonatkozóan mondja ki, hogy minimálisak. felvetődik a kérdés, hogy vajon alkalmazható-e azokban az esetekben, amikor a képalkotó eszközök virtuális képet hoznak létre. A korábbi levezetésekben ilyenkor a fénysugarak valójában nem létező meghosszabbításával is számoltunk. A kép ilyenkor csak azért keletkezik, mert a széttartó sugárnyalábot szemünk a retinán, vagy a fényképezőgép lencséje a fotólemezen egyesíti. A Fermat-elv széttartó sugármenetre való alkalmazásához használjuk ezt a természet által diktált módszert. Helyezzünk a széttartó nyaláb útjába gyűjtőlencsét hozunk létre vele valódi képet és Fermat-elvet alkalmazzuk az összetett rendszer valódi fénypályáira.

Sík felület képalkotása

Haladjunk lépésről lépésre és először határozzuk meg, hogy az n törésmutatójú sík törőközeg merőleges ránézés esetén mennyivel hozza közelebb a benne t mélységben lévő kicsiny (pontoszerű) tárgyat.

Tegyünk a felszín fölé az ábrán látható módon n_l törésmutatójú lencsét úgy, hogy a felszín által létrehozott K virtuális képről K' valódi képet hozzon létre. Fejezzük ki a TQOK' és TPXK' (valódi!) optikai úthosszak egyenlőségét. A lencsetörvények levezetéséhez hasonlóan most is csak az eltérések egyenlőségét írjuk fel. A TPXK' sugármenet optikai úthosszának többlete az ábra alapján:



$$n\Delta t + n_{lev}(\Delta t' + d_1 - \Delta k) + n_{lev}(\Delta k' + d_2)$$

A TQOK' sugármenet optikai úthossztöbblete a lencse $(d_1 + d_2)$ vastagsága mentén jön létre a törésmutató növekedés miatt:

$$n_l(d_1 + d_2)$$

A két kifejezés egyenlőségét felírva, és figyelembe véve, hogy $n_{lev} = 1$, rendezés után azt kapjuk, hogy

$$n\Delta t + \Delta t' - \Delta k + \Delta k' = (n_l - 1)(d_1 + d_2)$$

A kis szögekre vonatkozó közelítések felhasználásával az összefüggés az

$$\frac{nu^2}{2t} + \frac{h^2}{2t'} - \frac{u^2}{2k} + \frac{h^2}{2k'} = (n_l - 1) \left(\frac{h^2}{2R_2} + \frac{h^2}{2R_1} \right)$$

Vegyük észre, hogy a gyűjtőlencse adatai kiesnek, hiszen

$$\frac{h^2}{2t'} + \frac{h^2}{2k'} = (n_l - 1) \left(\frac{h^2}{2R_2} + \frac{h^2}{2R_1} \right)$$

ezért

$$\frac{nu^2}{2t} = \frac{u^2}{2k}$$

ahonnan

$$k = \frac{t}{n}$$

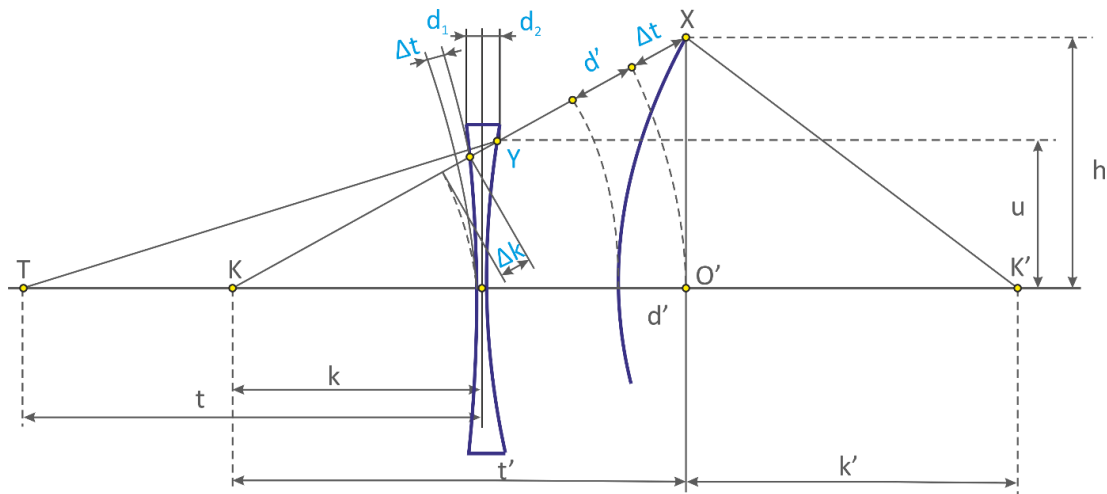
A képet tehát $(t - k)$ -val látjuk közelebb:

$$t - k = t \left(1 - \frac{1}{n} \right) = t \frac{n - 1}{n}$$

A szórólencse leképezési törvénye

Hasonló módszerrel határozhatjuk meg a szórólencse leképezési törvényét is. Az ábrának megfelelően legyen a szórólencse vastagsága $(d_1 + d_2)$ apertúrájának sugara pedig u . Alkosson ez a lencse az optikai tengely T pontjáról K virtuális képet. A lencse elé tegyünk az egyszerűség kedvéért d' vastagságú síkdomború lencsét, amely a K' virtuális képről K valódi képet hoz létre. A szórólencsét határoló gömbhéjak sugara legyen rendre R_1 és R_2 a gyűjtőlencsée pedig R' . A lencsék közötti teret töltsé ki levegő, a lencsék törésmutatója pedig legyen n .

Hasonlítsuk össze most is a jól bevált módon két valódi sugármenet a $TZYXK'$ és a $TOO'K'$ sugarak geometriájából adódó optikai úthossz különbségeket. Az eltérés most az első sugármenet „ferdeségéből” és a lencsék vastagságából adódik.



A $TZYXK'$ sugármenet optikai úthossztöbblete:

$$\Delta t + nd_1 + nd_2 + \Delta t' + nd' - \Delta k$$

A $TOO'K'$ sugármenet optikai úthossztöbblete:

$$d_1 + d_2 + nd'$$

A Fermat-elv szerint az optikai úthossztöbbletek egyenlőek, azaz rendezés után:

$$\Delta t - \Delta k + \Delta t' = (n - 1)d' + (1 - n)(d_1 + d_2)$$

A síkdomború gyűjtőlencse leképezési törvényének értelmében:

$$\Delta t' = (n - 1)d'$$

azaz

$$\Delta t - \Delta k = (1 - n)(d_1 + d_2)$$

és a megfelelő közelítésekkel:

$$\frac{h^2}{2t} - \frac{h^2}{2k} = (1 - n) \left(\frac{h^2}{2R_2} + \frac{h^2}{2R_1} \right)$$

ahonnan a szórólencse képalkotási törvényére

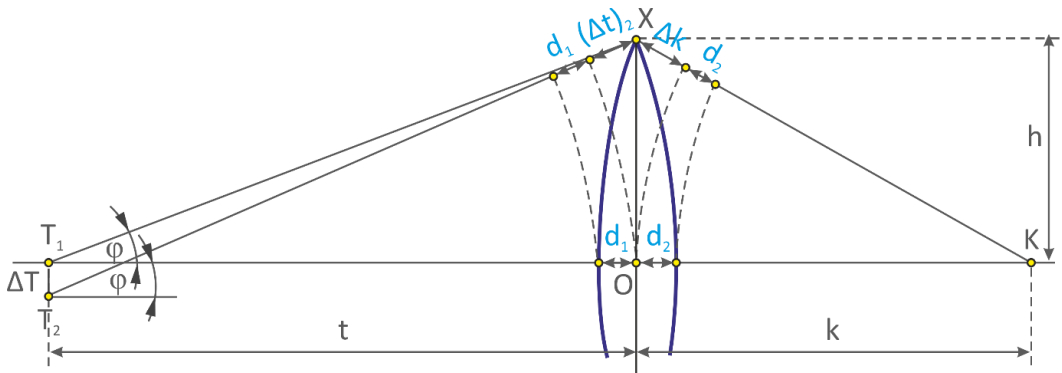
$$\frac{1}{t} - \frac{1}{k} = (1 - n) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)$$

adódik. Az összefüggésben minden mennyiség egyszerű hosszúságot jelent, azaz pozitív. Ha a virtuális távolságokat negatív előjellel látjuk el, akkor visszkapjuk a lencsék leképezési törvényének általános alakját.

A lencsék felbontóképessége

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy milyen határig alkalmazható a Fermat-elv. Az interferencia és elhajlási kísérletek azt mutatják, hogy a fény hullámként terjed. A geometriai optika törvényei mindaddig alkalmazhatók, amíg a fény útjába helyezett tárgyak és eszközök (tükrök, lencsék) mérete nagyságrendileg nagyobb a fény hullámhosszával. Amennyiben az akadályok mérete összemérhetővé válik a fény hullámhosszával, akkor a geometriai optika szerinti viselkedés megváltozik, a fény már nem egyenes vonalban terjed. Úgy látszik, hogy ha a fény által befutható utak különbsége a hullámhossz nagyságrendjébe esik, akkor a fény már nem képes a legrövidebb út kiválasztására, minden más utat is bejár. Azt mondhatjuk, hogy hullámhossznyi az a méret, ami a fényvel működő eszközökkel még megkülönböztethető. Ez szab határt optikai eszközeink felbontóképességének is. A nagyításra használt optikai eszközöket (lupe, távcső, mikroszkóp) azt szeretnénk elérni, hogy két igen közeli pont képe is különálló legyen. Az optikai eszközök felbontóképességén annak a két pontnak a minimális távolságát, vagy látószöget értjük, amelynek képét még különállóan látjuk.

Vizsgáljuk meg ilyen szempontból a gyűjtőlencse felbontóképességét. Az ábra szerint legyen T_1 a gyűjtőlencse optikai tengelyén lévő tárgy pont, amelynek képe K_1 .



Vajon legalább milyen távol kell lennie az optikai tengelyen a T_2 tárgy pontnak, hogy K_1 -től különállónak lássuk? A két tárgy pont képe akkor nem látszik különbözőnek, ha a T_2 -ből induló sugarak optikai úthossza a λ hullámhossznál kisebb mértékben tér el a T_1 -ből indulókéétól. Hasonlítsuk össze a T_2XK és a T_1OK sugármenetek optikai úthosszának eltérését. Amennyiben az eltérés kisebb mint λ a két pont képét nem érzékeljük különállónak. Az úthossz különbség:

$$(\Delta t)_2 + d_1 + \Delta k + d_2 - n(d_1 + d_2) \leq \lambda$$

A szokásos közelítésekkel:

$$\frac{(h + \Delta T)^2}{2t} + \frac{h^2}{2k} - (n - 1) \left(\frac{h^2}{2R_2} + \frac{h^2}{2R_1} \right) \leq \lambda$$

Elvégezve a négyzetre emelést és rendezve:

$$\frac{h^2}{2t} + \frac{h^2}{2k} - (n-1) \left(\frac{h^2}{2R_2} + \frac{h^2}{2R_1} \right) + \frac{h\Delta T}{t} + \frac{(\Delta T)^2}{2t} \leq \lambda$$

Figyelembevéve, hogy a baloldal első három tagja a lencsetörvény miatt zérust ad összegül, valamint azt, hogy $(\Delta T)^2$ másodrendűen kicsiny, így elhanyagolható, azt kapjuk, hogy a két tárgyponthoz nem látjuk különállónak, ha

$$\frac{h\Delta T}{t} \leq \lambda$$

Felhasználva, hogy $\sin \varphi = \frac{h}{t}$

$$\Delta T \leq \frac{\lambda}{\sin \varphi}$$

Ez azt jelenti, hogy két tárgyponthoz akkor látunk különállónak, ha távolságuk legalább $\frac{\lambda}{\sin \varphi}$ Ez tehát a lencse felbontóképessége.

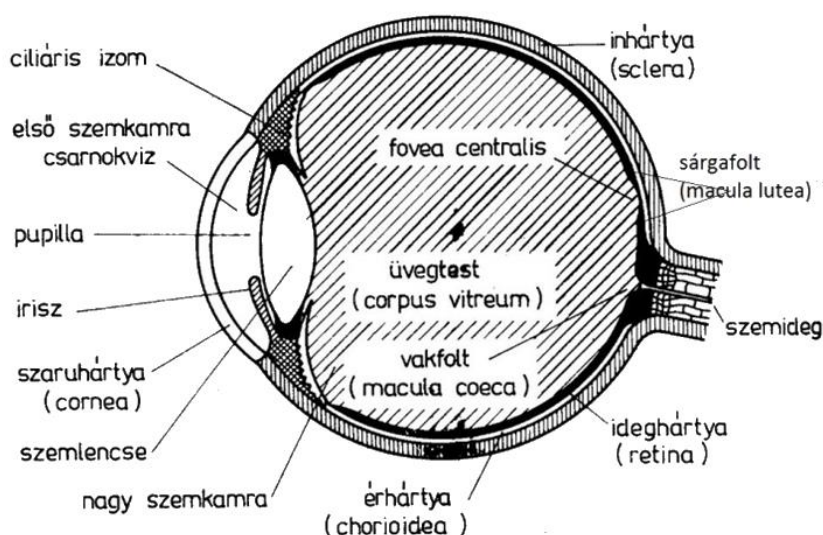
[Vissza >>>](#)

F16. Az emberi szem

A szem és a látással kapcsolatos ismeretek számtalan lehetőséget kínálnak a tantárgyak közötti koncentrációra és olyan érdekességek megemlézésére, esetleg egyszerű kísérletekkel való illusztrációra (pl. optikai csalódások), ami felkelti a tanulók kíváncsiságát és motivációt jelent a fizika tanulására. Ebben a fejezetben a szemmel, mint optikai eszközzel foglalkozunk, a látás mechanizmusaira csak érintőlegesen utalunk. Szemünk bonyolult felépítésű szerv, optikailag több törőfelületből álló lencserendszer.

A szem szerkezete

A szem felépítésével a tanulók a biológia órán megismerkednek, részeit azonban érdemes felidézni a fizika órán is, mert így jobban érthető a szem optikai működése is.



A szem jó közelítéssel gömb alakú, átmérője körülbelül 2,5 cm, alakja a belsejében uralkodó nagyjából 1,3-2,9 kPa túlnyomás következménye. Külső burkát az ínhártya alkotja, amelynek első része a teljesen átlátszó, enyhén kidomborodó szaruhártya. Az ínhártya belső felületére tapad az érhártya. A szaruhártya mögött kicsiny kamra helyezkedik el, amelyet a szintén teljesen átlátszó csarnokvíz tölt ki. Ezt a szemkamrát az érhártya folytatásaként a szem színét megszabó írisz zárja le. Az írisz közepén kör alakú, változtatható átmérőjű nyílás (pupilla) van. A pupilla reflexszerűen szűkülve és tágulva szabályozza a szembe érkező fény mennyiségét. A pupilla mögött helyezkedik el a kétszer domború szemlencse. A szemlencse törőereje a lencsét felfüggesztő szemizmok segítségével, a lencsét határoló felületek görbületének szabályozásával viszonylag tág határok között változtatható. A lencse mögötti nagyobbik szemkamrát az átlátszó üvegtest tölti ki. Az érhártya előtt található az ideghártya, amelynek az üvegtest hátsó felületén lévő része a szem fényérzékelő eleme a retina. A fényérzékelés mellett az ideghártya továbbítja a szemideg, illetve a szemidegen keresztül az agy felé a beérkező fényingereket. A retina a fény érzékelés szempontjából nem homogén. A fényhatásokra legérzékenyebb a szem tengelyébe eső része, a sárgafolt, míg a látóideg belépési pontja a vakfolt teljesen érzéketlen a

fényre. A sárgafolt közepén kicsiny bemélyedés van, ezen a részen hozza létre a szem fénytörő rendszere (a görbült szaruhártya, a csarnokvíz, és a szemlencse) a külvilág tárgyairól alkotott fordított(!) állású képet.



A vakfolt létezése egyszerűen igazolható a fenti ábrával. Hunyjuk be bal szemünket és jobb szemünkkel nézzük erősen az ábrán látható keresztet. Közelítsünk nagyjából 20 centiméternyire az ábrához, a kör eltűnik, nem látjuk, mert képe éppen szemünk vakfoltjára esik.

Megjegyzés:

- Mindenképpen érdemes rámutatni arra, hogy látásunk nem egyszerű optikai leképezés, hanem bonyolult idegrendszeri (agyi) folyamat is. Erre egyszerű példa, hogy a tárgyat nem fordított, hanem egyenes állásúnak látjuk. Agyunk a külvilág valóságához igazítja az észlelt képet. Ennek bizonyítására kísérleti személyek képfordító szemüveget kaptak. Hosszabb rövidebb idő alatt azonban ismét egyenes állású képet érzektek. Agyuk visszafordította a képet. A szemüveg levétele után a kép egy ideig ismét fordított, volt, majd a valóságnak megfelelően egyenes állásúra változott.

Térlátásunk nagyrészt annak köszönhető, hogy két szemünk kissé más képet lát. A két szemből jövő ingert agyunk dolgozza fel egységes látássá.

WWW

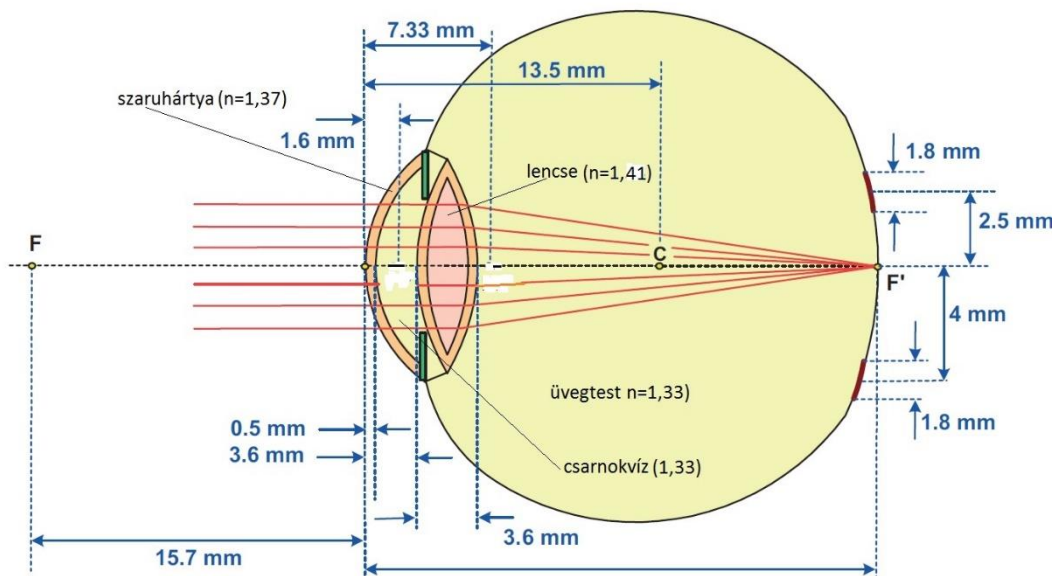
[Az idegrendszeri folyamatok érzékelésére nagyon alkalmasak a szórakoztató optikai csalódások is](#)



A retina fényérzékelő elemei a pálcikák és a csapok. A csapok a színlátásért felelősek, a fényerőre kevésbé érzékenyek. Döntően a sárgafolt kis gödrében helyezkednek el. A pálcikák nem érzékelik a színeket, nagyon érzékenyek azonban a fényintenzitásra, nagyrészt a sárgafolton kívül helyezkednek el. A csapok elsősorban a nappali, a pálcikák pedig az éjszakai látást segítik.

A szem geometriai optikája

A szem szerkezete mutatja, hogy a szem leképező rendszerként lényegében két vékony lencséből (a szaruhártya és a szemlencse) áll, valamint, hogy a tárgy és a lencserendszer által létrehozott kép nem ugyanakkora törésmutatójú közegben van, hiszen a kép az üvegtestben keletkezik. Lényeges tehát, hogy ismerjük a lencsék és szemkamrákat kitöltő anyag törésmutatóját. A csarnokvíz és az üvegtest törésmutatója megegyezik a víz törésmutatójával ($n_v = 1,33$), a szaruhártya törésmutatója $n_s = 1,37$, a szemlencse átlagos törésmutatója pedig $n_l = 1,41$. A szaruhártya mindkét felületének sugara azonos, körülbelül $R_s = 7,8$ mm. A szemlencse első felületének sugara $R_{le} = 6$ mm- től 10 mm-ig változtatható, míg a hátsó felületé jó közelítéssel $R_{lh} = 10$ mm. A szem által alkotott kép érzékelésének feltétele, hogy a kép a retinán keletkezzék. Ezt a szem a szemlencse törőerejének finom változtatásával biztosítja.



Az ábra adatai alapján meghatározható a szem leképezési törvénye és alkotórészeinek törőereje. A leképezési törvény meghatározásakor a szorosan egymás mellé helyezett vékony lencsék esetén használt eljárás gondolatmenetét (F13.) alkalmazzuk a szem törőfelületeire. Ennek megfelelően a szaruhártya két törőfelületére és a szemlencse két törőfelületére írjuk fel a lencsetörvényt (F13.) figyelembe véve, hogy a felületek két oldalán különböző törésmutatójú közeg helyezkedik el:

A szaruhártya első felületére vonatkozó leképezési törvény:

$$\frac{n_a}{t} + \frac{n_s}{k_1} = \frac{n_s - n_a}{R_s}$$

A szaruhártya hátsó felületére vonatkozó leképezési törvény:

$$\frac{n_s}{t_2} + \frac{n_v}{k_2} = \frac{n_v - n_s}{R_s}$$

A szemlencse első felületére vonatkozó leképezési törvény:

$$\frac{n_v}{t_3} + \frac{n_l}{k_3} = \frac{n_l - n_v}{R_{le}}$$

A szemlencse hátsó felületére vonatkozó leképezési törvény:

$$\frac{n_l}{t_4} + \frac{n_v}{k} = \frac{n_v - n_l}{-R_{lh}} = \frac{n_l - n_v}{R_{lh}}$$

A szemlencse felületei szorosan egymás mellett helyezkednek el, és vastagságuk kicsiny, ezért jó közelítéssel elfogadhatjuk, hogy az egymást követő felületek által létrehozott képek, mindig a következő felület virtuális tárgyai, azaz $t_2 = -k_1$, $t_3 = -k_2$, $t_4 = -k_3$. Figyelembe véve ezt, adjuk össze a leképezési egyenleteket:

$$\frac{n_a}{t} + \frac{n_v}{k} = \frac{n_s - n_a}{R_s} + \frac{n_v - n_s}{R_s} + \frac{n_l - n_v}{R_{le}} + \frac{n_l - n_v}{R_{lh}}$$

A baloldalon az első törőfelületre vonatkozó tárgy távolság és az utolsó felület képtávolsága szerepel. Ezeket a távolságokat tekinthetjük a teljes optikai rendszerhez tartozó tárgy és képtávolságnak. A jobboldalon a rendszer teljes törőereje áll, a négy tag az egyes felületek járulékát adja. A törőfelületek sugarát méterben mérve a törőerőt dioptriában kapjuk. Behelyettesítve az adatokat, azt kapjuk, hogy a szaruhártya első felületének törőereje 47, a másodiké -5, a szemlencse első felületéé 13 és 8 között változik, a hátsó felületé pedig 8 dioptria. A szem teljes törőereje pedig 60 és 65 dioptria között változhat. Valójában a szem törőereje 70 dioptriáig is növekedhet, mert a szemlencse átlagos törésmutatója is megnövekedhet. Látható, hogy a törőerő döntően a szaruhártyára koncentrálódik, a szemlencse törőereje a szaruhártyáénak csak mintegy harmad része. A képletből meghatározhatjuk a szem lencserendszerének levegőbeli (első) és üvegtestbeli (hátsó) fókusz távolságát. Az első fókusz távolságra jó közelítéssel 1, cm, a hátsóra pedig 2,2 cm adódik.

Megjegyzés:

- Amennyiben a szem leképezési törvényeinek részleteit is tárgyaljuk, akkor érdemes tisztázni, hogy a törőerő csak akkor egyezik meg a kérdéses rendszer méterekben mért fókusz távolságának reciprokjával, ha a rendszer két oldalán $n = 1$ törésmutatójú közeg van. Ekkor ugyanis a rendszer leképezési törvénye

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = D = \frac{1}{f}$$

- Amennyiben a két oldalon különböző közeg van, akkor a leképezési törvény általános alakja:

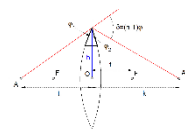
$$\frac{n_1}{t} + \frac{n_2}{k} = D = \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2}$$

- A részleteket lásd:



F13. A lencsetörvény levezetése

[Részletek >>>](#)



A szemlencse méretének változtatása során a végtelenre, vagy a tiszta látás távolságára (kb. 25 cm) fókuszálunk.

Ha a szemizmok ernyedtt állapotban vannak, akkor a szem a párhuzamosan érkező fénysugarakat gyűjti össze a retinán, így csak a távoli tárgyakat látjuk tisztán, a tárgytávolság gyakorlatilag végtelen. A szemlencse görbületének növelésével azonban elérhető, hogy a közeli tárgyakról széttartó sugarak gyűljenek össze a retinán. Mindkét esetben használhatjuk a leképezési törvényt:

$$D = \frac{n_a}{t} + \frac{n_v}{k}$$

A leképezési törvényben, csak a tárgytávolság és a szem törőereje változhat, így kiszámíthatjuk, hogy mennyit változhat az egészséges szem törőképessége.

A szemhez legközelebb eső pont, ami akkomodációval még elérhető, egészséges felnőtt szem esetén, 25 cm, ez a tiszta látás távolsága. Ekkor a legnagyobb a szem törőképessége. A legtávolabbi élesen látható tárgy távolságát közelítésben tekinthetjük végtelennek.

A közeli látás esetén

$$D_k = \frac{n_a}{t_k} + \frac{n_v}{k}$$

távolra akkomodált szemnél:

$$D_t = \frac{n_a}{t_t} + \frac{n_v}{k}$$

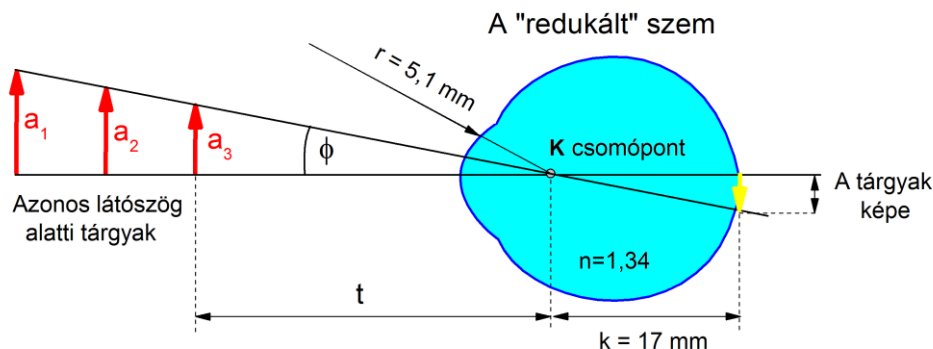
A szem dioptriájának változása a két szélső eset között:

$$\Delta D = D_k - D_t = \frac{n}{t_k} - \frac{n}{t_t} = \frac{1}{0,25} - \frac{1}{\infty} = 4$$

Ez jó közelítéssel megegyezik a szem adataiból kiszámított értékkel. Az egészséges emberi szem 4 dioptriát tud növelni a szemlencse görbületének változtatásával. Kisgyermekkorban ez még nagyobb, mivel a tiszta látás távolsága ebben a korban még 7 cm körül van. Ez majdnem 13 dioptria változtatást tesz lehetővé. Ez a nagy akkomodációs tartomány okozza, hogy kisgyermek korban a szem leképezési hibái nehezen diagnosztizálhatóak.

A redukált szem

Az optikai képalkotás szempontjából a szem a bonyolult négy törőfelületű rendszernél jóval egyszerűbb úgynevezett „redukált” szemmel is helyettesíthető.



A redukált szem egyetlen törőfelülettel rendelkező homogén test, törésmutatója $n = 1,34$, a törőfelület görbületi sugara $r = 5,1$ mm, görbületi középpontja a K csomópont, ami 17 mm-re helyezkedik el a sárgafolttól. A redukált szem segítségével a képalkotás magyarázata és követése, amint az ábra mutatja, nagyon leegyszerűsödik. A középiskolai tanulócsoportok többségében elegendő a redukált szem segítségével tárgyalni a szem képalkotását. A redukált szem bár lényegesen egyszerűsíti a számításokat, rámutat a szem képalkotásának talán legfontosabb vonására, arra, hogy a tárgy és a kép különböző törésmutatójú közegben keletkezik.

Fontos tudatosítanunk, hogy a különböző távolságban lévő tárgyakról ugyanakkora képet kapunk, ha a látószögük megegyezik.

Így a leképezési törvénynek mindenképpen a

$$D = \frac{n_a}{t} + \frac{n_l}{k}$$

alakját kell alkalmaznunk, a törőerő azonban az egyetlen gömbfelülettel határolt törőközegre vonatkozó

$$D = \frac{n_l - n_a}{R}$$

összefüggéssel fejezhető ki ($n_l = 1,34$). Mivel a levegő törésmutatója $n_a \approx 1$, a leképezési törvényt az

$$\frac{1}{t} + \frac{n_l}{k} = \frac{n_l - 1}{R}$$

alakra hozhatjuk. Ennek alapján a szemlencse levegőbeli fókusztávolsága:

$$f_a = \frac{R}{n_l - 1}$$

lencsebeli pedig

$$f_l = \frac{n_l R}{n_l - 1}$$

A szem leképezési hibái

A redukált szem-modell alapján egyszerűen tárgyalhatók a szem közismert leképezési hibái, a rövid- és a távollátás, valamint az akkomodáció időskori csökkenése. A rövidlátó szem esetén a végtelenre akkomodált szem lencsebeli fókusz távolsága nem a retinára, hanem eléje esik, mert a szemgolyó a normálhoz képest megnyúlt. Emiatt a tárgytávolságot rövidre kell választani, hogy a kép a retinán keletkezzék. A rövidlátáson szórólencsével segíthetünk, ami a lencse és a szem eredő fókuszpontját a retinára viszi.

A távollátó szem a normálnál rövidebb, ezért az üvegtestbeli fókuszpontja a retina mögé kerül. A távollátáson gyűjtőlencsével javíthatunk, ami megnöveli a fókusz távolságot.

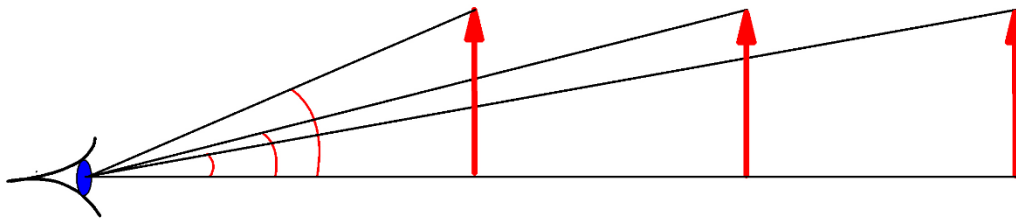
Idős korban a szem akkomodációja romlik, illetve teljesen meg is szűnik. Az ilyen szem csaknem mindig távollátóvá válik. Eredetileg rövidlátó szem esetén azonban az olvasáshoz esetleg elhagyható a korábban viselt negatív fókusz távolságú szemüveg.

[Vissza >>>](#)

F17. A látószőgnagyítás, az egyszerű nagyító (a lupe)

A gyakorlatban az apró tárgyak megfigyelésére sokféle eszközt (lupe, mikroszkóp, távcső) használunk. Az eszközök működésének megértése fontos a gyakorlati felhasználás számára, és a magyarázatukhoz szükséges fizikai elvek egyszerűek. A tanítási tapasztalatok mégis azt mutatják, hogy még a lupe nagyításának megértése is nagy nehézséget okozhat. A problémák gyökere minden bizonnyal az, hogy a nagyítás a lencse tulajdonságai mellett, a megfigyelő szemétől, a szem akkomodációjától is függ. További problémák forrása, hogy mélyen meg kell értetni a diákokkal a virtuális kép fogalmát, valamint azt, hogy a jól ismert nagyítás definíció mellett, érdemes bevezetni a szőgnagyítás fogalmát is. A kép és tárgyméret hányadosával értelmezett nagyítást szokás laterális, vagy oldalnagyításnak is nevezni a szőgnagyítástól való pontosabb megkülönböztetés érdekében.

A látószög a tárgy szélső pontjairól a szemünkbe érkező fénysugarak és az optikai tengely által bezárt szög (ábra). Azonos távolságból a kisebb tárgyakat kisebb látószög alatt látjuk. A tárgyaknak csak azokat a részleteit látjuk tisztán, amelyeknek látószöge nagyobb, mint 1 ívperc: ez szemünk felbontóképessége. A tárgy látószögét megnövelhetjük, ha közelebb hozzuk szemünkhöz, azaz a tárgytávolságot csökkentjük. Jól megválasztott optikai eszközökkel, legegyszerűbben egy nagyítóval, a látószög megnövelhető.

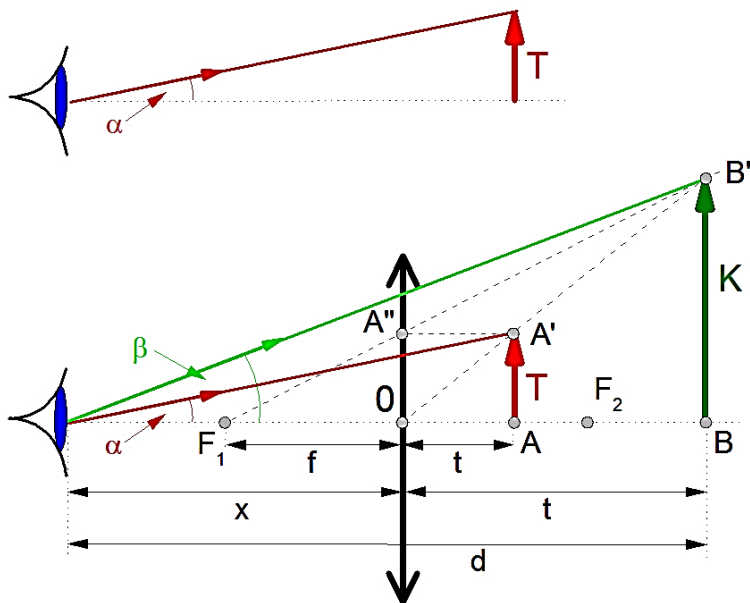


Kis tárgyak részleteit gyűjtőlencsével felnagyíthatjuk, jobban megfigyelhetjük. A gyűjtőlencsét ilyenkor egyszerű nagyítóként (lupe) használjuk. A nagyítóként használt lencsén át szemünkkel a lencse fókuszán belül lévő tárgy egyenes állású, nagyított, virtuális képét nézzük.

A lencsével a tárgy látószögét nagyítjuk (ábra). Az N_{sz} szőgnagyítás a nagyító eszközzel alkotott kép β látószögének és a szabad szemmel nézett tárgy eredeti α látószögének a hányadosa. (Itt vegyük figyelembe, hogy a szabad szemmel nézett tárgy látószögén mindig a tiszta látás d távolságából nézett tárgy látószögét értjük.)

$$N_{sz} = \frac{\beta}{\alpha}$$

A szőgnagyítás azonban függ attól is, hogy szemünket hová akkomodáljuk. Ha a lencse által alkotott virtuális képet a szem számára „legkényelmesebben” a tiszta látás távolságából szemléljük és a kis nyílásszögre vonatkozó közelítés felhasználásával a szögeket tangensükkel helyettesítjük, akkor az ábra szerint:



$$N_{sz} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{\frac{K}{d}}{\frac{T}{d}} = \frac{K}{T}$$

A szögnagyítás tehát megegyezik a szokásos értelemben vett (laterális) nagyítással. (Ez a kisszögű közelítés miatt természetes is, hiszen definíció szerint mind a tárgyat, mind a képet d távolságból nézzük.) Felhasználva, hogy az ábra szerint

$$OA = t, OB = k, \text{ és } OF = f$$

a nagyítás a tárgy kép és fókusz távolsággal az $F_1B'B$ és $F_1A''O$ háromszögek hasonlósága alapján a

$$\frac{K}{T} = \frac{k + f}{f} = \frac{d - x + f}{f} = \frac{d}{f} + 1 - \frac{x}{f}$$

alakban fejezhető ki.

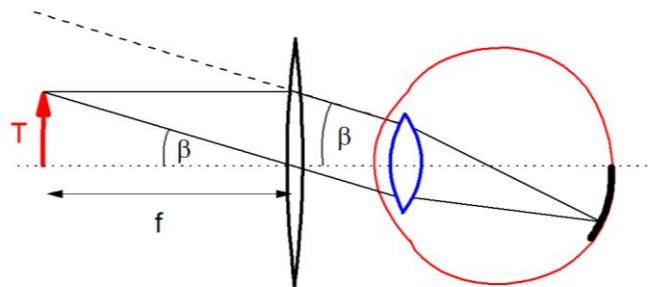
Figyelmeztetés! A kép, és fókusz távolság most a megfelelő távolság abszolút értékét jelenti a képszerkesztést mutató ábra jelölései szerint. A szerkesztés mutatja, hogy a fókuszon belüli tárgyról a lencse virtuális képet alkot.

A nagyításra kapott eredményben szerepel a szem és a lencse távolsága, azaz látszik, hogy a nagyítás függ szemünk helyzetétől is. Leolvasható, hogy adott lencse esetén a nagyítás akkor maximális, ha $x \approx 0$, vagyis, ha a lencsét közvetlenül szemünk elé tesszük. Ebben az esetben a nagyítás (és egyben a szögnagyítás):

$$N_{sz} = \frac{K}{T} = \frac{d}{f} + 1$$

Szemlélhetjük azonban a lencse által alkotott képet végtelenre akkomodált szemmel is. Ekkor a tárgyat a lupe fókusz síkjába kell tenni, hogy a szemhez párhuzamos nyaláb érkezzék. A lencse

természetesen ilyen esetben nem alkot képet. A szem lencserendszere miatt azonban mégis létrejön leképezés, a fénysugarak a retinán egyesülnek.



A szögnagyítás az ábra alapján:

$$N_{sz} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{\frac{T}{f}}{\frac{T}{d}} = \frac{d}{f}$$

Az ilyen elrendezésnek nagy előnye, hogy a nagyítás független a szem helyzetétől, ugyanakkor a szem hosszabb idejű végtelenre akkomodálása fárasztó lehet. A nagyítás a fókusztávolság csökkentésével növelhető, azonban ezzel együtt óhatatlanul nő a látószög és egyre kevésbé teljesül a lencsére vonatkozóan a kis nyílásszögre vonatkozó feltétel, a kép torzulhat.

Kísérlet: a lupe nagyításának meghatározása

Az oktatásban a lupe jól felhasználható tanulókísérlethez is. A gyűjtőlencsét kézbe véve a diákok tapasztalhatják, hogy látszólagos képet csak optikai eszközön átnézve észlelhetünk. Érdeemes megfigyelni, hogy a szemünktől és a tárgytól is viszonylag távol tartott gyűjtőlencse fordított állású képet hoz létre, a kép csak akkor válik egyenes állásúvá, amikor a tárgy a fókuszon belülre kerül. Helyezzük el a tárgyat a lencse fókuszához közel úgy, hogy az éles képet a tisztánlátás távolságában lássuk. A gyűjtőlencse nagyítása könnyen meghatározható, ha ismerjük a fókusztávolságát. A tárgytávolságot közelítőleg egyenlőnek vehetjük a fókusztávolsággal (cm-ben), a képtávolságot pedig a tisztán látás távolságával. A nagyítás innen már könnyen kiszámolható:

$$N = \frac{25}{f}$$

A gyűjtőlencse fókusztávolsága egyszerűen meghatározható úgy, hogy a Nap párhuzamos sugarait összegyűjtjük vele egy lapra.

Szakkörön, tagozatos osztályokban érdeklődő diákok számára elmondható, hogy a látószög nagyítását tovább lehet növelni több, egymáshoz képest megfelelően elhelyezett optikai eszközök, azaz optikai rendszerek segítségével. Ilyenkor többnyire az egyik eszköz által előállított kép a másik eszköz tárgya lesz. A célnak megfelelően kell megválasztani az alkalmazott lencsék fókusztávolságát és egymáshoz való helyzetét.

[Vissza >>>](#)

F18. A mikroszkóp

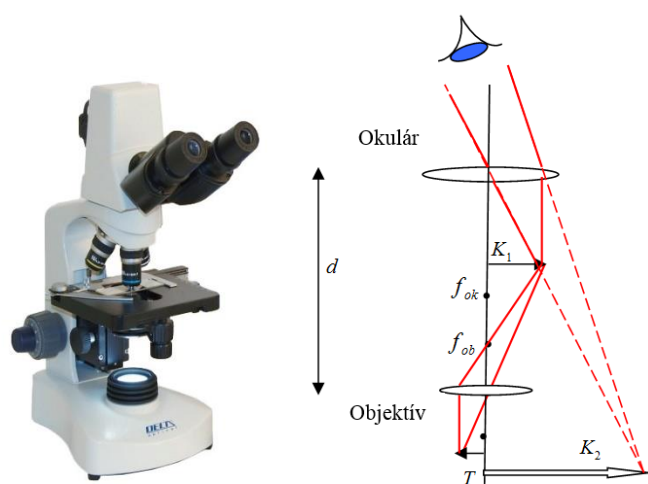
A mikroszkópot akkor használjuk, ha közeli, de kisméretű tárgyakat szeretnénk láthatóbbá tenni, és az egyszerű nagyítónál sokkal nagyobb nagyítást szeretnénk elérni. A mikroszkópban egyszerű lencserendszereket alkalmazunk, azonban a lencsék közötti távolság nem hanyagolható el, a lencsék nincsenek szorosan egymás mellett, ezért a fókusz távolságok reciprokos összeadási törvénye (Szorosan egymás mellé helyezett vékony lencsék eredő fókusz távolsága: [F14.](#)) nem érvényes. A képalkotás a lencsék által egymás után létrehozott képek megszerkesztésével követhető. Az első lencse által létrehozott kép a második lencse tárgya. Mind a mikroszkóppal, mind a távcsövekkel látszólagos képet hozunk létre, a valódi képet a az eszközbe belenézve szemünk hozza létre a retinán.

Nagyítás mikroszkóppal

A mikroszkópban két domború lencse úgy van egymáshoz képest elhelyezve, hogy az egyik lencse által felnagyított képet a másik lencse tovább nagyítja. A tárgyhöz közelebb eső objektív lencse a tárgylemezen lévő tárgyat felnagyítja, és mi ezt a nagyított képet nézzük az okulár lencsén, mint egyszerű nagyító (lupén) keresztül.

A mikroszkóp használatáról, szerkezetéről érdemes néhány szót szólni az órán, és amennyiben van az iskolában mikroszkóp, érdemes bemutatni is. Gyerekek számára használható egyszerű mikroszkóp kapható sokszor a játékboltokban is.

A T tárgyat az objektív lencse alatti tárgyasztalra kell helyezni. A két lencse egymáshoz képest rögzítve van az úgynevezett tubusban (d a tubus hossza), a lencsék a mikroszkóp élesre állításakor csak együtt mozgathatóak. (Csekély mértékben az okulár helyzete a finombeállítás miatt változtatható.)

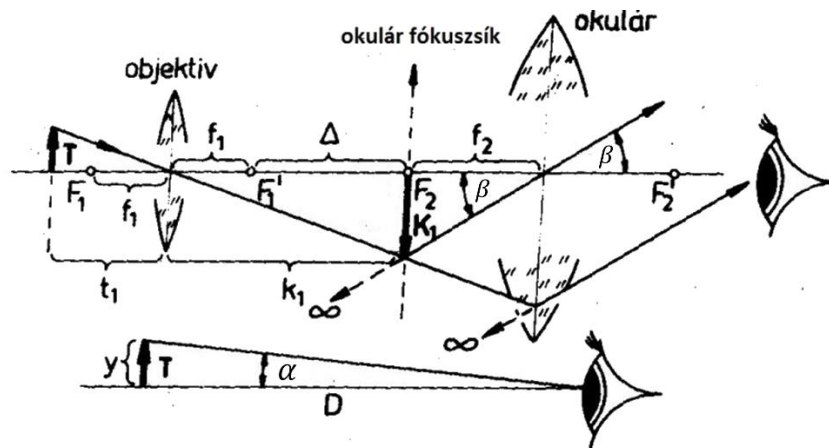


A tubus mozgatásával a lehető legélesebb képet kell megkeresnünk, majd ezután az okulár lencsével tovább élesíthetünk.

A fenti ábrán látható vázlatos sugármenettel megmutatjuk, hogy a tárgyasztal az objektív lencse egyszeres fókusz távolságán kívül, de a kétszeres fókusz távolságán belül van, így a tárgyról az objektív valódi, fordított képet hoz létre (K_1). A két lencse a tubusban olyan távolságra van rögzítve, hogy ez a kép az okulár lencse fókuszán belül, de a fókuszhoz közel keletkezzék. Ez a kép lesz az okulár lencse tárgya, amiről az nagyított, virtuális, fordított állású képet hoz létre (K_2). Hívjuk fel a tanulók figyelmét, hogy ez a kép az eredeti tárgyhoz képest fordított állású. Ezt látjuk végül, ha belenézünk a mikroszkópba.

A mikroszkóp nagyítása a két lencse nagyításának szorzata: $N_m = N_{ok} \cdot N_{obj}$. Az objektív lencsék szokásos nagyítása 10-100-szoros, az okulároké pedig 10-20-szoros. Így a mikroszkóppal elérhető teljes nagyítás 100-2000-szeres lehet.

A szőgnagyítás, ahogyan a lupe szőgnagyítása is, függ a szem helyzetétől, attól, hogy a tiszta látás távolságára, vagy végtelenre akkomodált szemmel nézzük a képet. Végtelenre akkomodált szem esetén az objektív által létre hozott valódi képnek az okulár fókusz síkjában kell keletkeznie.

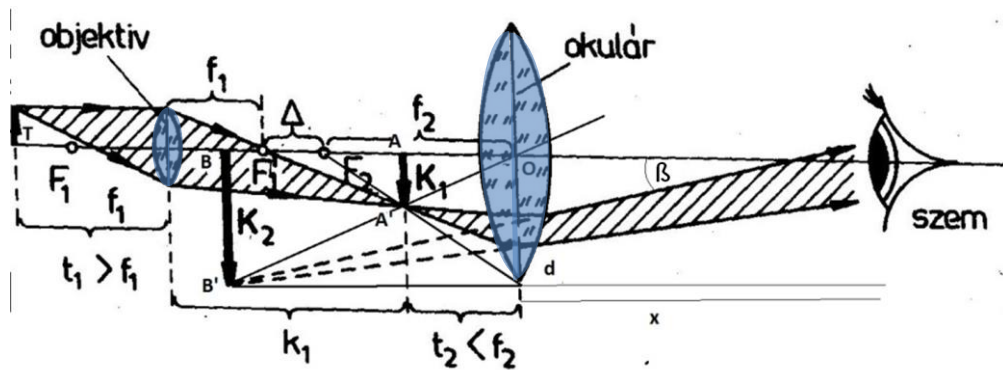


Az ábra alapján és a lupe esetén nyert képletek felhasználásával egyszerűen meghatározható a szőgnagyítás: α

$$N_{sz} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{\frac{K_1}{f_2}}{\frac{T}{d}} = \frac{d K_1}{f_2 T} = \frac{d k_1 - f_1}{f_2 f_1} = \frac{d \Delta}{f_2 f_1}$$

ahol Δ az úgynevezett optikai tubushossz. Az optikai tubushossz a tényleges tubushossznál a fókusz távolságok összegével rövidebb.

Amennyiben a végső képet a tiszta látás távolságában kívánjuk szemlélni, akkor az okulárt kissé beljebb toljuk, hogy a kép az okulár fókuszpontján belülre essék.



A felső ábra mutatja a mikroszkóp használatát a tiszta látás távolságára akkomodált szemmel (a sátozott sáv a képalkotásban résztvevő nyalábot mutatja). Ha szemünk közvetlenül az okulárlencsénél van, azaz $x = 0$, tehát az okulárlencse által alkotott K_2 kép távolsága az okulártól d , akkor:

$$N_{sz} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{\frac{K_2}{d}}{\frac{T}{d}} = \frac{K_2}{T} = \frac{d}{t_2} \frac{K_1}{T}$$

Az okulárlencse laterális nagyításának felhasználásával:

$$\frac{K_1}{T} = \frac{k_1 - f_1}{f_1}$$

ahol az ábra alapján:

$$k_1 = \Delta + f_1 + f_2 - t_2$$

Az okulárlencse tárgyátvolsága az

$$\frac{1}{t_2} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f_2}$$

lencsetörvényből kifejezhető (az okulárlencse virtuális képet alkot, ezért a d képtávolság negatív):

$$t_2 = \frac{f_2 d}{f_2 + d}$$

Beírva ezeket a szögnagyítás kifejezésébe:

$$N_{sz} = \frac{d(f_2 + d)}{df_2} \frac{\Delta + f_1 + f_2 - \frac{f_2 d}{f_2 + d} - f_1}{f_1} = \frac{(d + f_2)(\Delta + f_2)(f_2 + d) - f_2 d}{f_1 f_2 (d + f_2)}$$

$$N_{sz} = \frac{\Delta d}{f_1 f_2} + \frac{\Delta + f_2}{f_1}$$

Megjegyzés:

- A mikroszkóp lencségei az okulár és az objektív is általában nem egyetlen lencse, hanem maga is lencserendszer. Ennek részletezése azonban középiskolai szinten teljesen felesleges. Annyit azonban érdemes elmondani, hogy a mikroszkóp lencserendezereit

úgy tervezik, hogy a leképezési hibákat meghatározott tárgy, képtávolság párra kiküszöböljék. Ez azonban megszabja a mikroszkóp optikai tubushosszát. Ez a tubushossz határozza meg a lencse foglalaton feltüntetett $\frac{\Delta}{f_1}$ értéket. Ez azt jelenti, hogy az objektívek csak a megfelelő tubushosszat biztosító mikroszkópban használhatóak. Különböző típusú mikroszkópok között nem cserélgethetőek.

[Vissza >>>](#)

F19. Távcsövek

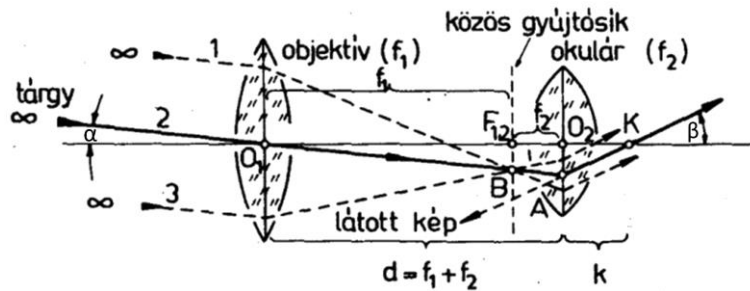
Távcsövet, illetve látcsövet akkor használunk, amikor nagyméretű, de távoli tárgyak részleteit kívánjuk megfigyelni. A nagyon távoli tárgyak látószöge annak ellenére kicsiny, hogy maga tárgy igen nagy is lehet. A mikroszkóphoz hasonlóan a távcsövekben is egyszerű lencserendszerek vannak, a lencsék közötti távolság azonban most sem hanyagolható el, a lencsék nincsenek szorosan egymás mellett, ezért a fókusz-távolságok reciprokos összeadási törvénye (Szorosan egymás mellé helyezett vékony lencsék eredő fókusz-távolsága: [F14.](#)) nem érvényes. A képalkotás a távcsövekben is a lencsék által egymás után létrehozott képek megszerkesztésével követhető. Az első lencse által létrehozott kép a második lencse tárgya. A távcsövek két típusba sorolhatóak, a csillagászati vagy Kepler-féle távcsövek alkotják az egyiket, Galilei- vagy földi távcsövek (látcsövek) a másikat. A Kepler-távcső fordított állású valódi képet hoz létre, a Galilei-távcső pedig virtuális egyenes állásút. A távcsövek képalkotásának értelmezésében kulcsszerepe van az úgynevezett teleszkopikus sugármenetnek. A teleszkopikus sugármenet azt jelenti, hogy mindkét távcső típus a távolról ráeső párhuzamos sugárnyalábot párhuzamos sugárnyaládba viszi át, önmagában képet nem alkot, az észlelt kép szemünk lencserendszerének köszönhető. A távcsöveget elhagyó sugárnyaláb és az optikai tengely által alkotott szög azonban nagyobb, mint a beeső nyalábé, így a távcsövek alapvetően a szögnagyítást szolgáló eszközök.

Megjegyzés:

- Mindkét típusú távcső jól használható véges tárgytávolság mellett és a tisztalátás távolságára akkomodált szemmel is. A sugármenet ilyenkor már nem teleszkopikus, és a kép élesre állításához a két lencse távolságán is változtatni kell. A következőkben azonban csak a teleszkopikus sugármenetekkel alkotott leképezéssel foglalkozunk.
- A szögnagyításra használt eszközöket (lupe, mikroszkóp, távcsövek) rövid vagy távollátó szem esetén szemüveg nélkül kell használni, a műszer mindig beállítható a tárgytávolság vagy a tubushossz változtatásával, hogy a kép a szemszámára optimális tiszta látási távolságba kerüljön. Asztigmias szem esetén azonban szükséges az asztigmia korrekciója.

A Kepler- vagy csillagászati távcső

A Kepler-féle távcső felépítése hasonlít a mikroszkópéra, szintén két gyűjtőlencséből (lencserendszerből) az objektívból és az okulárból áll, melyeknek, távolsága egymástól olyan, hogy az objektív képoldali fókuszpontja egybeesik az okulár tárgyoldali fókuszpontjával (ábra a következő oldal tetején). A Kepler-távcső optikai tubushossza tehát zérus. A távcső távoli, égi objektumok megfigyelésére alkalmas. A távoli csillagokról jövő párhuzamos fénysugarat az objektív lencse a fókusz síkban gyűjti össze. Ilyen értelemben azt mondhatjuk, hogy a távcső a fókusz síkban állítja elő a távoli égitest képét. A tárgylencse a fókusz síkjában kicsinyített valódi képet állít elő a megfigyelt távoli égitestről. Ezt a képet szemléljük az okulárral, mint egyszerű nagyítóval.



A csillagászati távcső a távollévő tárgyakat nem nagyítja meg, de fényesebbé, így láthatóbbá teszi őket. A megfigyelt igen távoli, pontszerűnek látszó csillag, távcsővel figyelve továbbra is pontszerűnek, de sokkal fényesebbnek látjuk, mivel a D átmérőjű tárgylencse sokkal több fényt gyűjt be és továbbít a szemünkbe annál, mintha csak szabad szemmel néznénk. Így a távcsővel azok a nagy távolságban lévő csillagok is láthatóvá válnak, melyeket szabad szemmel nem láthatunk meg.

Az objektív által egy pontban összegyűjtött nyaláb az okulár lensét ismét párhuzamos nyalábként hagyja el, ezért a kép észleléséhez végtelenre akkomodált szemmel kell a távcsőbe nézni. A távcső szögnagyítását egyszerűen meghatározhatjuk, az ábra alapján:

$$N_{sz} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{\frac{F_{12}B}{f_2}}{\frac{F_{12}B}{f_1}} = \frac{f_1}{f_2}$$

Vegyük észre, hogy a Kepler-távcső fordított állású képet ad (az optikai tengely feletti tárgyról érkező párhuzamos nyaláb az okulár után az optikai tengely alól érkezik)! Emiatt a Kepler-távcsövet csak tudományos célra használjuk. A kép két képfordító prizma beiktatásával megfordítható!

Megjegyzés:

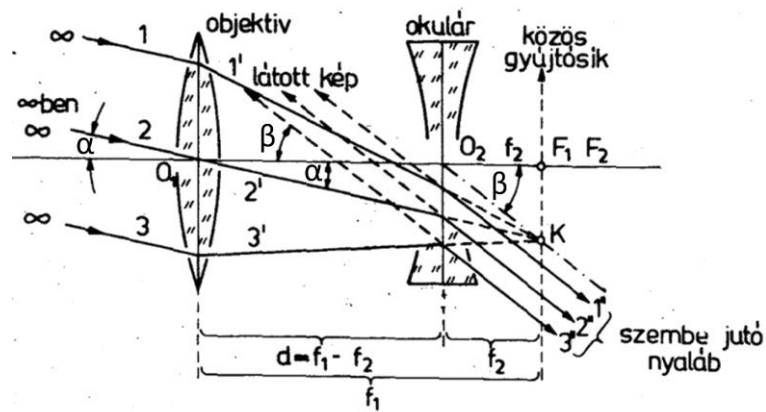
- A Kepler-távcsövek hossza a két fókusz távolság összege, emiatt a távcsövek hosszúak.

A Galilei-távcső

Bár a gyakorlati életben a diákok a Galilei-távcsővel sokkal gyakrabban találkozhatnak, mint a Kepler-félével, tárgyalását mégis csak emelt szinten fizikát tanuló osztályokban ajánljuk, mert képképzése nagyságrendekkel nehezebben érthető, mint a csillagászati távcsőé. A Galilei-távcsövet, például színházi látcsőként használjuk. Nagyítása és fényereje is kisebb, mint a Kepler-távcsőé. Objektívje gyűjtőlencse, az okulár pedig az objektívénél rövidebb fókusz távolságú szórólencse. A Galilei-távcsőbe is végtelenre akkomodált szemmel kell belenézni. Az objektív képoldali fókuszpontja most az okulárként használt szórólencse lensén túli fókuszpontjával egyezik meg, azaz a látcső hossza az objektív és az okulár fókusz távolságának különbsége. (A fókusz távolságokat most előjel nélkül értjük.)

A Galilei-távcső sugármenete is teleszkopikus. Amint az ábra mutatja, az objektívre eső párhuzamos sugárnyaláb a szórólencse mögött a K pontban egyesülne a gyűjtőlencse fókusz síkjában. (A K pontot legegyszerűbben az objektív O_1 pontján átmenő és a lensén

irányváltozás nélkül áthaladó sugárral jelölhetjük ki.) Mivel ez a sík az okulár lencsén túlra esik, a szórólencse számára virtuális tárgypontot jelent. Ez a virtuális tárgypont azonban a szórólencse fókuszsíkjában is benne van. Emiatt a szórólencsét érő párhuzamos nyaláb a szórólencse mögött is párhuzamos marad, a szórólencsét párhuzamosan hagyja el. (A lencsét elhagyó nyaláb iránya párhuzamos a szórólencse optikai középpontján és a K ponton átmenő egyenessel)



Az ábra alapján:

$$N_{sz} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{\frac{F_1 K}{f_2}}{\frac{F_1 K}{f_1}} = \frac{f_1}{f_2}$$

Nagyon fontos, hogy az ábrán mindenütt az adott távolságok abszolút értékét jelöltük, a szerkesztésnél azonban figyelembe vettük, hogy az objektív által alkotott kép az okulár számára virtuális tárgy.

[Vissza >>>](#)

F20. A fényképezőgép

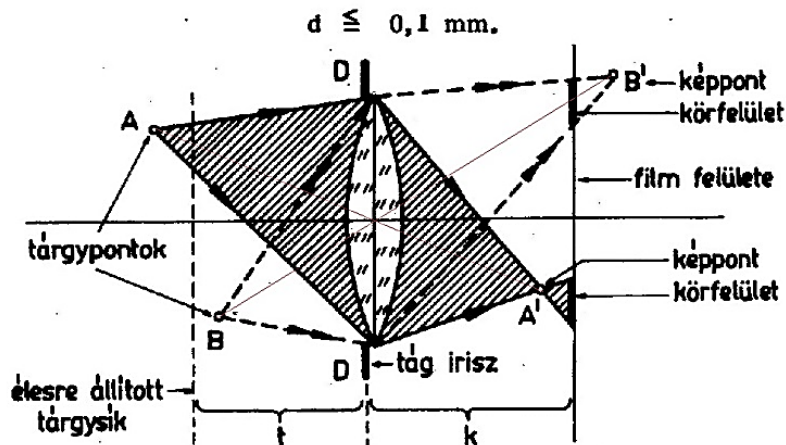
A legismertebb optikai eszköz, amelyet szinte minden diák maga is használ, a fényképezőgép. A fényképezőgép sokszínű lehetőséget kínál a geometriai optika törvényeinek alkalmazására és a kémia és elektronika felé a tantárgyi koncentrációra. Ebben a rövid fejezetben elsősorban a fényképezés alapjainak hátterét kívánjuk segíteni, nem foglalkozunk például a keresők és a fénymérők, valamint a digitális fényképezés fizikájával

A fényképezőgép működésének alapja a lyukkamera (F3.), azonban a tökéletesen fényzáró dobozban elhelyezett filmre (a digitális fényképezőgépben fényérzékeny elektronikai lemezre) nem a kamera filmmel szemközti falán fúrt kicsiny lyuk, hanem lencse, illetve lencserendszer képezi le a külvilág tárgyait. A fényképezőgép tárgyalása valamilyen szinten mindenképpen beépítendő a tananyagba. Ha a lencsetörvénnyel kapcsolatos ismeretek nem állnak rendelkezésre, akkor a lyukkamerával készíthető felvételek mellett a gyűjtőlencsék kétszeres fókusz távolságon kívüli tárgyakról alkotott képének megszerkesztése adhatja az alapvető fotózási ismeretek megalapozásához a hátteret. Természetesen sokkal könnyebb dolgunk van, ha tanulók ismerik a lencsetörvényt, és készség szinten használják a fókusz síkot a szerkesztésekben.

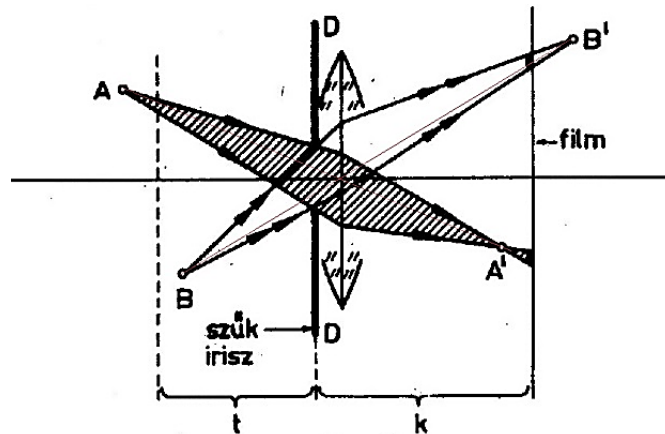
A fényképezőgép dobozának elejébe épített gyűjtőlencse (objektív) a kétszeres fókusz távolságán kívüli tárgyakról az egyszeres és kétszeres fókusz távolság között hoz létre éles képet. Adott távolságban lévő tárgy esetén a lencse mozgatásával azt a helyzetet keressük, amelyben a lencse által alkotott kép a leképezési törvénynek megfelelően a fényérzékeny filmre kerül. Tudjuk, hogy minél távolabbi tárgyakat képezünk le a lencsével, annál közelebb kerül a kép a lencse fókusz síkjához. Mivel a fényképezőgép méreteihez képest (a lencse és a film távolságához képest) többnyire távoli tárgyakat fotózunk, a fényképezés gyakorlatában gyakran élhetünk azzal a közelítéssel, hogy a fotólemez az objektív fókusz síkjában helyezkedik el.

A mélységélesség és a rekeszelés

Érdeemes adott lencse esetén a mélységélesség kérdését megvizsgálni. A kiválasztott tárgyra vonatkozóan élesre állított lencse meghatározott síkban, a tárgysíkban fekvő pontokat képezi le élesen a film síkjába. A tárgysík előtt és mögött fekvő pontoknak megfelelő képpontok a film mögé vagy elé esnek. Az ilyen képpontok felé tartó fénynyalábok a film felületét kicsiny kör alakú foltokban metszik. Ezt mutatja a következő ábrán látható sematikus szerkesztés. Minél kisebb a filmen a fényfolt, annál inkább látjuk élesnek ezeket a tárgypontokat is a fotón.



A következő ábrán ugyanez látszik, azonban az objektív képalkotásában résztvevő sugártartományt a lencse előtt elhelyezett blendével (fényrekeszsel) leszűkítettük. A fényképezőgépeken a változtatható nyílású írisz blende (diafragma) szolgál a rekeszelésre. A szerkesztés mutatja, hogy ebben az esetben a mélységélesség nagyobb, azaz az élesre állított tárgy síkjának közelében nagyobb tartományról alkot még élesnek tekinthető képet a lencse. Megállapítható tehát, hogy a lyukkameránál tapasztaltakhoz hasonlóan minél kisebb a rekesz nyílása, annál nagyobb tartományban fekvő tárgypontokról ad elfogadható élességű pontot a lencse.



A kép élességének elfogadható mértékét szemünk érzékenysége szabja meg. A szem felbontóképessége nagyjából egy szögperc. Ez durván azt jelenti, hogy a tiszta látás távolságából azokat a tárgypontokat látjuk élesnek, amelyek átmérője $d \leq 0,1 \text{ mm}$.

Megjegyzés:

- A mélységélességet érzékeltető ábrákon egyetlen megszokott nevezetes sugármenet (vékony piros vonal), a lencse optikai középpontján átmenő sugár van feltüntetve. A diafragma két szélső pontján átmenő sugármenet és a pirossal jelölt nevezetes sugár egy pontban metszi egymást, ami bizonyítja, hogy ez a metszéspont a képpont. Ebben a pontban találkozik a tárgyról kiinduló és a diafragma nyílásába eső összes fénysugár.
- A mélységélesség fogalom tökéletesen azonos a lyukkamera esetén kialakíthatóval. Ha ott részleteztük, akkor a fényképezőgép esetén a részleteket akár el is hagyhatjuk.

A fényerősség

A fénykép készítés sikere a távolság beállítása mellett többnyire a blende nyílásának és az expozíciós időnek az összehangolásán múlik. A fotópapír annál inkább elsötétedik, minél nagyobb rekesznyíláson át, minél hosszabb ideig tartó megvilágítás éri. Tapasztalható, hogy adott megvilágítás eléréséhez, jó felvétel készítéséhez, kicsiny nyílású blende nagyobb expozíciós időt, nagy nyílású pedig hosszabb expozíciós időt igényel.

A kérdés fizikai háttérének áttekintése jó alkalom lehet a fény energiájával kapcsolatos fogalmak intuitív kialakítására. Anélkül, hogy a fény energiájának pontos definícióját megadnánk, könnyen elfogadható, és a tanulókkal is könnyen elfogadtatható, hogy a fotólemez a ráeső fényenergia következtében sötétedik el. Kézenfekvő az is, hogy a fotólemez elsötétedését lokálisan a ráeső fényenergia áramsűrűsége, azaz az egységnyi felületére, egységnyi idő alatt beérkező energia szabja meg. Alapvetően tehát az energiaáram sűrűség fogalmát kell megérteni.

Foglalkozzunk azzal az egyszerű esettel, amikor valamilyen tárgyról (fényforrásról) akarunk fényképet készíteni. Ha fényképezőgép a tárgytól t távolságban van, akkor a lencsét érő energiaáram sűrűség

$$E \sim \frac{P}{t^2}$$

(Ezt az összefüggést a pontszerű, gömbszimmetrikusan sugárzó fényforrás áramsűrűségére vonatkozó gondolatmenettel fogadtathatjuk el a diákokkal.) Ebből a fényteljesítményből a lencse $A = \frac{1}{4}D^2\pi$ felületével arányos

$$\Phi = AE \sim \frac{PA}{t^2} = \frac{PD^2\pi}{4t^2}$$

rész jut fényképezőgépbe (D a lencse, illetve a blende átmérője). A film egységnyi felületére kerülő energiaáram sűrűség

$$e = \frac{\Phi}{A_k} = \frac{PD^2\pi}{4t^2 A_k}$$

ahol A_k a kép területe. A kép területe arányos a kép lineáris méretének négyzetével (K^2), továbbá tudjuk, hogy a tárgy és a kép geometriailag hasonló egymáshoz, tehát a kép és a tárgy területének arányára fennáll, hogy $N^2 = \frac{A_k}{A_t}$, ahol $N = \frac{k}{t}$ a nagyítás. Mivel a fényképezőgépekben a k képtávolság adott, és jó közelítéssel megegyezik a lencse f fókusz távolságával, a fényáram sűrűség az

$$e = \frac{\pi P}{4 A_t} \left(\frac{D}{f}\right)^2$$

összefüggéssel adható meg. Látható, hogy ez teljesen nyitott blende esetén a tárgy egységnyi felületéről kisugárzott fényteljesítmény $\frac{P}{A_t}$ mellett csak a lencse átmérőjének és fókusz távolságának hányadosától függ. A $\frac{D}{f}$ arány a lencsék ún. viszonylagos (relatív) nyílása,

az arány négyzete pedig definíció szerint a lencse fényereje. Adott tárgy esetén annál erősebb a kép megvilágítása, minél nagyobb a lencse fényereje.

A fényképezőgépek lencséjén szokásosan a relatív nyílás $\frac{f}{D}$ reciprokát tüntetik fel. Annál fényerősebb a lencse, minél kisebb ez az arány.

[Vissza >>>](#)

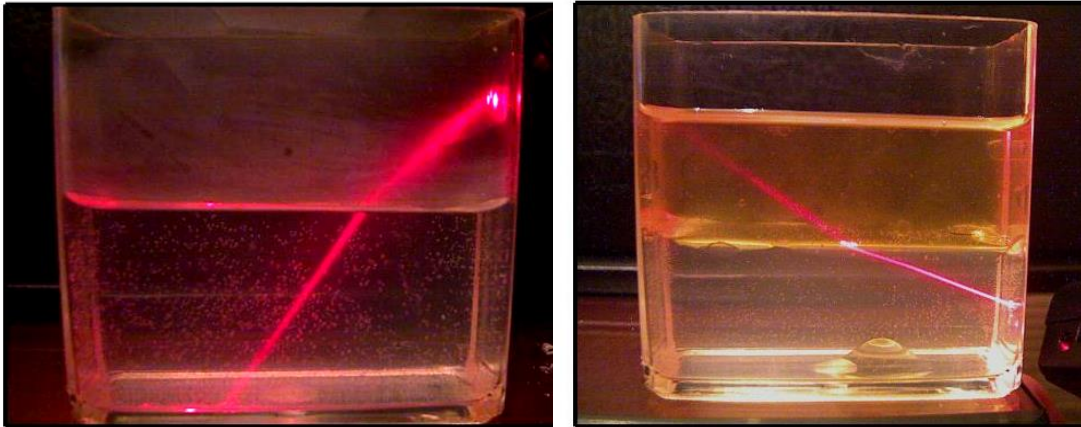
F21. Tanulságos feladatok a geometriai optika tárgyköréből

Geometriai optikából a fiatalabb korosztály számára megfigyelésre, kísérletezésre alapuló, kevesebb matematikai készséget igénylő tanulságos feladatokat adhatunk.

Emelt szinten már a matematikai ismereteket, grafikus ábrázolást igénylő bonyolultabb problémákat is felvethetünk annál is inkább, mert az emelt szintű érettséginek a geometriai optika is része.

Fénytörés

1) A bal oldali képen vízzel félig töltöttük az üvegcádba felülről ferdén beeső erős fénynyaláblátható. A fénynyaláb a vízfelszínen megtörik, a levegőből a vízbe belépve kissé megváltoztatja irányát.



- *A fénytörésről tanultak alapján magyarázd el, mikor, milyen módon törik meg a fény! Az első fotón vonalzóval végzett mérések alapján határozd meg a víz (levegőre vonatkoztatott) törésmutatójának értékét!*

A jobb oldali kép készítése előtt a víz tetejére olajat öntöttünk. Az olaj és a víz nem keveredik, az alul elhelyezkedő vizet és a tetején úszó olajat éles határfelület választja el. A fénysugarat most oldalról ferdén felfelé irányítottuk a határfelületre. A fotó mutatja, hogy a határfelületen a vízből az olajba átlépő fénysugár ismét megtörik.

- *A fotó alapján állapítsd meg a víz és az olaj mechanikai és optikai sűrűségének viszonyát!*

Szappanhártya tükrök

A bemutatott három fotó közül az első egy teásdoboz szájára feszülő szappanhártyát mutat, amin látszik a doboz előtt álló, égő gyertya tükröképe.

A második kép azután készült, hogy a szappanoldatba merített szívószállal átszúrtuk a hártyát és a dobozból kevés levegőt kiszívtunk.

A harmadik kép készítése előtt a szívószállal levegőt fújtunk a dobozba (nemcsak az előzőleg kiszívott levegőt pótoltuk, hanem annál többet fújtunk be).



- *Magyarázzátok és a képszerkesztéseknél használt vonalas rajzokkal szemléltessétek a fotókon látható tükörképeket!*

Fényforrások és árnyékok

A mellékelt rajzon bejelöltük két pontszerűen világító lámpa (L_1 és L_2) helyzetét. Vajon hol lehet, és mekkora az a vonalszerű akadály, amely a rajz jobb szélén elhelyezett ernyőre a bejelölt árnyékot veti?

- *Az egyenesen terjedő fénysugarak segítségével szerkeszd meg az akadályt!*



Sötét, világos

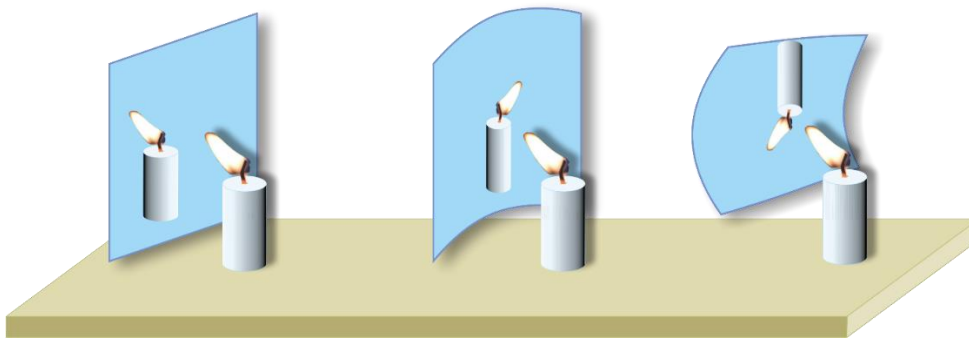
A mellékelt fotón látható vízzel telt pohár mögött a háttér félig fekete, félig fehér. A poháron keresztül nézve (amint a fotó is mutatja) a háttér fordítottan látszik.



- *Készíts felülnézeti rajzot, és magyarázd el sugármenetek segítségével a jelenséget!*
- *Magyarázd meg (felülnézeti rajzon, a sugármenetek eltiütésével) a fotón látható érdekes törési jelenséget!*

Hengertükör

Az ábrásor meglepő kísérletet illusztrál:



A krómozott fémlemez fényes felülete tükörként viselkedik. Ha a lemezt 90 fokkal elfordítjuk, a kép nem változik.

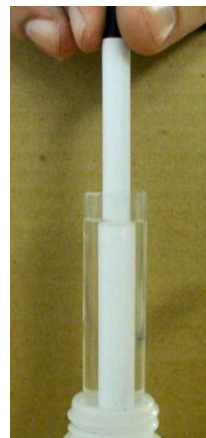
A homorúra hajlított felület is ad tükörképet. Ha ezt a görbe tükröt 90 fokkal elforgatjuk, a tükörkép 180 fokot fordul el.

- *Magyarázd meg a jelenséget!*

Milyen széles a rúd?

A fényképfelvétel folyadékkal töltött üveghengerbe merített hengeres rúdról készült.

- *Becsüld meg a folyadék törésmutatóját a rúd látszólagos megvastagodása alapján!*
- *A jelenség magyarázatát szemléltesd vázlatrajzzal!*



Homorú tükör

A fotó homorú tükör előtt álló gyertyát és a képét mutatja. A tükör és a gyertya távolságát jelölje t , a tükör fókusztávolságát f !

- Melyik állítás helyes az alábbiak közül?
 - a) $t < f$
 - b) $f < t < 2f$
 - c) $t > 2f$



A mellékelt felvétel szintén az előző összeállításról készült. (Sem t , sem f értéke nem változott.)

- Módosítod-e az előbbi kérdésre adott válaszodat az újabb felvétel alapján?
- Indokold meg, miért nem egyező állású a gyertya és a képe a két fényképfelvételen?



[Vissza >>>](#)

F22. Emelt szintű érettségi mérések geometriai optikából

Üveg törésmutatójának mérése Hartl-korong segítségével (2005)

Feladat:

Határozd meg a rendelkezésre álló üveg (vagy plexi) félhenger anyagának levegőre vonatkoztatott optikai törésmutatóját!

Szükséges eszközök:

Hartl-korong, lapos, üveg vagy plexi félhenger, lézer vagy erősfényű lámpa, megfelelő áramforrással és rögzíthető foglalat (alkalmas fényforrás hiányában a mérőkísérlet néhány üvegféjű gombostű segítségével is jól elvégezhető), milliméter beosztású vonalzó, fehér papírlap.

A Hartl-féle optikai korong a geometriai optikai demonstrációs és mérőkísérletek megkönnyítésére szolgál. Az eszköz forgatható kör alakú tárcsa. A tárcsa fehér lapjára berajzolták a kör két egymásra merőleges átmérőjét és ehhez illesztve a teljes kör kerületének szögbeosztását. A tárcsa közepére különböző alakú fénytörő testek, illetve tükrök szerelhetők. A kívül álló fényforrásból (lézer, erősfényű lámpa) keskeny fénynyalábot (nyalábokat) bocsátunk a tárcsára szerelt optikai elemekre. A tükrök és fénytörő testek megváltoztatják a beeső fénysugarak eredeti irányát. A korongon lévő vonal- és fok-beosztás egyszerűen tanulmányozhatóvá teszi az irányváltást.

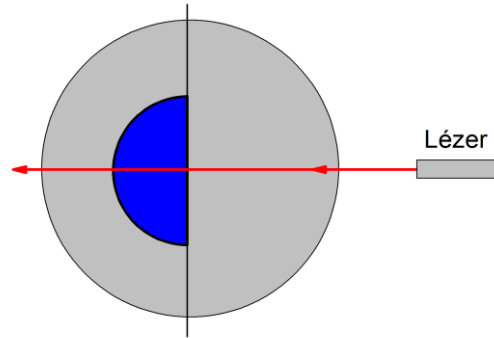
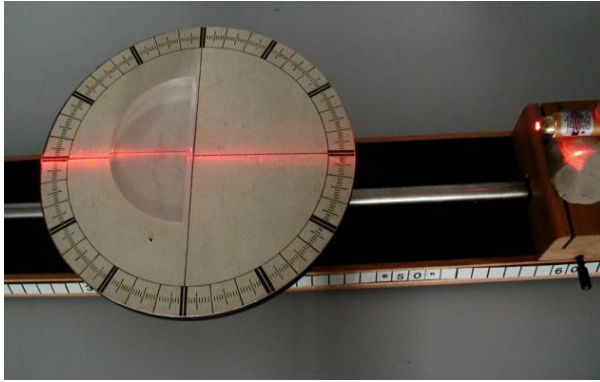
A demonstrációs Hartl-korong síkja függőleges, forgástengelye vízszintes, hogy a bemutatott jelenségeket nagyszámú hallgatóság egyszerre figyelhesse.

Az egyéni kísérletezésre, optikai mérésekre szolgáló Hartl-korong síkja vízszintes.

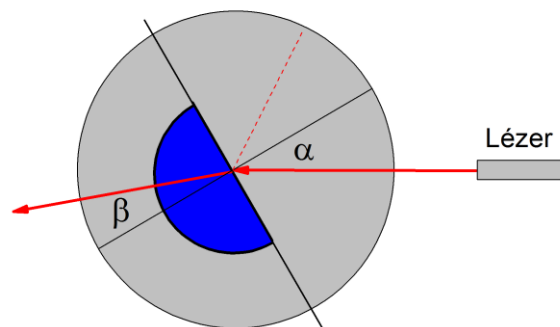
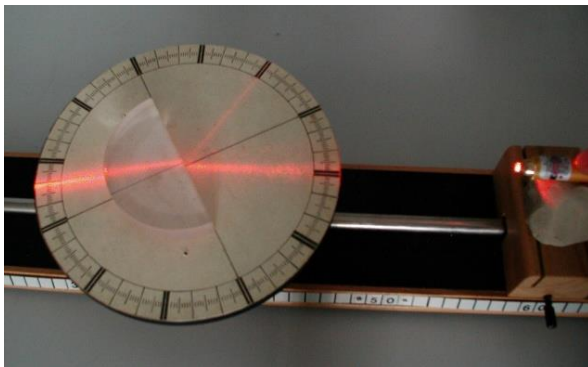
A fénytörés törvényének tanulmányozásához, a törésmutató meghatározásához a Hartl-korongra 1-2 cm vastag, üvegből vagy plexiből készített lapos félhengert szerelünk.

Kísérlet

Rögzítsük a Hartl-korong közepére az üveg félhengert! A félbevágott üveghenger sík vágási lapja illeszkedjék a korong egyik berajzolt átmérőjéhez, közepe legyen a korong középpontjában! Világítsuk meg oldalról a korongot, illetve az üveg félhengert úgy, hogy a beeső fénysugár súrolja a Hartl-korong felületét és a berajzolt merőleges átmérő mentén haladva éppen az üveg félhenger vágott lapjának alsó élének közepére essék. A súroló fény útja a korongon, az üvegtest belsejében, majd onnan kilépve is jól látszik. Ilyen beállítás esetén a fény merőlegesen esik az üvegfelületre, irányváltozás nélkül áthalad rajta, majd az üveghenger görbült oldalán szintén irányváltás nélkül jut ki a levegőbe. A beállítást a fotó mutatja. A vízszintes síkú Hartl-korongot oldalról kis „lézer-fénymutatóval” világítottuk meg. A ceruza méretű kis lézer megfelelő beállítását és pontos irányítását úgy biztosítottuk, hogy játékgyurma-ágyba nyomtuk. A fénysugár beállítását ezután nem változtattuk!



Forgassuk el a Hartl-korongot úgy, hogy a fény ne merőlegesen, hanem ferdén essék a félhenger görbületi középpontjába! Az üvegbe lépő fénysugár iránya megtörik. A fény irányváltását a határfelület normálisához, a beesési merőlegeshez viszonyítjuk. A levegőben haladó fénysugár beesési merőlegestől mért szöge (α) nagyobb, mint az üvegben haladó sugár (β) szöge. A közeghatáron a fénysugár a beesési merőlegeshez törik. A Hartl-korong szélén a fénysugár által súrolt szögbeosztás könnyen mérhetővé teszi a szögeket. Az üveggörög belsejében a fény a korong sugara mentén halad és így merőlegesen éri el a henger görbült felületét. Emiatt a korong kerületén kilépő fénysugár iránya nem változik. A Hartl-korong túloldalán lévő fokbeosztásról közvetlenül leolvasható a szög (törési szög), amivel a korong anyagába belépő fénysugár haladási iránya megváltozott a beesési merőlegeshez viszonyítva. A jelenséget a kísérletről készült fotó és rajz szemlélteti.



A Hartl-korong ismételt elforgatásával állíts be különböző beesési szögeket (α_i), és határozd meg a hozzájuk tartozó törési szöget (β_i)! A

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

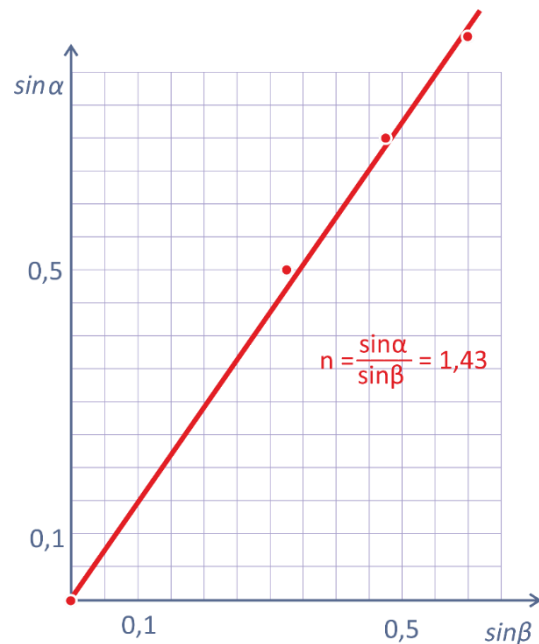
fénytörési törvényt felhasználva határozd meg a mért szögek alapján az üveg törésmutatóját (n). A fotókon bemutatott kísérleti összeállítással mért adatokat a táblázat foglalja össze.

Beesés szöge (α)	Törés szöge (β)	$\sin \alpha$	$\sin \beta$
30°	19°	0,5	0,33
45°	29°	0,71	0,48
60°	37°	0,87	0,60
75°	42°	0,96	0,67

A törési törvény igazolására ábrázoljuk grafikusán a mért szögekből származtatott szinusz értékeket. A grafikon függőleges tengelye a beesési szögek, a vízszintes tengely pedig a törési szögek szinuszát mutatja. A törési törvényt igazolja, hogy a mérési adatok pontjai az origón átmenő egyenesre illeszkednek. A törési törvény közismert alakját a grafikus ábrázolásnak megfelelően átrendezve a grafikonnak megfelelő egyenes arányosságát kapjuk:

$$\sin \alpha = n \sin \beta$$

Az üveg törésmutatóját a méréssorozat eredményét ábrázoló egyenes meredeksége adja



A domború lencse képalkotása és fókusz-távolságának meghatározása (2006)

Feladat:

Vizsgálja meg a domború lencse képalkotását! Határozza meg a rendelkezésre álló lencse fókusz-távolságát!

Szükséges eszközök:

Nagyobb átmérőjű, kb. 10-20 cm fókusz-távolságú üvegből vagy műanyagból készült gyűjtőlencse, fehér papír vagy pausz ernyő, gyertya, optikai pad 3 mozgatható lovassal, a lencse, az ernyő és a gyertya rögzítésére szolgáló befogókkal, (ha az optikai pad a tartozékokkal nem áll rendelkezésre, helyettesíthető a következőkkel: 2 db állvány dióval, lombikfogóval, a lencse rögzítését szolgáló bevágott nagyobb parafadugó), gyufa, mérőszalag.

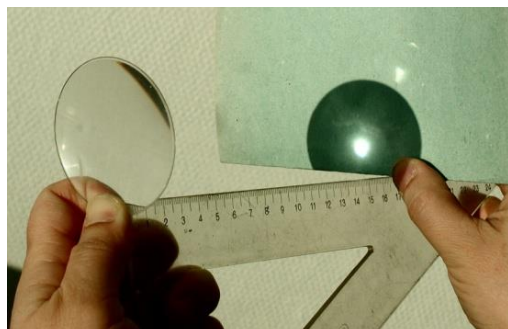
Kísérlet

1. Gyűjtőlencse fókusz-távolságának egyszerű meghatározása

A gyűjtőlencse a ráeső párhuzamos sugarakat egyetlen pontba a *fókusz-pontba* gyűjti össze. A fókuszpont távolsága a lencsétől a lencse jellemző paramétere, az ún. *fókusz-távolság*.

A) A fókusz-távolság igen egyszerűen meghatározható napfényben. A mérést a fotó szemlélteti.

A lencsét illesszük a vonalzó 0 osztásvonalára, és tartsuk merőlegesen a vonalzóra! A vonalzót irányítsuk a Nap felé (a lencsét így merőlegesen éri a párhuzamos napsugarak), és egy papírlapot a vonalzó mentén mozgatva keressük meg azt a helyet, ahol a fénysugarak a legkisebb fényes foltot adják.



Olvassuk le az ernyő helyzetét a vonalzón – ez a távolság a lencse fókusz távolsága (f). A mellékelt fotón leolvasható a lencse fókusz távolsága: $f = 17$ cm.



Figyelem! Nyáron, amikor a napsugárzás különösen erős, legyünk óvatosak a kísérlet során! A lencse ugyanis nemcsak a fénysugarakat fókuszálja, hanem a Napból jövő hősugarakat is. A fénnel együtt összegyűjtött hősugarak megpörköltethetik, esetleg fel is gyújthatják az ernyőt. Ez a jelenség adja a magyarázatát, hogy a fókuszpontot gyakran nevezik a lencse *gyújtópontjának*, a fókusz távolságot pedig *gyújtótávolságnak*.

B) A gyűjtőlencse fókusz távolságát jól megbecsülhetjük akkor is, ha nincs napsütés. Tartsuk a lencsét távolabbi világos ablak, messzebb lévő lámpa vagy fénycső felé, és egy papírlappal keressük meg a lencse mögött keletkező képet! A távoli fényforrásból érkező fénysugarak majdnem párhuzamosak, így a kép lencsétől mért távolsága alig különbözik a fókusz távolságtól. A fotó egy +5 dioptriás szemüveglencsével szemlélteti az eljárást.



A távoli tárgy képe a lencsétől kb. 20 cm távolságban fogható fel az ernyőn. A lencse fókusz távolsága közel van ehhez az értékhez ($f = 20$ cm).

A lencse dioptria-értéke (D) a méterben kifejezett fókusz távolság reciproka, azaz

$$D = \frac{1}{f} \left[\frac{1}{m} \right]$$

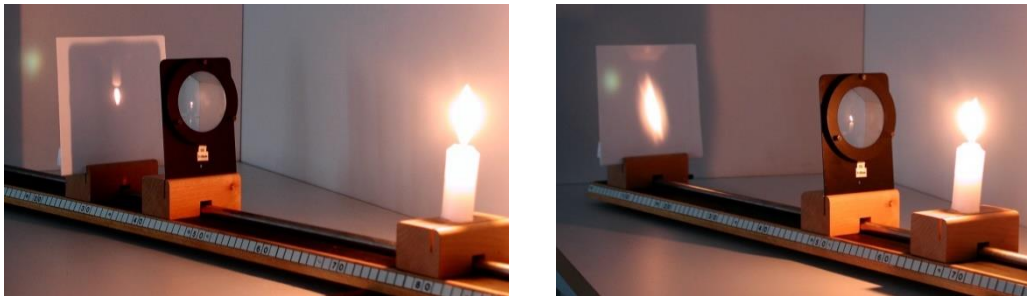
A +5 dioptriás szemüveglencse fókusz távolsága ebből számítva jól egyezik a közelítő mérés eredményével.

2. Gyűjtőlencse képalkotásának vizsgálata

A gyűjtőlencsével vetítsük ernyőre egy égő gyertya lángjának képét! A tárgyat (gyertyaláng), a lencsét és az ernyőt állítsuk ebben a sorrendben egy vonalba, ez utóbbit nevezzük *optikai tengelynek*. A beállítást megkönnyíti, ha az eszközöket optikai sínre rögzítjük. A lencse fókusz távolságát a fentebb leírt közelítő módszerek valamelyikével meghatározva, a gyertya és a lencse távolságát úgy állítsuk be, hogy a fókusz távolság kétszeresénél nagyobb legyen! Keressük meg az ernyő tologatásával a láng éles képét! Az ernyőn kirajzolódó fordított állású, kicsinyített kép a lencse képoldali fókusz távolságán kívül, de a kétszeres fókusz távolságon belül keletkezik.

Közelítsük a tárgyat a lencséhez! A fordított kép távolodik a lencsétől, mérete fokozatosan nő. A lencse kétszeres fókusz távolságában lévő tárgyról a túloldalon a kétszeres fókusz távolságban keletkezik a fordított állású, a tárggyal azonos méretű kép. A tárgytávolságot tovább csökkentve a fókusz és a kétszeres fókusz közé, a fordított kép távolodik a lencsétől és egyre nagyobb lesz. Amikor a tárgy a lencse fókuszpontjába kerül képet nem kapunk, az ernyőre eső fény alig változik a lencse helyzetének változtatásával.

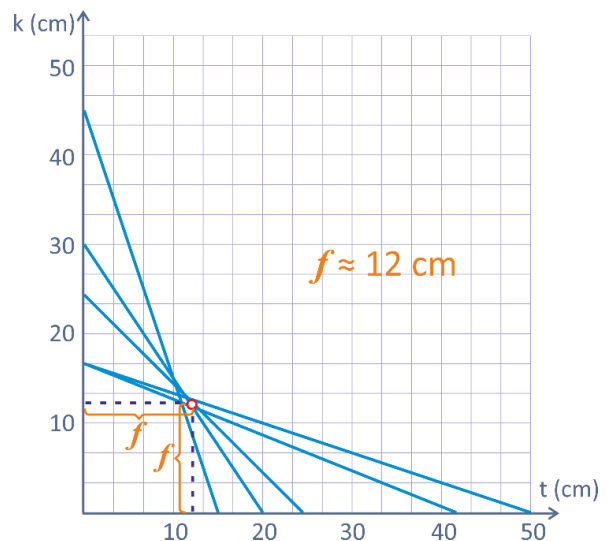
A leírt kísérletet szemlélteti a mellékelt fotó.



A kép- és tárgytávolság (k és t), valamint a lencse fókusz távolságának (f) mennyiségi kapcsolatát az ún. „leképezési törvény” adja meg:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}$$

A lencse fókusz távolsága meghatározható optikai padon beállított leképezési kísérlet-sorozat alapján is. Különböző tárgytávolságok esetén keressük meg az ernyővel az éles képet és mérőszalaggal mérjük meg az összetartozó t és k távolságokat! A leképezési törvény alapján számítsuk ki a lencse fókusz távolságát. Ugyanazzal a lencsével kísérletezve a számított fókusz távolság értékek kis hibán belül azonosak. A lencse fókusz távolságaként a számított értékek átlagát fogadjuk el.



Méréssorozatunk mért és számított adatai:

tárgytávolság	16 cm	20 cm	24 cm	42 cm	50 cm
képtávolság	45 cm	29 cm	24 cm	16 cm	16 cm
fókusz távolság	11,8 cm	11,8 cm	12 cm	11,6 cm	12,1 cm

A fókusz távolság egyszerű grafikus módszerrel is meghatározható. Derékszögű koordináta-rendszer függőleges tengelyén jelöljük be a mért képtávolságokat, a vízszintes tengelyen a tárgytávolságokat, és az összetartozó értékeket egy-egy egyenessel kössük össze! A különböző meredekségű egyenesek jó közelítéssel egy pontban metszik egymást. A metszéspont helye

mindkét tengelyre vetítve ugyanaz, értéke a lencse fókusztávolsága. A fenti mérési adatok grafikus feldolgozását az ábra mutatja.

Hagyományos izzólámpa és energiatakarékos „kompakt” lámpa relatív fénytéljesítményének összehasonlítása (2010)

Feladat:

Hasonlítsd össze mérésekkel a hagyományos izzólámpa és az energiatakarékos „kompakt” lámpa relatív fénytéljesítményét (a kibocsátott fénytéljesítmény és a felvett elektromos teljesítmény arányát)!

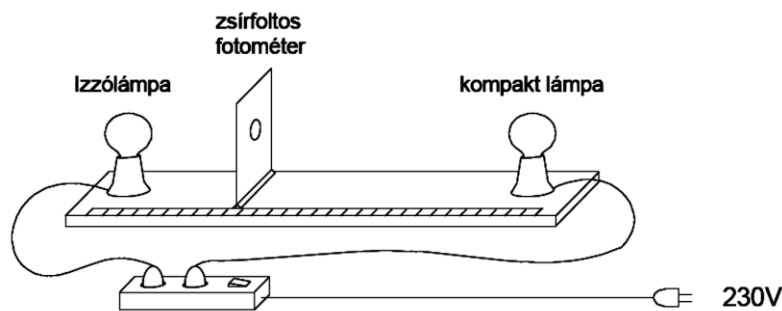
Zsírfoltos fotométer segítségével határozd meg a két lámpa távolságát, amikor fénytéljesítményük az ernyőn megegyezik! A lámpák névleges elektromos paramétereit felhasználva határozd meg a lámpák relatív fénytéljesítményének arányát!

Szükséges eszközök:

Ismert névleges teljesítményű, hálózati izzólámpa és kompaktlámpa (a lámpák gömb alakú opál-búrájúak) álló foglalatban, földelt, biztonsági dugaszú csatlakozással, kapcsolóval ellátott hálózati biztonsági elosztó aljzat, zsírfoltos fotométer, mérőszalag

A mérés leírása:

Helyezd el egymással szemben a két lámpát, kb. 1 méter távolságban, majd a két lámpa közé, a lámpákat összekötő egyenesre merőlegesen a zsírfoltos papír-ernyőt! Az összeállítást az ábra mutatja.



A lámpák bekapcsolása után az ernyő egyik oldalát az egyik, a másik oldalát a másik lámpa fénye világítja meg. A megvilágítás erőssége változik, ha az ernyőt elmozdítjuk a lámpákat összekötő egyenes mentén. (A gömb alakú opál lámpák fénykibocsátását gömbszimmetrikusnak tekinthetjük, a lámpáktól távolodva az egységnyi felületre eső fényenergia a távolság négyzetével fordított arányban változik. Így amelyik lámpához közelebb kerül az ernyő annak megvilágítása nő, a másiké, amitől távolabb kerül csökken). Az ernyő mozgatásával keresd meg azt a helyzetet, amikor az ernyő mindkét lámpából azonos megvilágítást kap, azaz, amikor az ernyőn lévő zsírfolt mindkét oldalról nézve hasonló megvilágítású, mint az ernyő többi része.

- *Mérd meg ebben a helyzetben a lámpák és az ernyő távolságát, majd a lámpák névleges teljesítményét alapul véve határozd meg a relatív fénytelsítmények arányát!*

Megjegyzés:

- A zsírfoltos fotométer egyszerű, házilag elkészíthető eszköz: talpra szerelt, fehér papírlapból készített 10×10 cm méretű ernyő, közepén kb. 10 forintos nagyságú zsírfolttal. A folt átmenő fényben világosabb, visszavert fényben sötétebb a papíreernyő környező részénél. Ha az ernyő mindkét oldalról azonos intenzitású megvilágítást kap, a folt egybeolvad az ernyővel.

Megoldás

Jelölje a hagyományos izzó fénytelsítményét Q_1 , elektromos teljesítményét P_1 , illetve a kompakt-lámpa fénytelsítményét Q_2 , elektromos teljesítményét P_2 ! A relatív fénytelsítmény a két lámpára:

$$\eta_1 = \frac{Q_1}{P_1}, \text{ illetve } \eta_2 = \frac{Q_2}{P_2}$$

Mindkét gömb alakú, opál búrájú lámpa gömb-szimmetrikusan sugároz. A kisugárzott fénytelsítmény a lámpától r távolságban a $4r^2\pi$ gömbfelületen oszlik meg. A zsírfoltos fotométer jó beállítása esetén az A területű zsírfoltra eső fénytelsítmény a két lámpától azonos, tehát

$$\frac{Q_1}{4r_1^2\pi} \cdot A = \frac{Q_2}{4r_2^2\pi} \cdot A$$

ahol r_1 az izzólámpa középpontjának, r_2 a kompakt-lámpa középpontjának a zsírfolttól mért távolsága.

Fejezzük ki mindkét lámpa esetén a fénytelsítményt a relatív fénytelsítménnyel és helyettesítsük az egyenletbe:

$$\frac{P_1\eta_1}{r_1^2} = \frac{P_2\eta_2}{r_2^2}$$

A két lámpa összehasonlítására használjuk a relatív fénytelsítmények arányát!

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{P_2r_1^2}{P_1r_2^2}$$

Az általunk vizsgált izzólámpa névleges elektromos teljesítménye (a lámpáról leolvastva) $P_1 = 75$ W, a kompakt-lámpáé $P_2 = 7$ W. A zsírfolt egyenlő megvilágítása esetén az izzólámpa mért távolsága $r_1 = 67$ cm, a kompaktlámpáé $r_2 = 33$ cm. Az adatok felhasználásával a fénytelsítmények aránya

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = 0,38$$

Eredményünk szerint a kompakt-lámpa mintegy 2,5-szeresen hatékonyabb, mint a hagyományos izzólámpa.

A víz törésmutatójának meghatározása (2010)

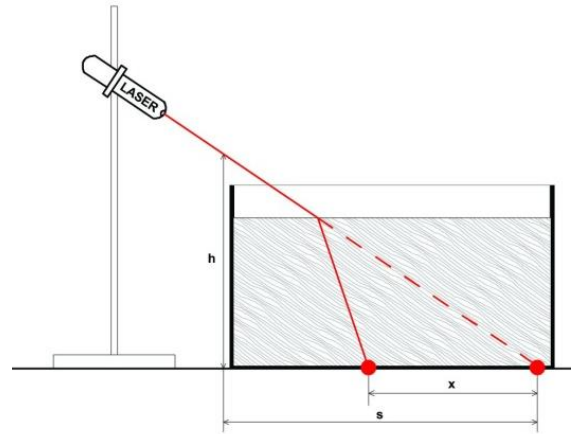
Feladat:

Állítsd össze és végezd el a leírt kísérletet! Mérési adataid alapján határozd meg a víz levegőre vonatkoztatott törésmutatóját!

Szükséges eszközök:

Vékony falú, sík aljú üveg- vagy műanyagkád (ragasztott akvárium), lézerdióával működő úgynevezett előadási lézer-fénymutató, milliméter-papír, mérőszalag, Bunsen-állvány dióval, kémcsőfogóval (a lézer rögzítésére), tálca, tiszta víz tárolóedényben.

A kísérlet összeállítási rajzát az ábra mutatja.



A mérés leírása

Az üres üvegkád alá helyezd el a milliméter-papírt! A lézert rögzítsd a befogóba és irányítsd ferdén a kád aljára. (Célszerű a lézert a lehető leglaposabb szögbe állítani úgy, hogy a fényfolt a kád oldalához közel, a milliméter-papír egy osztásvonalára essék.) A kád fényforrás felőli oldalánál mérd meg a ferde lézersugár magasságát (h) és a kád alján a fényfolt távolságát (s)!

Tölts fokozatosan egyre több vizet a kádba! Mérd a vízszint magasságát és a lézerfolt eltolódásának mértékét (x) a kád alján! (Ez utóbbit a milliméter-papír segítségével olvasd le!)

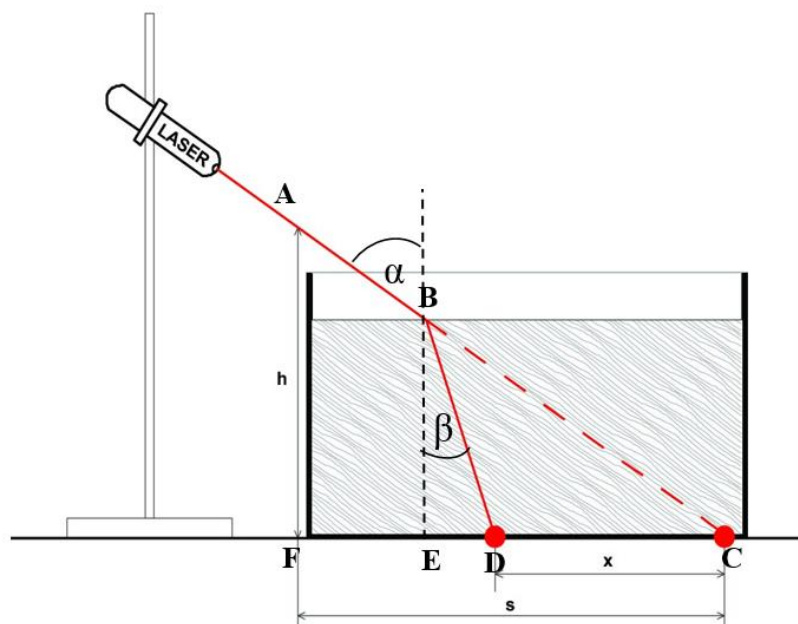
- Értelmezd a fényfolt eltolódását a kád alján!
- A mért adatok alapján határozd meg a víz levegőre vonatkoztatott törésmutatóját!

Megoldás

A törésmutató értékét a Snellius–Descartes-törvény alapján, a fénysugár beesési szöge szinuszának és a törési szög szinuszának hányadosa adja meg.

Az összeállítást mutató vázlatrajzon megbetűztük a jellegzetes pontokat. Az új jelölésekkel:

$$\overline{AF} = h, \quad \overline{CD} = x, \\ \overline{CF} = s$$



Az összeállítási rajzon bejelölt és a még üres kádban könnyen mérhető s és h hosszúságok aránya megadja a lézersugár beesési szögének tangensét

$$tg\alpha = \frac{s}{h} = \frac{\overline{FC}}{\overline{AF}}$$

innen α értéke meghatározható. Ha a kádba vizet töltünk a fénysugár a víz felszínén B pontban megtörik. A lézersugár irányváltását a kád alján megvilágított fénypont elmozdulása ($\overline{CD} = x$) jelzi. A törési szög tangense az ábra szerint adható meg, mint \overline{DE} és \overline{BE} szakaszok hányadosa:

$$tg\beta = \frac{\overline{DE}}{\overline{BE}}$$

A \overline{BE} távolság, azaz a víz magassága a kádban mérhető, a \overline{DE} meghatározása közvetett módon történhet. Az ACF háromszög és a BCE háromszög hasonlóságát felhasználva kifejezhető a \overline{CE} szakasz hossza, amiből kivonjuk $\overline{CD} = x$ mért távolságot, azaz

$$\overline{DE} = \overline{CE} - \overline{CD} = \frac{\overline{CF} \cdot \overline{BE}}{\overline{AF}} - \overline{CD}$$

Az elvégzett kísérlet adatai:

$$h = \overline{AF} = 38 \text{ cm}, \quad s = \overline{CF} = 30 \text{ cm}, \quad x = \overline{CD} = 4,5 \text{ cm}, \quad \overline{BE} = 17,7 \text{ cm}$$

$$tg\alpha = \frac{30}{38} = 0,79 \rightarrow \sin\alpha = 0,62, \quad tg\beta = \frac{30}{38} - \frac{4,5}{17,7} = 0,53 \rightarrow \sin\beta = 0,47$$

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{0,62}{0,47} = 1,32$$

A domború lencse fókusz távolságának meghatározása Bessel-módszerrel

Feladat:

Állítsd össze a kísérletet a leírás szerint! Határozd meg az alábbiakban ismertetett Bessel-féle módszerrel a lencse fókusz távolságát!

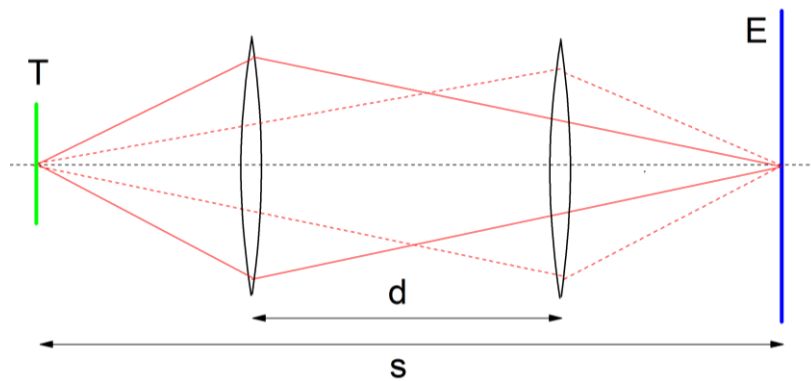
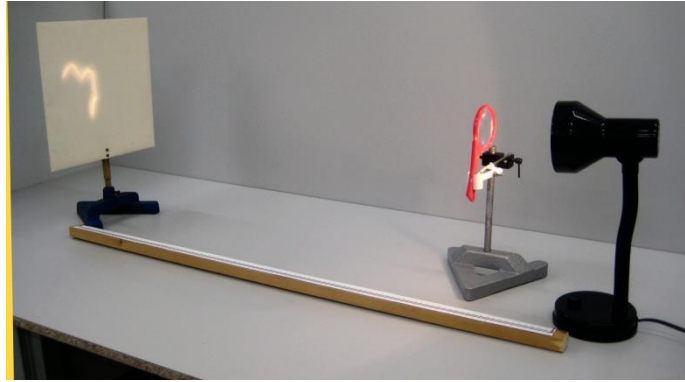
Szükséges eszközök:

Nagyobb átmérőjű, üvegből vagy műanyagból készített, körülbelül 10-20 cm fókusz távolságú gyűjtőlencse, fehér papír vagy pausz ernyő, asztali lámpa 25 wattos izzóval, optikai pad 3 mozgatható lovassal, a lencse, az ernyő és a gyertya rögzítésére szolgáló befogókkal, mérőszalag. (Ha az optikai pad a tartozékokkal nem áll rendelkezésre, megfelel a fotón bemutatott összeállítás is. A leképező lencse egyszerű kézi nagyító, az izzószál és az ernyő távolsága 1 m, a lencse helyzetének változása a méterrúdra ragasztott papír mérőszalagról olvasható le.)

A mérés leírása

A fókusz távolság meghatározása alkalmas kísérleti technika az úgynevezett Bessel-módszer. A tárgyat és az ernyőt egymástól alkalmas távolságban rögzítjük, a távolságot (s) lemérjük és a

továbbiakban nem változtatjuk. Megkeressük a tárgy és az ernyő közt azt a lencsehelyzetet, amelynél éles nagyított képet látunk az ernyőn. Ezután a lencsét addig toljuk az ernyő felé, míg a tárgynak ismét éles, de most már kicsinyített képe jelenik meg. Megmérjük a lencse elmozdításának távolságát (d). A mérés sematikus rajzát az ábra mutatja.



A lencse fókusz távolságát a mért adatokból az

$$f = \frac{(s + d) \cdot (s - d)}{4s}$$

összefüggés alapján határozható meg.

- A két lencsehelyzet esetén felírva a leképezési törvényt igazolja a fókusz távolságra megadott formulát!
- A mérést elvégezve határozza meg a lencse fókusz távolságát!

Megjegyzés:

- A Bessel-módszerrel kapott fókusz távolság pontosabb, mint amit a leképezési törvény alapján, közvetlenül a kép- és tárgytávolságot mérve kapnánk. A kép- és tárgytávolság mérése ugyanis nem egyszerű a lencse görbülete miatt.

Megoldás

Végezzük el a mérést a leírás szerint háromszor megismételve! Esetünkben a tárgy (a tárgy az izzószál) és az ernyő beállított távolsága állandó ($s = 1$ m), a két éles kép létrehozásához a gyűjtőlencse elmozdítás távolságát mértük. A mért távolságokat és a belőlük számított fókusz távolság értékeket a táblázat mutatja.

	1. mérés	2. mérés	3. mérés
d (m)	0,41	0,405	0,415
f (m)	0,208	0,210	0,206

Mérési eredménynek a fókusz távolságok átlagát tekinthetjük, a mérés pontosságát a relatív hibával (azaz az átlagtól mért legnagyobb eltérés átlaghoz viszonyított értékével) jellemezzük.

$$f = 0,208 \pm 1\%$$

Megjegyzés:

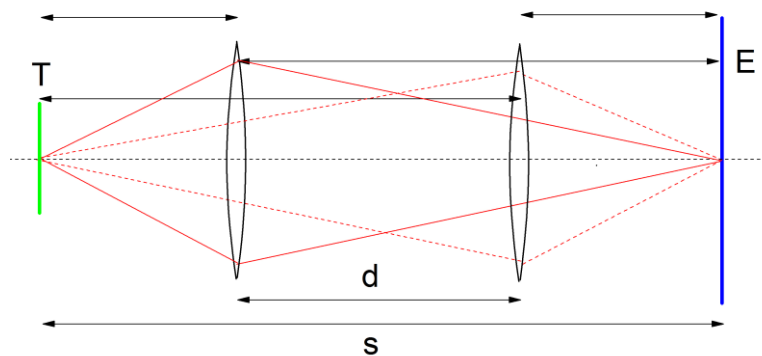
- A feladatlapon közölt formula levezetéséhez abból kell kiindulni, hogy ugyanazon tárgy-kép távolság esetén két lencsehelyzetben kapunk éles képet. Mindkét esetre felírható a leképezési törvény:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{k_1} \quad \text{és} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{k_2}$$

- Felhasználjuk továbbá, hogy

$$t_2 = t_1 + d, \quad k_2 = k_1 - d, \quad \text{továbbá} \quad k_1 + t_1 = s = k_2 + t_2$$

- A fenti egyenletrendszer megoldása f -re számolástechnikailag nem egyszerű feladat. Jóval elegánsabban juthatunk eredményhez, ha észre vesszük, hogy a lencse áthelyezésekor lényegében az történik, hogy a kép és a tárgy szerepet cserél. Így $t_2 = k_1$ és $k_2 = t_1$. A megadott rajz alapján $s - 2t = d$, továbbá $2k - d = s$.



A leképezési törvény felírva és behelyettesítve t és k értékét azt kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{s-d}{2}} + \frac{1}{\frac{s+d}{2}}$$

A kifejezést f -re rendezve:

$$f = \frac{s^2 - d^2}{4s} = \frac{(s+d) \cdot (s-d)}{4s}$$

[Vissza >>>](#)

F23. Gömb- és síkhullámok

1) Gömbhullámok

Az eddigiekben csak egyenes mentén vizsgáltuk meg a fény terjedését leíró függvény tulajdonságait. A fényjelenségek homogén közeg esetén minden irányban azonos módon terjednek. Kézenfekvő tehát, hogy a pontszerű fényforrás által kibocsátott fényhullámot a fényforrástól mért r távolság függvényében az

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kr + \varphi)$$

függvénnyel írjuk le. Tehát adott pillanatban az azonos fázisú felületek a hullámforrás köré irt koncentrikus gömbök. Az ilyen hullámokat gömbhullámoknak nevezzük. A fenti formula azonban nem alkalmas a pontszerű fényforrás által kibocsátott fény pontos leírására. Eszerint a függvény szerint kibocsátott fény esetén ugyanis a fényforrás teljesítményének folyamatosan növekednie kellene. Az állandó teljesítményű fényforrás által kibocsátott gömbhullám a következőképpen kapható meg.

Legyen a pontszerű fényforrás által időegységenként kibocsátott energia P_0 . Legfeljebb ennyi energia áramolhat át időegységenként a fényforrás köré irt r sugarú gömb felületén. Így, mivel a fényforrás köré vont r sugarú gömb felülete a sugár négyzetével növekszik, az energiasűrűségnek (az intenzitásnak) a kibocsátási helytől mért távolság négyzetével fordított arányban csökkennie kell:

$$I(r) = \frac{P_0}{r^2}$$

Ennek megfelelően, mivel $I(r) \sim E_0^2$ a fényhullám amplitúdójának a távolsággal fordított arányban kell csökkennie, azaz:

$$E_0 \sim \frac{1}{r}$$

A gömbhullámot tehát a

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E}_0}{r} \sin(\omega t - kr + \varphi)$$

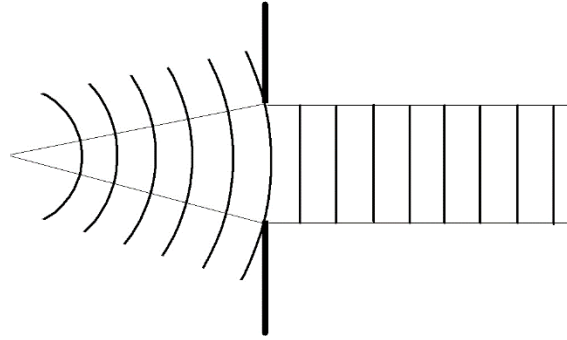
hullámfüggvénnyel kell leírni.

Megjegyzés:

- A gömbhullám amplitúdójának csökkenése sok fizikai alkalmazásban fontos szerepet játszik, ezért érdemes beiktatni valahol a tananyagba.

1) Síkhullámok

A hullámforrástól távol a gömbhullámok jól közelíthetők síkhullámokkal. Ha a fény síkhullámként kezelhető, akkor az amplitúdó távolság függése megszűnik (ábra). A síkhullámokat leíró matematikai formula ezért a következő:



$$E(r, t) = E_0 \sin[(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + \varphi]$$

ahol $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{k}_0$ a hullámszámvektor, \vec{k}_0 pedig a fény terjedési irányába (a hullámfelületekre merőleges irányba) mutató egységvektor. A síkhullámban az azonos fázisú pontok adott pillanatban a

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{Konstans}$$

egyenletű síkokon helyezkednek el.

Megjegyzés:

- A síkhullám természetesen a skaláris szorzat használata nélkül is felírható. Adott $\vec{r}(x, y, z)$ helyen a hullám terjedési irányára merőleges síkot kell felvenni és meghatározni a sík és az origó (a fénykibocsátás helye közötti d távolságot. Az \vec{r} helyen az a fényhatás jelenik meg, ami az origóban volt észlelhető a $(t - d/c)$ időpillanattal korábban. Ha a koordináta-rendszer x tengelyét a síkhullám terjedési irányában vesszük fel, akkor a hullám alakja megegyezik az x tengely mentén terjedő egydimenziós hulláméval, hiszen az \vec{r} ponton átmenő x tengelyre merőleges sík távolsága az origótól éppen az \vec{r} pont x koordinátája.
- A sík és gömbhullámok leírására a fenti formulák helyett gyakran komplex formalizmust használunk. A komplex számok alkalmazása, amint (esetleg) a váltakozó áramoknál már láttuk, egyszerűsíti a trigonometrikus függvényekkel való számításokat.

[Vissza >>>](#)

F24. A hullámcsomag és a csoportsebesség

A síkhullám és a gömbhullám képlete mind időben, mind térben végtelen kiterjedésű hullámot írnak le. A fénykibocsátás atomi folyamataiban azonban véges kiterjedésű hullámvonulatok, úgynevezett hullámcsomagok jönnek létre. A hullámcsomagok matematikailag harmonikus hullámok összegével adhatók meg. Fizikai szempontból fontosak azok az összetett megoldások, amelyeket kevésbé különböző ω -val és k -val rendelkező síkhullámokból állíthatunk össze. Foglalkozunk először a két síkhullám összegéből előálló megoldással.

Vegyük fel a két hullámot úgy, hogy körfrekvenciájuk és hullámszámuk legyen rendre $\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)$ és $\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)$, illetve $\left(k - \frac{\Delta k}{2}\right)$ és $\left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)$. Az egyszerűség kedvéért foglalkozunk egyenes mentén terjedő hullámokkal (az x tengely mentén terjedő síkhullámokkal, amelyek kezdőfázisa az origóban zérus:

$$E = E_0 \sin \left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t - \left(k + \frac{\Delta k}{2} \right) x \right] + E_0 \sin \left[\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t - \left(k - \frac{\Delta k}{2} \right) x \right]$$

A hullámok szuperpozíciója az

$$A \sin \alpha + A \sin \beta = 2A \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

azonosság alapján szorzat alakban is megadható:

$$E = 2 E_0 \sin(\omega t - kx) E_0 \cos \left[\left(\frac{\Delta\omega}{2} \right) t - \left(\frac{\Delta k}{2} \right) x \right]$$

A szorzatfüggvényben a $2E_0 \cos \left[\left(\frac{\Delta\omega}{2} \right) t - \left(\frac{\Delta k}{2} \right) x \right]$ amplitúdó függvény adott helyen sokkal lassabban változik az időben, mint a második tényező. Eszerint az eredő hullám $\lambda = \frac{2\pi}{\Delta k}$ hosszúságú „hullámcsomagok” sorozata. Mekkora sebességgel halad az ilyen hullámcsomag vagy hullámcsoport? Más szavakkal: mekkora a sebessége például a hullámcsomag maximumának? Az amplitúdófüggvény maximuma $A^* = 2A$. Az A^* a hely és idő függvényében akkor egyenlő $2A$ -val, ha a cosinus függvény argumentuma, azaz fázisa a megfelelő állandóval egyenlő, azaz

$$\left(\frac{\Delta\omega}{2} \right) t - \left(\frac{\Delta k}{2} \right) x$$

E függvény megváltozása pedig

$$\left(\frac{\Delta\omega}{2} \right) \Delta t - \left(\frac{\Delta k}{2} \right) \Delta x$$

ahonnan

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

éppen a hullámcsomag maximumának, vagyis a hullámcsoporthoz c^* a haladási sebessége:

$$c^* = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

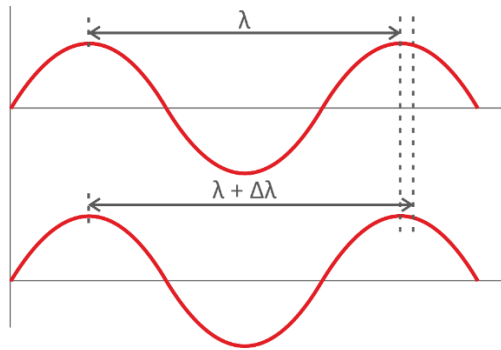
Eszerint a hullámcsoporthoz sebessége egyenlő a körfrekvenciák és a hullámszámok különbségének hányadosával. Ha figyelembe vesszük, hogy ω -nak k szerinti megváltozását írjuk fel, akkor az $\omega = \omega(k)$ függvénnyel a két körfrekvencia

$$\omega_1 = \omega_1(k) \quad \text{és} \quad \omega_2 = \omega_2(k)$$

alakban adható meg. Amennyiben ω_1 és ω_2 tetszőlegesen kevésbé tér el egymástól, akkor az összefüggésben a különbségi hányadost a differenciáhányadossal helyettesíthetjük, azaz

$$c^* = \frac{d\omega}{dk}$$

A hullámcsoporthoz c^* sebességét *csoportsebességnek* nevezzük.



[Vissza >>>](#)

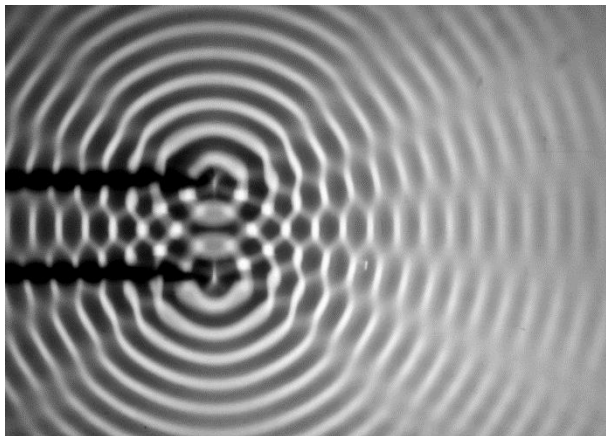
F25. A koherenciafogalom

A koherencia fogalom nem könnyű, középiskolai tárgyalásához az egyszerű esetekben alkalmazható leírás felől egymásra épülve több szinten kell közelíteni. Fontos az, hogy a fogalom egyre mélyebb és mélyebb kialakítása során mindig pontosan tisztázzuk, hogy a már meglévőhöz képest mit változtattunk és az új megközelítés hogyan kapcsolódik az előzőekhez.

Alapvetően azt mondhatjuk, hogy a hullámok koherenciája az interferenciaképességet jelenti. Ez a meghatározás azonban üres, hiszen éppen azt szeretnénk megfogalmazni, hogy a találkozók hullámokról hogyan dönthetjük el, hogy interferencia képesek-e.

Szemléletes koherencia fogalom mennyiségi jellemzés nélkül

Első közelítésben, mint azt az interferenciát bevezető kísérletekben felhasználtuk, az interferencia feltétele az, hogy a találkozók hullámok azonos frekvenciájúak legyenek és fáziskülönbségük időben ne változzék. Amennyiben a hullámok frekvenciája pontosan megegyezik és a fáziskülönbség sem változik időben, akkor tetszőlegesen hosszú hullámvonulatok találkozása esetén fennmarad az (észlelhető) interferencia. Vízhullámok esetén ez könnyen megvalósítható. Gerjesszünk rezgéseket a hullámkádban úgy, hogy a víz felszínét két azonos frekvenciával, periodikusan mozgó pontszerű hullámkeltővel hozzuk mozgásba (lásd oldalsó ábra). A víz felszínén állandósuló interferencia mintázatot figyelhetünk meg, hiszen a felszín minden pontjában, minden pillanatban ugyanaz a két hullám találkozik azonos fáziskülönbséggel. A két hullám akármeddig fenntartható, így az interferencia kép is tetszőlegesen ideig fennmaradhat. Ha az adott pontban a két hullám éppen ellentétes fázisban van, akkor maximális gyengítést (kioltást), ha azonosban, akkor maximális erősítést tapasztalunk.



Ebből a koherencia képből mennyiségi kritériumok meghatározása nélkül általában azzal, a jegyzet törzsanyagában már leírt képpel léphetünk tovább, hogy figyelembe vesszük, hogy a fénykibocsátás atomi folyamat, és a fényhullámokat a fényforrás atomjai véletlenszerűen, elemi hullámok formájában bocsátják ki. A találkozók hullámok tehát véges hosszúságúak, és időtartamuk is véges. A véletlenszerűség itt azt jelenti, hogy a kibocsátás pillanata véletlenszerű, így a különböző atomok által kibocsátott hullámok fáziskülönbsége is az. A milliányi különböző atomból erdő hullám találkozása, még ha frekvenciájuk azonos is, csak akkor vezetne interferenciára, ha a hullámok közötti fáziskülönbség nem ingadozna. Ez a követelmény azonban csak akkor teljesül, ha a különböző atomok összehangoltan és nem véletlenszerűen bocsátanak ki a fényt. (Az atomok összehangolt fénykibocsátása a lézerekben megvalósul, erre a későbbiekben még visszatérünk.) Egyelőre nem firtatjuk, hogy mit jelent ez

matematikai szempontból, azaz hogyan kell megváltoztatnunk a végtelen hosszúságú harmonikus hullámot, amely a monokromatikus fényt leírja, ahhoz, hogy „eleje és vége” legyen. (A végtelen kiterjedésű hullámvonulat létezése energetikai szempontból sem tartható, hiszen kibocsátásához végtelen sok energiára lenne szükség. ami lehetetlen!) A fáziskülönbségek véletlenszerű ingadozása is elegendő azonban ahhoz, hogy rájövünk; Fényinterferencia csak akkor valósítható meg, ha a fényforrás által kibocsátott fényt önmagával interferáltatjuk, azaz két különböző úton vezetve újra találkoztatjuk. A két különböző úton vezetett hullám találkozásakor azonban az útjuk megtételéhez szükséges idők különbsége nem haladhatja meg az elemi hullámvonulat időtartamát. Ezt nevezzük időbeli koherenciának. Emellett az elosztott hullámfront sem lehet olyan nagy, hogy a fáziskülönbség állandósága ne legyen tartható. Az utóbbi esetben térbeli koherenciáról beszélünk.

Különböző frekvenciájú hullámok találkozása, a koherenciahossz pontosítása

A tapasztalat azt mutatja, hogy nemcsak azonos frekvenciájú hullámok találkozásakor észlelhetünk interferenciát. Az interferencia fehér fényel is megvalósítható! Ennek megértésére (megértetésére) érdemes egyszerű mennyiségi leírást alkalmazni, ami elvezet a koherencia mennyiségi jellemzéséhez is

Tegyük fel, hogy a forrás által kibocsátott hullám két egymáshoz közeli λ és $(\lambda + \Delta\lambda)$ hullámhosszúságú $[A \sin(kx - \omega t)]$ és $[A \sin(k'x - \omega' t)]$ harmonikus hullám összege, ahol $k = \frac{2\pi}{\lambda}, k' = \frac{2\pi}{\lambda + \Delta\lambda}, \omega' = ck'$, amely az x tengely mentén c sebességgel terjed. Adott t időpillanatban a két hullám találkozása valamilyen interferenciaképet mutat. Ha a két hullám frekvenciája azonos és a t időpillanatban az $x = 0$ pontban erősítik egymást, akkor a hullámtér (az x tengely) minden pontjában erősítés jön létre. Mivel azonban a hullámok frekvenciája kissé különböző, az $x=0$ pontban az erősítést létrehozó közel azonos fázis, az origótól távolodva egyre inkább eltér, azaz a hullámok ott már nem erősítik egymást. Önkényes korlátként azt szabhatjuk meg, hogy a hullámok akkor már nem erősítik egymást, azaz nem koherensek, ha fáziskülönbségük $\Delta\varphi = 1$ radián ($57,3^\circ \approx 60^\circ$). Az ehhez a fáziskülönbséghez tartozó l_k útkülönbséget nevezzük koherenciahossznak, azaz esetünkben a

$$\Delta\varphi = 1 = (k - k')l_k = \left(\frac{2\pi}{\lambda} - \frac{2\pi}{\lambda + \Delta\lambda} \right) l_k = 2\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)} \approx \frac{2\pi\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

összefüggésből adódóan

$$l_k = \frac{\lambda^2}{2\pi\Delta\lambda}$$

A koherenciahosszból a hullámok $\frac{\omega}{k} = c$ terjedési sebességével egyszerűen adódik a

$$t_k = \frac{l_k}{c} = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta\lambda}$$

koherencia idő. Mivel a kicsit megváltoztatott hullámhosszra és frekvenciára is teljesülnie kell a $\lambda\nu = c$, összefüggésnek:

$$(\lambda + \Delta\lambda)(\nu - \Delta\nu) = c$$

Elvégezve a beszorzást:

$$\lambda v - \lambda \Delta v + \Delta \lambda v - \Delta \lambda \Delta v = c$$

Felhasználva a $\lambda v = c$ összefüggést és a másodrendűen kicsiny $\Delta \lambda \Delta v$ tagot elhanyagolva adódik, hogy $\Delta \lambda v - \lambda \Delta v = 0$, ahonnan

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta \omega}{\omega}$$

Ezzel a koherenciahossz az

$$l_k = \frac{\lambda^2}{2\pi\Delta\lambda} = \frac{\lambda v}{2\pi\Delta v} = \frac{c}{\Delta\omega}$$

alakra hozható. Így a koherencia idő:

$$t_k = \frac{l_k}{c} = \frac{1}{\Delta\omega}$$

A koherencia fogalom és a hullámcsomag

Az elemi hullámok véges hosszúságú és véges időtartamú hullámvonulatok, amelyeket az atomok véges idő alatt bocsátanak ki. A véges hullámvonulatok hullámcsomagokat alkotnak, amelyek nem állhatnak egyetlen frekvenciájú harmonikus hullámból, a csomag mindenképpen valamilyen frekvencia intervallumba eső hullámok összege.

Megjegyzés:

- A véges hullámvonulat matematikai leírását a Fourier-tétel teszi lehetővé. A Fourier-tétel szerint bármely periodikus függvény előállítható véges vagy megszámlálhatóan végtelen számú periodikus függvény összegeként. Az így kapott függvények azonban még mindig nem véges hosszúságú és időtartamú hullámvonulatokat írnak le. Időben és térben véges hullámcsomagok Fourier-integrállal állíthatók elő. A Fourier-integrál valamilyen adott frekvencia-(hullámszám-)intervallumba eső hullámok folytonos összegzését jelenti. Középiskolai szinten ez biztosan nem tárgyalható, azonban egyszerű számítógépes demonstrációval érzékeltethető az eljárás, illetve a fizikai következmények.

A szemléltetést akár a hullámok időbeli, akár térbeli periodikusságára alapozhatjuk, azaz vagy adott helyen vizsgáljuk különböző frekvenciájú hullámok összegét, vagy adott időpillanatban különböző hullámszámúakét. A következőkben véges időtartamú hullám kialakulását érzékeltetjük a Fourier-tétel kimondása nélkül. Válasszunk ki az $\omega_1 < \omega_2$ körfrekvencia tartományból egyenletesen N darab frekvenciát az ω_1 -gyel kezdve és ω_2 -vel befejezve, és szuperponáljunk ezekkel a körfrekvenciákkal időben változó azonos $A = \frac{A_0}{N}$ amplitúdójú koszinusz függvényeket. (Az amplitúdót azért kell csökkenteni, mert egyébként az összegzendő rezgések számának növelésével az eredő minden határon túl növekedne.) A kiválasztott körfrekvenciák tehát:

$$\omega_k = \omega_1 + k \frac{\Delta\omega}{N-1} \quad k = 1 \dots N-1$$

A körfrekvenciákat célszerű az $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ átlagos körfrekvenciával is kifejezni. A tárgyalást érdemes szétválasztani páratlan és páros N esetre. Ha N páratlan szám, azaz $N = 2L + 1$, akkor az átlagos körfrekvenciájú rezgés mindig a szuperponáltak között van, és ugyanannyi nála nagyobb és nála kisebb körfrekvenciájú rezgéssel kell összegezni. Ha N páros, azaz $N = 2L$, akkor az átlagos frekvencia nem tartozik a kiválasztottak közé, de felette és alatta ismét ugyanannyi frekvenciát választottunk ki. Az átlagos körfrekvenciával kifejezve, páratlan N esetén a kiválasztott rezgések körfrekvenciája:

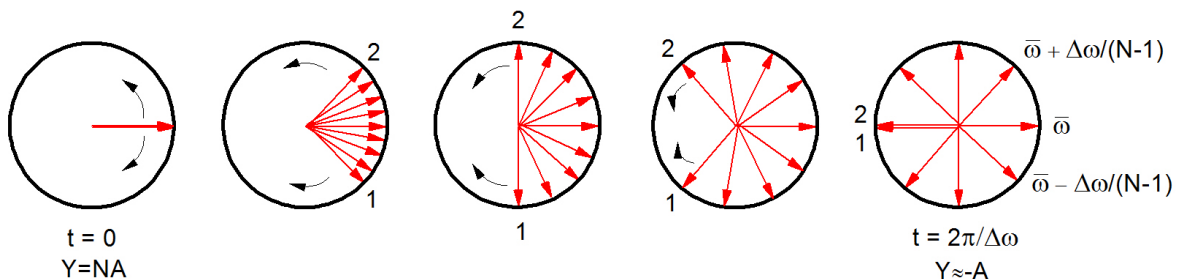
$$\omega_k = \bar{\omega} \pm k \frac{\Delta\omega}{N-1} \quad k = 0, 1, \dots, L \quad (N = 2L + 1)$$

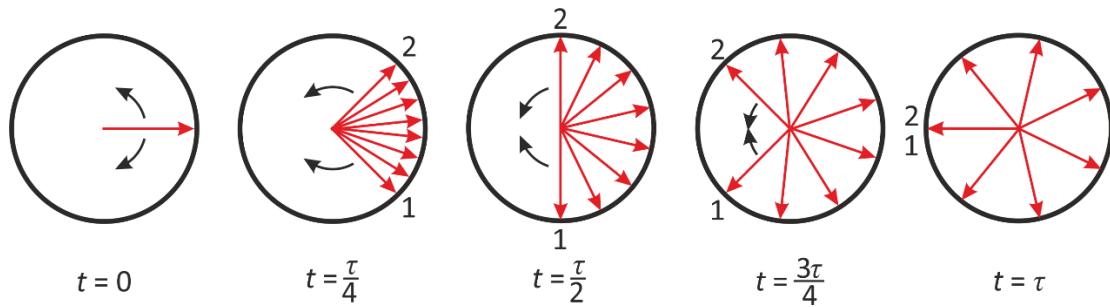
Páros N esetén pedig:

$$\omega_k = \bar{\omega} \pm \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\Delta\omega}{N-1} \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (N = 2L)$$

A szuperpozíció $Y(t)$ eredménye a $t = 0$ időpillanatban, amikor a rezgések azonos fázisban vannak, $Y(0) = NA = A_0$. Az idő múlásával a rezgések fázisa „szétcsúszik”, hiszen frekvenciájuk különböző. A szétcsúszás jól szemléltethető, ha pillanatfelvételeket készítünk a rezgések fázor vektorairól. Koordináta rendszerünket az átlagos körfrekvenciával forgó vektorhoz rögzítve, a t időpontbeli pillanatfelvételen a többi vektor helyzetét a szomszédos frekvenciájú rezgések közötti $\frac{\Delta\omega}{N-1}t$ fáziskülönbség szabja meg.

Az ábra $N = 9$ és $N = 8$ esetén mutatja a szuperpozíció eredményét a $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ frekvenciaintervallum két szélső körfrekvenciájával vett rezgések lebegésének $\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ periódus idejéhez, mint karakterisztikus időhöz képest. Az ábrások a $t = m \frac{\tau}{4}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, 4$) időpillanatban mutatják a fázor vektorok helyzetét az $\bar{\omega}$ körfrekvenciájú rezgést reprezentáló rögzített helyzetű fázorhoz képest. Látható, hogy vektorösszeg, a $t = 0$ időpillanatban maximális ($Y(0) = NA = A_0$), majd az idő előrehaladásával a vektorok összege egyre csökken, és érzékelhető, hogy véges számú vektor összegzése esetén, valamivel a τ időpillanat elérése előtt zérussá válik, hiszen a komponensek frekvenciája már egyenletesen fedi le a teljes intervallumot, így fáziseltéréseik is egyenletesen oszlanak el.





Fazorok változása az átlagos rezgésszámúhoz képest egyetlen lebegési periódus alatt 9 és 8 azonos amplitúdójú azonos rezgésszám eltérésű rezgés esetén

A $t = \tau$ időpillanatban a frekvenciaintervallum szélén elhelyezkedő ω_1 és ω_2 körfrekvenciájú rezgések éppen 2π fáziskülönbséggel találkoznak, hiszen fáziskülönbségük az átlagos frekvenciájú rezgéstől rendre $-\pi$, és $+\pi$, vagyis éppen ellentétes fázisban vannak vele. Ebből adódik, hogy páros N esetén a vektorösszeg $-2A = -\frac{2A_0}{N}$, páratlan N esetén pedig $-A = -\frac{A_0}{N}$. Szemléletesen adódik azonban, hogy amennyiben $N \rightarrow \infty$, akkor a kioltás pontosan τ idő múlva következik be, hiszen az összetevők amplitúdója ekkor végtelen kicsivé válik, de minden fázorhoz található éppen ellentétes fázisú.

Véges számú rezgés összegzése esetén a $\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ időpillanat után a különböző frekvenciájú összetevők fázisa még hosszú ideig „szétszór” lesz, így erősítés nem következik be, az eredő rezgés pillanatnyi kitérése kicsiny marad. Nagy kitérést csak akkor észlelünk újra, amikor, minden összetevő ismét ugyanabba a fázisba kerül, azaz $(N - 1)\tau$ idő múlva. Ettől kezdve a rezgés pontosan úgy ismétlődik, mintha a kezdőpillanattól indítanánk. A periódusidő annál hosszabb minél több összetevőt adunk össze. Határértékben ez azt jelenti, hogy végtelen sok összetevő esetén a jelenség nem ismétlődik, a periodikus rezgések összege egyetlen nem ismétlődő hullámcsomagot ír le.

A hullámcsomag kiterjedése azzal az időtartammal adható meg, amelyben a rezgés amplitúdója még „jelentős”. A „jelentős” szó nyilvánvalóan bizonytalanságot hordoz magában, ami csak önkényes (de ésszerű) megállapodással szüntethető meg. Kézenfekvő választás, hogy a $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ körfrekvencia tartományú csomag időbeli kiterjedését a két szélső rezgés lebegésének $\tau = \Delta t_k = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ periódusidejével definiáljuk. Mint láttuk, ennyi idő alatt válik az összetevő hullámok eredő amplitúdója zérussá.

Így a frekvenciasáv szélessége és a t_c időbeli kiterjedés között a

$$\Delta t_k \Delta \omega = 2\pi$$

összefüggés áll fenn, amit a frekvenciával kifejezve:

$$\Delta t_k \Delta \nu \approx 1$$

A Δt_c időtartamot az elemi hullámvonulat hosszának tekintjük, így egyben ez a $\Delta \nu$ sávbéli frekvenciákat tartalmazó fény $t_k \equiv \Delta t_k$ koherencia ideje is. Ezzel a koherenciahossz:

$$l_k = ct_k = \frac{c}{\Delta \nu}$$

Mivel

$$\Delta\nu = \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)} \approx \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

a koherenciahossz kifejezhető a hullámhosszal is:

$$l_k = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

Megjegyzés:

- A fentiek alapján kiszámíthatjuk például a fehér fény koherenciahosszát. A fehér fény frekvencia tartománya $4 \cdot 10^{14} - 7 \cdot 10^{14}$ Hz-ig terjed, így sávszélessége $3 \cdot 10^{14}$ Hz. A koherencia idő $t_k = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{1}{3 \cdot 10^{14}} \approx 3 \cdot 10^{-15}$ s, a koherenciahossz pedig $l_k = ct_k$, azaz $l_k = 9 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 900 \text{ nm}$. A fehér fény átlagos hullámhossza 550 nm, így a koherenciahossz igen kicsiny, nagyjából két hullámhossznyi. Érdekes ezt összehasonlítani a lézerefény koherenciahosszával. Az alábbi táblázat néhány fényforrás fényének koherenciahosszát mutatja.

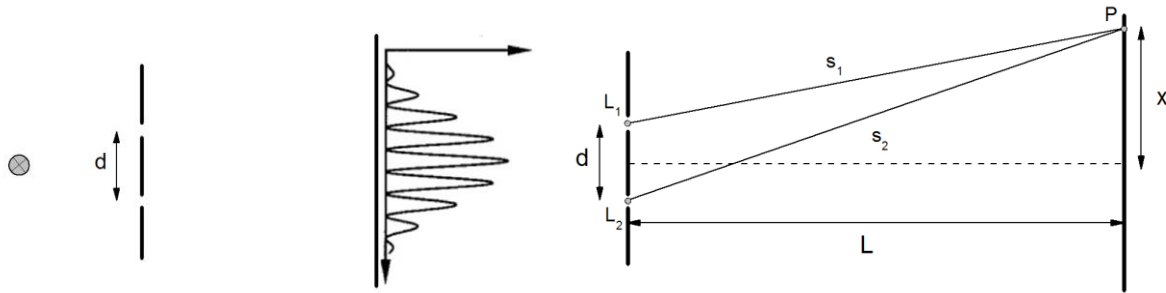
- Forrás	- Átlagos hullámhossz λ_0 (nm)	- Hullámhossz-sávszélesség $\Delta\lambda$ (nm)	- Koherenciahossz
- hősugárzás (8-12000 nm)	- 10000	- ≈ 4000	- $\approx 25000 \text{ nm} = 2,5\lambda_0$
- fehér fény	- 550	- ≈ 300	- $\approx 900 \text{ nm} = 1,6\lambda_0$
- higanylámpa	- 545,1	- ≈ 1	- $\leq 0,03 \text{ cm}$
- Kr ⁸⁶ fénycső	- 605,6	- $1,2 \cdot 10^{-3}$	- 0,3 m
- stabilizált lézer He-Ne	- 632,8	- $\approx 10^{-6}$	- $\leq 400 \text{ m}$
- speciális lézer He-Ne	- 1153	- $8,9 \cdot 10^{-11}$	- $15 \cdot 10^6 \text{ m}$

- A két közeli frekvenciájú hullám esetén definiált koherencia idő és koherenciahossz a most definiálttól eltér, mert a korábbi definíciót a $\Delta t_k \Delta \omega = 1$ összefüggésre alapoztuk. Vegyük észre, hogy mindkét definíció önkényes, és egyszerűen összeegyeztethető, ha a két rezgés összetételére alapozott meghatározáskor is a két rezgés lebegésének periódusidejét választjuk koherencia időként.

Térbeli koherencia

A kiterjedt fényforrások (ilyenek például a közönséges izzólámpák) esetén az interferencia képesség gyakran elvész, vagy csökken a fényforrás térbeli kiterjedése miatt. A kiterjedt fényforrások tehát az interferenciakísérletekben korlátozó tényezőt jelentenek, mert figyelembe kell venni a fényforrás különböző pontjaiból érkező fény interferenciáját. Ezt a korlátozást fejezzük ki a térbeli koherencia fogalmával. A térbeli koherencia fogalma viszonylag könnyen

bevezethető a legegyszerűbb kiterjedt fényforrás, az egymástól d távolságban elhelyezkedő két pontforrás vizsgálatával. A két pontforrás jól megvalósul a Young kísérletben!



Az ábrán látható fényforrás fénye két, egymástól d távolságban lévő kicsiny lyukra esik. A lyukak pontszerű fényforrásként viselkednek és gömbhullámokat bocsátanak ki, amelyek az L távolságú ernyőn találkoznak. Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk az ernyőn létrejövő interferenciaképet a fényforrást és a lyukakat tartalmazó sík és az ernyő metszésvonalában, a $P(x,L)$ pontban. Az L_1 lyukból kiinduló fény az ábra jelöléseinek megfelelően:

$$E_1(s_1, t) = E_{10}(s_1, t) \cos(ks_1 - \omega t + \varphi_1)$$

elektromos teret hoz létre. Az L_2 lyukból induló fény tere

$$E_2(s_2, t) = E_{20}(s_2, t) \cos(ks_2 - \omega t + \varphi_2)$$

A két fény szuperpozíciója az ernyőn:

$$E(x, 0, t) = E_1(s_1, t) + E_2(s_2, t)$$

hatást eredményez. Az ernyőn az interferenciaképet a szuperpozíció eredményeként létrejövő irradiancia (energiaáram-sűrűség) időátlaga szabja meg. (Ezzel a kérdéssel részletesen foglalkozik az [F28](#). Az interferencia energiaviszonyai melléklet) Ennek megfelelően

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + \langle \sqrt{I_1 I_2} \rangle = \frac{1}{2} E_{01}^2 + \frac{1}{2} E_{02}^2 + E_{01} E_{02} \cos[k(s_2 - s_1) + \varphi_2 - \varphi_1]$$

Az interferenciakép pontos megértéséhez ebbe a kifejezésbe be kell helyettesíteni a P pontnak a fényforrásoktól (lyukaktól) mért távolságát.

A szokásos geometriai optikai feltételek $\left(\frac{d}{L} \ll 1, \frac{x}{L} \ll 1\right)$ mellett az eredmény:

$$s_2 - s_1 \approx \frac{dx}{L}$$

További egyszerűsítésként tegyük fel, hogy a lyukakból kiinduló gömbhullámok amplitúdója egyenlő, azaz:

$$E_{10}(s_1) = \frac{E_{10}(0)}{s_1} = \frac{E_0}{s_1} \approx \frac{E_0}{L} = E_0(L)$$

$$E_{20}(s_2) = \frac{E_{20}(0)}{s_2} = \frac{E_0}{s_2} \approx \frac{E_0}{L} = E_0(L)$$

Az ernyőre érkező fényhullámok amplitúdója tehát az ernyőn mindenütt azonos. Ezeket az összefüggéseket, az intenzitás átlagára vonatkozó kifejezésbe beírva, azt kapjuk, hogy

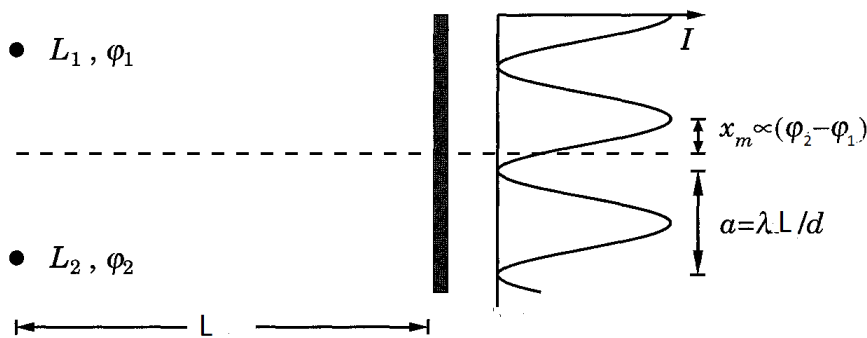
$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} E_0^2(L) + \frac{1}{2} E_0^2(L) + E_0^2(L) \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda L} x + \varphi_2 - \varphi_1\right)$$

$$\langle I \rangle = E_0^2(L) \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda L} x + \varphi_2 - \varphi_1\right) \right]$$

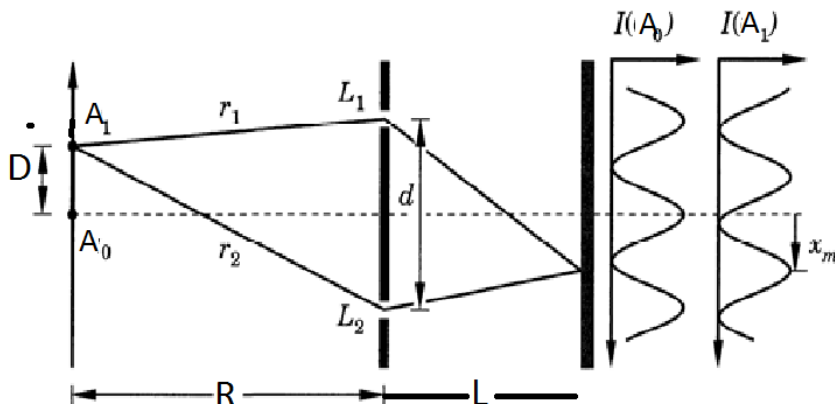
Eszerint az irradiancia az ernyő z tengelye mentén periodikusan változik. A sötét helyek és a maximumok távolsága is $a = \frac{\lambda L}{d}$. Az első maximum hely távolsága az optikai tengelytől arányos a $\varphi_2 - \varphi_1$ fáziskülönbséggel és

$$x_{max1} = \frac{\lambda L}{d} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} = a \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi}$$

Amint az ábra mutatja, a két hullám közötti kezdőfázis-különbség kiolvasható az interferencia kép első maximumának az optikai tengelytől mért távolságából.



Ezeknek a tényeknek az ismeretében rátérhetünk a térbeli koherencia fogalmának tárgyalására. Ebben a következő ábra jelöléseit használjuk:



Vizsgáljuk az ábrán látható kiterjedt (és nem koherens) fényforrás optikai tengelyen fekvő A_0 , és a tengelytől D távolságban lévő A_1 pontjából az L_1 és L_2 lyukra eső, majd onnan az ernyő P pontjába jutó fény interferenciáját. Foglalkozzunk először a két pontból kiinduló fény interferenciájával külön-külön. Az A_0 pontból induló fény, azonos fázisban éri el a két lyukat, így a belőlük induló fény interferenciájának eredményeként a fenti gondolatmenetből adódóan az optikai tengely és az ernyő metszéspontjában is azonos fázisban találkozik, vagyis ott maximális erősítés keletkezik. Az ernyőn az A_0 pontból induló fény hatására keletkező irradianciát az ábra $I(A_0)$ grafikonja mutatja. Az optikai tengelyen kívüli A_1 pontból induló sugarak interferenciaképe ehhez képest eltolódik, hiszen az r_1 és r_2 távolság nem egyenlő, így

a két lyukból $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$ kezdőfázissal indulnak az ernyőn interferáló hullámok. Emiatt az interferenciakép, amint a fentiekben megmutattuk az A_0 pontból induló hullámokéhoz képest $x_{max1} = \frac{a}{\lambda}(r_2 - r_1)$ távolsággal eltolódik. (Az ábrán ezt az $I(A_1)$ grafikon mutatja.) Mivel a kiterjedt fényforrások különböző pontjainak sugárzása nem összehangolt, (a fényforrás inkohérens) az A_0 és az A_1 pontból induló fény szuperpozíciójának eredményeként az ernyőn a két fényforrásból származó irradiancia összegét észleljük, hiszen az interferenciátagok átlaga a fényforrások az összehangolatlansága miatt zérus.

Interferencia akkor észlelhető, ha az egymásra rakódó független interferenciaképek maximumai (és minimumai is) jó közelítéssel ugyanoda esnek, tehát az $x_{max1} = \frac{a}{\lambda}(r_2 - r_1)$ eltolódás nem túlságosan nagy. Az interferenciakép teljesen elmosódik, ha az A_1 forrásból induló fénysugarak interferenciájának maximumai az A_0 -ból indulók minimumaira esnek. Következésképpen a kiterjedt fényforrás két pontjából érkező fény esetén akkor tapasztalhatunk interferenciát, ha

$$|x_{max1}| \leq \frac{a}{2}$$

vagyis ha

$$|r_2 - r_1| \leq \frac{\lambda}{2}$$

Ez a feltétel kifejezhető az elrendezés geometriai adataival is. Vegyük figyelembe, hogy

$$r_2 = \sqrt{\left(D + \frac{d}{2}\right)^2 + R^2}$$

$$r_1 = \sqrt{\left(D - \frac{d}{2}\right)^2 + R^2}$$

Innen

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2dD$$

Mivel $r_2 + r_1 \approx 2R$, adódik, hogy

$$r_2 - r_1 \approx \frac{dD}{R}$$

tehát

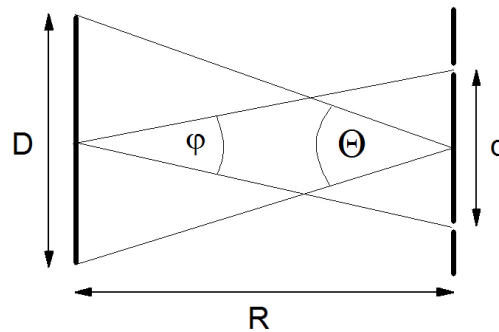
$$\frac{dD}{R} \leq \frac{\lambda}{2}$$

Ha a kiterjedt fényforrás minden pontjának sugárzását figyelembe vesszük, akkor az összes pont interferenciájából adódó irradianciát (a megfelelő eltolódással) össze kell adnunk. Látható azonban, hogy interferencia kép eltolódása az optikai tengelyen elhelyezkedő pont interferenciaképéhez képest, annál nagyobb, minél nagyobb az adott fényforrás pont távolsága az optikai tengelytől. Ily módon elegendő a fényforrás optikai tengelytől legtávolabbi pontjára felírni a koherencia feltételt.

Ha ez a pont éppen az A_1 , akkor a koherencia feltétel:

$$\frac{dD}{R} \approx \frac{\lambda}{2}$$

Ennek a következő ábra jelölései szerinti átfogalmazásával fontos feltételt kaphatunk a kiterjedt és inkoherens fényforrásokkal végzett interferencia kísérletek geometriájára vonatkozóan.



Vezessük be az ábra szerinti φ és Θ szöget, amellyel:

$$\frac{d}{R} = 2 \tan \frac{\varphi}{2} \approx \varphi \approx \sin \varphi$$

$$\frac{D}{R} = 2 \tan \frac{\Theta}{2} \approx \Theta \approx \sin \Theta$$

Vegyük észre, hogy

$$D \sin \varphi \leq \frac{\lambda}{2}, \text{ és } d \sin \Theta \leq \frac{\lambda}{2}$$

azaz a kiterjedt fényforrás koherenciájának kétféle, egyenértékű megfogalmazásához jutottunk. Az egyik a fényforrás optikai tengelybe eső pontjától a lyukak látószögére, a másik a lyukak felezőpontjából a kiterjedt fényforrás látószögére vonatkozó feltételként adja meg a koherencia kritériumát.

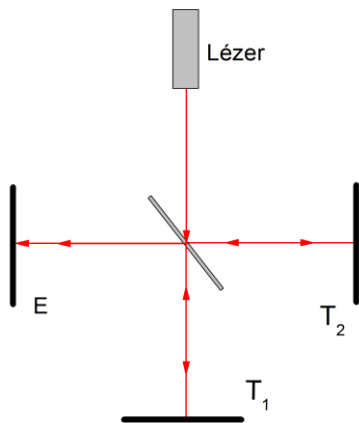
Megjegyzés:

- Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a feltételek levezetésekor erőteljesen támaszkodtunk arra, hogy a geometriai optikai gondolatmenetekhez hasonlóan most is csak az optikai tengely közelébe eső, tehát paraxiális sugármeneteket kell figyelembe vennünk.

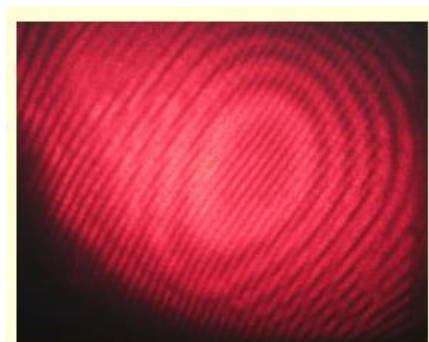
[Vissza >>>](#)

F26. Michelson–Morley-kísérlet

Michelson-interferométer összeállítása lézertény nélkül (a szertárak szokásos anyagával) majdnem reménytelen, s ha mégis sikerülne, fényszegény volta miatt aligha felelne meg a demonstrálás igényeinek. Lézerrel és két jó minőségű felületi tükörrel azonban nagyobb nehézség nélkül elkészíthető. A kísérleti összeállítás felülnézeti vázlatrajzát és a kész összeállítás fotóját az ábra mutatja.



Az összeszerelést a következő lépésekben célszerű végezni: Állítsunk nyalábosztót (vékony plánparallel lemez, esetleg diakeret üvege) a tágítatlan nyaláb útjába, 45° -os szögben! Helyezzük az egyik (T_1) tükröt a nyalábosztótól 10-15 cm-re úgy, hogy a róla visszaverődő fénysugár – a nyalábosztó lemezen át – a lézerbe jusson vissza! Fogjuk fel a nyalábosztóról visszavert fényt az E ernyőn! Helyezzük most a másik (T_2) tükröt a nyalábosztóról közvetlenül visszavert (az átmenőre merőleges) sugár útjába! A két tükröt nyalábosztótól mért távolsága kb. egyenlő legyen. Forgassuk a második tükröt mindaddig, amíg a róla visszaverődő nyaláb foltja az ernyőn a másik nyaláb foltjával egybe nem esik! Végül állítsunk $f = 20\text{-}30$ mm fókusztávolságú lencsét – nyalábtágítónak – a lézer és a nyalábosztó lemez közé: az ernyőn koncentrikus körökből álló interferogram jelenik meg (fotó)!



(Ha a kép ettől erősen eltérő lenne, akkor a jusztírozást finomítani kell.) Az interferáló nyalábok útjába tett lencsével az interferogram kinagyítható. Takarjuk el a nyalábosztó és az egyik tükröt a fényt: az interferenciakép eltűnik!

Ha a nyalábosztó és az egyik tükör között megváltoztatjuk a levegő sűrűségét melegítéssel (égő gyertyát tartunk a fénynyaláb alá,), akkor – az optikai úthossz változása miatt – az interferenciakép változik, deformálódik.

Toljuk el az egyik tükröt önmagával párhuzamosan: a csíkrendszer átrendeződik! Az eltolás mértékéből és az ezzel járó sávváltozások megszámlálásából a fény hullámhossza kiszámolható. (A tükör $\lambda/4$ elmozdításához $\lambda/2$ optikai úthossz-változás tartozik, ezáltal egy világos csík helyére sötét kerül.) A hullámhosszmérést azonban csak merev, rezgésmentes elrendezésben, csavarmikrométerrel mozgatott tükörrel lehet elvégezni.

Az elrendezés – elegendően nagy, rezgésmentes asztalon – a lézerefény koherenciahosszának mérésére is használható. A tükrök egyikét – önmagával párhuzamosan – addig távolítjuk a nyalábosztó lemeztől, amíg az interferenciajelenség meg nem szűnik. A két nyaláb optikai úthosszának különbsége most a lézerefény koherenciahosszával egyenlő.

Megjegyzés:

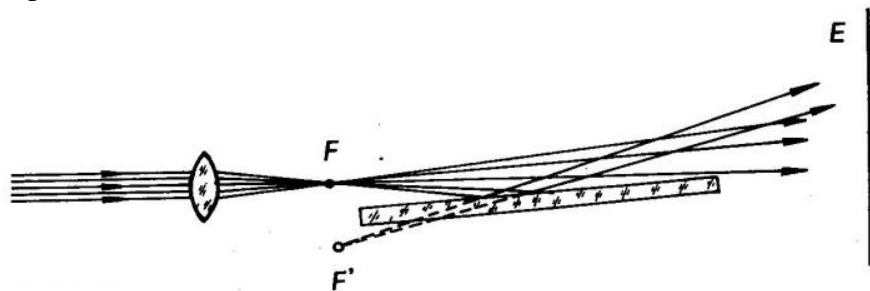
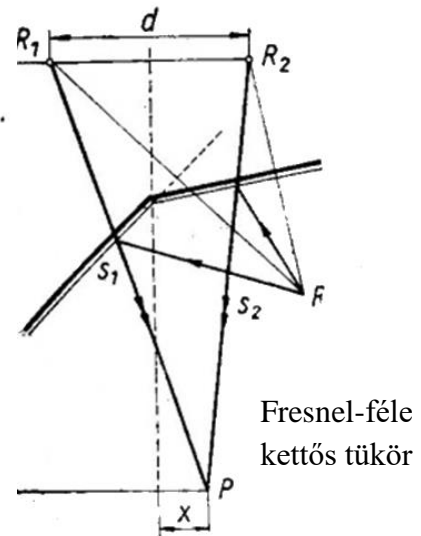
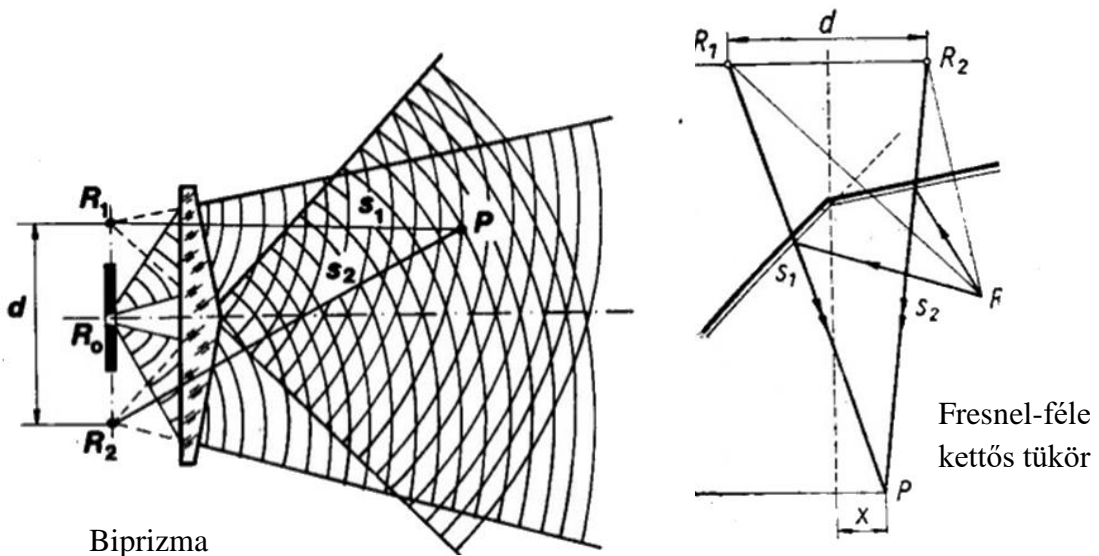
- A kísérlet tipikus példája a fény amplitúdó osztással történő kettéválasztásának. A hullámfront osztással szemben most a félig áteresztő tükörrre érkező hullámfront minden helyéről indul átmenő és visszavert nyaláb is.

[Vissza >>>](#)

F27. Fényinterferencia hullámfront osztással (biprizma, Fresnel-féle kettős tükör, Lloyd-tükör)

A Young-kísérletben a megvilágító fényből a két lyuk hullámfront osztással két koherens fényforrást hoz létre, amelyek fénye az ernyőn találkozáva interferál. Az interferenciát a Young-kísérlet mintájára bármely olyan kísérlettel bemutathatjuk, amelyben egyetlen fényforrás fényét két úton vezetjük, majd újra találkoztatjuk.

Az ábrák néhány közismert kísérleti elrendezést mutatnak sematikususan, amelyekkel ez megvalósítható.



Lloyd-tükör

A biprizmás kísérletben keskeny rés fényét kettős prizma bocsátjuk. A fény különbözőképpen tör meg a két prizmafélen, és a tapasztalat szerint úgy viselkedik mintha két résből indult volna ki. Ezeket a fényforrásokat a geometriai optikából jól ismert terminológia szerint virtuális fényforrásoknak nevezzük. Az ernyőn a virtuális fényforrások fényének interferenciáját észleljük.

A Fresnel-féle kettős tükör a tükrök találkozó élével (ez az ábrán a papír síkjára merőleges) párhuzamos résről alkot képet, a két kép virtuális fényforrásként működik, amelyek az ernyőn interferenciát hoznak létre.

A Lloyd-tükör esetén egyetlen tükörre bocsátunk keskeny résből súrlódó beeséssel fénynyalábot. A rés fénye és a rés tükörképe, mint virtuális fényforrás fényéből (virtuális fényforrás) állónyalábok interferenciáját észleljük az ernyőn.

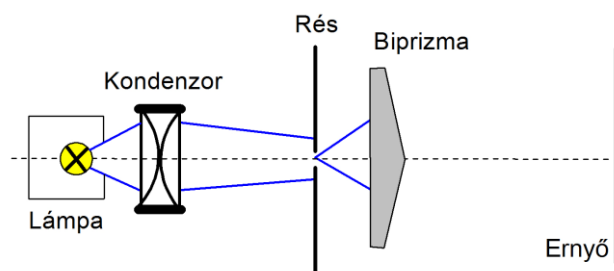
A sematikus ábrák a biprizmával, a Fresnel-féle kettős tükörrel és a Lloyd-tükörrel végzett kísérleti elrendezéseknek a megvilágító résre merőleges metszetét mutatják. A biprizma esetén bejelöltük a virtuális fényforrásokból induló nyalábok átfedési tartományát is.

A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy az eredmények értékeléséhez mindhárom esetben ugyanaz az egyszerűsített vázlat használható, hiszen mindig két meghatározott távolságban elhelyezkedő fényforrás interferencia képét kell értelmezni.

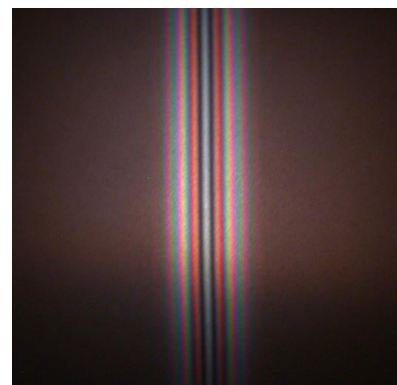
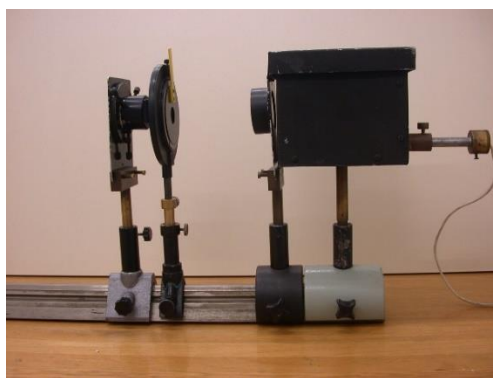
A következőkben a biprizmás kísérlet összeállítását részletezzük.

Fényinterferencia létrehozása biprizmával

A biprizmás kísérletben, mint már említettük, a hullámfront osztást úgy valósítjuk meg, hogy a résen áthaladó fénynyaláb útjába kettős prizmat teszünk. A kísérleti összeállítás vázlata a következő ábrán látható.



Az izzólámpa összetett fényét kondenzorlencse segítségével párhuzamosítjuk, majd réssel kiválasztunk belőle egy keskeny fénynyalábot, amit a biprizmára bocsátunk. A prizma két fele két koherens virtuális fényforrást hoz létre, amelynek fénye az ernyőn átfedésbe kerül és interferencia képet hoz létre. A kísérleti összeállítást és az ernyőn látható színes interferencia képet a következő ábra mutatja.



Az ernyőn a fényerős helyeken színeképet láthatunk. Ebből arra következtethetünk, hogy a különböző színű homogén fényhullámok hullámhossza különböző, és emiatt az egyes színekre

az ernyő más-más pontjaiban jön létre kioltás, és a megmaradó színek más-más arányban keverednek.

A kísérleti elrendezés egyszerű módosításával megmutathatjuk, hogy a biprizma valóban két virtuális fényforrást hoz létre, és meghatározhatjuk távolságukat is. Tegyük ismert f fókusz távolságú lencsét a biprizma és az ernyő közé és mozgassuk addig, míg az ernyőn két éles fehér csíkot nem látunk. A két csík a két virtuális fényforrás képe. A k képtávolság és az f fókusz távolság ismeretében a tárgy távolságra (a virtuális fényforrások és a lencse közötti távolságra) $t = \frac{kf}{k-f}$, nagyításra pedig $N = \frac{k-f}{f}$ adódik.

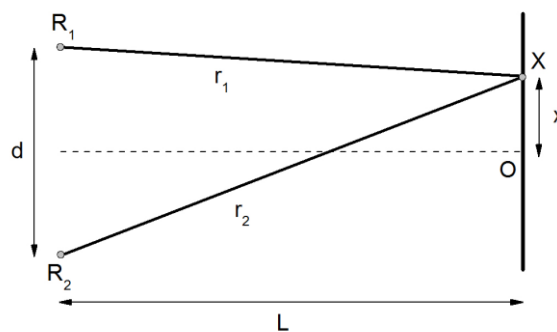
Hasonló interferenciaképet kapunk a Fresnel-féle kettős tükörrel és a Lloyd-tükörrel, de mint részletesen tárgyaltuk a Young-féle kétréses kísérletben is.

Két fényforrás interferenciaképének értelmezése

Az interferenciakísérletekben az interferencia megfigyelésére szolgáló ernyőt általában igen nagy (végtelennek tekinthető) távolságban helyezzük el a kísérleti berendezéstől. A számítások során a nagy távolságból adódó közelítést kell érvényre juttatnunk.

A mintázat értelmezése az ernyőre érkező sugarak útkülönbségéből

A következő számítással a két koherens (esetleg virtuális) fényforrásból induló fénynyaláb találkozásából keletkező interferenciakép mennyiségi leírását adjuk meg. A számítás a fentiekben említett mindhárom kísérletre érvényes. Az ábra már csak a fényforrásokat és a számítást illusztráló sugármeneteket mutatja.



Az ábrán R_1 és R_2 a két koherens fényforrást jelenti (ezek a biprizmával és a Fresnel kettős tükörrel végzett kísérletben virtuális fényforrások), d a fényforrások közötti távolság, L pedig a fényforrásokat összekötő egyenes és az ernyő távolsága. Az interferenciát az ernyőnek az O ponttól x távolságban lévő pontjában vizsgáljuk. Ennek a pontnak a fényforrásoktól mért távolsága rendre, r_1 és r_2 .

A két fényforrásból az X pontba érkező fénysugarak útkülönbsége

$$s = r_1 - r_2$$

Az ábra alapján:

$$r_1^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + L^2 \quad \text{és} \quad r_2^2 = \left(\frac{d}{2} - x\right)^2 + L^2$$

Kivonva az első egyenletből a másodikat:

$$r_1^2 - r_2^2 = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 2dx$$

Ha az ernyő és a fényforrások távolsága elegendően nagy, akkor $r_1 - r_2 \approx 2L$, azaz

$$r_1 - r_2 \approx \frac{dx}{L}$$

Mivel a két hullámforrás teljesen azonos, a belőlük kiinduló hullámok kezdőfázisa is megegyezik, így a két hullám az x pontban akkor oltja ki egymást, ha útkülönbségük a fél hullámhossz páratlan számú többszöröse:

$$(2k + 1) \frac{\lambda}{2} = \frac{dx}{L}$$

Sötét csíkok tehát az

$$x = (2k + 1) \frac{\lambda L}{2d}$$

helyeken jelennek meg.

Maximális erősítés ott következik be, ahol az útkülönbség a fél hullámhossz páros számú többszöröse. (Természetesen ez azt jelenti, hogy az útkülönbség a hullámhossz egész számú többszöröse, célszerű azonban a kioltásra vonatkozóval összhangban lévő megfogalmazás.)

Az erősítési helyek:

$$x = k \frac{\lambda L}{d}$$

Az összefüggések mutatják, hogy mind a kioltási helyek, mind a maximális erősítések világos csíkjai $\lambda L/d$ távolságonként követik egymást az ernyőn. Így néhány sötét csík távolságát az ernyőn lemérve meghatározhatjuk a fény hullámhosszát.

A számítás alapján érthető az is, hogy fehér fényű megvilágítás esetén az ernyőn színes csíkrendszert kapunk. Az ernyő adott pontjában ugyanis csak meghatározott hullámhosszúságú fényre teljesül a kioltás feltétele

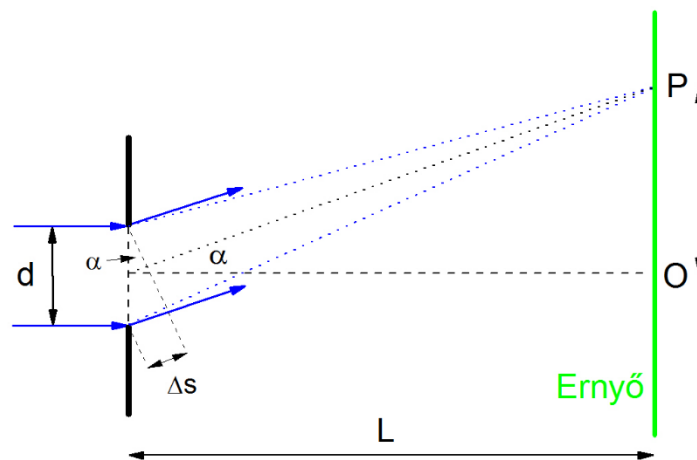
Megjegyezzük, hogy az itt bemutatott számítás csak a Pitagorasz-tételt és algebrai átalakításokat, valamint a geometriai optikában megszokott közelítéseket tartalmazza, így fogalmilag egyszerűbb, mint a Young-kísérlet értelmezésekor felhasznált gondolatmenet.

A mintázat értelmezése adott irányba haladó sugarak útkülönbségével

Ebben az esetben az ernyő távolságát eleve olyan nagynak tekintjük, hogy pontjaiban a két fényforrásból az ernyő adott pontja felé induló sugarak párhuzamosnak tekinthetők.

Szemléletesen úgy fogalmazhatunk, hogy a párhuzamosok a végtelenben találkoznak. Az ernyő pontjait így a fénysugarak iránya különbözteti meg.

A könnyebb érthetőség kedvéért érdemes lépésről lépésre végigelemezni a csíkrendszer kialakulását. Milyen irányban alakulnak erősítések, illetve kioltások? Először válasszuk ki az első világos csíkhöz tartozó irányt (lásd ábra). A két fényforrásból kiinduló nyaláb lényegében párhuzamos, így útkülönbségüket az szabja meg, hogy az egyik sugár kiinduláskor távolabbról indul, mint a másik:



$$\Delta s = d \sin \alpha_1$$

$$\sin \alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{a_1}{L} = \frac{\Delta s}{d}$$

vagyis az első erősítés feltétele az, hogy az útkülönbség a megegyezzen a hullámhosszal, azaz:

$$d \sin \alpha_1 = \lambda$$

amiből az első erősítés irányára:

$$\sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{d}$$

A további világos pontok helyén $\Delta s = n\lambda$ feltétel teljesül, így

$$a_n = \frac{n \cdot \lambda \cdot L}{d} \quad \text{és} \quad \sin \alpha_n = n \frac{\lambda}{d}$$

A kioltás helyén az útkülönbség a fél hullámhossz páratlan számú többszöröse, tehát a kioltási irányokban:

$$\sin \alpha_n = (2n + 1) \frac{\lambda}{2d}$$

Ha felhasználjuk, hogy az ernyő nem végtelen, hanem csak igen nagy L távolságban van a fényforrásoktól, akkor nemcsak a kioltások és erősítések irányát, hanem az ernyőn való elhelyezkedését is meghatározhatjuk. Felhasználva, hogy az interferencia csak viszonylag kicsiny szögek esetén észlelhető (lásd kiterjedt fényforrások koherencia feltétele), akkor az erősítésre és kioltásra vonatkozó összefüggésekben alkalmazhatjuk a

$$\sin \alpha = \frac{\Delta s}{d} \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{L}$$

közelítést, ahol α az interferáló sugarak irányát, a pedig az ernyőn való találkozás helyének az O ponttól mért távolsága.

Ennek megfelelően az erősítések helyét az

$$a_n = \frac{n \cdot \lambda \cdot L}{d}$$

a kioltásokét pedig az

$$a_n = \frac{(2n + 1) \cdot \lambda \cdot L}{2d}$$

összefüggés határozza meg. Az összefüggések megegyeznek a korábbi közelítéssel kapott eredményekkel. Már itt érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy a csíkok távolsága csak akkor észlelhető, ha a λ hullámhossz és a források d távolsága *összemérhető*. Ha a d távolság nagyon nagy, akkor a csíkok már nem különülnek el.

Megjegyzés:

- A fizikai optikai kísérleteket a szakirodalom aszerint osztályozza, hogy a kísérleti eszköz és az ernyő közötti távolság véges méretű, vagy olyan nagy, hogy már végtelennek tekinthető. Előbbi esetben Fresnel-féle, az utóbbiban Fraunhofer-féle elrendezésről beszélünk. Az interferencia kísérletek döntő többségét Fraunhofer-féle elrendezésben végezzük.
- A két fényforrásos interferencia kísérletek értelmezésekor az első esetben mégis a véges ernyő távolságnak megfelelően, tehát Fresnel-elrendezésre vonatkozóan kezdtük a számításokat, és csak az útkülönbség meghatározása után használtunk a nagyon nagy ernyő távolságból adódó közelítést (amikor az ernyő adott pontjának a fényforrásoktól mért távolságösszegét a fényforrások és az ernyő távolságának kétszeresével helyettesítettük). Ez a számítás csak a Pitagorasz-tételt és algebrai átalakításokat, valamint a geometriai optikában megszokott közelítéseket tartalmazza, így fogalmilag egyszerűbb, mint a második esetben alkalmazott közelítés.

A második közelítés alapvetően Fraunhofer elrendezésre vonatkozik, az útkülönbség meghatározásakor kiindulásként használja az abból adódó egyszerűsítéseket. (A fényforrások és az ernyő távolságát olyan nagynak tekintjük, hogy a két fényforrásnak az ernyő adott pontjában interferáló sugarai párhuzamosnak tekinthetők.) Ebben a közelítésben a kioltások és az erősítések irányát tudjuk meghatározni. Amennyiben az ernyőn mérhető helyüket összefüggésbe akarjuk hozni ezekkel az irányokkal, akkor figyelembe kell vennünk, hogy az ernyő nem végtelen távolságban helyezkedik el a fényforrásoktól.

A két közelítés azonos eredményre vezet. A második azonban fogalmilag sokkal nehezebb, a tanulók általában nehezen értik, hogy az interferáló sugarakat párhuzamosnak tekinthetjük. Ezért azokban az osztályokban, ahol a két fényforrásos interferencia mennyiségi értelmezésénél nem megyünk tovább, az első eljárást ajánljuk. Amennyiben azonban a rés elhajlási képét, illetve a rács interferencia képét is értelmezni kívánjuk, akkor nem kerülhetjük el a második módszer alkalmazását.

[Vissza >>>](#)

F28. Az interferencia energiaviszonyai (csak tanároknak)

A koherencia fogalmának bevezetésekor két hullám találkozását vizsgálva abból indultunk ki, hogy a találkozó hullámok pontosan azonos frekvenciájúak, fázisban azonban eltérhetnek. Az interferenciaképesség, a koherencia feltétele ebben az esetben az, hogy a hullámok fáziskülönbsége időben állandó legyen. Ennek alapján megállapítottuk az erősítés és a gyengítés feltételeit. (Ha a találkozó hullámok $\Delta\varphi$ fáziskülönbségére $\Delta\varphi = 2n\pi$, akkor maximális erősítés, ha $\Delta\varphi = (2n + 1)\pi$ akkor maximális gyengítés tapasztalható.) Nem részleteztük (esetleg szándékosan elhallgattuk) azonban, hogy az interferenciakép pontosan mit mutat és milyen fizikai hatás következménye. Az elhallgatás nem véletlen! A mese szinten adott magyarázatnál pontosabb értelmezéshez két nehéz és elvont fizikai fogalmat kell megismertetni a diákokkal, az *energiaáram-sűrűség* és az *időátlag* fogalmát.

A sugárzás energiaáram-sűrűsége és a fényhullám közötti kapcsolat

Nyilvánvalóan (szinte indoklás nélkül) elfogadható, hogy az észlelhető hatást a fény által az ernyőre szállított energia hozza létre. Ha az interferenciát fotólemez feketedésével érzékeljük, akkor az is megállapítható, hogy a feketedés arányos a megvilágítás erősségével és a megvilágítási idővel. Az adott helyre érkező megvilágítás erősségét az $I(x, t)$ energiaáram-sűrűség szabja meg, így a fotólemez ΔA területű részének elsötétedése, azaz az interferenciacsíkok erőssége $I(x, t)\tau\Delta A$ val arányos, ahol τ a megvilágítás ideje. Az *energiaáram-sűrűség* definíció szerint (az optika szakirodalmában elfogadott terminológiával *irradiancia*) a sugárzás irányára merőleges egységnyi felületre egységnyi idő alatt érkező energia. A fényhullám, következésképpen, mint látni fogjuk, az irradiancia is időben rendkívül gyorsan változó jelenség, vagyis a megfigyelés ideje alatt is gyorsan változik. Ezért az irradianciát az időátlagával $\langle I \rangle$ kell helyettesíteni. Amennyiben az átlagolás ideje sokkal hosszabb, mint a fény egyetlen periódusa, akkor az irradiancia időátlaga tetszőleges időtartamra vonatkozóan jól közelíthető a periódusidőre vett átlaggal.

Az interferenciakép értelmezéséhez tehát az irradiancia és a fényhullámot leíró mennyiségek közötti kapcsolatot kell ismernünk. Mint ismeretes az irradiancia pillanatnyi értéke a beeső hullám pillanatnyi térintenzitás jellemzőinek négyzetével (E^2, B^2) arányos. Ezen a ponton azonban, ha nem akarunk pusztán tanári közlésre szorítkozni, akkor a fénytani tantervi elhelyezkedésétől és az előzmények tárgyalásának mélységétől függően kell az állítást megindokolni. A választóvonal ebben a tekintetben az, hogy az elektromágneses hullámok tárgyalása előtt, vagy után kerül sor a fényhullámokra.

Egyszerű a helyzet, ha az elektromágneses hullámokat részletesen tárgyaltuk. Ekkor hivatkozhatunk arra, hogy az irradianciát a *Poynting-vektor* adja meg, amelynek abszolút értéke az elektromos térerősség négyzetével arányos.

Amennyiben a Poynting-vektor nem szerepelt, vagy a fényhullám az elektrosztatika után, de az elektromágneses hullámok előtt kerül terítékre, akkor közelítő magyarázatként megelégedhetünk azzal, hogy a ρ_E energiasűrűség és az energiaáram-sűrűség közötti $I = v\rho_E$

kapcsolatra (v a hullám terjedési sebessége) hivatkozunk és felhasználjuk, hogy az elektromos tér energiasűrűsége $\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$.

Következésképpen $I \sim E^2$. Az utóbbi gondolatmenet már igen sok közlés szintű, illetve „kézlengető” indoklású elemet tartalmaz. Egyrészt az elektromos tér energiasűrűsége vonatkozó összefüggést középiskolai szinten, minden bizonnyal a síkkondenzátor esetére vonatkozó levezetésből kell általánosítanunk, másrészt hallgattunk az elektromágneses tér mágneses energiasűrűségéről. (Ezt azért tehetjük meg, mert az elektromágneses hullámban az elektromos és a mágneses energiasűrűség minden pillanatban ugyanakkora, így az arányosság kimondásához elegendő az elektromos térre hivatkozni.)

Szintén a közlés szintjére kell visszalépnünk, ha a fényhullámok a mechanikai hullámokkal egy időben, vagy utána, de az elektromágneses hullámok előtt kerülnek tárgyalásra. Ha korábban részleteztük a rugalmas hullámok energiaviszonyait, akkor analógiára hivatkozva fogadhatjuk (fogadtathatjuk) el, hogy a hullám energiasűrűsége a hullám pillanatnyi térintenzitás jellemzőinek pillanatnyi értékének négyzetével arányos. Amennyiben ez sem történt meg, akkor az $I \sim E^2$ összefüggés tanári közlésére kell hagyatkoznunk.

Megjegyzés:

- Ha az interferenciakép energiaviszonyait tanórán vagy szakkörön részletezni kívánjuk, akkor mindenképpen célszerű, ha akár tanári közlésként is, de tudatosítjuk, hogy a fényhullámban az elektromos tér hullámzik. (Természetesen a mágneses tér is, de erről csak akkor érdemes beszélni, ha az elektromágneses hullámokat már tárgyaltuk. Az elektromágneses hullámban az elektromos és mágneses tér teljesen azonos szerepet tölt be így többnyire elegendő az egyik viselkedését leírni.)

Az átlagos energiaáram-sűrűség

A következő kérdés, mint már megállapítottuk az energiasűrűség egy periódusidőre vett átlagának meghatározása. Az egyszerűség kedvéért foglalkozzunk egydimenziós hullámokkal, és írjuk fel a monokromatikus fényhullámot az

$$E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx)$$

alakban (a kezdőfázist zérusnak vettük, de ez nem sérti a gondolatmenet általánosságát). Az energiaáram-sűrűség pillanatnyi értéke:

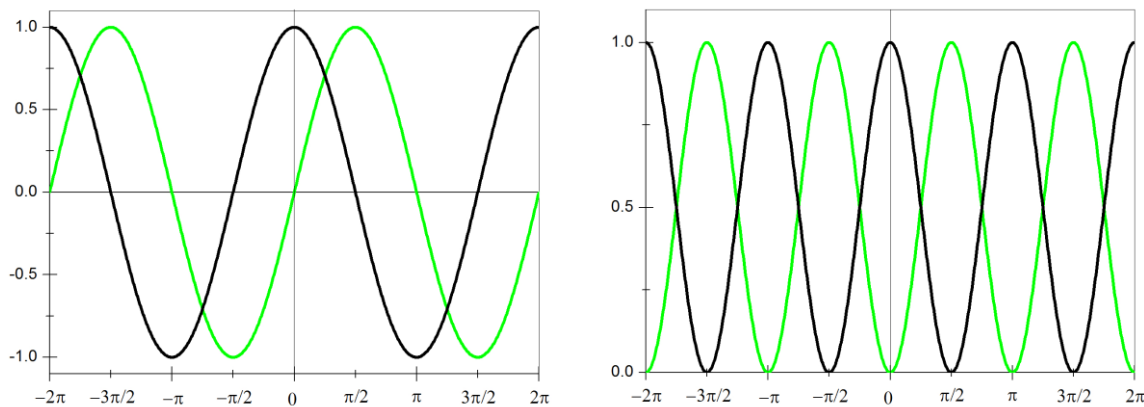
$$I(x, t) \approx [E(x, t)]^2 = E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

Így az időátlag:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) dt = \frac{1}{2} E_0^2$$

Középiskolai szinten azonban az átlagolás definíció szerinti, integrálással való elvégzése általában nem járható út. Helyette a következő eljárást ajánljuk. Nyilvánvalóan elegendő a koszinusz négyzet függvény időátlagát meghatározni, hiszen $E_0^2 = \text{konstans}$. A függvények időátlaga szemléletesen úgy határozható meg, hogy a függvény grafikonja alatti területet elosztjuk az átlagolás időtartamával, illetve esetünkben tehát a periódusidővel. Rajzoljuk fel

egymás alá az $x = 0$ helyen a szinusz, a koszinusz, valamint a szinusz- és koszinusznégyszet függvények egy periódusát. (Táblai rajzként szabadkézi rajzot érdemes készíteni, de nagyon hasznos lehet, akár házi feladatként, a függvények számítógépes ábrázolása is.) Látható, hogy a szinusz és koszinusz függvény alatti (előjeles) terület szimmetria okból zérus. Látható továbbá, hogy a koszinusz függvényt $\pi/2$ -vel jobbra tolva a szinusz- és koszinusz-függvény fedésbe hozható. Hasonlóképpen fedésbe hozható a szinusznégyszet és a koszinusznégyszet függvény, a koszinusznégyszet függvény $\pi/2$ -vel jobbra tolásával. Ez azt jelenti, hogy a két függvény alatti terület megegyezik. A trigonometriából ismert tény, hogy a szinusz és koszinusz függvény négyzetének összege 1. A két függvény négyzetösszege alatti terület tehát éppen T , vagyis időátlaga 1. Így akár a szinusznégyszet, akár a koszinusznégyszet függvény egy periódusra vett időátlaga $1/2$.



A baloldali ábra a szinusz és a koszinusz függvény két periódusát, a jobboldali pedig a szinusznégyszet és a koszinusznégyszet függvény két periódusát mutatja.

Az eredmény nemcsak az $x = 0$ helyen, hanem mindenütt érvényes, ami azt jelenti, hogy az egyenes mentén terjedő monokromatikus hullám átlagos energiaáram-sűrűsége mindenütt ugyanannyi.

Egyetlen harmonikus hullám átlagos irradianciája tehát:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} E_0^2$$

Két, fáziskülönbséggel találkozó harmonikus hullám energiaáram-sűrűsége

Találkozzon két azonos periódusidejű, különböző hullámforrásból induló harmonikus hullám rendre x_1 és x_2 út megtétele után. Az első hullám kezdőfázisa legyen 0, másodiké φ , tehát a hullámok legyenek:

$$E_1(x, t) = E_{01} \cos(\omega t - kx_1)$$

$$E_2(x, t) = E_{02} \cos(\omega t - kx_2 + \varphi)$$

A találkozás helyén az eredő hatás már csak az idő függvénye, hiszen a kiindulási helytől mért távolságok és a kezdőfázisok állandók. Emiatt a hullámfüggvények az

$$E_1(t) = E_{01} \cos(\omega t + \delta_1)$$

$$E_2(t) = E_{02} \cos(\omega t + \delta_2)$$

alakra hozhatók, ahol $\delta_1 = -kx_1$, és $\delta_2 = -kx_2 + \varphi$ időtől független fázisállandók. A szuperpozíció elv értelmében a találkozás helyén az eredő hullám az

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = E_{01} \cos(\omega t + \delta_1) + E_{02} \cos(\omega t + \delta_2)$$

összefüggés szerint változik, az energiaáram-sűrűség pedig:

$$I(t) = (E_{01} \cos(\omega t + \delta_1) + E_{02} \cos(\omega t + \delta_2))^2$$

Írjuk be a hullámok helyére az $E = \sqrt{I}$ összefüggés megfelelő alakját:

$$I(t) = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Az összefüggés tagonként átlagolható, tehát

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\langle \sqrt{I_1 I_2} \rangle$$

Az átlagos irradiancia tehát az összetevő hullámok átlagos irradianciájából és az

$$\langle I_{12} \rangle = 2\langle \sqrt{I_1 I_2} \rangle$$

interferenciatagból tevődik össze. Az átlagos irradianciák a $\langle I \rangle = \frac{1}{2} E_0^2$ összefüggés alapján kifejezhetők a hullámamplitúdókkal.

Az interferenciatag meghatározásához írjuk vissza a gyökjel alá az irradianciák hullámfüggvénnyel kifejezett alakját, majd bontsuk fel a koszinusz függvényeket a megfelelő trigonometrikus azonosságok segítségével:

$$\begin{aligned} \langle I_{12} \rangle &= \langle 2E_{01} \cos(\omega t + \delta_1) E_{02} \cos(\omega t + \delta_2) \rangle \\ &= 2E_{01} E_{02} \{ \langle (\cos \omega t \cos \delta_1 - \sin \omega t \sin \delta_1) (\cos \omega t \cos \delta_2 - \sin \omega t \sin \delta_2) \rangle \} \end{aligned}$$

Elvégezve a beszorzást és tagonkénti átlagolásra áttérve

$$\begin{aligned} \langle I_{12} \rangle &= 2E_{01} E_{02} \{ \langle \cos^2 \omega t \cos \delta_1 \cos \delta_2 \rangle + \langle \sin^2 \omega t \sin \delta_1 \sin \delta_2 \rangle \\ &\quad - \langle \cos \omega t \sin \omega t \cos \delta_1 \sin \delta_2 \rangle - \langle \sin \omega t \cos \omega t \sin \delta_1 \cos \delta_2 \rangle \} \end{aligned}$$

A jobboldal első két tagja az átlagolás után, mivel $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$

$$E_{01} E_{02} \{ \cos \delta_1 \cos \delta_2 + \sin \delta_1 \sin \delta_2 \} = E_{01} E_{02} \cos(\delta_1 - \delta_2)$$

A harmadik és negyedik tagé pedig:

$$-2E_{01} E_{02} \langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle (\cos \delta_1 \sin \delta_2 + \sin \delta_1 \cos \delta_2) = 0$$

hiszen

$$\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin 2\omega t \rangle = 0$$

Következésképpen:

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + \langle \sqrt{I_1 I_2} \rangle = \frac{1}{2} E_{01}^2 + \frac{1}{2} E_{02}^2 + E_{01} E_{02} \cos(\delta_1 - \delta_2)$$

Az interferenciatagot tehát az összegződő hullámok fáziskülönbsége szabja meg. Maximális erősítés esetén $\cos(\delta_1 - \delta_2) = 1$. Ilyenkor az interferenciatag pontosan ugyanakkora irradianciát ad, mint az interferáló hullámok egymástól független irradianciájának összege, azaz

$$\langle I_{max} \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + \langle \sqrt{I_1 I_2} \rangle = E_{01}^2 + E_{02}^2$$

Maximális gyengítéskor $\cos(\delta_1 - \delta_2) = -1$. Ilyenkor az eredő irradiancia zérus. Érdekes még megemlíteni, hogy $\cos(\delta_1 - \delta_2) = 0$ esetén az irradiancia éppen a két összetevő hullám irradianciájának összege.

Figyelembe véve a fázisszögek jelentését:

$$\delta_1 - \delta_2 = k(x_2 - x_1) - \varphi$$

Amennyiben $\varphi = 0$ akkor az interferenciát a találkozó hullámok útkülönbsége szabja meg. Ennek megfelelően a szokott eredményt kapjuk. Maximális erősítést a

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2n\pi$$

maximális gyengítést pedig a

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2(n + 1)\pi$$

feltétel szerint kapunk. Ez megfelel annak, hogy azonos kezdőfázisú hullámok akkor erősítik egymást, maximálisan, ha útkülönbségük a hullámhossz egészszámú többszöröse, és akkor gyengítik maximálisan egymást, ha útkülönbségük a hullámhossz felének páratlan számú többszöröse.

Megjegyzés:

- A hullámok felírásakor azért használtunk koszinusz függvényt, mert, ha a későbbiekben esetleg áttérünk a komplex számos jelölésmódra, akkor a koszinusz függvény jelenti a fizikai tartalmat hordozó valós részt.
- A fentiek leírás egyenes mentén terjedő hullámokra, illetve síkban terjedő körhullámokra, vagy térbeli gömbhullámokra alkalmazható.
- Az interferenciakép láthatósága a kép kontrasztosságától függ. Ennek jellemzésére szokás bevezetni az úgynevezett láthatóságot (V) a

$$V = \frac{\langle I_{max} \rangle - \langle I_{min} \rangle}{\langle I_{max} \rangle + \langle I_{min} \rangle}$$

függvénnyel. Látható, hogy két azonos amplitúdójú és azonos frekvenciájú hullám esetén a láthatóság 1, hiszen $\langle I_{min} \rangle = 0$.

Több (nagyon sok) azonos körfrekvenciájú, különböző fázisú hullám interferenciája

Legyen az N darab, adott helyen találkozó hullám:

$$E_i(t) = E_{0i} \cos(\omega t - kx_i + \varphi_i) \quad i = 1 \dots N$$

ahol x_i és φ_i rendre az i -ik hullám kiindulópontjának és a találkozási helyének a távolsága, valamint kezdőfázisa. Most is érdemes bevezetni a $\delta_i = -kx_i + \varphi_i$ jelölést a hullámok fázisának helyfüggő részére. Ezzel a hullámok

$$E_i(t) = E_{0i} \cos(\omega t + \delta_i) \quad i = 1 \dots N$$

alakban írhatók fel. Összegezzük az N darab hullámot és fejtsük ki a koszinusz függvényt a két szög összegére vonatkozó tétel szerint:

$$E = \sum_i E_i = \sum_i E_{0i} (\cos \omega t \cos \delta_i - \sin \omega t \sin \delta_i)$$

Emeljük ki az összegezés alól az időfüggő részeket

$$E = \cos \omega t \sum_i E_{0i} \cos \delta_i - \sin \omega t \sum_i E_{0i} \sin \delta_i$$

és keressük az összeget egyetlen

$$E = E_0 \cos(\omega t + \delta) = E_0 \cos \omega t \cos \delta - E_0 \sin \omega t \sin \delta$$

Ez a két függvény csak akkor lehet egyenlő minden pillanatban, ha a szinuszos és koszinuszos tag külön-külön megegyezik, tehát:

$$\cos \omega t \sum_i E_{0i} \cos \delta_i = E_0 \cos \omega t \cos \delta$$

$$\sin \omega t \sum_i E_{0i} \sin \delta_i = E_0 \sin \omega t \sin \delta$$

Az egyenleteket négyzetre emelve és összeadva, valamint felhasználva, hogy $\sin^2 \delta + \cos^2 \delta = 1$ az E_0 amplitúdóra azt kapjuk, hogy

$$\left(\sum_i E_{0i} \cos \delta_i \right)^2 + \left(\sum_i E_{0i} \sin \delta_i \right)^2 = E_0^2$$

A második egyenletet az elsővel elosztva adódik, hogy

$$\frac{\sum_i E_{0i} \sin \delta_i}{\sum_i E_{0i} \cos \delta_i} = \tan \delta$$

Az amplitúdóra vonatkozó egyenletben elvégezve a négyzetre emelést és az azonos amplitúdójú tagokat összerendezve, valamint figyelembe véve, hogy az N tagú összegek négyzete az egyes tagok négyzetéből, valamint a tagok páronként vett kétszeres szorzatából áll:

$$\sum_i E_{0i}^2 (\sin^2 \delta_i + \cos^2 \delta_i) + 2 \sum_{i>j} \sum_j E_{0i}^2 (\cos \delta_i \cos \delta_j + \sin \delta_i \sin \delta_j) = E_0^2$$

Mivel $\sin^2 \delta_i + \cos^2 \delta_i = 1$ és $\cos \delta_i \cos \delta_j + \sin \delta_i \sin \delta_j = \cos(\delta_i - \delta_j)$, ebből

$$\sum_i E_{0i}^2 + 2 \sum_{i>j} \sum_j E_{0i}^2 \cos(\delta_i - \delta_j) = E_0^2$$

Ennek az összefüggésnek legfontosabb tanulsága az, hogy tetszőleges számú, azonos frekvenciájú harmonikus hullám összege kifejezhető egyetlen ugyanilyen frekvenciájú hullámmal.

Vegyük észre továbbá, hogy amennyiben a fázisok állandónak tekinthetők, akkor egyszerűen kifejezhető a hullámok szuperpozíciójából adódó átlagos irradiancia:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 = \frac{1}{2} \sum_i E_{0i}^2 + \sum_{i>j} \sum_j E_{0i}^2 \cos(\delta_i - \delta_j)$$

Az atomi fénykibocsátási folyamat hatása a hullámok szuperpozíciójára

Alkalmazzuk a fentiekben levezetett összefüggést az atomi fénykibocsátási folyamatban keletkező hullámokra. A vizsgált közönséges fényforrás, például izzólámpa, álljon N darab atomi fényforrásból. Ennek a fényforrásnak a fényárama fotonok tömegéből áll, amelyek összességét elektromágneses hullámként érzékeljük. Tegyük fel, hogy minden atom azonos frekvenciájú fényt bocsát ki. (Ez, mint látni fogjuk több okból is lehetetlen, közelítőleg azonban helyes fizikai képet ad.) A hullámkép megtartása mellett az egyes fotonokat, rövid hullámimpulzusokként képzelhetjük el, amelyek időben 1-10 ns hosszúságúak. Az egyes atomok a többi atomtól és a saját maguk által már kibocsátott hullámvonalatoktól is függetlenül bocsátják ki az elemi hullámvonalatokat. Másként fogalmazva az atomok által kibocsátott elemi hullámvonalatok fázisa legfeljebb 10 ns-ig tekinthető állandónak, egyébként véletlenszerűen változik. Következésképpen a fényforrás bármely két atomja által kibocsátott fény fáziskülönbsége is legfeljebb 10 ns-ig lehet állandó, vagyis a közönséges fényforrások fénye legfeljebb ennyi ideig lehet koherens, azaz interferenciaképes.

Tegyük fel, hogy minden atom teljesen azonos sugárzóként viselkedik, vagyis a kibocsátott elemi hullámvonalatban az amplitúdó és a frekvencia mindig ugyanakkora, azaz csak a fázis változik véletlenszerűen. Ekkor az irradianciára kapott összefüggés az

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 = \frac{1}{2} N E_{01}^2 + E_{01}^2 \sum_{i>j} \sum_j \cos(\delta_i - \delta_j)$$

alakot ölti, ahol az atomi hullámvonalatok közös amplitúdóját E_{01} jelöli. A jobboldal kettős szummája azonban zérus, hiszen minden pillanatban nagyon sok, teljesen véletlenszerűen változó koszinusz értéket kell összeadnunk. Tehát:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 = \frac{1}{2} N E_{01}^2$$

vagyis ebben az esetben az átlagos irradiancia a hullámtér bármely pontjában az atomi fényforrások irradianciájának összege, azaz interferenciát nem észlelhetünk. Az eredmény megfelel az energia megmaradás törvényének is.

Amennyiben feltételezzük azt az extrém esetet, hogy az atomi sugárforrások térben és időben összehangoltan sugároznak, és fázisaik a vizsgált pontban azonosak, valamint az azonos fázis

tartósan fennmarad, akkor a kettős szummában minden koszinusz értéke 1, vagyis a kettős szumma értéke $\frac{N(N-1)}{2} E_{01}^2$. Így az átlagos irradiancia:

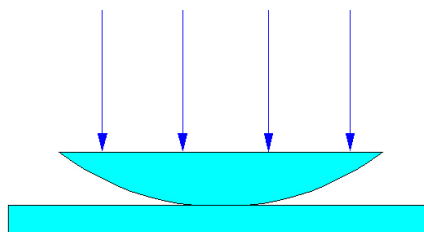
$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} N^2 E_{01}^2$$

Ebben az esetben azokon a helyeken, ahol azonos fázisú hullámok találkoznak, az átlagos irradiancia kiszámításához először össze kell adni a találkozó hullámok amplitúdóját és azután négyzetre emelni az összeget. Az interferencia miatt megváltozik az energiaáram-sűrűség térbeli eloszlása, de természetesen a teljes energiaáram nem. Ha vannak olyan helyek, ahol az irradiancia megnő, akkor lesznek olyanok is, ahol csökken.

[Vissza >>>](#)

F29. Newton-gyűrűk

Helyezzünk üveglapra igen kis görbületű (nagy sugarú) plánkonvex lencsét, és bocsássunk rá merőlegesen párhuzamos monokromatikus fénynyalábot.



Mind a visszavert, mind az átmenő fényt vizsgálva egymással jó közelítéssel koncentrikus, világos és sötét gyűrűket kapunk. (Fehér fényel történő megvilágítás esetén a gyűrűk színesek.) A kísérletben észlelhető koncentrikus köröket Newton gyűrűknek nevezzük, mert először Newton foglalkozott velük részletesebben. A fekete, fehér (színes gyűrűk) létrejöttének oka pl. visszavert fény esetén nyilvánvalóan az, hogy a beeső fény egy része már a lencséről, egy másik része pedig csak az alsó üveglapról verődik vissza. A két visszavert nyaláb útkülönbséggel találkozik, így újraegyesítésükkor interferencia jön létre.

A Newton gyűrűk sugarát ebben a speciális esetben, (amikor a fénynyaláb merőlegesen esik az eszközre) könnyen meghatározhatjuk.

Az ábra alapján a két felületről visszavert sugarak között az útkülönbség jó közelítéssel $2h$. (A lencse felületén megtörő, majd a sík üveglapról visszaverődő fény a lencse és a lap közötti légrévsben fény ugyan hosszabb utat tesz meg, mint $2h$, az eltérés azonban elhanyagolhatóan kicsiny.)

A fáziskülönbség azonban nem pusztán az útkülönbség miatt alakul ki. A mechanikai hullámokhoz hasonlóan az optikailag sűrűbb közegről visszaverődő fénycsoporthullámok is π fázisugrást szenvednek. (Ezt egyelőre kísérleti tapasztalatként kell elfogadnunk).

A fáziskülönbség tehát

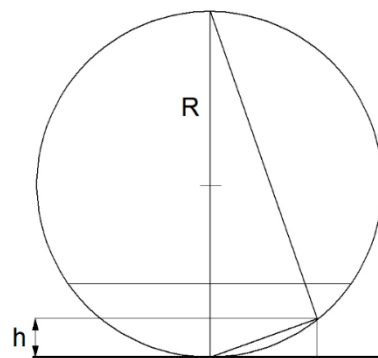
$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} h + \pi$$

Erősítés akkor következik be, ha

$$2k\pi = \pi \left(\frac{4h}{\lambda} + 1 \right)$$

vagyis, ha

$$h = (2k - 1) \frac{\lambda}{4}$$



A h szakasz és a lencse és üveg érintkezési pontjától mért x távolság között viszont fennáll az

$$x = \sqrt{(R - h)h} \approx \sqrt{2Rh}$$

összefüggés. (Mértani közép-tétel) Beírva ide az erősítés feltételét, a k -ik világos gyűrű sugarára

$$x_{kv} = \sqrt{(2k - 1)R \frac{\lambda}{2}}$$

adódik.

Hasonló módon a k -ik sötét gyűrű sugara:

$$x_{ks} = \sqrt{2kR \frac{\lambda}{2}}$$

Átmenő fényben az interferenciát a visszaverődés nélkül áthaladó és az üveglemezen, majd a lencse felületén is visszaverődő nyaláb okozza.

Az optikailag sűrűbb közegről történő kétszeri visszaverődés 2π fáziskülönbséget jelent, s ez elhagyható. Így átmenő fényben az előzőekben a kioltási és erősítési helyekre kapott formulák éppen felcserélődnek.

[Vissza >>>](#)

F30. A Huygens-elv

A hullámok visszaverődésének és törésének magyarázatára Huygens a fény terjedés tanulmányozása során mondta ki a később róla elnevezett elvet. Az elvet mechanikai analógiára alapozta, feltételezte, hogy a fényhullámok terjedése a teljes teret kitöltő közeg, az éter mechanikai rezgéseiként valósul meg. Természetesen ez az elképzelés téves, a mechanikai analógia azonban fennáll, a Huygens-elv általánosan igaz a hang és az elektromágneses, hullámok (beleértve a fényt is) terjedésére vonatkozóan.

A Huygens-elv szerint:

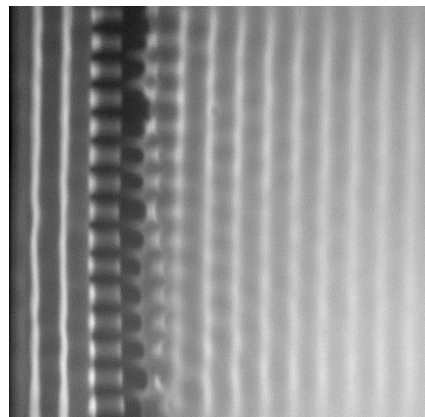
- A hullámfelület minden pontja elemi gömbhullámok kiindulópontja
- A hullámtér tetszőleges pontjában észlelt hatást az elemi hullámok burkolója adja meg.

Az elv bármilyen egyszerűnek látszik is, fogalmilag nem könnyű. Érdekes azonban beépíteni a középiskolai tananyagba, mert sok olyan (elsősorban fénytani) jelenség magyarázatára alkalmas, amely egyébként csak magasabb matematikai ismeretek birtokában tárgyalható. Amennyiben beépítjük a tananyagba, célszerű már a mechanikai hullámok tanulmányozásakor kimondani és alkalmazni a visszaverődési és törési törvény értelmezésére, majd a fénytanban újra visszatérni rá és tartalmát elmélyíteni.

A mechanikában mind az elemi hullámok fogalmát, mind a burkolót, mint az elemi hullámok összesített eredményét, a hullámkádás kísérletekre alapozva, szemlélet alapján vezethetjük be, fogadtathatjuk el a tanulókkal. Az elemi hullámok feltételezését arra alapozzuk, hogy a síkhullámok (egyenes hullámok) útjába kerülő akadályokon lévő kicsiny lyukakból gömbhullámok (körhullámok) indulnak ki.

Kísérlet

- 1) Keltünk a hullámkád vízfelszínén körhullámokat és tegyük a kádba a hullámforrással koncentrikusan hengert, amelyen szabályosan elhelyezkedő réseket vágunk. A résekből körhullámok indulnak ki. Ezeknek a hullámoknak a burkolója kirajzolja az eredeti hullámot. Ha a rések elég sűrűn helyezkednek el, akkor a körhullámok hullámfrontjai az akadálytól már kis távolságban egyetlen, az eredeti hulláméhoz hasonló hullámfronttá folynak össze.
- 2) Hasonló jelenséget tapasztalhatunk, ha egyenes hullámokat keltő léccet használunk és fogazott léccet helyezünk az útjába. A fogak körhullámokat keltenek, amelyek frontja egyenes hullámmá folyik össze.



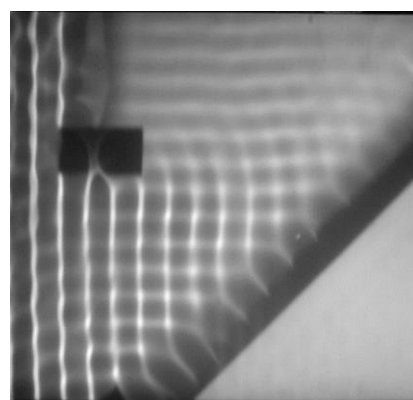
Megjegyzés:

- A Huygens-elv kimondásakor több fontos további feltevést nyilvánvalóként fogadunk el. Érdekes azonban ezekre felhívni a tanulók figyelmét:

- Hullámfelületen a hullám azonos fázisú pontjait értjük
 - Az elemi hullámok frekvenciája megegyezik az eredeti hullám frekvenciájával
 - Az elemi hullámoknak csak a hullám terjedési irányában vett, úgynevezett első burkolóját kell figyelembe venni. (Az eredeti hullámmal ellentétes irányban terjedő hullám nem keletkezhet.)
- A burkoló az elemi hullámok közös érintőjét jelenti.
 - A Huygens-elv a középiskolai anyagban mind a mechanikai, mind az elektrodinamikai törvényektől függetlenül intuitív alapon kimondott önálló törvény. Az alaptörvényekből (mechanikai hullámegyenlet, Maxwell egyenletek) azonban viszonylag általánosan teljesülő feltételek mellett, de csak magasabb matematika használatával levezethető.

A visszaverődési törvény értelmezése

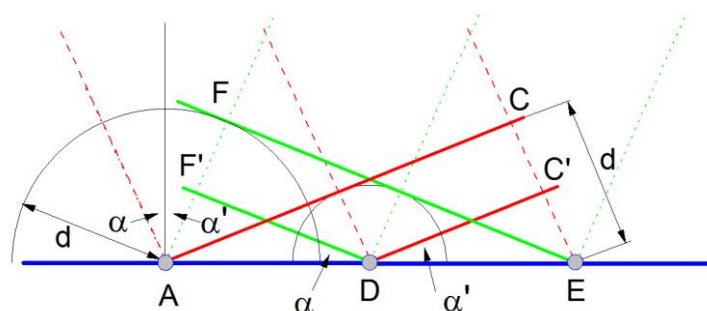
Hullámkádás kísérletekkel egyszerűen bemutathatjuk a hullámok visszaverődését. Keltsünk a hullámkádban egyenes hullámokat és tegyünk a kádba akadályként a hullámfrontokkal szöget bezáró függőleges síkú fémlapot. A keletkező hullámkép igazolja, hogy a hullámok beesési és visszaverődési szöge megegyezik.



Megjegyzés:

- A kísérlet bemutatásakor tisztáznunk kell a síkhullámokkal (egyenes hullámokkal) kapcsolatos alapvető fogalmakat. Rá kell mutatnunk, hogy a hullámok a hullámfrontra merőleges irányban terjednek, valamint, hogy a beesési, visszaverődési és törési szöget a beesési merőlegestől mérjük. Gyakori tévedés, hogy a diákok a hullámfront és az akadály síkja közötti szöveget tekintik beesési (illetve visszaverődési) szögnek. A terminológia pontos tisztázása a hullámkádás kísérlet esetén sokat segíthet a későbbi, fénytani kísérletek értelmezésekor.

A hullámok visszaverődését a Huygens-elv segítségével a következő ábra alapján értelmezhetjük.

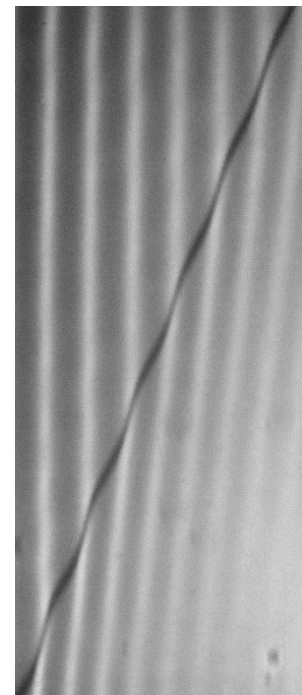


Az AC egyenes a beeső hullám azon hullámfrontja, amely az A pontban éppen eléri az akadályt. A piros szaggatott vonalak a hullám terjedési irányát jelölik ki. Indítsunk elemi hullámot a front A és C pontjából és kövessük addig, amíg az eredeti hullámfront az E pontban is eléri az akadályt. Az A pontból kiinduló elemi hullám ugyanolyan távolságba jut el, mint amennyit a C pont megtesz az akadályig ($d = CE$), hiszen mind az eredeti, mind a visszavert hullámok ugyanabban a közegben mozognak, tehát sebességük is ugyanannyi. A visszavert hullámfrontot így az E pontból az A pont körül berajzolt d sugarú félkörhöz húzott érintő adja. Az ábrából azonnal adódik, hogy az AEC és AEF háromszögek egybevágóak, így az A , illetve E pontnál lévő α , illetve α' szögük egyenlő. A beeső és a visszavert hullám irányának a beesési merőlegessel alkotott szöge rendre merőleges szárú szöget alkot ezekkel a szögekkel így egyenlő velük.

Megjegyzés:

- A levezetés során trükkösen jártunk el, mert kihasználtuk, hogy a visszavert hullámfront megrajzolásához elegendő két elemi hullám helyzetének ismeretében meghúzni a közös érintőt, hiszen a burkoló, ha létezik, akkor egyértelmű, és az összes elemi hullám közös érintője. Ráadásul a kiválasztott elemi hullámok egyikének csak egyetlen pontja, az E tartozhat a burkolóhoz, hiszen tudjuk, hogy E a valódi hullámfront pontja. Ennek megfelelően az E pontból csak érintőt kellett húzni az A pontbeli elemi hullám frontjához, hogy a visszavert hullámfrontot megkapjuk. Ezzel elkerültük annak diszkutálását, hogy mi történik azokkal az elemi hullámokkal, amelyek a vizsgált időtartamban a hullámfrontból indulva eljutnak az akadályig és vissza is verődnek. Ilyen például a D pontba érkező hullám.

A Huygens-elv szerint az elemi hullámokat hullámfelületből kell indítani. Ez nagy szabadságot ad számunkra az elemi hullámok indításának pillanatára vonatkozóan, hiszen a hullámfelületet, amelyből az elemi hullámok indulnak, tetszés szerint választhatjuk. Végezzük a szerkesztést például úgy, hogy az elemi hullámokat addig rajzoljuk be, amíg az eredeti hullámfront D' pontja a D pontban éppen eléri az akadályt, vagyis a gondolatmenetben a D pont veszi át E szerepét. Ekkor az A pontból kiinduló elemi hullám frontja $D'D$ sugarú félkör és D' -ből induló elemi hullám D pontján megy át az elemi hullámok burkolója. Ebből a pontból kell érintőt húzni az A -ból induló elemi hullámhoz. Az új hullámfrontot tehát az a törött vonal alkotja, amely az akadály és A közötti szakaszaról már visszaverődött hullámfrontból, és az eredeti hullámfrontnak az akadályhoz még el nem érkező szakaszából áll. A már visszaverődött hullámfront rész ezután már csak önmagával párhuzamosan tolódik el és kiegészül az akadályhoz elérkező és onnan visszaverődő újabb szakaszokkal, amíg a teljes eredetileg vizsgált AC frontszakasz vissza nem verődik.

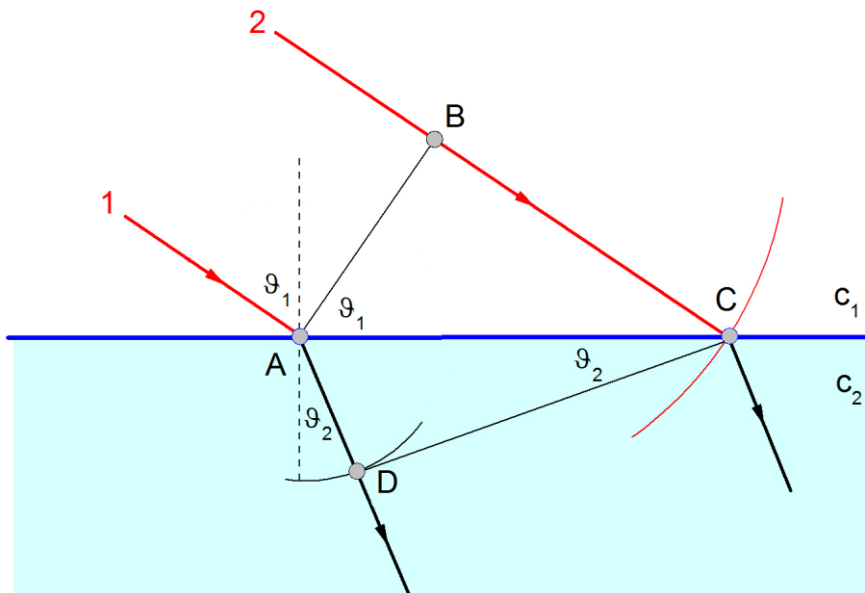


A törési törvény értelmezése

A hullámok törésének vizsgálatát is célszerű megfelelően választott hullámkádás kísérlettel kezdeni. Keltsünk a hullámkádban egyenes hullámokat és fektessünk a kád aljára az egyenes hullámokkal szöget alkotó oldalú vékony üveglapot, amely felett a vízréteg sekélyebb, mint a kád többi részén. A sekélyebb vízrétegbe átlépve a hullámok jól láthatóan megtörnek. (A tapasztalat szerint a felszíni hullámok sebessége a vízréteg vastagságától függ, a hullámok haladását megfigyelve az is észlelhető, hogy a sekélyebb vízben kisebb lesz.)

Az ábráról leolvasható az is, hogy a megtört hullámok frontjai egymáshoz közelebb helyezkednek el, azaz a sekélyebb vízben a hullámhossz kisebb. Mivel a hullámkeltés frekvenciája töréskor nem változik, ez egyben azt jelenti, hogy a sekélyebb vízben a terjedési sebesség kisebb.

Értelmezzük a törést a Huygens-elv segítségével az alábbi ábra alapján.



Az sárga nyilakkal jelölt irányban haladó hullám egyik hullámfrontja AB. Legyen a hullám sebessége a felső (1) közegben c_1 , az alsó (2)-ben $c_2 < c_1$. Tekintsük azt a pillanatot, amikor az A pont az új közeg határára érkezik. Indítsunk ebben a pillanatban mind az A, mind a B pontból elemi hullámot, és rajzoljuk meg hullámfrontját akkor, amikor a felső közegben haladó B-ből induló hullám a C pontban eléri az új közeget. Jelöljük az ehhez szükséges időt t -vel. Ezzel $BC = c_1 t$. A t idő alatt az A-ból induló elemi hullám az alsó közegben $AD = c_2 t$ távolságba jut. Ebben a pillanatban az alsó közegben az A pontból induló elemi hullám hullámfrontja $c_1 t$ sugarú félkör, továbbá tudjuk, hogy a C pont hozzátartozik hullámfronthoz. A megtört hullám hullámfrontja tehát a C pontból az A-beli elemi hullámhoz húzott érintő.

Az ABC háromszög A-nál lévő ϑ_1 szöge merőleges szárú szöget alkot a hullám beesési szögével, így egyenlő azzal. Hasonlóképpen az ACD háromszög C-nél fekvő ϑ_2 szöge megegyezik a törési szöggel.

Az ABC háromszögből:

$$BC = c_1 t = AC \sin \vartheta_1$$

Az ACD háromszögből:

$$AD = c_2 t = AC \sin \vartheta_2$$

Az első egyenletet a másodikkal elosztva adódik a

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Az

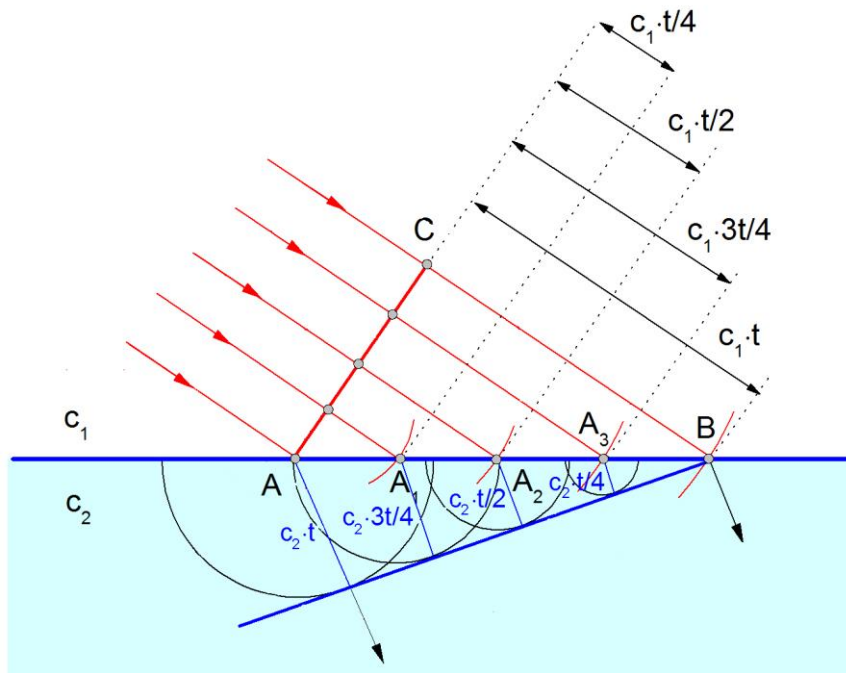
$$n_{21} = \frac{c_1}{c_2}$$

mennyiséget a második közeg elsőre vonatkozó törésmutatójának nevezzük.

Megjegyzés:

- A gondolatmenet a visszaverődési törvény levezetéséhez hasonlóan trükkös, a hullámfront A és C pontja közötti pontokból induló, és törést szenvedő elemi hullámok viselkedésének vizsgálatát elkerüli. Ezeknek az elemi hullámoknak a leírását a visszaverődésnél tárgyalt módszerrel analóg módon kezelhetjük.
- Az elemi hullámok kiindulópontjaként a Huygens-elv szerint hullámfelületet (hullámfrontot) kell használni. Ez azért előnyös, mert a front különböző pontjaiból induló elemi hullámok kezdőfázisa azonos. A visszaverődési és a törési törvény tárgyalásakor azonban megfelelőbb lenne, ha az elemi hullámok az akadály, illetve a közeghatár pontjaiból indulnának. A Huygens-elv ezt is megengedi! Járjunk el ugyanis a következőképpen. Rajzoljuk meg a kiválasztott hullámfelületből kiinduló elemi hullámokat és az általuk kialakított eredő hullámfrontot rendre t_1 és t_1+t_2 idő elteltével. Ezután a t_1 pillanatban kialakuló front néhány pontjából indítsunk újabb elemi hullámokat. Ezeknek az elemi hullámoknak t_2 idő elteltével ugyanazt a hullámfrontot kell kialakítani, mint a korábban indítottaknak t_1+t_2 idő után. Használhatunk tehát nem azonos hullámfrontról induló hullámokat, csak figyelembe kell vennünk, hogy milyen időkülönbséggel kell indítani őket.

A törési törvény magyarázatára ennek megfelelően alkalmazhatjuk a következő eljárást is. Indítsunk az ábrán látható hullám AC frontjából elemi hullámokat. A hullámfront A pontja éppen az új közeg határán van így a belőle induló elemi hullám teljes egészében a (2) közegben lesz. Tegyük fel, hogy a front C pontja t idő alatt jut el a második közeghez és jelöljük C_1 , C_2 , C_3 -mal azt a pontot, amely rendre $\frac{t}{4}$, $\frac{t}{2}$ és $\frac{3t}{4}$ idő alatt érkezik az új közeghez. Amikor ezek a pontok a (2) közeghez érkeznek, akkor indítsunk belőlük újabb elemi hullámot. Ezek a hullámok a második közegben haladnak és rendre $\frac{3t}{4}$, $\frac{t}{2}$ és $\frac{t}{4}$ időre van szükségük, hogy elérjék a keresett hullámfrontot.



Az ábra mutatja, hogy az AC hullámfront törés után az A'B hullámfrontba megy át, és ez a hullámfront közös érintője a közegetárról megfelelő időpillanatban indított elemi hullámoknak.

[Vissza >>>](#)

F31. A Huygens–Fresnel-elv

A Huygens-elv segítségével az elhajlási jelenségek nem értelmezhetők. Az elvet Fresnel módosította és a módosított elv gyümölcsözően használható az elhajlási jelenségek értelmezésére. Megtartotta belőle azt, hogy a hullámfelület pontjaiból elemi hullámok indulnak ki, de az eredő hullám kialakítására vonatkozó feltevést elvetette. Az elhajlás értelmezésekor érdemes abból indulni, hogy az akadályok mögött az interferenciakísérletekben tapasztalhatóhoz hasonló pont-, illetve csíkrendszer észlelhető. Ez arra utal, hogy a jelenség hullámok interferenciájaként értelmezhető. Emiatt Fresnel az eredő hullámfrontot nem az elemi hullámok burkolójaként, hanem az elemi hullámok interferenciájaként értelmezte.

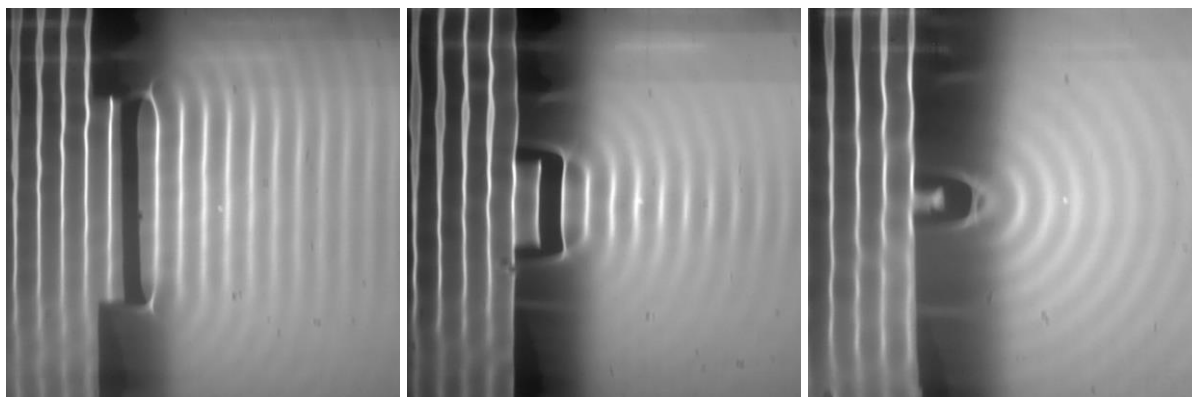
Erősíti az elképzelés jogosságát, hogy hullámfront osztással hozhatunk létre koherens hullámokat, amelyek interferenciaképesek. Az elhajlási kísérletekben a hullámfelület egy részét akadályokkal kitakarjuk, így jogos feltevés, hogy a hullámjelenséget a hullámfelület megmaradó részeiből továbbhaladó (fény)hullámok interferenciája hozza létre. Ez vezette Fresnelt az elhajlás jelenségének magyarázatára kidolgozott, ma már Huygens–Fresnel-elvnek nevezett törvény kimondására. Miként Huygens, Fresnel is kifejezetten a fényhullámok tanulmányozása kapcsán fogalmazta meg a kísérletek értelmezésére vonatkozó elvet.

A Huygens–Fresnel-elv szerint:

- 1) A hullámfelület minden pontja elemi gömbhullámok kiindulópontja
- 2) Az adott pontban kialakuló fényhatást az elemi hullámok interferenciája alakítja ki.

A középiskolai tanításban a Huygens–Fresnel-elvet célszerű már a mechanikai hullámok tárgyalásakor kimondani. Javasoljuk azonban, hogy az elv kimondását kössük a hullámkadas kísérlettel jól bemutatható rés elhajlási kép értelmezéséhez, és ennél az elv alkalmazásában sem menjünk tovább. Megtehető természetesen az is, hogy a Huygens–Fresnel-elvet a fénytánra hagyjuk. Tárgyalását azonban ekkor is érdemes a hullámkadas kísérletekre visszautalva, a víz felületén terjedő hullámok rés mögötti elhajlására alapozni. A hullámkadas kísérleten könnyen tanulmányozható, hogy hogyan változik az elhajlási kép, ha a rés szélességét változtatjuk.

A következő felvételek egyenes hullámok egyre szűkülő résen létrejött elhajlási képét mutatják.



A jobboldali képen a hullámhossz néhányszorosányi résen keletkező elhajlás látható. A rés után az eredő hullámfrontok egyenesek, és az árnyéktérbe behatoló hullámképen erősítési és gyengítési helyek váltakoznak. A középső ábrán a rés szélessége alig nagyobb, mint a hullámhossz. A rés után a hullámfrontok görbültek és az árnyéktérben jól kivehetően maximumok és minimumok váltakoznak. A harmadik képen a rés szélessége kisebb, mint a hullámhossz, a rés mögött egyre szélesedő tartományban gömbhullámok jelennek meg.

A felvételek szemléletesen, és megfelelő diszkusszió esetén (remélhetőleg) a diákok számára is megnyugtatóan támasztják alá Huygens–Fresnel-elv kimondását. Az utolsó felvétel az elemi gömb (kör) hullámok létezését támasztja alá. az első és második felvétel pedig az interferenciára vonatkozó feltevés helyességére utal.

Nehezebb kérdés a Huygens–Fresnel-elv mennyiségi alkalmazása. Mivel a hullámfront minden pontjából indul elemi hullám, az eredő hullámfront meghatározásához végtelen sok elemi hullámot kell szuperponálni. (Vegyük észre, hogy a Huygens-elv alkalmazásakor ez azért nem jelentett problémát, mert az eredő hullámfront meghatározásához elegendő volt néhány ügyesen választott elemi hullámfront helyzetét ismerni.) Nyilvánvaló az is, hogy az elemi hullámok amplitúdója végtelenül kicsi, hiszen, ha a véges lenne, akkor a végtelen sok hullám szuperponálása végtelen nagy eredő amplitúdóra vezetne. Középiskolai matematikával ez nehezen megoldható feladat.

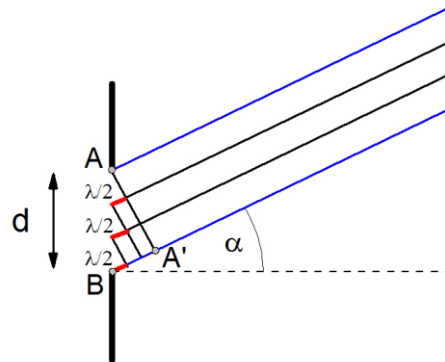
Az elhajlás bevezető szintű tárgyalásakor ezeknek a nehézségeknek a felvetése és diszkussziója nem célravezető, mert a nehezen emészthető problémák miatt a mennyiségi leírás könnyen hitelét veszíti a diákok szemében. A diákok gondolkozását ebben az esetben érdemes tudatosan irányítani az egyszerű megoldás felé.

A Huygens-féle zóna módszer alkalmazás a rés interferenciakép értelmezésére.

Érdemes olyan speciális esetet kiválasztani, amely egyszerűen tárgyalható, ezért vizsgáljuk a rés interferenciaképét a réstől nagy távolságban (Fraunhofer elrendezés.) A résre merőlegesen eső síkhullám pontjaiból az elemi hullámok azonos fázisban indulnak, így interferenciájukat útkülönbségük szabja meg. Az elemzést a Young-kísérlet értelmezésére visszautalva, és abból általánosítva, a Fresnel-féle zóna módszerrel végezhetjük. A módszer szerint a hullámfronton olyan zónákat alakítunk ki, hogy a szomszédos zónák egyikében kiválasztott bármely elemi hullámhoz (fényugarához) a másik zónában található legyen elemi hullám úgy, hogy a két hullám útkülönbsége éppen $\lambda/2$. Az ilyen sugarak éppen kioltják egymást, így a szomszédos zónák interferenciája is kioltást eredményez.

A zóna módszert célszerű egyszerű grafikus példával szemléltetve bevezetni. Az ábra a d szélességű AB résből α irányban kiinduló sugárnyaláb néhány sugarát mutatja. Leolvasható róla, hogy az α szögben haladó sugármenetek között a maximális útkülönbség $A'B = d \sin \alpha$ lehet. (Ez a rés két széléről induló sugár útkülönbsége.) Az ábrán a hullámfront pontosan három zónára bontható. Így a felső két zóna hatása éppen kioltja egymást, a harmadikban lévő sugarak pedig erősítik egymást.

A zónákat úgy szerkeszthetjük meg, hogy az A' pontból addig mérünk fel $\frac{\lambda}{2}$ távolságot a sugármenet egyenesére, amíg a B ponton túl nem jutunk, vagy éppen a B pontba nem érkezünk, majd a határpontokból az AA' szakasszal párhuzamosan visszametszünk a hullámfrontig.



Fresnel-féle zónamódszer: az egymás mellett lévő $\lambda/2$ -es zónák kioltják egymást

A konstrukció alapján nyilvánvaló, hogy amennyiben a rés páros számú zónára bontható, akkor az adott irányban a nagyon távoli ernyőn kioltást észlelhetünk. Tehát a kioltás feltétele:

$$2k \frac{\lambda}{2} = d \sin \alpha$$

Ebből a kioltási irányokra

$$\sin \alpha_{k,min} = k \frac{\lambda}{d}$$

adódik.

A gondolatmenet alapján, ha kissé felületesen is, de levonható az a következtetés is, hogy maximális erősítés ott következik be, ahol éppen egy zónányi elemi hullám marad meg, azaz az útkülönbség $\lambda/2$ páratlan számú többszöröse:

$$d \sin \alpha_{k,max} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

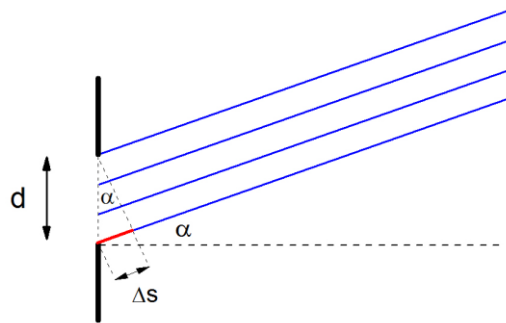
Ebből:

$$\sin \alpha_{k,max} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2d}$$

A kioltási irányok a zóna módszerrel pontosan meghatározhatóak, a maximális erősítésekre kapott eredmény azonban nem pontos, mert a megmaradó egyetlen zóna két szélén fekvő sugár között az útkülönbség már $\lambda/2$. Tehát a teljes zónában már nem csak egymást erősítő elemi hullámok vannak. A maximális erősítés valamilyen zóna „töredékből” származó elemi hullámok interferenciájakor alakul ki.

A rés interferencia kép értelmezése fázor szerkesztéssel

Természetesen adódik, hogy végtelen sok elemi hullám helyett indítsunk a hullámfrontból véges számú elemi hullámot, és határozzuk meg interferenciájuk eredményét, majd ebből próbáljunk a „végtelen” számú elemi hullámra összegzésére következtetni. Véges számú elemi hullám esetén a hullámok amplitúdója és fáziskülönbsége már meghatározható. Az elemi hullámok a végtelen távoli ernyőn útkülönbségüknek megfelelő fáziskülönbséggel találkoznak. Amennyiben egyenközűen indítjuk őket, akkor amplitúdójuk egyenlő, és a szomszédos hullámok fáziskülönbsége mindig ugyanakkora. Az ábrán négy elemi hullám sugármenete látható:

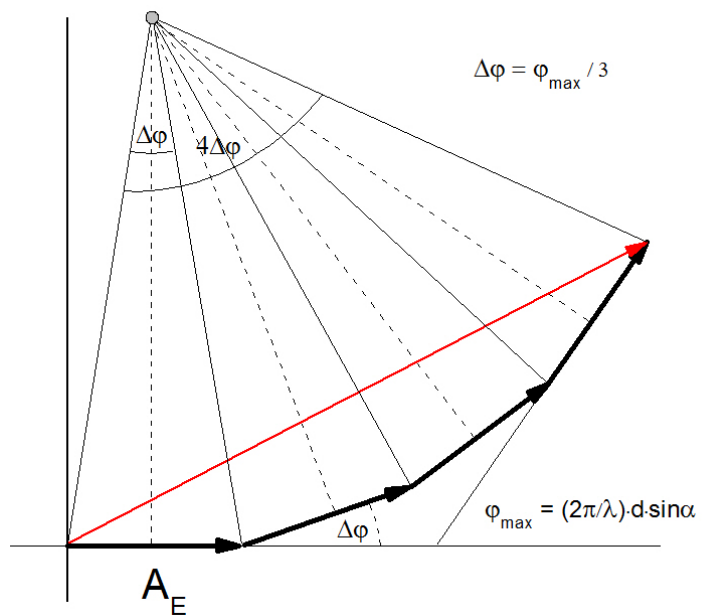


Az egymást követő elemi hullámok fázisa a rés felső pontjából kiindulóéhoz képest a $\Delta s = d \cdot \sin\alpha$ maximális útkülönbségből adódóan

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3\lambda} \Delta s = \frac{\varphi_{max}}{3} = \frac{2\pi}{3\lambda} d \cdot \sin\alpha$$

szöggel növekszik.

Az azonos frekvenciájú különböző fázisú hullámok fázor vektorokként adhatók össze. Emlékeztetünk, arra, hogy a fázor vektorok forgó vektorok, összegzésüket forgó vektorokról készült pillanatfelvételeken végezzük. A vektorok hossza megegyezik a hullám amplitúdójával, szöge pedig a hullám adott pontban vett térbeli fázisának felel meg (F32.). A négy elemi hullám fázor diagramját úgy célszerű elkészíteni, hogy a rés felső pontjából induló hullám vektorát a koordináta tengely vízszintes tengelyében vesszük fel, a többi pedig a megfelelő fáziskülönbséggel egymás után fűzzük (ábra). Esetünkben az elemi hullámok A_E amplitúdója értelemszerűen a beeső hullám A_B amplitúdójának negyede ($A_E = A_B/4$) Könnyen belátható, hogy az egymás után fűzött elemi hullámok végpontjai körön helyezkednek el, valamint, hogy az elemi hullámokhoz tartozó középponti



szög $\Delta\varphi = \frac{\varphi_{max}}{3}$. Az elemi hullámok összegét az egymás után fűzött vektorok összege (az ábrán a piros nyíl) adja.

Az összeg egyszerűen meghatározható, ha figyelembe vesszük, hogy az elemi hullámokat reprezentáló fázorok végpontjaira illeszkedő kör sugara $R = \frac{A_E}{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}$. Az eredő amplitúdó ugyanennek a körnek a $\frac{4\varphi_{max}}{3} = \frac{8\pi}{3\lambda} d \sin \alpha$ középponti szögéhez tartozó húr. Ebből az ábra alapján a szuperponálódó hullámok A_S amplitúdója:

$$A_S = 2R \sin \frac{4\varphi_{max}}{3} = \frac{A_E \sin \frac{4\varphi_{max}}{3}}{\sin \frac{1\varphi_{max}}{3}} = \frac{A_B \sin \left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha \right)}{4 \sin \frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha}$$

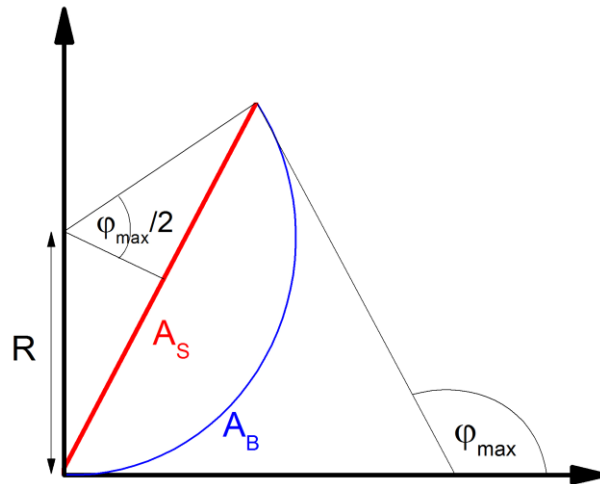
A négy elemi hullámra vonatkozó megfontolás könnyen általánosítható N darab elemi hullám esetére. Ekkor az elemi hullámok amplitúdója $A_E = A_B/N$, a szomszédosak fáziskülönbsége pedig

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_{max}}{N-1} = \frac{1}{N-1} \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi}{(N-1)\lambda} d \sin \alpha$$

Az elemi hullámok fázor vektorainak végpontja most is körön helyezkedik el, a kör sugara most is $R = \frac{A_E}{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{A_E}{2 \sin \frac{1}{N-1} \frac{\varphi_{max}}{2}}$. Az eredő amplitúdó pedig

$$A_S = 2R \sin \frac{N}{2} \Delta\varphi = 2 \frac{A_E \sin \frac{N}{2} \Delta\varphi}{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{A_B \sin \left(\frac{N}{N-1} \frac{\varphi_{max}}{2} \right)}{N \sin \frac{1}{N-1} \frac{\varphi_{max}}{2}} = \frac{A_B \sin \left(N \frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha \right)}{N \sin \frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha}$$

A formula bonyolultnak tűnik, ezért a határérték képzés helyett gondoljuk végig, hogy mit jelent geometriailag, ha $N \rightarrow \infty$. Mind az elemi hullámok amplitúdója, mind a szomszédosak fáziskülönbsége végtelenül kicsiny lesz. Ennek megfelelően a fázorokból álló törött vonal körívvé alakul, amelynek kezdőpontbeli érintője a vízszintes tengely, végpontbeli érintője pedig a rés két széléről induló elemi hullámok közötti maximális útkülönbségnek megfelelő $\varphi_{max} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \alpha$ fázisszög. Minthogy a „fázor törött vonal” hossza a beeső hullám A_B amplitúdója volt, a határátmenet szerint ez most a körív hossza. A körív középponti szöge megegyezik a $\varphi_{max} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \alpha$ fázisszöggel (ábra).



Az ábráról leolvasható, hogy a kör sugara $R = \frac{A_B}{\varphi_{max}} = \frac{A_B}{\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \alpha}$, az adott irányban kapott interferencia eredő amplitúdója pedig

$$A_S = 2R \sin \frac{\varphi_{max}}{2} = \frac{A_B \sin \frac{\varphi_{max}}{2}}{\frac{\varphi_{max}}{2}} = \frac{A_B \sin(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha)}{\frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha}$$

Az eredmény alapján meghatározhatóak az eredő amplitúdó zérus helyei a

$$\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha\right) = 0$$

egyenletből. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha = k\pi$$

amiből a kioltási irányokra:

$$\sin \alpha_{k,min} = k \frac{\lambda}{d}$$

Az eredmény megegyezik a zóna módszerrel kapottal.

Érdeemes meghatározni a maximális erősítések helyét is. Ehhez az interferencia eredményeként adódó amplitúdó függvényben vezessük be a $\delta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha$ jelölést. Így a

$$A_S = \frac{A_B \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha\right)}{\frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha} = A_B \frac{\sin \delta}{\delta}$$

függvény maximumát kell meghatározni az α elhajlási irány függvényében. A szélsőérték csak differenciálszámítás alkalmazásával határozható meg:

$$0 = \frac{dA_S}{d\alpha} = \frac{dA_S}{d\delta} \frac{d\delta}{d\alpha} = A_B \frac{\delta \cos \delta - \sin \delta}{\delta^2} \frac{d\delta}{d\alpha} = A_B \frac{\delta \cos \delta - \sin \delta}{\delta^2} \frac{\pi}{\lambda} d \cos \alpha$$

Ebből adódóan a szélsőérték helyek a

$$\delta \cos \delta - \sin \delta = 0$$

egyenlet alapján a

$$\tan \delta = \delta$$

egyenletből határozhatók meg. Ez az egyenlet nem oldható meg egzaktul, közelítő megoldásit például grafikusán kereshetjük meg. Az elhajlási maximumokra tehát beigazolódott, hogy a zóna módszerből adódó megoldás pontatlan.

Megjegyzés:

- Az elhajlás értelmezése a Huygens–Fresnel-elv alapján jó lehetőséget biztosít a matematikával való koncentrációra. Különböző felkészültségű és érdeklődésű osztályokban a fentiekben bemutatott gondolatmeneteket rendkívül sokféle módon és részletességgel tárgyalhatjuk. Többnyire elegendő a zóna módszer bemutatása, ha azonban a váltóáramok tárgyalásakor már használtuk a fázor módszert, akkor elsősorban a fényhullámok esetén is hasznos lehet. Az elemi hullámok összegzése sokat segíthet a differenciál és integrálszámítás mélyebb megértésében. Az infinitezimálisan kicsiny mennyiségek értelmezése és a határértékképzés kézzelfoghatóbbá válik a konkrét fizikai alkalmazás keretében. A véges eredményt adó végtelen sok végtelen kicsiny mennyiség összegzése az integrálszámítás megértésében alapvető jelentőségű. Nem elhanyagolható előny a határértékképzés geometriai szemléltetése sem.
- Érdemes megmutatni, hogy az

$$A_S = \frac{A_B \sin\left(\frac{N}{N-1} \frac{\varphi_{max}}{2}\right)}{N \sin \frac{1}{N-1} \frac{\varphi_{max}}{2}} = \frac{A_B \sin\left(N \frac{\frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha}{N-1}\right)}{N \sin \frac{\frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha}{N-1}}$$

amplitúdó az $N \rightarrow \infty$ esetben ugyanarra az eredményre vezet, mint a geometria úton nyert eredmény. A nevezőben a szinusz függvény argumentuma nagy N esetén kicsiny, így $N \sin \frac{1}{N-1} \frac{\varphi_{max}}{2} \approx \frac{N}{N-1} \frac{\varphi_{max}}{2}$. Ezután figyelembe véve, hogy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{N}} = 1$$

adódik, hogy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_S = \frac{A_B \sin\left(\frac{\varphi_{max}}{2}\right)}{\frac{\varphi_{max}}{2}} = \frac{A_B \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha\right)}{\frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha}$$

ami megegyezik a geometriai levezetésből kapott eredménnyel.

- A kioltási irányokra kapott

$$\sin \alpha_{k,min} = k \frac{\lambda}{d}$$

eredmény a $k = 0$ esetben látszólag nem érvényes, hiszen az $\alpha = 0$ esetben nem lehet zérus az eredő. Azt kell észrevennünk, hogy ekkor az

$$A_s = \frac{A_B \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha\right)}{\frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha}$$

összefüggésben mind a számláló mind a nevező zérus lenne, így a kifejezés határozatlan. A kifejezés azonban az $x = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \alpha$ helyettesítéssel

$$A_s = \frac{A_B \sin x}{x}$$

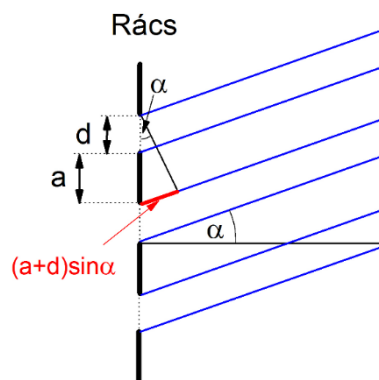
alakra hozható. Tudjuk, hogy $x \rightarrow 0$ esetén $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, azaz ekkor a fizikai szemléletnek megfelelően a $A_s = A_B$, hiszen az azonos fázisban találkozó elemi hullámok amplitúdója megegyezik az eredeti hullám amplitúdójával.

[Vissza >>>](#)

F32. A rács elhajlási kép meghatározása fazorokkal

Ezt az anyagot csak jó matematikai készségű osztályokban is csak akkor tárgyaljuk, ha a rés elhajlás fazor diagramos értelmezését részletesen tárgyaltuk. Az ottani eredményeket és gondolatmeneteket ebben a levezetésben felhasználjuk.

Az optikai rács több egymás mellé helyezett résből áll. Legyen a rések száma N , a rések szélessége d , a rések közötti át nem eresztő sáv szélessége pedig a (ábra). Ejtsünk a rács síkjára merőlegesen síkhullámot és vizsgáljuk, hogy az α irányban milyen fényhatás jön létre. Az elhajlási képet a résekből kiinduló fényhullámok interferenciája szabja meg. A fazor szerkesztés segítségével ez N darab E_α amplitúdójú hullám összegzését jelenti, ahol E_α az egyes résekből kiinduló körhullám amplitúdója. A szomszédos résekből kiinduló hullámok fáziskülönbsége az ábra alapján



$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} (a + d) \sin \alpha$$

A fazor szerkesztésnek megfelelően ekkora szögeltéréssel kell egymás után fűznünk a résekből induló fénynek megfelelő E_α hosszúságú vektorokat. A vektorpoligon kezdő és végpontját összekötő vektor adja a rések interferenciájának eredményét az adott irányban. (A szerkesztés megegyezik a rés elhajlás esetén felhasználttal, amikor véges számú elemi hullám összegével közelítettük az elemi hullámok interferenciáját.)

A vektorpoligon köré írt kör sugara

$$R_1 = \frac{E_\alpha}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}$$

Az E_r eredő hossza pedig

$$E_r = E_\alpha \frac{\sin N \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

Vegyük most figyelembe, hogy az egyes résekből α irányban induló sugár amplitúdója a résen történő elhajlás eredménye, vagyis

$$E_\alpha = E_0 \frac{\sin \frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda}}$$

ahol E_0 az egy résre eső síkhullám amplitúdója. Ennek megfelelően a rács elhajlásból adódó fény amplitúdója

$$E_r = E_0 \frac{\sin \frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda}} \frac{\sin N \frac{\pi(a+d) \sin \alpha}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda}}$$

Vezessük be a

$$\varphi = \frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda} \text{ és } \psi = \frac{\pi(a+d) \sin \alpha}{\lambda}$$

jelölést, és vegyük figyelembe, hogy a kísérletek során a felfogó ernyőn a beeső fényintenzitást észleljük. A fény intenzitása pedig arányos a fény amplitúdójával (lásd [F28](#). Az interferencia energiaviszonyai melléklet).

Így az α irányban észlelt fényintenzitás:

$$I_\alpha \sim E_r^2 = E_0^2 \frac{(\sin \varphi)^2}{\varphi^2} \frac{(\sin N\psi)^2}{(\sin \psi)^2}$$

Az összefüggésben az első tényező a beeső fény intenzitására, a második az egyes réseken belüli sugarak közötti interferenciára, a harmadik pedig a rések egymás közötti interferenciájára jellemző.

Először vizsgáljuk csak a

$$\frac{(\sin N\psi)^2}{(\sin \psi)^2}$$

tényező függését az α szögtől.

Az ábra alapján látható, hogy az egyes réseken elhajló nyalábok akkor erősítik egymást, ha

$$(a+d) \sin \alpha = k\lambda$$

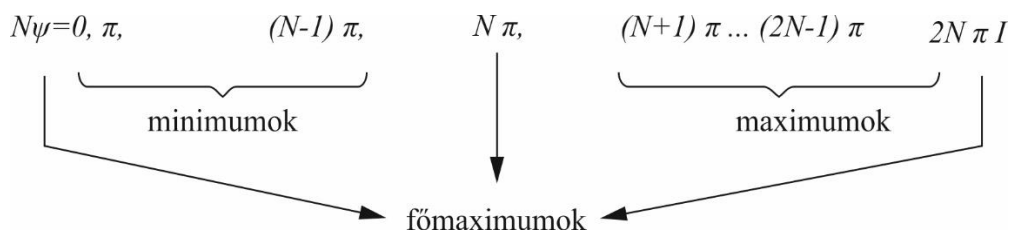
Ekkor $\psi = \frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda} = 0$, így a rések közötti interferenciát meghatározó tényezőnek mind számlálója mind nevezője zérus. Kimutatható azonban, hogy hányadosuk éppen N^2 . Az elhajlás intenzitása tehát ezekben az irányokban:

$$I_{\alpha max} \sim E_0^2 N^2 \frac{(\sin \varphi)^2}{\varphi^2}$$

Ezekben az irányokban tapasztaljuk az elhajlás úgynevezett főmaximumait, látszik, hogy a rések számát növelve a maximumok értéke erősen növekszik.

Bármely két főmaximum között $(N-1)$ minimumhely van, ahol ugyanis $\sin N\psi = 0$, de $\sin \psi \neq 0$, ott az intenzitás zérus. Ezen minimumhelyek között található az ún. *mellékmaximumok*, amelyek szintén elég nagy értéket vehetnek fel, azonban nem összemérhetők a főmaximumokkal.

A főmaximumok és minimumok a következő helyeken lépnek fel:

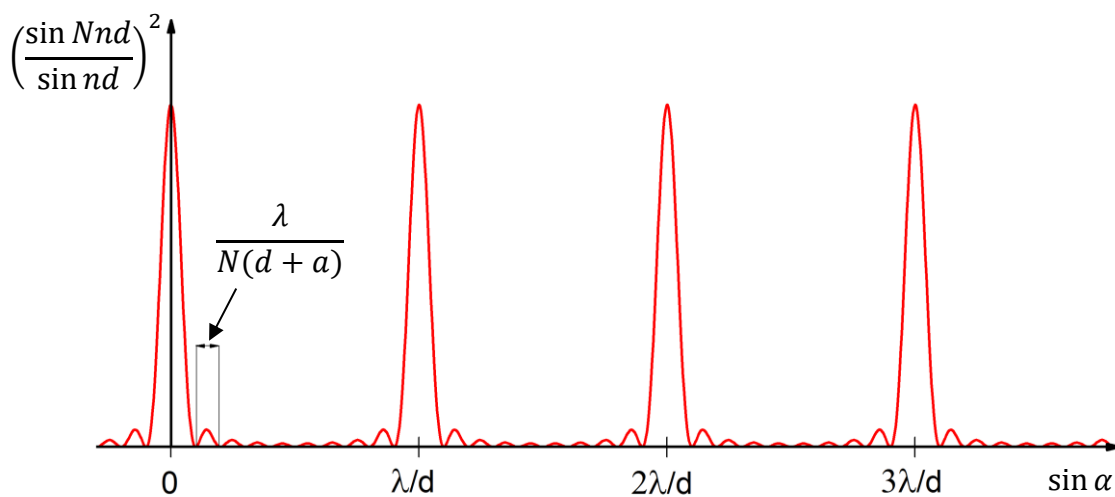


$$N\psi = 0, \pi, \dots, (N-1)\pi, N\pi, (N+1)\pi, \dots, 2N\pi$$

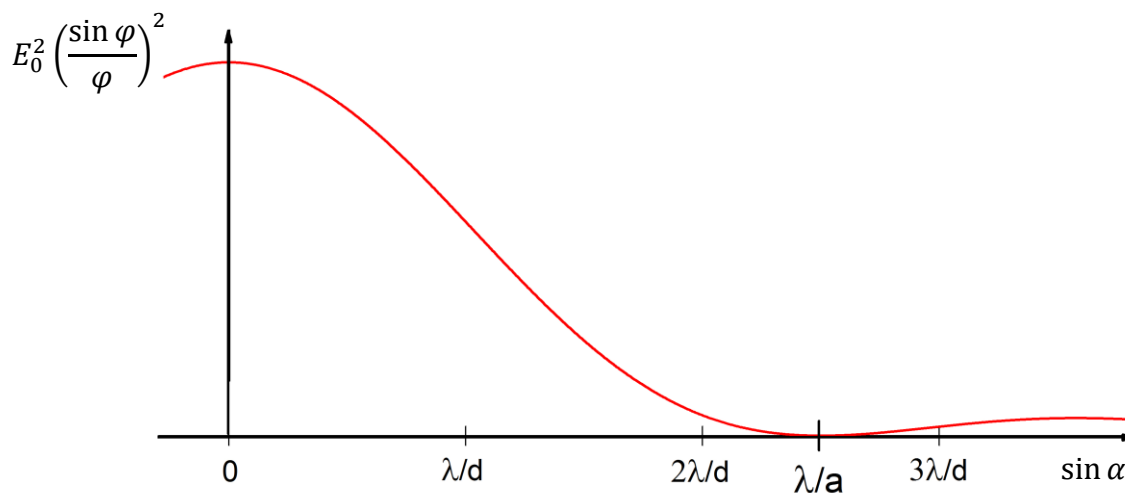
A fentiek alapján az ábra mutatja az

$$y = \frac{(\sin N\psi)^2}{(\sin \psi)^2}$$

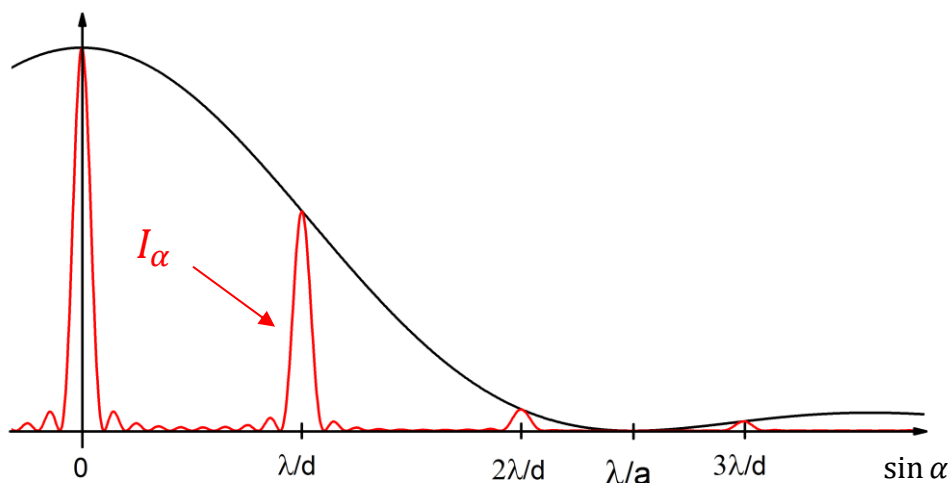
függvény grafikonját.



A $E_0^2 \frac{(\sin \varphi)^2}{\varphi^2}$ függvény grafikonját a következő ábra mutatja.



Az I_α függvényt a két függvény szorzata adja (lásd következő ábra).



Az intenzitás-maximumok iránya függ a rácsra eső fény hullámhosszától. A rács a különböző hullámhosszúságú fénysugarakat különböző mértékben téríti el. Az optikai rácsok legfontosabb alkalmazása az inhomogén fény hullámhossz szerinti felbontása. Amennyiben az optikai rácsra fehér fényt ejtünk, a rácson való elhajlás eredményeként a teljes spektrum jelenik meg. A rács segítségével tehát tanulmányozhatjuk, hogy egy adott fénynyaláb milyen hullámhosszúságú összetevőket tartalmaz.

A rács felbontóképessége

A főmaximumok szélessége is egyszerűen megállapítható. Ez nem más, mint a főmaximumtól jobbra és balra elhelyezkedő első minimumhelyek távolsága, azaz a főmaximum szélessége

$$\Delta = \frac{2\lambda}{N(d+a)}$$

Annál élesebb színekvonalakat kapunk tehát, minél rövidebb hullámhosszúságú fényt, és minél szűkebb karcolatú rácsot használunk.

A fenti összefüggés alapján megállapíthatjuk azt is, hogy adott rács segítségével milyen minimális hullámhossz különbséget tudunk észrevenni. A közeli λ_1 és λ_2 hullámhosszúságú fény a k -ik elhajlási rendben még megkülönböztethető, ha k -ik főmaximumuk távolsága éppen $\frac{\lambda_1}{N(d+a)}$, azaz, ha az egyik fénysugár k -ik főmaximuma éppen a másik fénysugár k -ik főmaximumától mért első minimumhelyre esik, vagyis ha

$$k \frac{\lambda_2}{a+d} = k \frac{\lambda_1}{a+d} + k \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a+d} = k \frac{\lambda_1}{a+d} + \frac{\lambda_1}{N(a+d)}$$

Innen

$$k \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a+d} = \frac{\lambda_1}{N(a+d)}$$

Vezessük be a $\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda$ jelölést. Ezzel

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{1}{kN}$$

Tehát az adott hullámhossz mellett még észlelhető $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ relatív hullámhossztérés annál kisebb, minél több rést tartalmazó rácsot használunk, és minél magasabb elhajlási rendet figyelünk meg.

A megfigyelhető elhajlási rendek számát azonban korlátozza, hogy

$$\sin \alpha \leq 1$$

így

$$\frac{k\lambda}{N(a+d)} \leq 1$$

A $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ hányadost a rács feloldási határának nevezzük. A rács maximális feloldási határa a

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{N(a+d)} = \frac{\lambda}{\text{a rács teljes szélessége}}$$

formulával adható meg.

[Vissza >>>](#)

F33. A fényelhajlás jelensége optikai rácson, a fény hullámhosszának meghatározása

Emelt szintű érettségi feladat

Feladat:

Optikai rácossal bemutatott fényelhajlási kísérlet segítségével határozza meg a fény hullámhosszát!

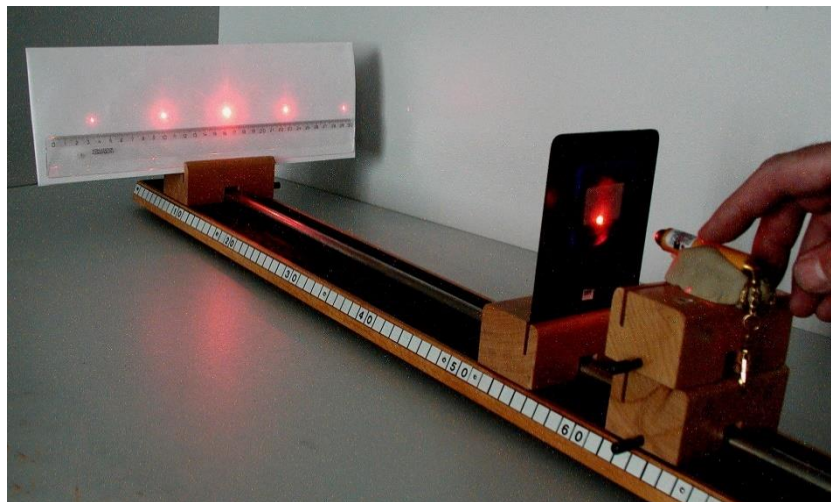
Szükséges eszközök

Kisteljesítményű fénymutató-lézer, optikai sín lovasokkal, ernyő, ismert ráczállandójú optikai rács, mérőszalag, vonalzó

(Az optikai rács párhuzamos, egymástól egyenlő távolságra lévő rések sorozata. A szomszédos rések távolsága az ún. *ráczállandó* (szokásos jele d). A ráczállandót általában feltüntetik a rácson, ha mégsem, úgy azt mikroszkóppal, objektív-mikrométer segítségével lehet meghatározni.)

A mérés leírása

Az optikai sín végére rögzítsünk széles ernyőt, az ismert ráczállandójú optikai rácsot helyezzük a sínen mozgatható lovasba tett diatartóba, majd a rácsot világítsuk át lézerténnyel! Lézerfényforrásként kis energiájú He-Ne lézert, vagy lézertiódával működő, olcsó, ún. fénymutató-lézert használhatunk. Ez utóbbi irányításának és rögzítésének legegyszerűbb módja az, ha a ceruzavastagságú, néhány cm hosszú eszközt játékgyurmába ágyazzuk. A kísérleti összeállítást a fotó mutatja.



A lézertény a rácson áthaladva elhajlik. Az ernyőn szimmetrikusan megjelenő interferencia maximumok nappali világításban is jól láthatók.

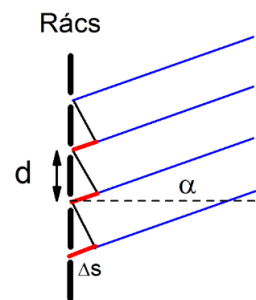
- Határozza meg az optikai sín mellé helyezett mérőszalag segítségével a rács és az ernyő távolságát (L)! Mérje meg az ernyőn az első elhajlási maximum és a direkt sugár foltjának (középső, legerősebb megvilágítású folt) távolságát (h) és határozza meg a fény elhajlásának α szögét!
- Az optikai rácson történő fényelhajlás elmélete alapján a mért adatokból határozza meg a fény hullámhosszát!

Megoldás

A mérés elméleti háttere

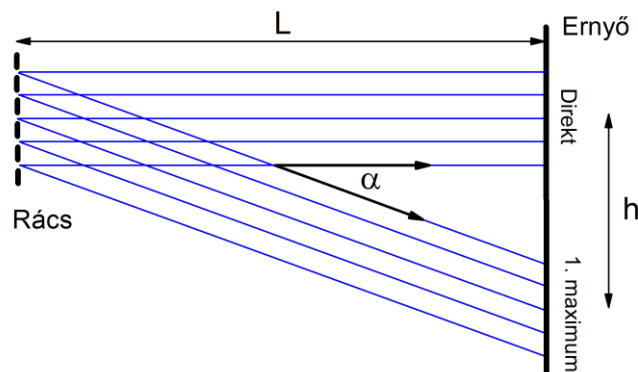
Az optikai rácstra eső fénynyaláb (fényhullám) a fényáteresztő réseken áthaladva elhajlik. A Huygens–Fresnel-elv szerint minden fényáteresztő rés elemi gömbhullámok kiindulópontja. A szomszédos résekből kiinduló és párhuzamosan haladó hullámok között útkülönbség lép fel. Az útkülönbség nagyságát (Δs) a szomszédos rések távolsága (d) – a rácsállandó – és a sugarak haladási iránya (α) határozza meg:

$$\Delta s = d \cdot \sin \alpha$$



Ha az α irányban párhuzamosan haladó szomszédos fényhullámok között a Δs útkülönbség a hullámhossz egész számú többszörösével egyenlő, a fényhullámok erősítik egymást. A rács mögött elhelyezett ernyőn ekkor az α irányban jól érzékelhető fényfoltot látunk, míg azokban az irányokban, amire a fenti feltétel nem teljesül, az ernyő sötét marad.

A fenti egyenlet alapján az ismert rácsállandójú optikai rácscsal végzett elhajlási kísérleteket fény hullámhosszának kiszámítására használhatjuk fel, ha α értékét kísérletileg meghatározzuk. A kísérleti leírás szerint elvégezve a méréseket az α szög tangense kiszámítható.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{L}$$

Ha az L távolság lényegesen nagyobb, mint h , az α szög tangense alig tér el a szög szinuszának értékétől, így a mért arány közvetlenül behelyettesíthető a fentebb tárgyalt, interferencia-erősítés feltételét leíró egyenletbe, $\sin \alpha$ helyére.

$$d \cdot \sin\alpha \approx d \frac{h}{L} = \lambda$$

A kapott egyenletből a d rácsállandó ismeretében, a mért adatok (L , h) felhasználásával a fény λ hullámhossza kiszámítható.

A foton látható kísérletben használt rács 200 vonalat tartalmazott milliméterenként ($d = 0,005 \text{ mm}$), a rács és az ernyő távolsága $L = 40 \text{ cm}$, az első elhajlási maximum és a direkt sugár fényfoltjának távolsága az ernyőn $5,5 \text{ cm}$. Ezeket az adatokat felhasználva a lézerfény hullámhosszára $\lambda = 687 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ adódik. (A vörös fény hullámhossztartománya a táblázat szerint $720 \cdot 10^{-9} - 589 \cdot 10^{-9} \text{ m}$.)

A mérési eredmény pontosabb, ha a mérést több különböző ernyő-rács távolság esetén megismételjük és a kapott λ értékeket átlagoljuk!

[Vissza >>>](#)

F34. CD lemez (mint reflexiós rács) rácstávolságának meghatározása

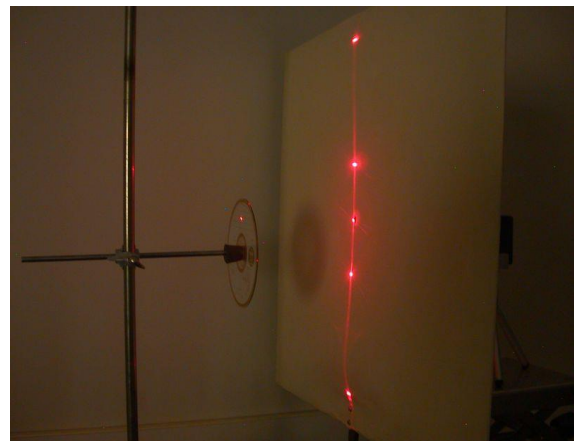
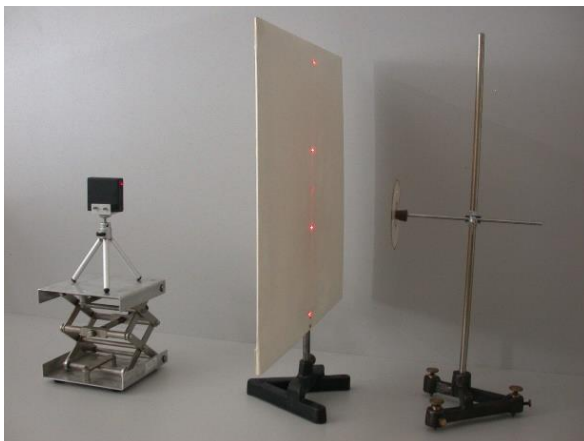
A CD lemezt fehér fényrel megvilágítva interferencia színeket láthatunk, a lemez reflexiós rácsként működik, a fénynyalábok róla visszaverődve interferálnak egymással.



Optikai rácsként működik minden olyan periodikus optikai ismétlődés, ahol az ismétlődés hossza a fény hullámhosszának nagyságrendjébe esik. Nemcsak átlátszó, hanem tükröző (reflexiós) rácsok is vannak, ilyen pl. a CD lemez felülete is, ahol az apró, szabad szemmel nem látható mikrobarázdák alkotják a rácsot. A CD lemezek tükröző rétegében koncentrikus körök mentén apró mélyedések vannak, ezek tárolják a lemezen rögzített információt. A „barázdák” és a tükröző réteg reflexiós optikai rácsként működnek, így a visszavert fényben interferenciámintázat jön létre.

A mérés összeállítása

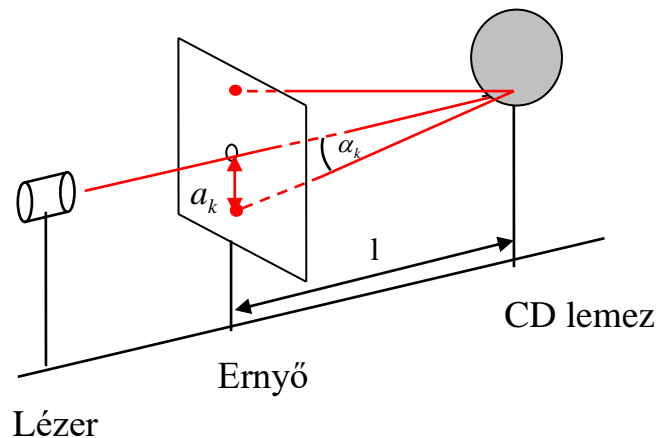
A lézermutató fényét (hullámhossza kb. 630-680 nm) merőlegesen az ernyő közepén lévő lyukon a CD-re vetítjük. A felületen diffrakciót szenvedett lézervény az ernyőre jut. Az interferenciaképen lemérjük az első maximumhely a távolságát a középső főmaximumtól, illetve a CD-ernyő távolságát.



Az optikai rácsoknál merőlegesen beeső fénysugár esetén az ernyőn keletkező k -adik maximumhoz tartozó α_k szögre fennáll az alábbi összefüggés:

$$\sin \alpha_k = k \frac{\lambda}{d}$$

Ahol λ a lézervény hullámhossza, d a rácsállandó, α_k a k -adik maximum szöge. A kísérlet sematikus ábráját a következő ábra mutatja. Jelöljük a_k -val a k -adik maximum távolságát a főmaximumtól, valamint l -lel a CD távolságát az ernyőtől.



Innen a rácsállandó már meghatározható:

$$d = \frac{k}{\sin \alpha_k} \lambda$$

Az α_k szöget a mérési elrendezés geometriai adatai segítségével meghatározhatjuk:

$$\alpha_k = \arctg \left(\frac{a_k}{l} \right)$$

A rácsállandó értéke:

$$d = \frac{k}{\sin \left(\arctg \frac{a_k}{l} \right)} \lambda$$

A CD-k rácsállandójának értéke általában 1600 nm. A több információt tartalmazó DVD-k jellemző rácsállandója 740 nm.

Optikai tárolás

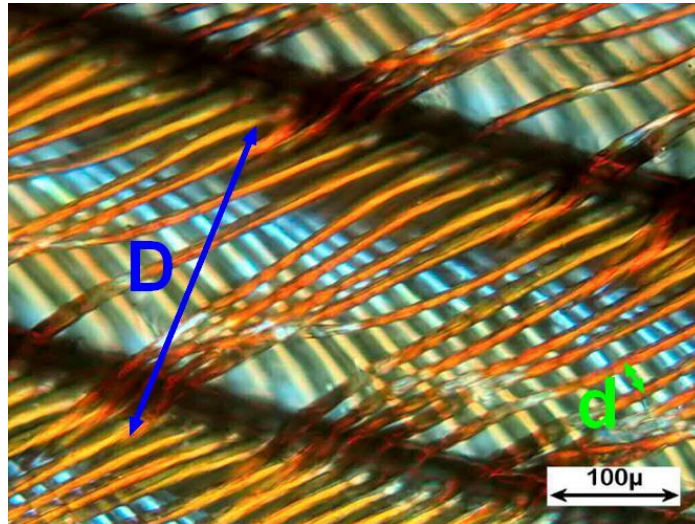
A klasszikus mágneses tárolókkal (hajlékonylemez, merevlemez, mágnesszalag) szemben az optikai rendszerű tárolókra jellemző, hogy az írás és olvasás lézervényekkel történik. Nevüknek megfelelően optikai eljárást (fényvisszaverődés, polarizáció, fényszórás, fénytörés) használnak az adatok írására, olvasására.

[Vissza >>>](#)

F35. Madártoll periódikus szerkezetének meghatározása kétféle módszerrel

Érdeklődő hallgatók számára szakkörön, tehetséggondozás keretein belül érdemes elvégezni az alábbi egyszerű kísérletet.

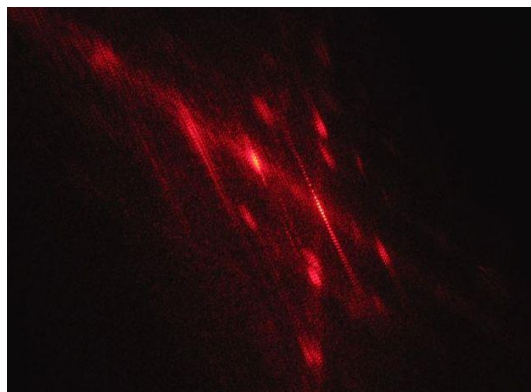
Szabadszemmel vizsgálva egy galambtollat, kétféle ismétlődési távolságot figyelhetünk meg. Fénymikroszkóppal vizsgálva, a következő szerkezetet láthatjuk:



A felvételeken is jól látható, hogy kétféle periodicitású a szerkezet: a középső ágak mindkét irányban mellékágakban folytatódnak. Ezek az egymást átfedő mellékágak ferde rácshoz hasonlóak.

A mikroszkópos felvételtől a nagyítás és a képről lemérhető D és d távolságok az ismeretében az ágak és a mellékágak távolsága kiszámítható.

A galambtollat lézerrel átvilágítva érdekes elhajlási képet kapunk a toll mögött L távolságban elhelyezett ernyőn. A diffrakciós képen is jól látható, hogy az erősítési pontok kétféle periodicitást mutatnak.



A toll szerkezeti képén látható kétféle periodicitás, a főágak (D) és a és a mellékágak (d) távolsága. Az elhajlási képen a nagy D rácsállandójú szerkezet hozza létre az apró, kis a

távolságú pontsorozatot, a kis d rácstávolságú szerkezet pedig a nagyobb A távolságú maximumokat.

Az optikai rácsonál megismert összefüggések használatával az elhajlási képen mérhető első maximális erősítési pontok távolságaiból (A és a), valamint a toll-ernyő távolságából (L) kiszámíthatók a d , D ráczállandók kiszámíthatók. Ez közelítő számítás, de a kapott értékek összevethetőek az fénymikroszkóppal készült felvételeken látható távolságokkal.

$$\lambda \approx 670 \text{ nm}, \quad a \approx 3 \text{ mm}, \quad L = 184 \text{ cm}$$

$$D = \lambda \frac{L}{a} \approx 411 \text{ } \mu\text{m}$$

ez nagyságrendben megegyezik a mikroszkópos felvételtől leolvasható értékkel.

A másik, nagyobb távolságban lévő pontsorozatból meghatározható ismétlődési távolság:

$$a \approx 7 \text{ cm}$$

$$D = \lambda \frac{L}{A} \approx 17,6 \text{ } \mu\text{m}$$

[Vissza >>>](#)

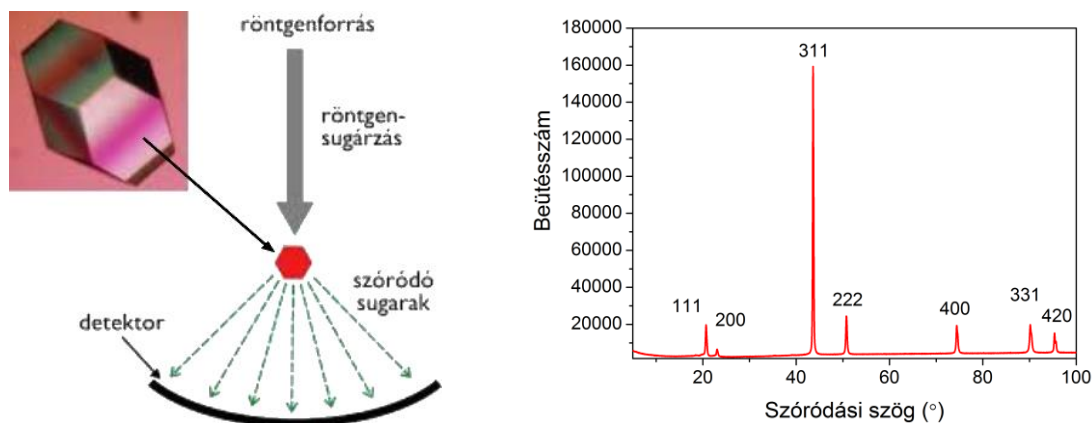
F36. Diffrakció, mint a szerkezetkutatás egyik alapvető módszere

Megmutattuk, hogy egydimenziós rács elhajlási képéből a rácsparaméter meghatározható. A módszer háromdimenziós rácsok esetén is alkalmazható. Három dimenziós rácsszerkezet esetén az ismétlődési távolságok attól függenek, hogy milyen irányból nézzük a rácsot. Három független irányból vett diffrakciós kép alapján a térbeli szerkezet rekonstruálható.

Röntgen diffrakciós szerkezet vizsgálat

A röntgensugarak hullámhossz tartománya: $\lambda \approx 0,0006 \text{ nm} - 1,15 \text{ nm}$

Ha a vizsgált kristályos anyag karakterisztikus méretei a röntgensugár hullámhosszával összemérhetőek, akkor a rácsparaméter, rácsszerkezet, kristályhibák mérete, eloszlása, nagyobb molekulák esetén a kötőszögek, kötéstávolságok röntgendiffrakciós mérésekkel meghatározhatók.



A szóródó sugarak szög szerinti detektálása után a szórt intenzitás eloszlás a szög függvényében meghatározható. Ebből pedig az adott irányra jellemző rácsparaméter kiszámítható, ezekből az adatokból pedig a térbeli rács felépíthető.

Elektronmikroszkópos szerkezet vizsgálat

Az anyag hullámtulajdonságainak egyik első bizonyítéka az elektronok rácson való elhajlásának kísérleti bizonyítása volt (Jönsson, 1961).

m_e tömegű, v_e sebességgel mozgó elektron hullámhosszát de Broglie definiálta:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e \cdot v_e}$$

ahol h a Planck-állandó. Az elektronmikroszkópban az elektron hullámhossza ennek megfelelően szerint a gyorsító feszültség függvénye.

Az elektronok sztatikus elektromos tér segítségével megfelelő sebességre gyorsíthatók:

$$eU = \frac{1}{2} m_e \cdot v_e^2$$

Innen az elektron sebessége:

$$v_e = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

A sebesség ismeretében a de Broglie hullámhossz kiszámítható:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e \cdot v_e} = \frac{h}{\sqrt{2eUm_e}}$$

Az elektron hullámhossz tehát a gyorsító feszültséggel változtatható.

Felhasználva, hogy:

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, \quad e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

100 kV gyorsító feszültség esetén az elektron hullámhossza közel 1 nm.

Az elektronmikroszkópot diffrakciós üzemmódban üzemeltetve a direkt és az elhajlott nyalábokat is ráengedik az ernyőre, így kapják a kiválasztott területről jövő diffrakciós képet.

A minta pozíciója az elektronnyalábhoz képest goniométer segítségével változtatható. Egyetlen diffrakciós képből a vizsgált minta adott irányú periodicitása határozható meg. Ugyanazt a területet három különböző irányból megvilágítva a diffrakciós képek periodicitása a lapján a térbeli szerkezet is rekonstruálható. A következő képpár ugyanazt a területet elektron diffrakciós képét mutatja egykristályon, különböző irányból nézve.



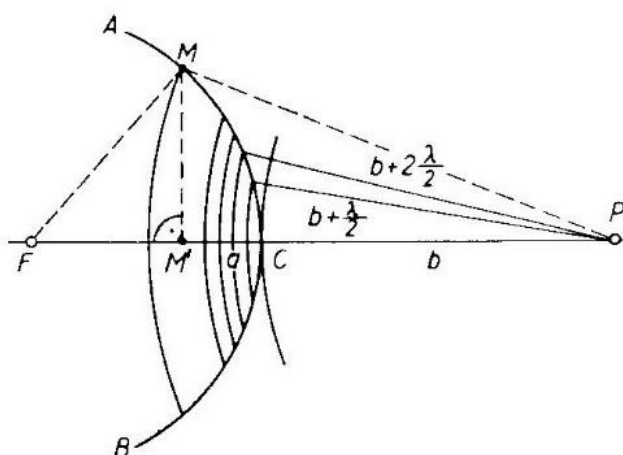
[Vissza >>>](#)

F37. A Poisson-folt értelmezése a Fresnel-féle zóna módszerrel

A Huygens–Fresnel-elv közelítő alkalmazását már felhasználtuk a rés elhajlási képének értelmezésekor. A zóna módszer lényege, hogy a hullámfrontot olyan, úgynevezett $\lambda/2$ -es zónákra bontjuk, ahol a szomszédos zónák, sugármenetei $\lambda/2$ útkülönbségű párokra bonthatók. A zóna módszer a Fresnel-diffrakciós jelenségek (amikor az ernyő nem „végtelen távolságban” van a kísérleti berendezéstől) is alkalmazható.

Pontszerű fényforrás fényhatása

Az eljárás megértéséhez határozzuk meg a pontszerű fényforrásból kiinduló és a térben szabadon terjedő hullámok fényhatását egy közbűlső hullámfrontból kiinduló elemi hullámok összegzésével. Az ábra szerint az F fényforrásból gömbhullámok indulnak ki. Tekintsük az elemi hullámok kiindulópontjának az a sugarú hullámfrontot, és keressük interferenciájuk eredményét a P pontban.



Húzzunk a P pontból érintő gömböt ehhez a hullámfronthoz, amelynek sugarát jelöljük b -vel. Osszuk fel a hullámfrontot $\frac{\lambda}{2}$ sugarú zónákra úgy, hogy a b sugarú gömbbel koncentrikus gömbfelületeket rajzolunk, amelyek sugara rendre $r + \frac{\lambda}{2}, r + 2\frac{\lambda}{2} \dots r + k\frac{\lambda}{2}$. Két szomszédos gömbbel a hullámfelületből kivágott gömbfelület rész alkot egy zónát. A végtelen sok elemi hullám összegezése helyett összegezzük a zónák hatását a P pontban.

A zónákból a hullámok azonos fázisban indulnak, hiszen minden zóna ugyanazon a hullámfronton van. A P pontbeli találkozáskor fáziskülönbségüket útkülönbségük szabja meg. Mivel a szomszédos zónák út különbsége $\frac{\lambda}{2}$ az egymás utáni mindig ellentétes fázisban vannak az előző (és következő) zónából érkező fényvel.

Az egymás után következő zónák által kibocsátott fény amplitúdóját rendre $E_1, E_2, \dots E_n$ -nel jelölve az eredő fényhatás amplitúdója a P pontban

$$E_P = E_1 - E_2 + E_3 \dots \pm E_n$$

ahol az utolsó tag előjele pozitív, ha n páratlan és negatív, ha n páros. (A fázor kép alapján az egymást követő vektorok mindig az x tengelybe esnek, de az előtük levővel ellentétes irányúak.)

A számítás a rés elhajlás értelmezéséhez hasonló egyszerűségű lenne, ha az egyes zónákból kiinduló hullámok amplitúdója egyenlő lenne. Most azonban a zónákból kibocsátott hullám amplitúdója nem egyenlő. Nyilvánvaló, hogy az adott zónából induló hullám amplitúdója függ a zónát alkotó gömböv területétől. Egyszerű geometriai számítással megmutatható azonban, hogy zónák felülete jó közelítéssel egyenlő. Tudjuk azt is, hogy a gömbhullámok amplitúdója a hullám által megtett távolsággal fordítottan arányos. Az észlelési pontba egyre távolabbi zónából érkező hullámok amplitúdója emiatt egyre kisebb. Kirchhoff számításai szerint az amplitúdó a zóna normálisa és a zónától a P ponthoz húzott egyenes szögének növekedésével is csökken. Amikor ez a szög $\pi/4$ akkor a zóna hatása zérus. Az utóbbi két hatás eredményeképpen az egymást követő zóna amplitúdók lassan csökkennek.

Emiatt a zónák eredő amplitúdóját érdemes a következő módon rendezni:

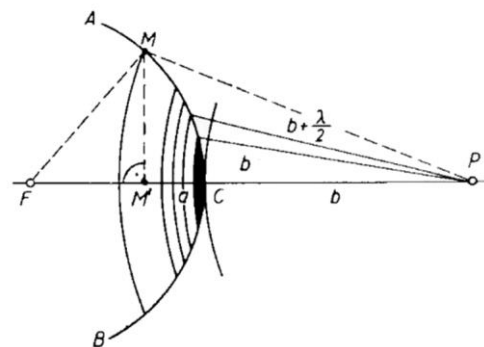
$$E_P = \frac{E_1}{2} + \left(\frac{E_1}{2} - E_2 + \frac{E_3}{2} \right) + \left(\frac{E_3}{2} - E_4 + \frac{E_5}{2} \right) + \dots \frac{E_n}{2}$$

Az amplitúdók csökkenése miatt a zárójeles tagok értéke jó közelítéssel zérus, az utolsó tag pedig a $\vartheta = \pi/4$ miatt nulla. Szabad fényterjedés esetén tehát azt kaptuk, hogy ha a fényterjedést a fényforrás és az észlelési pont közötti hullámfelületből indított elemi hullámok összegezésével határozzuk meg, akkor az észlelt hatás amplitúdója az első zónából kiinduló amplitúdó fele.

Poisson-folt

Az eredmény alapján könnyen érthetővé válik a Poisson-folt megjelenése. Tegyük ugyanis kicsiny korong alakú átlátszatlan lemezt a C pontba. Ezután szerkesszük meg a Fresnel zónákat úgy, hogy az első zóna éppen a lemez szélétől induljon (ábra).

Az előző gondolatmenet értelmében mindig a korongon túli első zóna felének amplitúdóját észleljük, azaz a korong mögött valóban világos folt keletkezik.



Elhajlás kicsiny lyukon

Amennyiben a korongot ernyővel helyettesítjük, amelyen kicsiny lyuk van, akkor a lyuk néhány zónát átenged, a többi az ernyő levágja. A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy akkor észlelünk maximális amplitúdójú fényhatást, ha a lyuk páratlan számú zóna hullámát engedi át. Ekkor az észlelt amplitúdó az első és utolsó zóna amplitúdó összegének fele. Páros számú zóna átengedése esetén az eredő amplitúdó jó közelítéssel zérus. Ilyenkor a lyuk mögött közepén sötét folt van.

Az átengedett zónák száma nyilvánvalóan változik, ha a lyuk és az ernyő távolságát változtatjuk. Így a lyuk mögött középen maximális és minimális fényhatást is észlelhetünk.

Megjegyzés:

- Ha a hullámfront gömbjén minden második zónát kitakarunk, akkor a maradék zónák hullámjai azonos fázisban találkoznak, és a fényhatás felerősödik. Amennyiben a zónákra bontott gömb sugara nagy, akkor zónaszerkezetes tartománya síkkal helyettesíthető. A síkon átlátszó és nem átlátszó körgyűrűk felelnek meg a zónáknak. Az így készített Fresnel-féle zónalemezek a lencsékhez hasonlóan viselkednek, a fénylő tárgyról képet alkotnak, hiszen a tárgypontról kiinduló fénysugarakat meghatározott pontokban összegyűjtik. Optikai viselkedésük azonban sokkal bonyolultabb, mint az egyszerű lencséké. (Bővebben: Fizikai Versenyfeladatok)
- A zónaszerkesztésre vonatkozó gondolatmeneteket a szuperpozíció elve alapján a fényhullámok amplitúdóival (lényegében fázor vektorokkal) végeztük. Az észlelhető hatás természetesen az amplitúdók négyzetével arányos fényintenzitás.

[Vissza >>>](#)

F38. Képpalkotás és hullámoptika (tanári háttérismeretek)

A fény terjedésének vizsgálatakor megállapítottuk meg, hogy a fény egyenes vonalban terjed. Csak a finomabb kísérletek mutattak rá, hogy a fény az egyenesvonalú terjedéssel nem összeegyeztethető interferencia és elhajlásjelenségeket is mutat. Az egyenes vonalú terjedésre alapozva felépítettük a geometriai optikát, az interferencia és elhajlásjelenségek alapján pedig kidolgoztuk a hullámoptikát. A kétféle leírásmód érvényességi körét azonban nem határoztuk el pontosan. Az önálló elvként kimondott hullámoptikai elvekkel (Huygens- és Huygens–Fresnel-elv) azonban bizonyítani tudtuk a geometriai optika törvényeit, azaz beláttuk, hogy az általánosabb hullámoptikai elmélet tartalmazza a geometriai optikai közelítést. Általában nagyon fontos, hogy amikor valamilyen jelenségkör leírására többféle elméletet is alkalmazhatunk, pontosan kijelöljük a különböző elméletek érvényességi körét és hierarchiáját. Különösen fontos, hogy megmutassuk, hogy a fizikában a nagyobb érvényességi körű elméletek többnyire tartalmazzák a több egyszerűsítő feltétellel kimondott és egyszerűbben megfogalmazható elméleteket. A fénytán különösen jó példákkal szolgál az így egymásba ágyazott leírásmódokra (geometriai optika, hullámoptika, elektromágneses fényelmélet).

Nagyjából azt mondhatjuk, hogy a geometriai optika abban az esetben használható, ha a fény útjába kerülő akadályok a fény hullámhosszával nagyságrendekkel nagyobbak, egyéb esetekben pedig a hullámoptikát kell használnunk. Pontosabban vizsgálva a kérdést, kimutatható, hogy a hullámoptika $\lambda \rightarrow 0$ határesetként foglalja magába a geometriai optikát. Ily módon érthetővé válik, hogy a geometriai optika csak $d \gg \lambda$ méretű akadályok esetén ad a tapasztalatokkal egyező eredményt.

Mivel a geometriai optika a hullámoptika határeseteként fogható fel, az optikai leképezés esetén is a leképezési mechanizmus mélyebb megértéséhez juthatunk el a hullámelmélet alapján. A geometriai optikai törvényekkel számított képpalkotási formulák éppen azért adnak a valóságtól eltérő eredményt, mert a $\lambda \rightarrow 0$ határeset sohasem valósul meg. Ezenkívül a geometriai optikai elméletek nem adnak számot a leképező eszközök foglatán létrejövő elhajlási jelenségekről sem.

Érdemes tehát megvizsgálni, hogy a hullámelmélet segítségével hogyan értelmezhetők a geometriai optikai képpalkotás pontatlanságai. Természetesen a matematikai leírás bonyolultsága miatt csak a kérdéskör illusztrálására szorítkozhatunk.

A kép keletkezése önállóan nem világító tárgy esetén (Abbé-elmélet)

Az önállóan nem világító tárgyról csak akkor alkothatunk képet, ha a tárgyat megvilágítjuk. A megvilágító fényt a tárgy szórja, s ezek a szórt sugarak hordozzák a tárgyról nyerhető információt.

A tárgyról nyerhető információt a fény, a tárgyon szóródó fény iránya, a különböző irányban szórt fény relatív amplitúdója és fázisa formájában viszi tovább. A kép pontossága tehát azon múlik, hogy mennyire sikerül rögzíteni a tárgyon szóródó fény fenti tulajdonságait. A közönséges fényképfelvétel csak az intenzitásviszonyokat tükrözi, így a szórt hullámok fázisában lévő szabályosságok teljesen elvesznek.

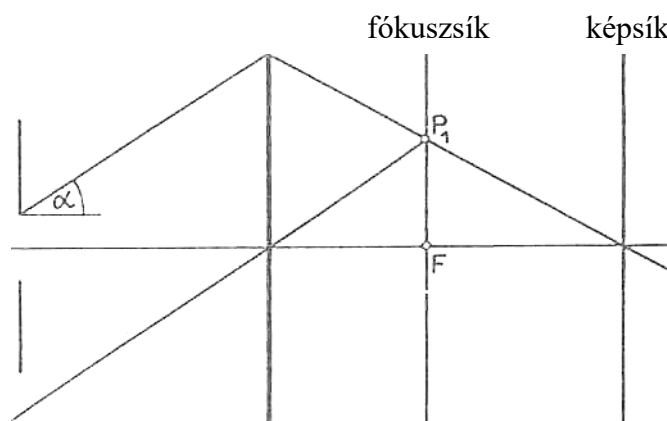
Az optikai eszközök által alkotott kép keletkezésében viszont a fázisviszonyok döntő jelentőségűek. Világítsuk meg a tárgyat pl. párhuzamos sugárnyalábbal. A tárgy adott pontjáról különböző irányban szóródó fénysugarak interferenciaképesek. Az optikai eszközre csak azért van szükség, hogy a tárgy pontjaiból különböző irányban szóródó fénysugarakat ismét összegyűjtsük. A képet az összegyűjtött fénysugarak interferenciája alakítja ki.

A leképezés folyamata tehát két részre bontható:

- a) A szórt hullámok által alkotott elhajlási kép keletkezése.
- b) Az elhajlási rendek interferáltatása.

Példaként egyszerű tárgyról, az optikai rácsról alkotott kép keletkezésével foglalkozunk. A tárgyat helyezük el a lencse optikai tengelyére merőlegesen, és jellemezzük a $T(y)$ áteresztőképesség függvényével. Legyen az áteresztőképességben tapasztalható periódus d (Tehát $T(y) = T(y + d)$).

Világítsuk meg a tárgyat az ábrán látható elrendezésben a lencse optikai tengelyével párhuzamos sugárnyalábbal.



A tárgyról α irányba szóródó párhuzamos nyaláb a fókuszsík P_1 pontjában egyesül. Ily módon a fókuszsíkban pontsorozatot kapunk. Ezek a pontok a tárgyon létrejövő elhajlási rendeknek felelnek meg. A fókuszsík után a fénysugarak továbbhaladnak, és az egyes elhajlási rendek ismét átfedik egymást. A képsíkban az elhajlási rendek interferenciája alakítja ki a képet. Kimutatható, hogy Az $E(\alpha)$ amplitúdó csak az

$$\sin \alpha_l = \frac{l}{d} \lambda$$

egyenlettel megszabott irányokban különbözik zérustól, valamint, hogy ezekben az α_l irányokban

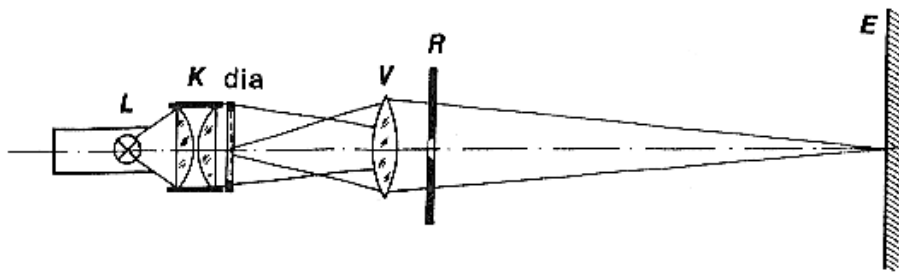
$$E(\alpha) = K D a_l$$

ahol D a tárgy átmérője, a_l pedig a fókuszsíkban nyert fénylő pont fényerősségétől függ. A fókuszsíkban megjelenő pontok mindegyike tehát egy α_l elhajlási iránynak felel meg.

A fókusz sík után tovahaladó hullámok ismét interferálnak. Az interferencia az egyes $E(\alpha)$ amplitúdójú hullámok találkozásának eredménye, ami a képsíkban valóságos képet ad a tárgyról. A kép azonban többnyire mégsem pontosan adja vissza a tárgy tulajdonságait, mert a lencse véges átmérőjű, így az elhajlási rendeknek csak egy részét képes a fókusz síkban összegyűjteni. Ezért a kép sem végtelen sok elhajlási rend összegeként áll össze. A leképezés annál pontosabb, minél több elhajlási rendet sikerül az elhajlási képben megőrizni. Amennyiben a leképező eszköz túlságosan kevés elhajlási rendet visz át, akkor a kép erősen eltérhet a tárgytól. Ez az eltérés egyszerűen demonstrálható pl. drótszítáról alkotott kép vizsgálatával.

Kísérlet

Képezzünk le a drótszítát kb. 1,5 m-re álló ernyőre az ábrán látható módon! A szita legyen közvetlenül az 5 cm fókuszú kondenzor után. A kondenzor az izzószálat néhány cm-rel a vetítőlencse ($f = 20$ cm) mögé képezze le.



Helyezzünk a vetítőlencse és az ernyő közé – a lencséhez közel – állítható (egyelőre még 3-4 mm széles) rést! A rés a szita egyik szálirányával párhuzamosan álljon! Keressük meg azt a távolságot, ahová a rést állítva a szita képe változatlanul jól látszik! Most szűkítsük le a rést! A réssel párhuzamos szitaszálak képe eltűnik, a résre merőlegeseké viszont továbbra is jól látszik. Ha a rés a másik száliránnyal párhuzamos, akkor ennek képe tűnik el. (A szita vékony szálú, 1-2 mm száltávolságú legyen. Diakeretbe fogva használjuk. Drótszita híján diaüvegre rajzolt négyzethálót használhatunk.)

Megjegyzés (csak tanároknak):

- Periodikus tárgy (rács) esetén a folyamat matematikailag is könnyen követhető, azonban megértéséhez szükséges a Fourier-sor ismerete. A $T(y)$ függvény segítségével a tárgy keskeny Δy sávján áthaladó fény amplitúdója az áthaladás után

$$E(y) = E_0 T(y) \Delta y$$

$$T(y) \leq 1$$

formában fejezhető ki, ahol E_0 a beeső fény amplitúdója. A Huygens–Fresnel elv segítségével kimutatható, hogy a tárgyról α irányban szórt hullámok eredő amplitúdója az egyes pontokból kiinduló $E_0 T(y)$ amplitúdójú elemi hullámok interferenciájaként a fókusz síkban az

$$E(\alpha) = K \int_{\text{tárgy}} T(y) e^{iky \cdot \sin \alpha} dy, \quad \text{ahol } K \text{ állandó}$$

összefüggéssel fejezhető ki. Az ábráról látható ugyanis, hogy az y helyről szóródó hullámok az $y = 0$ helyről szóródó hullámokhoz képest $2\pi \frac{y \sin \alpha}{\lambda}$ fázissal késnek. A tárgy periodikusságát kifejező $T(y)$ függvényt Fourier-sorba fejtve

$$T(y) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l e^{i \frac{2\pi}{d} l y}$$

az α irányban

$$E(\alpha) = K \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l \int_{\text{tárgy}} e^{2\pi i \left(\frac{l}{d} - \frac{\sin \alpha}{\lambda} \right) y} dy$$

amplitúdó adódik. Mivel az integrálandó függvények gyorsan változnak, kimutatható, hogy értékük csak akkor nem zérus, ha az exponenciális függvény kitevője eltűnik. Az $E(\alpha)$ amplitúdó tehát csak a

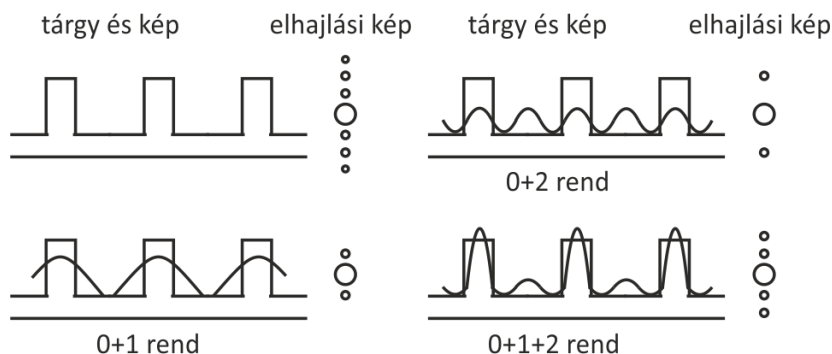
$$\sin \alpha_i = \frac{l}{d} \lambda$$

irányokban különbözik zérustól. Ezekben az α_i irányokban az $E(\alpha)$ amplitúdóhoz csak egyetlen integrál ad járulékot, Így $E(\alpha) = K D a_l$ ahol D a tárgy átmérője, a_l pedig – most már pontosan értelmezhetően – a tárgyat leíró függvény megfelelő Fourier-komponensének amplitúdója.

- A fókusz sík után tovahaladó és ismét interferáló hullámok a képsíkban a tárgy Fourier-sorában szereplő amplitúdókkal arányos komponensekből állnak össze, ezért az interferencia eredménye matematikailag csak konstans szorzóban különbözik a tárgyat leíró Fourier-sortól. Az ideális kép tehát tényleg egyenértékű a tárggyal.

A mikroszkóp felbontóképessége

A tárgy szerkezetének helyes visszaadása különösen akkor fontos, ha a tárgyról egyéb módszerrel nem tudunk információt szerezni.



Mikroszkopikus vizsgálatoknál például nagyon fontos, hogy a kép viszonylag alakhű legyen. A sematikus ábra periodikus tárgyat és képét mutatja a fókusz síkban megjelenő interferenciaképpel együtt. A tárgy minden képen szerepel. A bal felső kép azt illusztrálja, hogy elegendően sok elhajlási rend esetén a tárgy és a kép azonos. A bal alsó képen az egyenletes

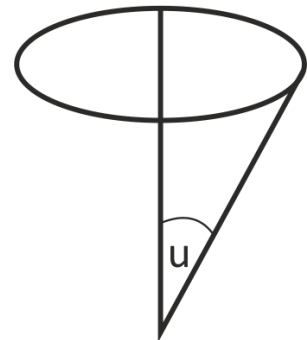
megvilágítást eredményező nulladrend mellett az első elhajlási rend alkot csak képet. A tárgy és a kép periódusa hasonló, de a kép messze nem alakhű. A jobb felső képen a nullad- és a másodrendű elhajlásból származó kép látható. A kép érthető módon megduplázza az adott hosszra eső periódusok számát, egyáltalán nem alakhű. A jobb alsó képen két elhajlási rend is részt vesz a képalkotásban, a kép már viszonylag jól visszaadja a tárgy tulajdonságait. Az ábrásor alapján érthető, hogy a leképezés alakhűségének minimális feltétele, hogy a képalkotásban legalább az 1. elhajlási rend is részt vegyen. Ennek alapján meghatározhatjuk, hogy mikroszkóp objektív képalkotásakor mekkora az a legkisebb távolság, amelynek esetén két pontot még különállónak látunk. Ezt a távolságot a mikroszkóp felbontóképességének nevezzük. A korábban levezetett $\sin\alpha_i = \frac{l}{d}\lambda$ formula szerint adott pontból kiinduló első elhajlási rend ($l = 1$) elhajlási rend akkor jut még a mikroszkóp lencséjére, ha a lencse fél nyílásszögére ($\alpha_1 = u$) teljesül a

$$\sin\alpha_1 = \frac{\lambda}{d}$$

összefüggés.

Két olyan pont minimális távolsága, amelyet még különállónak látunk

$$d = \frac{\lambda}{\sin u}$$



A fentiekben csak periodikus tárgyakról alkotott kép keletkezésével foglalkoztunk. Teljesen hasonló elmélet érvényes tetszőleges tárgy esetén is. A matematikai tárgyalás azonban ez esetben jóval bonyolultabbá válik, ezért ennek részletezésétől eltekintünk.

Önállóan világító tárgyak leképezése

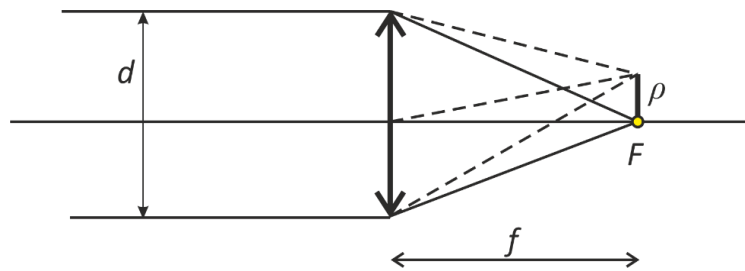
Az önállóan világító tárgyakról alkotott kép keletkezése egyszerűbben értelmezhető folyamat. A tárgy minden pontja hullámokat bocsát ki, amelyek a leképező eszközön áthaladva a képpontban fáziskülönbség nélkül találkoznak, tehát erősítik egymást. Ugyanezen sugarak interferenciája a képpont mellett kioltást eredményez.

A leképező rendszer azonban mindig csak véges keresztmetszetű nyalábot ereszt át, így a képpont melletti pontokban nem jön létre teljes kioltás. (A keskeny nyaláb egyes sugarai között kicsi az útkülönbség). A pontszerű fényforrás képe tehát mindig kiterjedt. A képpont kiterjedése annál nagyobb, minél keskenyebb a leképezésben résztvevő fénynyaláb.

A leképezésben tehát lényeges szerepet játszik a leképező rendszer átmérője is, mert ettől függ, hogy a tárgy két pontja a képen megkülönböztethető-e egymástól. A köralakú nyílásokon létrejövő elhajlásjelenségek részletes vizsgálata mutatja, hogy az első elhajlási minimum irányát a

$$\sin \alpha = 1,22 \frac{\lambda}{d}$$

formula határozza meg.

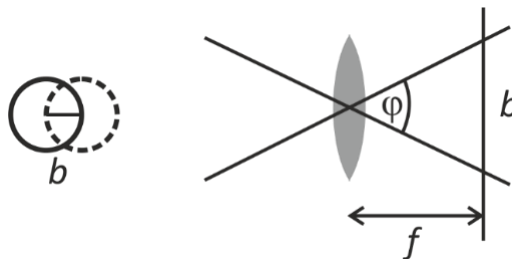


Egy távoli pontról kiinduló fénysugarakat a lencsék a lencsehatáron létrejövő elhajlás miatt a képpont ρ sugarú környezetében gyűjtik össze. Az elhajlási kép gyűrűrendszer, amelynek első minimumhelyét kell figyelembe venni. Az ábra jelöléseivel és az elhajlási rendre vonatkozó összefüggés felhasználásával

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha = \frac{\rho}{f}$$

$$\rho \approx f_{\alpha} = 1,22 f \frac{\lambda}{d}$$

Hasonló megfontolással adódik, hogy a csillagászati távcsövek által alkotott kép esetén két tárgypontról akkor tekinthető különbözőnek, ha a képpontok elhajlási korongjai legfeljebb félig fedik egymást. Két különböző irányból érkező fénysugarat akkor tekintünk különböző pontból indulónak, ha $b \geq \rho$ tehát, ha



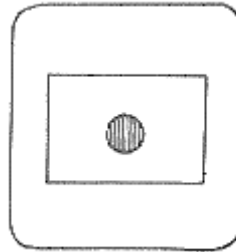
$$\rho \approx f_{\varphi} = 1,22 f \frac{\lambda}{d}$$

$$\varphi \geq \frac{b}{f} = 1,22 \frac{\lambda}{d}$$

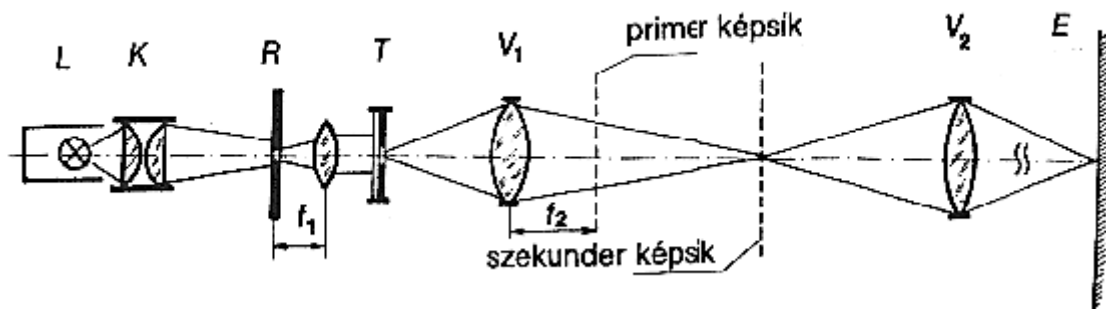
A $\varphi_0 = 1,22 \frac{\lambda}{d}$ szöget nevezzük a távcső feloldási határának. Ha például a távcső objektívje $d = 2 \text{ m}$ átmérőjű, és $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$, akkor a $\varphi = 3 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$ nagyságú szögek esetén az okulárlencse már nem játszik szerepet a nagyításban, illetve az okulár által létrehozott további nagyítás felbontás nélkül ún. üres nagyítás.

Kísérlet

Kísérletünkben mikroszkópi tárgyként körülbelül 200 vonal/cm sűrűségű, diakeretbe foglalt optikai vonalrácsot (lehetőleg karcolt üvegrácsot) használunk. A rácsot – pusztán praktikus okból – 5 mm környílású papírlappal takarjuk, az ábra szerint.



Vetítsük a kísérleti összeállításban az L lámpa fényét a K kettős kondenzorral ($f = 5$ cm) a körülbelül 15 cm-re álló függőleges R résre! A rés szélessége egyelőre 2 mm legyen. Tegyük a résből divergáló nyalábot rövid gyújtótávolságú ($f = 5$ cm) lencsével párhuzamossá! Helyezzük az optikai rácsot (az ábrán a T tárgy) a párhuzamos nyaládba! Képezzük le a tárgyat a V_1 vetítőlencsével közeli ernyőre! Az ernyőn a rácsot takaró környílás (valódi) képe 2-3 cm átmérőjű legyen. Helyezzük át az ernyőt 2-3 méter távolságra, és vetítsük erre az imént kapott valódi képet egy újabb, kb. 15 cm gyújtótávolságú V_2 objektívvel! Ily módon a rácsvonalak kb. 30-40-szeresre nagyítva látszanak az ernyőn.



A tárgyat megvilágító paralel nyaláb a tárgy részletein elhajlást szenved. A különböző (nullad-, első-, másod- stb.) rendben elhajló, önmagukban párhuzamos nyalábok a V_1 objektív gyújtósíkjában interferálnak. A gyújtósíkban létrejött interferogramot a tárgy *Abbe-féle primer képének* nevezzük. A V_2 vetítő objektívvel alkotott kép az ún. *Abbe-féle szekunder kép*.

Húzzuk össze a rést kb. 0,3 mm-re, és tegyük a primer képsíkba egy kis segédernyőt! (Üvegezetlen diakeretbe foglalt rajzpapír.) Ha ezen akkora rést vágunk, amelyen csak a nulladrendű nyaláb fér át, akkor a rácsvonalak képe az ernyőn eltűnik, csak a környílásnak megfelelő, struktúra nélküli világos foltot látunk. Ha a segédernyőn olyan réssorozatot vágunk, amely a páratlan rendben elhajló nyalábokat visszatartja, de a páros rendben elhajlókat továbbengedi, akkor az E ernyőn kétszeres vonalsűrűségű kép jelenik meg. (A páratlan rendek visszatartásával ugyanis a V_2 vetítőlencse olyan információt kap, mint amilyen egy kétszeres vonalsűrűségű rácsról érkezne rá.)

A kísérlet sikere a pontos beállításon, a rácsvonalak kontrasztosságán és a két vetítőlencse minőségén múlik. A rácsot – szükség esetén – tusvonalrajz fotózásával is készíthetjük. Vetítőlencsének alkalmas fókusz-távolságú fényképező-objektívet is használhatunk.

A holográfia

A holográfiát *Gábor Dénes (1900-1979) magyar fizikus* találta fel 1947-ben, azonban az első igazi hologramot csak 1964-ben a lézer feltalálása után sikerült létrehozni, mert az addig használt fényforrások fénye nem volt megfelelően koherens. Gábor Dénes a holográfia kidolgozásáért 1971-ben Nobel-díjat kapott. Gábor Dénes alap gondolata az volt, hogy a közönséges fényképekkel szemben, amelyek készítésekor rengeteg információt elveszítünk, mert csak a tárgyról szóródó fény intenzitásvizonyait használjuk, a tárgyról szóródó fény teljes információanyagát fel kellene használni a képalkotáskor. A nagyon egyszínű és koherens lézerefény lehetővé tette a gondolat megvalósítását, az optikai információnak a szokásos fényképeknél hatásosabb tárolásának, a holográfiának kifejlesztését.

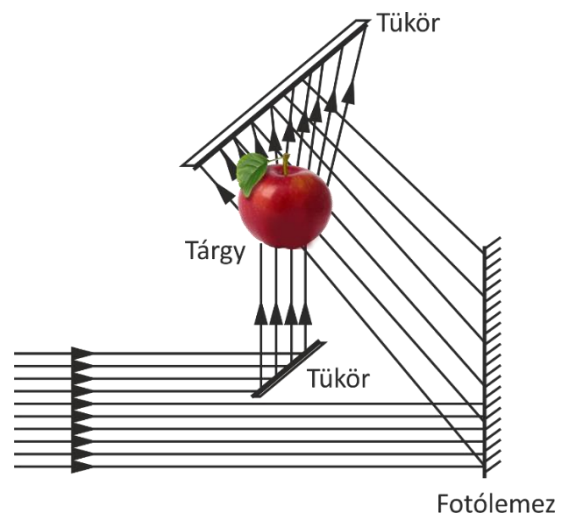
A fényképek készítése

A fényképek készítésekor a tárgyról visszavert fénysugarak által hordozott információt rögzítjük a fényképezőlemezen. A tárgyak a rájuk eső fénynyalábnak az amplitúdóját és fázisviszonyait is megváltoztatják. Így a tárgy különböző pontjairól visszavert fénynyaláb amplitúdója mellett a hullám fázisviszonyai is közvetítenek információt a tárgyról.

A fényképezéskor a fotolemezben végbemenő kémiai változások a beeső fény energiájával arányosak, így normál fényképezéskor csak a beeső fény amplitúdó viszonyait rögzítjük, hiszen a fényhullám intenzitása az amplitúdó négyzetével arányos.

A hologram

A lézerefénnyel speciális módon készített felvételek, az ún. *hologramok* a tárgyról szóródó fényhullám fázisviszonyaiban rejlő információt is rögzítik. A hullámok fázisának önmagában nem lenne jelentősége, hiszen egyetlen hullám kezdőfázisa az időmérés kezdőpillanatának megválasztásától függ. Több hullám esetén azonban a hullámok fáziskülönbsége már információt hordoz. Amennyiben a tárgyról szóródó hullám fázisviszonyait ugyanahhoz a referenciahullámhoz képest tudjuk meghatározni, akkor a tárgyról kapható teljes optikai információhoz hozzájuthatunk. Ennek megértésére sematikusán vázoljuk a hologram készítés egyik módszerét. A hologram készítésekor a megvilágító monokromatikus lézerefénynyalábot az alábbi ábrán látható módon kettéválasztják.



A nyaláb első felét, az ún. *referencianyalábot* tükrök segítségével közvetlenül a fényérzékeny hololemezre vezetik, míg a nyaláb másik fele a tárgyon szóródva jut ugyanide. A hololemezen a tárgyról szórt fény és a referencianyaláb interferál, az előhívott hologram ezt az interferenciaképet rögzíti. Ha ezután az előhívott hololemezt a referencianyalábbal megvilágítjuk, a lemezen rögzített interferenciavonalakon elhajló fény első elhajlási rendje pontosan reprodukálja a tárgyról szórt nyalábot.

A folyamat lényegében az optikai rácson létrejövő elhajláshoz hasonlóan megy végbe. A hologramról kiinduló fénynyaláb a tárgyról visszavert hullámot mind amplitúdó, mind fázisviszonyaiban hűen másolja le, ezért a kép térben jelenik meg.

A hologram tulajdonságai

A hologram a térbeli képalkotás mellett egyéb érdekes tulajdonságokkal is rendelkezik. Elvileg a hologram tetszőleges része tartalmazza a tárgyról jövő összes információt, így, ha a hololemezt kettévágjuk, akkor mindkét rész alkalmas a teljes kép létrehozására. A tördeléssel való sokszorosításnak a fotoemulzió finomsága szab határt. A fotoemulzió kicsiny részein kevés a fény hatására reagáló atom, így a kép mégsem tükröződhet pontosan minden részletet.

A holográfia a felfedezése óta sokat fejlődött, jelenleg már készülnek ún. *napfényhologramok* is. Ezeknek csak az elkészítéséhez szükséges lézerefény, a kép fehér fényvel megvilágított hologram esetén is látható.

A lézertechnika és a hololemezek anyaga is folyamatosan fejlődött és jelenleg is fejlődik, így a nyugati országokban már többféle egyszerűen használható és viszonylag olcsó hologram készítő készlet kapható a kereskedelemben már diákok számára is. (<https://www.litiholo.com/education.html>, <https://www.litiholo.com/hologram-kits.html>) Ezek a készletek mind a tanórákon, mind otthoni tanulói projekteknél hasznos eszközei lehetnek a fizika megszerettetésének.

[Vissza >>>](#)

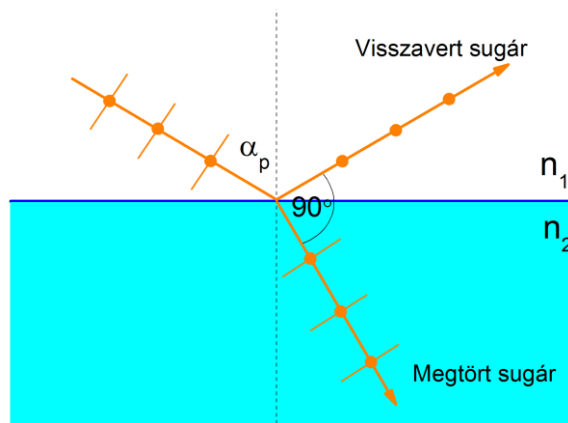
F39. Polarizáció visszaverődéskor: a Brewster-törvény

Érdekességként elmondhatjuk, hogy a visszaverődésen alapuló polarizációt Étienne Louis Malus, Bonaparte Napóleon hadmérnöke fedezte fel. Malus úgy találta, hogy a visszavert fény teljes polarizálásához a különböző anyagok esetén különböző, általa „sarkítási szögnek” nevezett beesési szög tartozik. Ő mondta ki általánosan azt, hogy a fény polarizálásakor mindig két polarizált sugár keletkezik, melyeknek polarizációs síkjai egymásra merőlegesek. Ha a fény az ún. *Brewster-szögben* esik dielektrikumra, akkor a visszaverődő fény lineárisan poláros lesz. Ha a beesési szög ettől eltér, akkor a visszavert fény csak részben poláros.

Ez a szög minden anyagra más, Brewster 18 különféle anyagot vizsgált meg, s bár első kísérleteinél az elkövetett hibák 25-32 szögmásodpercre rúgtak, tekintettel a kísérletek nagy számára, a törvény helyességét már akkor sem lehetett kétségbe vonni. Üveg esetén a polarizációs (Brewster) szög 57° .

Brewster-törvény

A kísérleti tapasztalat szerint a visszavert fény akkor válik teljesen polárossá, ha a fénynek az üveglemezbe behatoló és az üveglemezről visszaverődő része merőlegessé válik.



Az ábra alapján látható, hogy ekkor

$$\frac{\sin \alpha_p}{\sin(90^\circ - \alpha_p)} = \frac{\sin \alpha_p}{\cos \alpha_p} = \operatorname{tg} \alpha_p = n_{2,1}$$

Az α_p szöget polarizációs szögnek, a

$$\operatorname{tg} \alpha_p = n_{2,1}$$

összefüggést pedig felfedezőjéről *Brewster-törvénynek* nevezzük.

Az eredmény tökéletesen érthetővé válik, ha figyelembe vesszük, hogy a visszavert fény teljes mértékben az n törésmutatójú üveglemez rezgésbe hozott atomjai által kibocsátott sugárzás interferenciájának eredménye. A beeső fénysugárban az \vec{E} vektor a terjedés irányára merőleges síkban minden irányban statisztikusan változik. Így a fény által rezgésbe hozott elektronok is

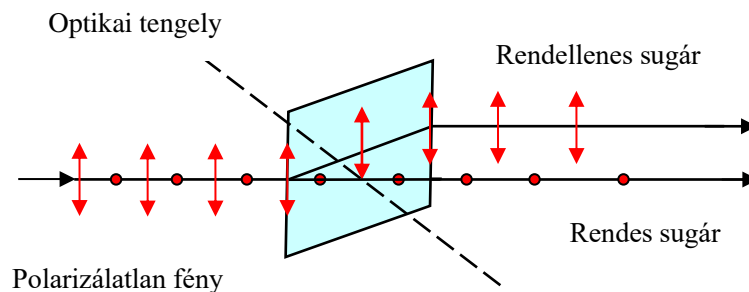
csak a terjedés irányára merőleges síkban mozdulhatnak el. Tetszőleges rezgés felbontható azonban két egymásra merőleges irányban lejátszódó rezgésre. Bontsuk az atomi oszcillátorok rezgéseit az üveglemezbe behatoló fénysugárra merőleges összetevőkre úgy, hogy az egyik összetevő az ábra síkjába essen. Az ábrán feketített körrel, a papír síkjára merőlegesen, egyenes vonallal pedig a papír síkjában zajló rezgéseket jelöljük. A visszavert sugarat az üveg atomjai által kibocsátott fény hozza létre, és az atomok rezgései az üvegbe behatoló fény elektromos terének irányában mennek végbe. Megállapíthatjuk, hogy a visszavert fényben csak a körrel jelzett fényrezgések szerepelhetnek, mert a vonalkával jelzett irányban mozgó atomok a dipólsugárzás intenzitáseloszlása miatt a visszaverődés irányában nem sugároznak. A visszavert sugár tehát lineárisan poláros.

Megjegyezzük, hogy a megtört sugár csak részben polarizálódik.

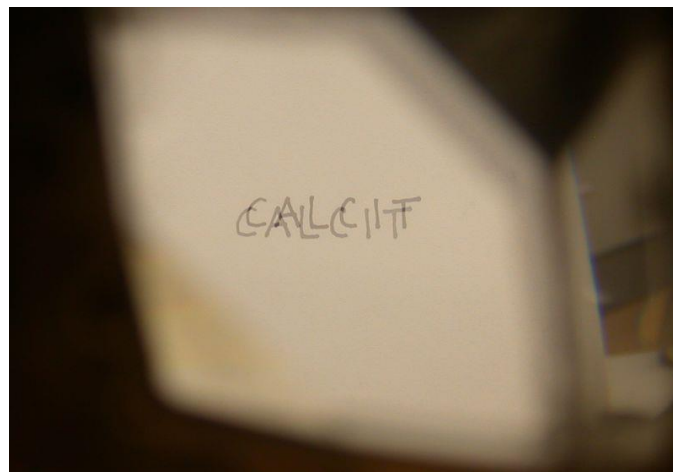
[Vissza >>>](#)

F40. Optikai kettőtörés

Bocsássunk párhuzamos fénynyalábot megfelelően csiszolt mészpátkristályra. A nyaláb legyen merőleges a kristály homlok és véglapjára. Eddigi ismereteink alapján azt várnánk, hogy a fény a kristályon irányváltozás nélkül halad keresztül. A kristály mögé helyezett ernyőn azonban kettős képet látunk. (A második ábra a „calcit” felirat megkettőződését mutatja) Az egyik a beeső fény irányában jön létre, a másik azonban arra utal, hogy a mészpátkristályon a merőlegesen beeső fény egy része törést szenved. A kettősen törő kristályra eső fény két különböző irányban haladó sugárra esik szét (lásd ábra). (Az optikai tengely irányába beeső fény nem szenved kettőtörést).



A beeső sugár általában, nem merőleges beesés esetén, is két sugárra bomlik szét. A két sugár közül az egyik a jól ismert törési törvénynek megfelelően halad – ez a rendes sugár – a másik a rendellenes sugár. A két sugár egymásra merőleges síkban poláros.



A calcit kristály kettőtörésnek nevezett különleges viselkedését Bartholini már 1669-ben megfigyelte. A kettőtörés jelensége igen sokféle anyag esetén tapasztalható, s a vizsgálatok egyértelműen mutatják, hogy a fény anizotróp terjedésének következtében jön létre. Arra vezethető vissza, hogy a kettőtörő anyagokban az atomok polarizálhatósága irányfüggő. A szomszédos atomok közötti kapcsolat ugyanis olyan erős, hogy meggátolja az atomi dipólusok szabad beállítását az elektromos tér irányába. A kettőtörést általában a szabályos szerkezettel

rendelkező anyagok kristályszerkezetének anizotropiája okozza, aminek következtében a fény különböző irányokban különböző sebességgel terjed benne

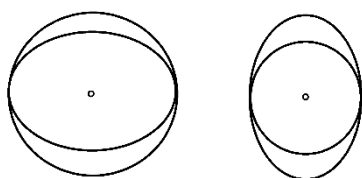
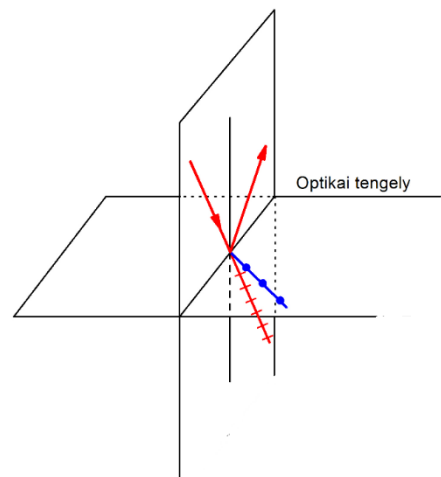
A jelenség elméleti tárgyalása viszonylag bonyolult, itt a kísérleti tapasztalatok ismertetésére szorítkozunk, s értelmezésükre csak néhány egyszerűbb esetben térünk ki. A tapasztalat szerint a legáltalánosabb esetben a kettősen törő kristályon áthaladó fénysugár két egymásra merőleges síkban poláros fénysugárra bomlik fel, amelyek a tér különböző irányában, különböző sebességgel terjednek. Található azonban egy vagy két olyan irány, amelyben a két hullám azonos sebességgel terjed. Ezeket az irányokat a kristály optikai tengelyének nevezzük. Az optikai tengely irányában beeső fény természetesen nem szenved kettőtörést. Azokat az anyagokat, amelyekben egyetlen olyan irány létezik, amelyben a kettőtörés nem észlelhető, egytengelyűnek, azokat, amelyeken két ilyen irány létezik, kéttengelyűnek nevezzük.

A továbbiakban csak az egytengelyű kristályokkal foglalkozunk. A fény beesési pontjában a kristály optikai tengelyén és a beeső fénysugáron keresztül fektetett síkot a kristálynak az adott fénysugárra vonatkozó főmetszetének vagy fősíknak nevezzük. A tapasztalat szerint a kristály a beeső fényt oly módon bontja két egymásra merőleges síkban lineárisan poláros fénysugárra, hogy az egyikben a fényvektor merőleges a kristály optikai tengelyére, míg a másikban a fényvektor a fősíknak változik.

Az ábra olyan esetet mutat, ahol a fő sík és a beesés síkja egybeesik. A fénysugárra tett pontok a fősíkra merőleges, a vonalak pedig a fősíknak rezgő fényvektort jelöli.

Megállapítható az is, hogy a fősíkra merőlegesen rezgő fényösszetevő a kristályban is teljesen izotróp módon terjed, ezért nevezzük ezt a sugarat ordinárius (rendes) sugárnak.

A fényterjedés jellemzésére mérjük fel a kristály tetszőleges pontjából kiindulva minden irányban mind az ordinárius, mind az extraordinárius sugár terjedési sebességét. Ez egyben azt is mutatja, hogy az adott pontból adott irányban milyen messzire jut az ordinárius, illetve extraordinárius sugárban terjedő fény. Így az ordinárius sugár esetén gömbfelülethez, az extraordinárius esetén pedig ellipszoidhoz jutunk. A gömb és az ellipszoid az optikai tengely egyenesén érinti egymást.



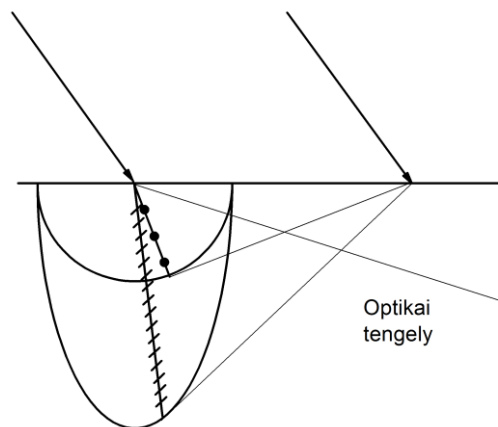
Az ábra a gömb és ellipszoid síkmetszetét mutatja. A baloldali olyan kristályt jellemez, amelyben az ordinárius, a jobboldali pedig olyan, amelyben az extraordinárius sugár terjedési sebessége a nagyobb.

Az egytengelyű kristályban haladó sugármenetek megszerkeszthetők a Huygens-elv alapján. A megtört fénysugarak elemi hullámok interferenciájaként alakulnak ki. Most azonban kétféle elemi hullámmal kell dolgoznunk. Az ordinárius fénynyaláb elemi hullámjai továbbra is gömbhullámok, az extraordinárius nyalábéi azonban negyedrendű ún. *ovaloid* felületek. Általános esetben a szerkesztés bonyolult,

amennyiben azonban a beesési sík megegyezik a kristály főmetszetével, a szerkesztés egyszerűen elvégezhető, mert az elemi hullámok síkmetszetei körök (ordinárius), illetve ellipszisek (extraordinárius).

Foglalkozunk először azzal, amikor a beeső fénysugár merőleges a kristály határfelületére. Az ábra az ordinárius és extraordinárius sugármenet szerkesztését mutatja a Huygens-elv alapján. A szaggatott vonal a kristály optikai tengelyét jelöli, a körökkel jelölt egyenesek az ordinárius, a vonalakkal jelzettek pedig az extraordinárius sugarak. Az ábráról leolvasható, hogy az extraordinárius sugár még merőleges beesés esetén is megtörik, valamint az is, hogy az extraordinárius sugár terjedési iránya nem merőleges a hullámfelületre.

Látható, hogy az extraordinárius sugár két hullámfelülete közötti távolság kisebb, mint a fénysugár terjedése mentén megtett út. A fénysugár haladási sebességét sugársebességnek (fénysebesség), a hullámfelületekét pedig hullámsebességnek nevezzük. Az ábrán látható esetben a hullámsebesség kisebb a sugársebességnél.



A fényvektor rezgései a hullámfelület érintőjében mennek végbe, így az ábrázolt esetben a fényvektor a jelölésnek megfelelően nem merőleges a fény terjedési irányára. A fénysebesség és a hullámsebesség különböző volta okozza, hogy az extraordinárius sugarat adó elemi hullámfelületek nem ellipszoidok. Az ábra a Huygens-elv alapján mutatja annak a ferdén beeső fénynyalábnak a törését, amelynek beesési síkja megegyezik a kristály főmetszetével.

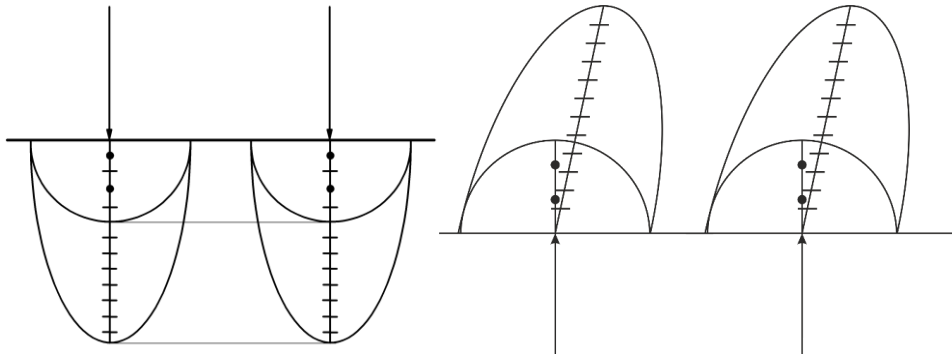
Egyes kettősen törő kristályok jellemzője, hogy már egészen vékony rétegük elnyeli a két, egymásra merőlegesen polarizált nyaláb közül a rendes sugarat. A rendes sugár elnyelődik, míg a rendellenes áthatol a lemezen (dikroizmus). Ez a hatás felhasználható poláros fény előállítására.

A tapasztalat azt mutatja, hogy vannak olyan anyagok, amelyek elektromos tér hatására válnak a fény számára kettősen törővé, azaz anizotróppá (*Kerr-effektus*), mások viszont a mágneses tér hatására (*Faraday-effektus*).

Ezek a kísérletek azt mutatják, hogy a fény és az anyag elektromos és mágneses természetű erők útján lép egymással kölcsönhatásba, joggal kezelhetjük a fényt elektromágneses hullámként.

1) Interferencia poláros fénnel

Az előzőekben nem foglalkoztunk azzal az esettel, amikor a fénysugár a kettősen törő kristály fősíkjában a határfelületre és az optikai tengelyre is merőlegesen érkezik. Az ábráról leolvasható, hogy ekkor az ordinárius és extraordinárius sugár nem válik szét, azonban az extraordinárius sugár nagyobb sebességgel halad, mint az ordinárius.



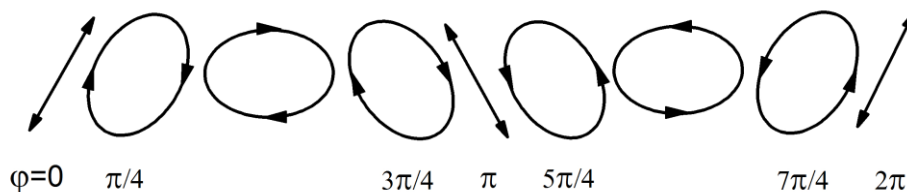
Ily módon a két egymásra merőlegesen poláros fénysugár közötti fáziskülönbség a kristályon való áthaladás során állandóan változik. A kristályból kilépő fény természetesen a két lineárisan poláros rezgés (szuperpozíciójának) interferenciájának eredménye. (A különböző síkban poláros fénysugarak összegződését gyakran nem tekintik interferenciának, mert a két fénysugár összegződésekor intenzitásbeli ingadozásokat nem észlelünk.)

Az interferencia eredményét a merőleges rezgések összegzési formulái alapján határozhatjuk meg. A kristályba behatoló fénysugár két polarizált komponense a belépés pillanatában azonos fázisban rezeg. Adott pillanatban például mindkét fényvektor maximális értékét veszi fel. A két fénysugár hullámhossza azonban a kristályban nem azonos, így bár a kristályban azonos utat tesznek meg, amikor kilépnek, (és hullámhosszuk újra azonosává válik) már nem lesznek azonos fázisban.

Ennek megfelelően az eredő fényvektor végpontja vagy egy síkban, vagy elliptikus csavarvonalon mozog előre. Az utóbbi feltételnek megfelelő fényt elliptikusán polárosnak nevezünk.

Az ábra a fényvektornak a terjedési irányára merőleges síkon vett vetületgörbéjét mutatja néhány jellemző fáziskülönbség esetén.

A rezgésalakok egyszerűen adódnak a merőleges rezgések eredőjének meghatározásából. Amennyiben a két fénykomponens amplitúdója azonos, akkor a $\frac{\pi}{2}$ és $3\frac{\pi}{2}$ fáziskülönbséghez tartozó ellipszisek körré válnak. Ez esetben cirkulárisan poláros fényről beszélünk.



Végül határozzuk meg a d vastagságú kristályra merőlegesen érkező és az optikai tengely irányában haladó fény ordinárius és extraordinárius összetevőjének fáziskülönbségét a

kristályból történő kilépéskor. Legyen az ordinárius sugár terjedési sebessége v_o az extraordináriusé v_e , a beeső fény frekvenciája pedig ν . A két fénysugár fáziskülönbsége a kilépés pillanatában:

$$\Delta\varphi = 2\pi\nu \left(\frac{d}{v_o} - \frac{d}{v_e} \right)$$

illetve az n_o és n_e törésmutatókkal és a fény vákuumbeli λ hullámhosszával kifejezve

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_o - n_e)$$

Amennyiben a lemezvastagság pontosan olyan, hogy a két sugároptikai úthosszának különbsége $\lambda/4$, illetve $\lambda/2$ akkor negyedhullámú, illetve félhullámú lemezzről beszélünk.

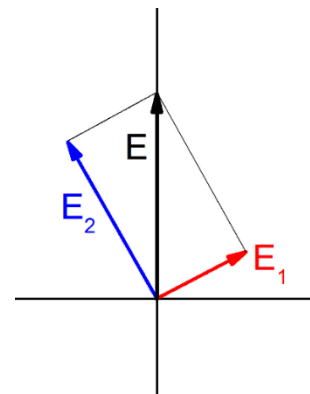
2) A poláros fény felhasználása kettősen törő anyagok vizsgálatára

Ejtsünk kettősen törő anyagra lineárisan poláros fénynyalábot úgy, hogy mind az anyagoptikai tengelyére, mind pedig a felületére merőleges legyen. Az előzőekben már megállapítottuk, hogy a kettősen törő lemez a ráeső fényt két egymásra merőleges síkban poláros rezgésre bontja. A beesési szög speciális megválasztása miatt esetünkben a két sugár nem válik ketté, a lemezen való áthaladás során azonban a fentiek megadott formulának megfelelő fáziseltérés alakul ki közöttük. Következésképpen a kilépő fénysugár általában nem lesz lineárisan poláros.

A jelenség alkalmas a kettősen törő anyagok tulajdonságainak vizsgálatára.

Helyezzünk ugyanis keresztezett polarizátorok közé kettősen törő anyagból készült vékony lapot. A polárszűrő mögötti ernyő kivilágosodik, hiszen az analizátorra már nem lineárisan poláros fény esik.

A folyamatot az ábrán szemléltetjük. Rezegjen a beeső fényben a fényvektor az y -tengely irányában. Bontsuk fel ezt a vektort a kristály által átengedett kétféle polarizációs komponens irányának megfelelően derékszögű komponensekre. A vektorábrán E a beeső, E_1 és E_2 pedig az összetevő és E -vel azonos fázisban változó fény vektorokat szemléltetik adott időpillanatban. A keresztezett polarizátor az ábrán az y tengely irányában rezgő poláros fényt éppen kioltaná. A kristály hatására azonban a fény polarizációs állapota megváltozik. Ha például a lemez hatására az ordinárius és extraordinárius sugár között $2(k-1)\frac{\pi}{2}$ fáziskülönbség jön létre, akkor elliptikusan poláros rezgést kapunk, amit az analizátor átenged.



Mivel a kristály törésmutatója a különböző hullámhosszúságú fénysugarakra más és más, a polarizátorra fehér fényt bocsátva, az analizátor mögött elhelyezett ernyőn a polarizátorok elhelyezkedésétől függően különböző színű megvilágítást észlelünk.

A jelenség segítségével megállapíthatjuk például a kettősen törő anyagból készült lemez felületeinek párhuzamosságát. Az ordinárius és extraordinárius fény fáziskülönbsége ugyanis a lemez vastagságtól függ. Az analizátor mögött elhelyezett ernyőn színes csíksorozatok jelennek

meg. Ha az anyag törésmutatója a hely függvényében állandónak tekinthető, akkor az izokromátok (azonos színű görbék) a lemez azonos vastagságú helyeit jelölik ki.

Az izokromátok egyszerűen bemutathatók egy különböző vastagságban egymásra rétegezett celofánpapír köteg segítségével. A celofán kettősen törő anyag. A celofánt ugyanis hengerléssel készítik, s a hengerlés során az anyagot alkotó szerves óriás molekulák határozott orientációt vesznek fel.

Az ernyőn a különböző rétegvastagságnak megfelelő szintes mintázatot kapunk. Érdeemes megfigyelni, hogy a mintázat színei az analizátor elforgatásával változnak. Az analizátor 90°-os elforgatása után minden szín a komplementerébe megy át.

3) Polárszűrő fóliák

Kettősen törő anyagok mesterségesen is előállíthatók. Manapság polárszűrőként mesterségesen előállított polarizációs fóliákat használunk. A korszerű eljárások nagy molekulájú polimerekből, például polivinil-alkoholból indulnak ki. A fóliákat jóddal színezzük, majd mechanikusan nyújtjuk. A nyújtás révén a fóliában mechanikai feszültség alakul ki, amely kettőtörést hoz létre (feszültségoptika).

Az így előkészített anyag az elektromágneses hullámokat csak az egyik polarizációs irányban engedi át, így szűrőként viselkedik.

4) Folyadékkristályok

Az LCD (liquid crystal display), azaz a folyadékkristályos kijelző is a kettőtörés elvén működik. A folyadékkristályok hosszúságú molekulái egymás mellé rendeződve kitüntetett irányba állnak be, és emiatt optikailag kettősen törőek. A kettőtörés azonban elektromos térrel akár lokálisan is megszüntethető, ami azt jelenti, hogy a kristályban a fénysugár elektromos tér segítségével vezérelhetővé válik. Ilyen anyagból készül a digitális órák, telefonok, laptopok, LCD kamerák ún. *elektrooptikai* kijelzője.

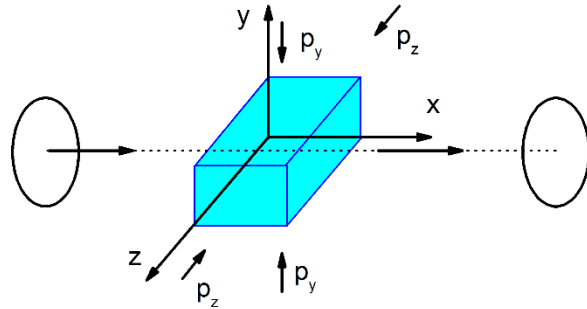
5) Kettőtörés deformáció hatására: feszültségoptika

Egyes műanyagokban (pl. plexi) a mechanikai feszültség hatására jelentkezik a kettőtörés. Helyezzünk keresztezett polarizátorok közé műanyagvonalzót. Az analizátor mögött elhelyezett ernyőn színes csíksorozatot látunk. A csíksorozat elhelyezkedése a vonalzó meghajlításával változtatható. Egyértelmű tehát, hogy a csíkok elhelyezkedése és a mechanikai feszültség között kapcsolat létezik. A látszólag feszültségmentes esetekben azért jelentkezik az effektus, mert a vonalzóban a gyártás során is keletkeznek és konzerválódnak mechanikai feszültségek. Megállapítható például, hogy a jelenleg kapható egyenes műanyagvonalzóban 11 cm körül észlelhetők a legsűrűbben az izokromátok, s a vonalzók többnyire ezen a ponton szoktak eltörni.

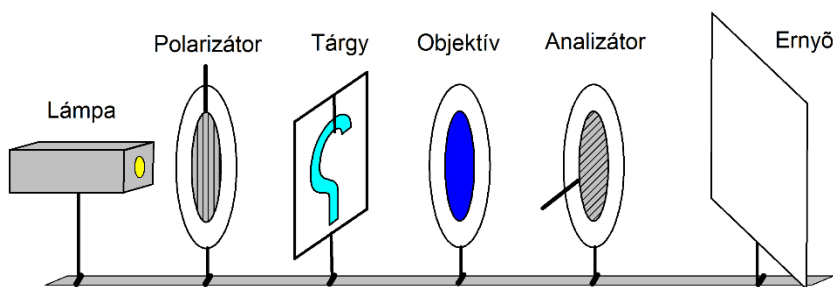
Hozzunk létre például műanyagtömbben az y - és z -tengely irányú összenyomással feszültségállapotot, majd világítsuk át poláros fénnel az x tengely mentén. A tapasztalat szerint az ordinárius és extraordinárius sugár közötti fáziskülönbség

$$\Delta\varphi = k(p_y - p_z)l$$

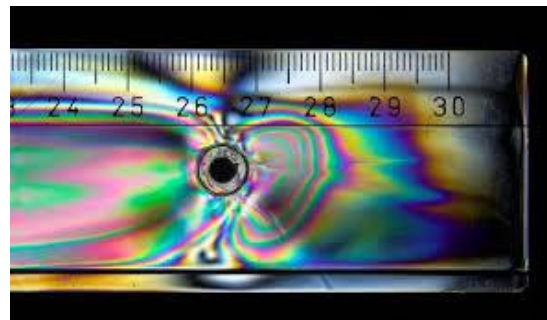
ahol k anyagi minőségtől függő állandó, p_y és p_z rendre az y és a z irányból gyakorolt nyomás l pedig a lemez x -tengely mentén mért vastagsága. A fáziskülönbség az izokromátok segítségével meghatározható, l mérhető, így a fenti összefüggésből következtethetünk a polarizátorok közé helyezett test feszültségállapotára.



Az eljárást feszültségoptikai vizsgálatnak nevezik és gyakran alkalmazzák bonyolult szerkezetek feszültségállapotának megállapítására. A vizsgálandó készülék modelljét átlátszó műanyagból elkészítve a fenti eljárással egyszerűen következtethetünk az eredeti testben fellépő feszültségekre.



Megállapítható például, hogy szemüvegünk túlságosan szoros foglalata, vagy a keret csavarjainak meghúzása nem hozott-e létre feszültséget a szemüveglencsékben. A feszültség miatt eltörhet a szemüveglencse, vagy kedvezőtlenül változhatnak optikai tulajdonságai. A feszültség láthatóvá tétele feltárhatja a hibát és lehetőséget adhat annak megszüntetésére.



6) A Kerr- és a Cotton-Mouton-effektus

A kísérleti tapasztalat eszerint egész sor szilárd és cseppfolyós dielektrikum (nitrobenzol, üveg, terpentín, szénkéneg stb.) elektromos tér hatására egytengelyűen kettős törővé válik. Ezt nevezzük *Kerr-effektusnak*.

Helyezzünk például nitrobenzol oldatba egymástól néhány mm távolságban fémlamezeket. Bocsássunk a fémlamezek közé a lemezek síkjával párhuzamosan keskeny polarizált

fénynyalábot. A nitrobenzolon való áthaladás után oltjuk ki ezt a nyalábot polárszűrővel. Ezután kapcsoljuk a fémlemezre erős elektromos teret. A polárszűrő mögött fényfoltot kapunk, azaz az elektromos tér hatása alatt álló fénynyalábot a szűrő már nem oltja ki. A nitrobenzolon áthaladó poláros fény polarizációs állapota tehát a fény terjedési irányára merőleges elektromos tér hatására megváltozik.

Az effektus, ha rendkívül kis mértékben is, de minden anyag esetén bekövetkezik és az anyag molekuláinak az elektromos tér hatására történő rendeződésével magyarázható. A tapasztalat szerint az optikai tengely egybeesik az alkalmazott elektromos tér irányával. Merőleges beesés esetén az ordinárius és extraordinárius fénysugár nem válik ketté, azonban a kilépéskor a két fénysugár között

$$\Delta\varphi = 2\pi\beta lE^2$$

fáziskülönbség jön létre. A formulában l a rétegvastagság, E az elektromos térerősség, β pedig a Kerr-féle állandó.

A Kerr-effektus gyakorlatilag tehetetlenségmentesen követi az elektromos tér bekapcsolását. (A kettőtörés 10^{-8} sec-nál rövidebb idő alatt bekövetkezik.) Ezért a Kerr-cellát optikai zárszerkezetek készítésére használják.

A Cotton–Mouton-effektus a Kerr-effektushoz hasonló jelenség, csak ez esetben a kettőtörés mágneses tér hatására következik be.

[Vissza >>>](#)

AZ ANYAG ATOMOS SZERKEZETE

6. Az anyag atomos szerkezetére utaló alapvető megfigyelések, felfedezések
7. Az első atommodellek
8. A modern kvantumfizikát előkészítő, a klasszikus fizikával nem magyarázható kísérleti tapasztalatok
9. A Bohr-féle atommodell

Bevezetés

A modern fizika tanítása a fizikatanítás legnehezebb és ezért talán a legizgalmasabb tanári feladata a középiskolában. A fizikatanárok többsége egyetért, abban, hogy a tanítási nehézségek ellenére a modern fizikával a középiskolában mindenképpen foglalkozni kell. A vélemények abban mutatnak eltérést, hogy a klasszikus fizikához viszonyítva milyen arányban, milyen időtartamban és milyen megközelítésben érdemes tárgyalni a modern fizikai témáit. Hasonlóan fontos kérdés az is, hogy melyek a modern fizika legfontosabb, szemléletformáló területei és gyakorlati alkalmazásai, amivel legalább alapszinten minden érettségire készülő fiatalnak meg kell, illetve meg kellene ismerkednie. Ehhez kapcsolódó fontos szakdidaktikai dilemma, hogy figyelembe véve a rendelkezésre álló szűk időkereteket, milyen módszerek alkalmazása lehet leginkább hatékony az alapok tanításában. A modern fizika tárgyalása során talán még fontosabb kérdés, hogy a tanított tartalmak és az alkalmazott módszerek vonatkozásában, hogyan érdemes differenciálni aszerint, hogy a tanuló műszaki-természettudományos érdeklődésű vagy humán beállítottságú. A differenciálás problémájára a megoldást úgy találhatjuk meg legkönnyebben, ha átgondoljuk, melyek azok a modern fizika ismeretek, amelyekről az átlagos műveltségű érettségizett polgárnak a 21. században tudnia illik. Ezek tekinthetők a modern fizika mindenki által tanulandó, alapszintű tananyagának. Jegyzetünkben ennek az alapszintű tananyagunk javasolt tárgyalásmenetét követjük. Az érdeklődő, műszaki természettudományos irányba továbbtanulni szándékozó diákok számára az alapszintű ismereteket kiegészíteni, bővíteni kell. Itt a megválaszolandó kérdés az, hogy a kiegészítés, miként csatlakozhat az alapszintű tárgyaláshoz, milyen témákat dolgozzon fel kiegészítésként, és milyen módszerek tehetik igazán hatékonyvá a tartalombővítést.

A kérdésekre adható válaszok megtalálásához, érdemes a modern fizika fogalmának, tárgykörének tisztázásával indítani.

Mit értünk modern fizikán?

A kérdés klasszifikációs, és mint az osztályba sorolási kérdésekre általában, erre is többféle válasz adható. (Gondoljunk csak a hasonló kérdésekre a fizika és a kémia tárgyra vonatkozóan.) Mégis érdemes átgondolni a szokásos válaszokat, mert a modern fizika iránt igen nagy a társadalmi érdeklődés és nemcsak a kérdés szakértői adnak válaszokat, hanem újságírók, diákok, mérnökök stb. Emiatt a besorolás gyakran erősen érzelmi töltésű, nem tárgyyszerű, és gyakran erőteljes véleményt, illetve értékítéletet is kifejez. Érdemes tehát néhány tipikus választ és a mögötte rejlő tartalmat a fizikatanítás szempontjából átgondolni.

A modern fizika azon ismeretek, elméletek együttese, amelyek 1905 után születtek

A válasz semleges, és a tanításhoz lényegében semmilyen segítséget sem nyújt. Indoklása az, hogy a fizikatörténet modern fizika megszületését az 1905, esztendőől számítja. Ebben az évben jelent meg a szakfolyóiratokban Einstein négy alapvető cikke, amelyek újszerű gondolataikkal szinte forradalmasították a fizikát (a Brown-mozgás magyarázata, a fényelektromos jelenség értelmezése és a speciális relativitáselmélet)

A modern fizika az, amit az átlagember nem ért

Az első olvasatban kicsit cinikus, és erősen érzelmekre ható, polarizáló válasz igazságtartalma a tanárok számára elgondolkoztató. Felhívja a figyelmet a modern fizika tanításának alapkérdésére. A modern fizika ugyanis számos olyan megállapítást tesz, ami alapvetően ellentmond a hétköznapi tapasztalatokból származó szemléletnek. A modern fizika igazságait a legnagyobb fizikusok sem a szemlélet alapján közelítették meg, de sokkal inkább a kísérleti tapasztalatok matematikai értelmezésén keresztül. Megfelelő szintű matematikai ismeretek nélkül a modern fizikában igazi megértésről nem beszélhetünk. Ez a modern fizika középiskolai tanításának alapproblémája. Természetesen a mély megértés hiánya nem jelenti azt, hogy a modern fizika értelmezését a természeti jelenségek szűkebb-tágabb körére vonatkozóan felesleges lenne megismerni. Világosan kell azonban látnunk, hogy a modern fizika állításait a fizika többi ágához képes sokkal erőteljesebben kell tekintélyelvi alapon elfogadnunk, mert a közvetlen tapasztalatszerzés szinte lehetetlen. A modern fizika állításainak elfogadtatásához tehát tekintélyt kell szerezni a fizikának. Ezt a tekintélyt a fizikának (illetve a fizikatanár személyének) a fizika órákon tárgyalt számos klasszikus jelenség jól érthető magyarázatával, a megértés örömeinek tapasztalásával, valamint a tudományos ismeretekre épülő technikai alkalmazások megismertetésével szerezhetjük meg.

A modern fizika az, aminek meglepő eredményeiről az írott és elektronikus média szenzációként beszámol

A válasz az előzőhöz hasonlóan komolytalannak és cinikusnak tűnik, a fizikatanár számára azonban ebben is van átgondolásra érdemes tartalom. A fizika órákon igyekszünk szemléletformáló rendszerezett ismerteket adni diákjainknak. Ezekon túl azonban számos információt szereznek az iskolától függetlenül is. Ilyen ismeretforrás a média is. Segíti a tanári munkát, azzal, ha felhívja a figyelmet a fizika új eredményeire, egyúttal azonban feladatokat is ad a szaktanárnak. Ilyen fontos feladat, hogy a tanárnak is tájékozódnia kell a fizika médiában megjelenő új eredményeiről, továbbá segítenie kell az érdeklődő diákokat abban, hogy a médiából szerzett információkat (szükség szerint pontosítva, illetve korrigálva) integrálni tudják az iskolában szerzett, rendszerezett ismereteik közé.

A modern fizika az, amire a korszerű technika alapul

Ez a technokraták válasza, akik az ismeretek fontosságát a közvetlen alkalmazhatóság szempontjából ítélik meg. A fizikatanítás számára megszívlelendő, hogy felhívja figyelmet a gyakorlati alkalmazások, az életközeli tartalom fontosságára. A modern fizika tanításában ennek különösen nagy jelentősége van, mert a témakörben tárgyalt jelenségek jó részét csak kvalitatív szinten, matematikai leírás és az hozzá kapcsolódó mélyebb megértetés nélkül tudjuk tárgyalni. A kvalitatív szintű tárgyalás tartalmi megerősítése szempontjából sokat jelenthet, ha az alapjelenséghez kapcsolódó konkrét gyakorlati alkalmazás ismertetésére is kitérünk. Például a radioaktív izotópok exponenciális bomlástörvényének tanítása – kísérlet hiányában – tankönyvi ismeretanyagként könnyen törlődik a diákok fejéből. Konkrét jelentést és rögzült

emléket jelenthet azonban, ha alkalmazásként például, konkrét esetet alapul véve, bemutatjuk a radioaktív régészeti kormeghatározás szénizotópos módszerét, vagy esetleg a kőzetek korának meghatározásában használatos eljárást.

A modern fizika lényegét vizsgáló kérdésre a „szakértői” (fizikusi) választ a klasszikus fizikával kapcsolatos kontextusban adhatjuk meg legegyszerűbben. Először körvonalazzuk tehát a klasszikus fizika fogalmát és megismerési módszertanát. Ami ettől alapvetően különböző, témájában, gondolati megközelítésének, illetve kutatási módszereinek vonatkozásában, azt tekinthetjük modern fizikának. Ez az út azért is célszerűnek tűnik, mert a modern fizika nem független a klasszikus fizikától. A 17-19. századot a klasszikus fizika sikertörténeteként szokás emlegetni – joggal. Newton mozgásegyenlete és a gravitációs erőtvény egységbe foglalta a földi és égi mozgásokat. Megszületett a mozgások tárgyalásához szükséges matematikai eszköztan is. Ez lehetővé tette, hogy a mozgásegyenlet és a test adott állapotában érvényes mozgásjellemzők (kezdeti feltételek) ismeretében bármely további pillanatban meghatározzuk a test sebességét és helyét. A mechanikai jelenségek egységesítő leírását követően alakult ki a Maxwell-féle törvényrendszer, ami egységbe vonta az elektromosságtan, mágnesség és az optika jelenségköré. Az elmélet sikerének csúcsát jelentette, amikor a Maxwell-féle egyenletek alapján megjósolható volt az elektromágneses hullámok létezése, amit nem sokkal később Hertz kísérletileg is bebizonyított. A klasszikus fizika harmadik nagy területe a fenomenologikus termodinamika, amelynek alapvető törvényeit három főtétele foglalta össze. A főtételek megalapozták a rendszerek széles körének energetikai leírását. A 19. század végén a klasszikus fizika a tudomány befejezett sikertörténetének tűnt. A fizikatörténeti anekdota szerint Lord Kelvin, a kormeghatározó fizikusa, elégedetten fogalmazta meg: „A fizika sikeresen feltárta a természet alapvető törvényeit, megoldatlanul csak néhány aprócska kérdés maradt, amik, mint apró felhőcskék zavarják még a fizika ragyogó kék égét”.

A klasszikus fizika nagy eredményei indokoltá teszik, hogy a klasszikus fizikai gondolkodás sarokpontjait összefoglaljuk. Az összefoglalásban kiemelten hangsúlyozzuk azokat a jellemzőket, amelyek a modern fizika szemléletben alapvetően megváltoznak.

A klasszikus fizika alapvető szemléletmódja a természeti törvények sikeres megismerési stratégiája

Az univerzum hatalmas gépezet az abszolút tér és idő keretei közt. Bonyolult működése elvileg megérthető (lenne), ha a gépezet belső részeinek egyszerű mozgásait összegezzük. Belső összetevőkön nem csupán az önmagukban is megfigyelhető elemeket kell érteni, hanem azokat is, amelyek esetleg még ismeretlenek, láthatatlanok számunkra.

A természet működését leíró fizikai törvények elfogadásának alapkritériuma az egyezés a kísérleti tapasztalatokkal.

Bármely anyagi rendszer bármely fizikai tulajdonsága tetszőleges pontossággal mérhető, akár csak a hőmérséklet vagy a sebesség. A klasszikus fizikában ez alól az atomi rendszereket sem kivételnek.

A newtoni szintézis alapja, hogy a mozgás a testek természetes állapota, a mozgásállapot megváltozásának azonban mindig oka van. Ez az ok és okozat összefüggése, amit reálisan senki nem kérdőjelezhet meg.

Ha a test mozgás-állapota adott pontban ismert, valamint ismerjük a test és a környezet kölcsönhatását akkor bizonytalanság nélkül következtethetünk a test mozgásállapotára minden pontban és minden múlt és jövőbeli időpillanatban. (Ez a determinitás elve.)

Az energiaterjedés létrejöhet részecskék mozgásához kötötten és hullámszerűen, ami az óceán hullámjaihoz hasonló. A klasszikus szemlélet alapján ezek egymást kölcsönösen kizárják, vagy egyik, vagy másik valósul meg.

A természeti jelenségek új megközelítése a modern fizika.

A klasszikus fizikát jellemző fenti összefoglalás, mai szemmel nézve, meglehetősen kategorikusnak tűnik. A 20. század elején azonban a fizikusok döntő többsége – éppen a klasszikus fizika kétségtelen eredményei miatt – magáénak vallotta ezt a felfogást. Kevesen voltak, akiket – Lord Kelvin fentebb idézett szavaival fogalmazva – zavart és foglalkoztatott az a „pár apró felhőcske a klasszikus fizika ragyogó kék egén”, amit tényként el kellett fogadni, de a klasszikus elméletekkel nem lehetett megmagyarázni. Ők voltak azok, akik a megoldás reményében nem riadtak vissza attól, hogy átlépjék a klasszikus fizika fent összefoglalt fogalmi kereteit. A 20. század első évtizedeiben a klasszikus fizika határainak átlépése alapvető szemléletváltozást kívánt, de cserébe hamarosan látványos eredményeket hozott. A 20. század első három évtizedének fizikai szemléletváltozása a korábbi korok szemléletváltásaihoz képest, rendkívül gyorsan ment végbe. Három általánosan alkalmazható új diszciplína vált a modern fizika alapjává:

A speciális és általános relativitáselmélet

A klasszikus fizika abszolútnak és függetlennek tekintette a tér és az idő fogalmát. Ez a szemlélet a fénysebességet megközelítő sebességek tartományában már ellentmondásokra vezet. Einstein ezt felismerve alkalmazta meg a jelenségek leírásában az egységes *téridő* fogalmát, és dolgozta ki a vákuumbeli fénysebesség abszolút voltára és a téridőre alapuló „speciális relativitáselméletet”. Einstein általános relativitáselmélete a téridő és a gravitáció kapcsolatát mondta ki, ami új megvilágításba helyezte az energia és a tömeg fogalmát és megmutatta a közöttük lévő kapcsolatot.

A kvantumelmélet (kvantummechanika, kvantumfizika)

A mikrovilág mérettartományában a klasszikus fizika fogalomrendszere használhatatlannak bizonyul. Hétköznapi szemléletünk alapján érthetetlen módon az anyag egyaránt rendelkezik korpuszkuláris és hullámtulajdonságokkal. A klasszikus fizikában megkérdőjelezhetetlen determinisztikus elvek helyére a mikrovilágban valószínűségi törvények lépnek. A mikroobjektumok jellemzésére és kölcsönhatásaiknak értelmezésére kevésbé szemléletes, de annál hatékonyabbnak bizonyuló matematikai módszerek adnak használható eredményeket.

Statisztikus fizika

A statisztikus fizika nagyszámú, egymással és a környezettel kölcsönhatásban lévő elemből felépülő összetett rendszerekkel foglalkozik. Az sokaságot alkotó elemek nagy száma miatt egy-egy elemre vonatkozóan kevés kijelentés tehető, a sokaság átlagos viselkedése azonban leírható. A sokaság viselkedésében valószínűségi jelleggel érvényesülő statisztikus törvények, ugyanolyan objektív természeti törvények, mint a klasszikus fizika determinisztikus törvényei.

A modern fizika megjelölés a fentebb leírtak értelmében nem annyira a vizsgálandó tárgykörére, mint inkább a jelenségek tárgyalásának szemléletmódjára, módszereire és a velük kapcsolatos alkalmazások széles körére vonatkozik. Természetesen a legfontosabb alkalmazási területek, a modern fizikai módszerekkel együtt, kerültek be a modern fizika jellemző tudományterületeiként a köztudatba. Ilyen sokat idézett tudományterületek például:

- Relativitáselmélet (ezen belül pl. relativisztikus elektrodinamika, relativisztikus térelmélet stb.)
- Kvantumfizika (héj és magfizika, kvantumelektronika, szupravezetés, félvezető fizika, lézerfizika, nanofizika)
- Statisztikus fizika (összetett rendszerek fizikája)
- Szilárdtestfizika-Anyagtudomány
- Részecskefizika
- Asztrófizika, kozmológia
- Űrfizika

A felsorolás természetesen bővíthető a társ természettudományok (kémia, biológia, orvostudomány, geotudományok) fizikához kapcsolódó speciális problémáival, és a fizika határán az utóbbi években kialakult új tudományterületekkel.

A klasszikus és a modern fizika kapcsolódása

A közbeszédben és gyakran a médiában is találkozhatunk olyan állítással, miszerint a modern fizika és a klasszikus fizika összeegyeztethetetlen, ellentmondásban van egymással. A modern fizika felülírta, túlhaladottá tette a klasszikus fizika törvényeit, elért eredményeit és tárgyalásmódját. Ez a szemlélet alapvetően hamis. Az igazság annyi, hogy a modern fizika tárgyalásmódja teljesebb képet ad a természet általános működéséről, mint a klasszikus fizika, de nem érvényteleníti a klasszikus fizika törvényeit és alapvető eredményeit. A modern fizika az extrém kis méretek (néhány atomnyi és annál kisebb mérettartomány) és nagy sebességek (a fénysebességet megközelítő) tartományában hozott újat. A klasszikus fizika mérettartományában a modern fizika törvényei szerint is ugyanazokhoz az eredményekhez jutunk, mint a klasszikus fizikáéival. Ennek fényében tehát azt mondhatjuk, hogy a modern fizika ismeretében jól körülhatárolható a klasszikus fizika érvényességi köre. Jól bemutatható ez egyszerű példákon. Ha például a speciális relativitáselmélet alkalmazásával kiszámítjuk a legújabb típusú japán szuper expressz hosszváltozását álló helyzetben és 450 km/óra csúcsebesség esetén, az eltérés kisebb egy atommag méreténél. Ez az elméleti eredmény olyan kicsi, hogy kísérletileg ki sem mutatható, nyilvánvaló, hogy a relativisztikus szemlélet a szupervonatok esetén teljesen felesleges, a klasszikus fizika a legújabb igényeknek is

tökéletesen megfelel. Ugyanez elmondható lakásunk elektromos hálózata esetén az ohmtörvény alkalmazásáról is. Nincs szükség sem relativitáselméletre, sem kvantummechanikai számításokra, de statisztikus szemléletre sem ahhoz, hogy megbízható eredményeket kapjunk. (Tudjuk ugyan, hogy a dugaljba csatlakoztatott vezetékbe alagút effektussal jutnak át az elektronok, de erre az ismeretre nincsen szükségünk az áramkörök működésének megértéséhez.) Ha a modern fizika egész fogalom-, törvény- és eszközrendszerét bevetve vizsgálánk az áram és a feszültség viszonyát egy fémes vezető különböző pontjai közt, ugyanarra az eredményre jutnánk, mint a klasszikus fizika. Természetesen a helyzet megváltozik, ha szupravezető áramkörökkel foglalkozunk, ez utóbbi esetben szükségünk lehet a kvantumfizika törvényeinek alkalmazására.

Összefoglalva: a modern fizika tárgykörébe tartozó témákban a következő a klasszikus fizikától erős eltérést mutató jellegzetességek valamelyike biztosan megmutatkozik:

Amikor mozgó részecskék sebessége megközelíti a fénysebességet (nagyobb, mint a fénysebesség kétharmada) akkor a figyelembe kell venni a relativisztikus hatásokat

A jelenség leírására valószínűségi törvények használhatóak

A vizsgált objektumok kettős természetűek, hullám, illetve részecske sajátsgot is mutatnak

Figyelembe kell venni, hogy bizonyos mennyiségek együttes meghatározásakor érvényes a határozatlansági reláció

A részecskék mozgását leíró terjedési törvényekben nemlokalitás érvényesül

A modern fizika tanítása

A modern fizikai világkép és a korszerű technika megköveteli, hogy a modern fizika alapjait a középiskolákban minden diák kötelezően tanulja. Ezzel a közvélemény és a döntéshozók többsége — világviszonylatban is – egyetért, és a fogadókészség a fiatalok részéről is adott. A kérdéskör problémái akkor jelentkeznek, amikor meg kell határozni, hogy a modern fizika tárgykörében *kiknek, mit, mikor és hogyan* kell/lehet célszerű tanítani. E kérdésekre optimális válaszokat találni nem egyszerű.

A modern fizika tanításának speciális problémái

Az elsődleges probléma az, hogy a modern fizika megértése, még alapfokon is magas szintű absztrakt gondolkodást és komoly matematikai alapokat igényel, aminek megszerzése komoly erőfeszítést igényel a középiskolás diákoktól.

Károlyházy Frigyes, az ELTE Elméleti Fizika Tanszékének professzora, az 1970-es évektől kezdve sokat foglalkozott a kvantum-fizika és a relativitáselmélet iskolai tanításának problémájával, illetve e témakörök tudományos ismeretterjesztésével. A modern fizika tanításának alapvető nehézségét egyik utolsó publikációjában így fogalmazza meg: „...*A tudományos gondolkodás a XX. sz. elejére kinőtte az idegrendszer ösztönös (evolúciós) tudását.... Ami lehetetlen, az nem a megértés, hanem csupán az új ismeretek beillesztése a*

velünk született (millió év alatt megszokott) szemlélet keretei közé!” [Károlyházy, Fizikai Szemle 2007/11. 367.o.]

Ez azt jelenti, hogy a modern fizikához szükséges szemlélet nem csak egyszerűen hiányzik belőlünk, hanem annyira ellenkezik hétköznapi tapasztalatainkkal, hogy a modern fizika számos állítását elfogadhatatlan képtelenségnek érezzük. A fogalmak megalapozását segítő közvetlen kísérleti tapasztalatok, az egyszerűen értelmezhető kísérletek is hiányoznak. Károlyházy Frigyes 1976-ban megjelent *Igaz varázslat* c. könyve a kvantummechanika alapjainak, hétköznapi szemléletünk számára nehezen megfogható, lényegi kérdéseit tárgyalja ismeretterjesztő szinten. (A könyv minden fizikatanár számára szemléletformálóan hasznos „kötelező” irodalomként ajánlott!)

A könyvben a szerző szinte túlzónak tűnő mértékben foglalkozik az elektron kvantum-fizikai sajátosságainak bemutatásával és azzal, hogy ezeknek a tulajdonságoknak értelmezését matematikai eszközök mellőzésével legalább érzékeltesse az olvasóval. Ebbeli erőfeszítéseinek indoklásaként könyvében így fogalmaz: „A (modern fizikai) alkalmazások hatalmas birodalmának kapujában hétfejű sárkányként őrködik az atomi részecskék, elsősorban az elektron „felfoghatatlan” szemléletellenes térbeli viselkedése. Az igazi megértés útja csak rajta keresztül vezet.”

Ez tehát azt jelenti, hogy a kvantumfizika jelenségeinek feldolgozásához elengedhetetlen, hogy az elektron, mint a legegyszerűbb kvantum-objektum tulajdonságait megismerjük és megértsük. A szerző eszerint építi fel könyvét, az elektron részletes tárgyalása után a H-atom, majd a kémiai kötések értelmezésén keresztül jut el az anyagszerkezet kvantummechanikai szemléletű alapozásához.

Közel három évtizeddel a könyv megjelenése után, egyik utolsó cikkében, a szerző ismét foglalkozik a modern fizika tanításának, taníthatóságának kérdéskörével.



WWW

[Károlyházy Frigyes: Az öcskös felesége](#)

(Fizikai Szemle, 2007/11., 367.o.)



A cikkben továbbra is fenntartja korábbi álláspontját, ami szerint az elektron tulajdonságainak mély megértése alapvető jelentőségű a modern fizika, illetve a kvantumelmélet szempontjából, de a három évtized tudományos és technikai változásainak ismeretében már nem tartja feltétlenül szükségesnek a témakör fogalmi alapjainak részletes (iskolai) feldolgozását. Így ír:

„a megértés útja a sárkányon keresztül vezet..., de ma már nem hiábavaló elosonni a sárkány mellett, sőt, ez a helyes tennivaló”. A cikk folytatásában részletesen leírja, hogy a fizikatanár alapvető célja kell legyen, hogy a középiskolai diákokban pozitív kép alakuljon ki a modern természettudományról. Ez a cél a diákok többségénél úgy is elérhető, ha a mély fogalmi átgondolást (és ehhez megfelelő időt) igénylő tartalmak helyett, csak az általános ismeretközlés szintjén foglalkozunk az alapproblémákkal, majd a mindennapokból és a sajtóból, médiából ismert, a modern fizika alkalmazásán alapuló érdekes gyakorlati példákat tárgyalunk közérthető szinten. E témák tárgyalása érdekli a diákokat, és már részleges megértésük is pozitív képet alakít ki bennük a tudomány hasznosságáról. Fontos azonban, hogy cikkének befejező részében Károlyházy Frigyes felhívja a figyelmet arra a veszélyre, hogy ha nem tartjuk meg a helyes arányokat, akkor a fogalmi alapozás könnyítése és a gyakorlati alkalmazások hangsúlyozása akár „mesedélutánná” züllesztheti a fizika tanítását. Óva int a „gagyi” elfogadásától. E veszély úgy kerülhető el, ha már a klasszikus fizika jelenségeinek feldolgozása során tudatosan arra törekszünk, hogy a köznapi szemlélethez illeszkedő klasszikus fizika tárgyalásakor megadjuk a diákoknak a megértés igazi élményét. Ennek során és a kísérletekre épülő precíz fogalmi gondolkodás révén válhat hitelessé a számukra a fizika, és közvetve a fizikatanár személye is. A modern fizika ismeretközlő részeit, az esetenként abszurdnak tűnő állításokkal együtt a diák bizalmi alapon elfogadja tanárától. Ez azzal segíthető, hogy a modern témákhoz hozzákapszolható, a fizikában, illetve a kémiában korábban tanult előzményeket felelevenítjük és a tanítás során alapként használjuk.

A modern fizika tantervi beillesztése

A modern fizika a történelmi fejlődés során a klasszikus fizikából bontakozott ki, így a tanítási folyamatban is célszerű a modern fizikai alapismereteket a klasszikus fizikára alapozva tárgyalni. Ennek egyik lehetséges módja az, hogy a megismerés történeti útját követjük. Az egyszerűbb közvetlenül megfigyelhető jelenségek klasszikus fizikai értelmezésétől haladunk a modern fizika nehezebben megragadható, absztrakt gondolkodást igénylő tartalma felé. Ez lényegében azt jelenti, hogy az iskolában a tudomány fejlődésének útját járjuk végig, kiemelve annak legfontosabb állomásait, és elkerülve kacsaringóit. A hangsúlyt a természet megismerésének folyamatára tesszük, és a nehezen megérthető modern fizikai eredményeket egyszerűen közöljük, miközben kiemeljük gyakorlati alkalmazásaikat.

A modern fizika két nagy területével célszerű külön diszciplínaként foglalkozni a középiskolában. Ezek

- A kvantumfizika és az anyag mikroszerkezetének értelmezése kvantumfizikai alapon.
- Einstein speciális és általános relativitáselmélete.

A modern fizika harmadik nagy területének, a statisztikus fizikának önálló tárgyalására a középiskolában nincs igazán lehetőség. Azt tehetjük, hogy a fizika különböző fejezetiben tárgyalt egyes speciális problémák kapcsán térünk ki a statisztikus fizika néhány fontos eredményére, pl. a statisztikus sokaságok viselkedésére, a valószínűségi alapon érvényesülő törvényekre, kiemelve, hogy míg a sokaság egészére pontos leírást adhatunk, a sokaság elemeinek egyedi viselkedéséről csak igen keveset mondhatunk.

A *kvantumfizikának* az anyag szerkezeti tulajdonságainak magyarázatában van alapvető szerepe. A tanítás során a kiindulópontot a diákok anyagszerkezeti előismeretei adják. Ilyenek például az anyag szerkezetével kapcsolatosan a kémia tárgy keretében tanult fogalmak, összefüggések. Ezek jó része ténybeli tudás, ami csekély elméleti háttérre támaszkodik. A diákok tudják például, hogy az anyag atomos szerkezetű, de arra a kérdésre, hogy ezt honnan tudjuk, hiszen atomokat nemigen látunk – a legtöbben már nem tudnak érdemi választ adni. A konkrét anyagszerkezeti ismeretek felidézése mellett az ilyen kérdések felvetése azért hasznos, mert rávilágít arra, hogy a hétköznapi ismeretként elfogadott atomszerkezeti tények nem nyilvánvalók. Ugyanakkor motiváló erejű is lehet az anyagszerkezeti témákkal újra foglalkozó fizika vonatkozásában. A középiskolai kémia anyagszerkezeti háttérének az esetek többségében megfelel a Bohr-féle atommodell, ami kvantumfeltételeivel, de lényegében a bolygómozgás analógiáját használó atomelképzelésével, mintegy hidat képez a klasszikus és a kvantumfizikai szemlélet között. Az igazi kihívást a modern fizika tanítása során az atomszerkezet kvantumfizikai megközelítése jelenti. Ennek alapvető problémája, hogy hiányzik hozzá a matematikai háttér, ami kezelhetővé tenné a köznapis szemléletükkel ellenkező állításokat (és ezzel elfedné a fogalmi megértés hiányosságait). A hullámfüggvény matematikai kezelése nélkül a kvantumfizikai atommodell tárgyalásakor a kísérleti alapok ismertetésére, félkvantitatív közelítésekre, hasonlatokra, és nem utolsósorban számítógépes szimulációkra szorítkozhatunk. (A számítógépes szimulációk, animációk képi megjelenítése a mai diák generáció számára egyre komolyabban használható eszköz az absztrakt fogalmak szemléltetésében és a matematikai eredmények elfogadtatásában.)

A *relativitáselmélet* a modern fizikának az a fejezete, amiről felületesen, de nagyon sok diák tud már valamit. Legtöbben a speciális relativitás abszurdnak tűnő állításairól hallottak, mint pl. az ikerparadoxon, vagy a mozgó óra késése, a mozgó méterrúd rövidülése. Jóval kevesebben vannak azok, akiknek a relativitáselmélet kapcsán eszébe jut a fénysebesség, mint határsebesség, a tehetetlen és súlyos tömeg egyenértékűsége, a gravitáció magyarázata a tér görbülésével vagy az energia és a tömeg ekvivalenciája. A relativitáselmélet vonatkozásában a fizikatanítás feladata egyfajta ismeretterjesztés. A relativitáselmélet jelentősége abban van, hogy rámutat arra, hogy a klasszikus szemlélet alapján alapvetően különbözőnek tartott fizikai fogalmak (pl. hely és idő, anyag és energia, téridő és gravitáció stb.) lényegi összefüggésben vannak egymással. Ez a szemlélet az átlagember számára csak érdekesség, közvetlenül nem érzékelhető. Gyakorlati jelentősége csak a fénysebességet közelítő sebességtartományban van. (Így pl. a GPS-működtetésében már van szerepe.)

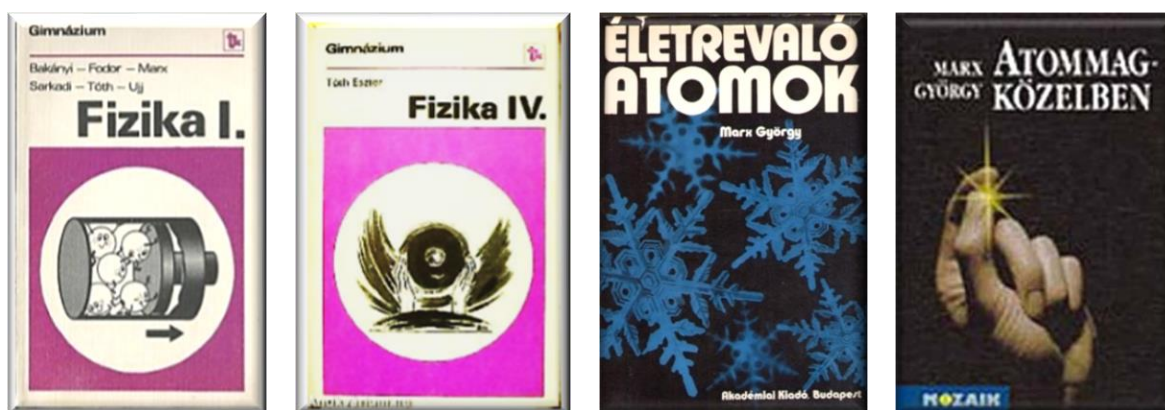
A modern fizika megalapozása kapcsán már hivatkoztunk a kémiai előtanulmányok fontosságára. Nem kevésbé lényeges hangsúlyozni, hogy a modern fizikát a klasszikus fizika tanítása során alapozzuk meg. A relativitáselmélet a klasszikus kinematika, illetve dinamika ismereteire épül, a hőtanban tanított kinetikus gázmodell, a klasszikus atomelmélet egyik fontos pillére, a rezgések és hullámok tanítása, és az optikai egyes részei a kvantummechanikát alapozzák meg. A jó tanterv szerkesztésénél ezeket a kapcsolatokat tudatosan figyelembe kell venni, és célszerű már a klasszikus fizika tanítása során kiemelt hangsúlyt adni azoknak a részleteknek, amelyekre a modern fizikában, mint kapcsolódási pontokra hivatkozni akarunk.

A modern fizikai anyagszerkezet középiskolai tanításának hazai előzményei

Magyarországon a modern fizika – ezen belül a kvantummechanika, anyagszerkezet és a statisztikus fizikai alapjainak – középiskolai tanítására nagyarányú oktatási kísérlet folyt az 1970-80-as években, Marx György professzor (ELTE) vezetésével és az MTA támogatásával. A gimnáziumok első osztályában (mai megjelölés szerint 9. évfolyamon) anyagszerkezeti vonatkozású kémiai és fizikai alapismeretekkel, elemi termodinamikai fogalmakkal ismerkedtek meg a diákok. A 10. évfolyamon klasszikus mechanika, a 11. évfolyamon elektrodinamika volt a tananyag. A 12. évfolyamon a termodinamika és a statisztikus mechanika, illetve az elemi kvantummechanika és anyagszerkezet, magfizika, asztrofizika és kozmológia egyes kérdései kerültek tárgyalásra.

Az oktatási kísérlethez segédanyagok, kísérleti tankönyvek készültek, és a kísérleti iskolák többségében demonstrációs eszközök beszerzésére is lehetőség volt.

Az 1978-as országos tantervi reform minden gimnazista számára kötelező tananyaggá tette a korábbi kísérleti anyagot. Az új tantervhez az eredetileg kísérleti tankönyvek kötelezővé váltak. Ezek a tankönyvek szakmai szempontból ma is tanulságos és értékes szakanyagok, amit a szaktanárok háttéranyagként haszonnal forgathatnak.



Az 1978-as tanterv modern fizika tananyagához készült tankönyvek, illetve szakkönyvekké bővített változataik.

Sajnos a tantervi reform – kötelező jellege miatt – elsietettnek és elhibázottnak bizonyult. A tananyag absztrakciós szintje csak a legkiválóbb diákok számára volt elfogadható, nagyrészt még a jó képességűek szintjét is meghaladta. Bár a reformnak voltak lelkes támogatói, a szaktanárok többsége, a szülők és a diákok jelentős része is elutasította. Az elutasítást érzékelve az oktatási vezetés visszakozott és megadta a lehetőséget alternatív tantervek és programok használatára. A gyakorlatban ez sajnos azt jelentette, hogy a tananyag mind terjedelmi, mind tartalmi szempontból indokolt csökkentése mellett nagyot esett a természettudományok presztízse és a fizika kémia és biológia óraszámja azóta is folyamatosan csökken. Az oktatási kísérlet összesített óraszámja a gimnázium négy évfolyamán több mint duplája volt az elmúlt évekének, ami 2021-re tovább csökkent, ráadásul a kötelező természettudományos órák sora a 10. osztályban befejeződik.

6. AZ ANYAG ATOMOS SZERKEZETÉRE UTALÓ ALAPVETŐ MEGFIGYELÉSEK, FELFEDEZÉSEK

A modern fizika tanításának első lépéseként a klasszikus atomfizika fogalomrendszerét és kísérleti alapjait kell felidézni. Ennek részletessége a tanulócsoporthoz előismereteitől, absztrakciós szintjétől és a rendelkezésre álló időtől függ. A tantervek változása arra utal, hogy a modern fizika érdembeli tárgyalására csak fakultatív órakeretet is igénybe véve kerülhet sor.

6.1. Az anyag atomos szerkezetével kapcsolatos kémiai ismeretek

A kémia bevezetéseként a diákok már az általános iskolában egyszerű tényközlés szintjén hallanak az anyag atomos felépítéséről. Megtanulják, hogy a gáznemű, folyadék vagy szilárd halmazállapotú anyagok jellemzőit az anyagokat felépítő részecskék – láthatatlanul kicsiny *atomok*, illetve az atomok összekapcsolódásával létrejött *molekulák* tulajdonságai határozzák meg.

Kémiai szempontból az anyagok két nagy csoportra oszthatók: *elemekre* és *vegyületekre*. A vegyületek kémiai reakciók során elemekből keletkeznek. A vegyületek azon legkisebb építőegységei, amelyek még rendelkeznek a vegyület valamennyi kémiai tulajdonságával, a *molekulák*. A kémiai reakciók során az anyag eredeti kémiai tulajdonságai megváltoznak – a molekulák átalakulnak. A legtöbb vegyület kémiai módszerekkel elemekre bontható.

Az elemek kémiai szempontból a legegyszerűbb anyagok. Az elemek legkisebb építőegységei az *atomok*.

A különböző atomok eltérő kémiai tulajdonságainak értelmezése szempontjából középiskolai szinten fontos, hogy az atomok *atommagból* (ezek *protonokból* és *neutronokból*) és a mag körüli, elektronokból felépülő „*elektronhéjből*” álló összetett rendszerek. A diákok kémiából tanulják az elektron, és a proton elemi töltését, a neutron jellemzőit, a relatív atom-tömeg fogalmát, az izotópokat, az elsődleges és másodlagos kémiai kötések fogalmát. Az atom, mint összetett rendszer sajátosságait ún. „*atommodellek*” segítségével értelmezik. A középiskolai tananyagban néhány éve még a kvantummechanikai atommodell kvalitatív tárgyalása még általános volt kémiából, az utóbbi években – az óraszám drasztikus csökkenése okán – a kémia alapszintű tanítása megáll a Bohr-modellnél.

Az anyag szerkezetével kapcsolatos kémiai tananyagra a fizikatanár a klasszikus és modern fizikában egyaránt építeni tud. Ez azonban csak akkor lehetséges, ha részletekbe menően ismeri a kémia tananyagot, az elvárt követelményeket és a tanítás során alkalmazott módszereket (ideértve az elvégzett kísérleteket) is. A fizikaórán pontosan kell felidézni a kémiában tanultakat, és szükség szerint lehet kiegészíteni, bővíteni őket. A gimnazisták kémiatudásának biztos része az anyagok atomos szerkezetének ismerete. A hiányosságok akkor buknak ki, ha rákérdezzünk, hogy milyen kísérleti tények bizonyítják az atomok létét. A meglévő lexikális tudás ilyen irányú kiegészítése nem felesleges időtöltés, hiszen értékes szemléletformálást szolgál. Az anyag atomos szerkezetére vonatkozó, kémiából jövő ismeretek elvi alátámasztása

ugyanis kémiaórán általában nem kap hangsúlyt. Így a kémia tananyagba sajnos nem fér bele, a kémiai súlyviszony-törvények tárgyalása, ami a tudományos atom-fogalom kialakulásához vezetett a 18. század során. A kémiai tapasztalatok először a vegyészeket győzték meg. A fizikusok számára csak a 19. század közepétől, a gázok makroszkopikus viselkedésének magyarázatára, Maxwell skót fizikus által kidolgozott *kinetikus gázelmélet* sikere után vált fokozatosan elfogadottá. Az anyag atomos szerkezetének felismerése azt is jelenti, hogy az anyag nem folytonos, a tömeg különböző oszthatatlannak tűnő anyag részecskékből „kvantumokból” áll. Az anyag, az energia, a töltés adagosságára alapozva kimondhatjuk, hogy az egyszerű fizikai rendszerek nem folytonosan változnak, hanem valamilyen tovább nem osztható elemi mennyiség többszöröződéssel.

6.1.1. A kémiai reakciók súlyviszony törvényei

Az állandó súlyviszonyok törvénye szerint a kémiai reakciókban részt vevő anyagok csak meghatározott tömegarányban reagálnak maradéktalanul egymással. Ha a kedvező súlyarány nem áll fenn, akkor a reakció során az egyik vagy másik kiindulási anyagból több-kevesebb megmarad. (J. L. Proust, 1801.)

A többszörös súlyviszonyok törvénye szerint: ha két elem, pl. A és B, többféleképpen is vegyül egymással (a reakció végterméke különböző), akkor az A elem azon mennyiségei, amelyek a B egy adott mennyiségével maradéktalanul reagálni képesek, úgy aránylanak egymáshoz, mint a kis egész számok (J. Dalton, 1808).



A1. Egyszerű szakköri kísérletek az állandó súlyviszonyok törvényének igazolására

[Részletek >>>](#)

A kémiai reakciók súlyviszonytörvényei egyszerűen magyarázhatók, ha feltesszük, hogy az elemek atomjai a kémiai reakciók során változatlanok maradnak és meghatározott arányban egyesülve alkotják a vegyületek molekuláit. Ha pl. egy kémiai reakcióban A és B elem egyesül vegyületté, ez azt jelenti, hogy az A anyag a számú, egyenként m_A tömegű atomjával a B anyag b számú, egyenként m_B tömegű atomja kapcsolódik össze egy $am_A + bm_B$ tömegű molekulává. A két anyag akkor vegyül maradéktalanul egymással, ha a reagáló anyagok tömegeinek (M_A -nak, illetve M_B -nek) arányára fennáll, hogy

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{am_A}{bm_B}$$

Azonos kiindulási anyagokból különböző végtermékekre vezető reakciók mennyiségi viszonyai alapján Dalton a molekulát felépítő atomok viszonylagos tömegére is következtetett. Atomsúlytáblázatának megszerkesztésekor a legkisebbnek bizonyuló hidrogénatom tömegét egységnyinek választotta és a többi atom tömegét ehhez viszonyította.

Mai gyakorlatunk szerint az atomok tömegét a 12 tömegszámú semleges szénatom tömegének 1/12 részéhez, mint egységhez hasonlítjuk. Az ilyen egységekben kifejezett atomtömeget nevezzük relatív atomtömegnek vagy atomsúllynak.

6.1.2. Súlyviszonytörvények és a gáztörvények összekapcsolása: Avogadro-törvénye

A gázreakciók mennyiségi viszonyait vizsgálva *Gay-Lussac* megállapította, hogy az egymással maradéktalanul vegyülő gázok térfogatai azonos nyomás és hőmérséklet esetén úgy aránylanak egymáshoz, mint a kis egész számok. *Gay-Lussac* megfigyeléseit és a daltoni súlyviszonytörvényeket kapcsolta össze *Avogadro törvénye* (1811), ami kimondja, hogy *különböző gázok egyenlő térfogataiban azonos nyomás és hőmérséklet esetén a molekulák száma a gáz anyagi minőségétől függetlenül egyenlő.*

Az anyag atomos szerkezetének kutatásában igen fontos lépést jelentett Avogadro törvénye és a belőle levont következtetések. Elsőként annak végiggondolása, hogy ha különböző gázokból pontosan annyi grammot mérünk le, amennyi a gázok *molekulatömege* (vagyis a molekulában levő atomok atomtömegeinek összege – ezt az illető gáz *mólnyi mennyiségének* nevezzük), akkor azonos hőmérséklet és nyomás esetén a különböző gázok térfogata megegyezik. Ez Avogadro törvénye értelmében ez azt jelenti, hogy a fenti gázmennyiségek azonos számú molekulát tartalmaznak. A későbbiek során beigazolódott, hogy a megállapítás nemcsak a gázokra igaz. Tetszőleges halmazállapotú anyagból (gáz, folyadék, szilárd) lemérhetünk annyi grammot, amennyi az illető anyag molekulatömege, és az ilyen mennyiségű anyagok pontosan azonos számú molekulát tartalmaznak. Az egy mólnyi anyagban található molekulák számát az ún. *Avogadro-féle szám* (N_A) adja meg.

6.1.3. Az atomi részecskék mozgására utaló kísérleti eredmények

Atomok mozgása gázban

A gázokra jellemző állapotjelzők és a tapasztalati alapon adódó makroszkopikus gáztörvények mögött már a 17. századtól láthatatlan atomi részecskék szabad és rendszertelen mozgását sejtették a természettudósok. A kinetikus gázmodell kidolgozása magyarázatot adott számos kísérleti tapasztalatra. Bár az atomokat nem lehetett látni, létezésüket megerősítette Robert Brown botanikus felfedezése (1827), ami szerint a mikroszkóppal megfigyelhető növényi spórák folyadékban zezugos mozgást végeznek. Hasonló mozgás figyelhető meg mikroszkóppal a gázokban lebegő porszemek, füstreszecskék esetén is. A mikroszkopikus részecskék rendezetlen mozgását *Brown-mozgásnak* nevezzük.) A megfigyelt mozgás kvantitatív magyarázatát Albert Einstein adta meg 1905-ben publikált cikkében. A Brown-mozgás magyarázatát a mikroszkóppal látható szemcse és a közeg láthatatlan molekuláinak véletlenszerű ütközései adják. A parányi szemcse különböző irányú ütközéseinek száma ugyanis ingadozhat. Ha valamely irányból több és nagyobb lendületű molekula ütközik vele, mint az ellenkező irányból, a többség hatására a részecske kicsit elmozdul. Ha ezután más irányból éri aszimmetrikus hatás, akkor a másik irányba tolódik el.

A Brown-mozgás megfigyelése mikroszkópon keresztül szakkörön igazi személyes élmény a diákok számára. Nagyobb létszámú diákcsoport számára a jelenséget a mikroszkópra szerelt videó kamerán keresztül, kivetítve tehetjük láthatóvá.



A2. Festékszemcsék, füstreszecskek Brown-mozgásának megfigyelése mikroszkóppal.

[Részletek >>>](#)



A3. Brown-mozgás elmozdulás-idő összefüggésének vizsgálata modellkísérlet segítségével

[Részletek >>>](#)

Az atomok létezésének tudományos hipotézisként történő elfogadtatását erősítette a gázok diffúziós folyamatainak felfedezése is.



Gázok diffúziójának kísérleti vizsgálata in.: [A fizika tanítása a középiskolában 1. \(585-590. o.\)](#)

A tapasztalat azt mutatta, hogy ha adott gáztérfogatban az intenzív állapotjelzők (pl. nyomás, anyagmennyiség-koncentráció, hőmérséklet, kémiai potenciál) értéke a hely függvényében változik, a gázban olyan anyagmozgás indul meg, ami az inhomogenitást megszünteti. Az ilyen irányított anyagáramlást nevezük diffúziónak. A diffúziós anyagáramlás az atomi részecskék hőmozgásához kapcsolódik. Bár a középiskolai oktatásban a diffúzió tárgyalása nem tananyag, szakköri feldolgozás témájaként – érdekes kísérletekre alapozva – hasznos és ajánlott.



A4. További diffúziós kísérletek szakköri feldolgozásra (fakultatív szakköri feldolgozásra ajánlott)

[Részletek >>>](#)

A makroszkopikus kísérleti tapasztalatokat összefoglaló gáztörvények, és a gázok atomos szerkezetét tartalmazó Avogadro törvény és az atomi részecskék mozgására utaló jelenségek (Brown-mozgás, diffúzió) jelentették az alapját, a 19. század második felében a *J.C. Maxwell* skót tudós által megalkotott *kinetikus gázelméletnek*. A kinetikus gázelmélet elemei hagyományosan a középiskolai fizika tananyag részét alkotják. A kinetikus gázelmélet atomok mozgásával, ütközésével értelmezi a gázok nyomását, hőmérsékletét, értelmezi a gázok belső

energiáját és megfogalmazza az ekvipartíció-tételt is. A kinetikus gázmodell alapján végzett számítások jól visszaadják a fenomenologikus mérési tapasztalatokat. Ez az egyezés fontos szerepet játszott abban, hogy a 18-19. században egyre több tudós fogadta el – kezdetben csak hipotézisként – az anyag atomos szerkezetét.



Kinetikus gázelmélet szám, in.: [A fizika tanítása a középiskolában 1. \(535. o.\)](#)



A5. Az Avogadro-szám és az atomok méretének meghatározása a kinetikus gázelmélet alapján

[Részletek >>>](#)

A kinetikus gázmodellben fontos szerepe van az atomok alapvető fizikai jellemzőinek (méret, tömeg, sebesség). Ezen adatok, továbbá az Avogadro-szám, Boltzmann-állandó értékének nagyságrendi becslésére alkalmas mérőkísérletek iskolai körülmények közt elvégezhetők.



A6. Molekulák méretének nagyságrendi becslése, vízfelületen kialakult olajfolt méretéből

[Részletek >>>](#)

6.2. Az elektromosság „atomos” szerkezete – az elemi elektromos töltés

Az atomokat felépítő részecskéket (elektront, protont és neutron) a középiskolás diákok a kémiából ismerik. Az elektronnal, mint elemi töltéssel a középiskolai elektromosságtan keretében a fizika is foglalkozott. Alapvető, hogy hangsúlyozzuk, az anyagok elektromos tulajdonságát hordozó töltések is adagokban vannak jelen az atomokban.

Az elemi töltés nagysága középiskolai szinten legegyszerűbben a Faraday törvények alapján határozható meg. A Faraday törvényeket a diákok már (majdnem biztosan) megismerték az áram kémiai hatásának tárgyalásakor, és nagy valószínűséggel a kémiában is már szerepeltek. Itt csak fel kell idézni őket és a mikroszerkezeti háttérrel az elemi töltésre tett hangsúllyal kidolgozni.



Az elektrolízis Faraday-törvényei, az elemi töltés meghatározása, in.: [A fizika tanítása a középiskolában II. 5.4.1. Faraday-törvények \(351. o.\)](#)

Feltételezve, hogy a vegyületképzés töltésátviteli folyamatok eredménye, Faraday elektrolízis törvényei alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy az elektromosság is meghatározott töltésű elemi részecskékből áll. Az elemi elektromos töltés nagyságát (q_e) a Faraday-állandó és az Avogadro-szám hányadosa adja meg:

$$q_e = \frac{F}{N_A} = \frac{96500\text{C}}{6 \cdot 10^{23}} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$$

Az elemi töltés (elektron töltése) meghatározásának legegyszerűbb módja a víz alkotóira bontása elektrolízissel. A mérés emelt szintű tanórán, vagy akár szakköri keretek közt is tanulságos. Az elektrolízis során az áramerősséget (I), az elektrolízis idejét (t) és az elektródákon kiváló hidrogén és oxigén gáz mennyiségét (praktikusan V térfogatát) mérve az az elemi elektromos töltés nagysága – az elektron töltése – egyszerűen meghatározható.



Az elemi töltés értékének közelítő meghatározása elektrolízissel végzett vízbontás kísérlete alapján (fakultatív szakköri mérés), in.: [A fizika tanítása a középiskolában II. EÁ21. melléklet \(451. o.\)](#)

6.2.1. Az elemi töltés meghatározása Millikan módszerével

Az elemi töltés nagyságának közvetlen meghatározására a legismertebb kísérleti módszer *R. A. Millikan* amerikai fizikus (1909) nevéhez fűződik. Millikan a vízszintesen elhelyezett kondenzátor lemezeire egyenfeszültséget kapcsolt majd a lemezek közti térrészbe finom cseppekké porlasztott olajat juttatott. A porlasztással kapott olajcseppek egyszerű dörzselektromos hatás révén gyengén negatív töltésűvé váltak. Millikan a cseppek mozgását figyelve észrevette, hogy a cseppek töltése különböző, de a töltések nagysága mindig ugyanazon, eleminek tekinthető töltésadag egészszámú többszörösének mutatkozik.

A Millikan-kísérlet középiskolában is elvégezhető, a szükséges eszköz a tanszerkereskedelemben beszerezhető.



A7. Az elemi töltés értékének meghatározása Millikan-kísérlettel (emelt szintű fakultatív szakköri mérés)

[Részletek >>>](#)



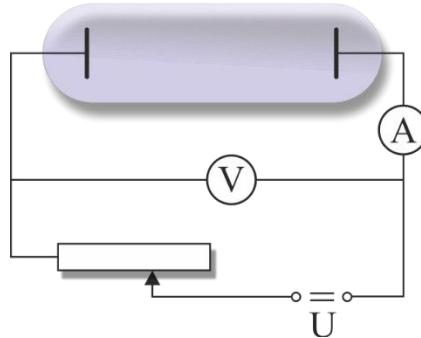
A8. Az elemi töltés nagyságának becslése $(\text{MnO}_4)^-$ -ionok vándorlási sebességéből

[Részletek >>>](#)

6.2.2. Az elektron, mint töltött elemi részecske

A katódsugarak

Mai atomfizikai ismereteinkhez döntően hozzájárult a gázkisülések kísérleti vizsgálata. A gázok elektromos vezetőképességét, illetve az ehhez kapcsolódó látványos gázkisüléseket már a 19. században részletesen vizsgálták. A kísérleti összeállítást az ábra mutatja.



A gázt légmentesen lezárt üvegedénybe, ún. *kisülési csőbe* töltötték, és a csőbe benyúló két fémelektrod közé nagy feszültséget kapcsolnak. Megfelelően nagy feszültség esetén az elektródok között áram indul meg, amit jellegzetes fénytünemény kísér. A jelenséget *gázkisülésnek* nevezzük.

A gázkisülés során kibocsátott fény színe a töltőgáz anyagi minőségétől függ, spektruma csak néhány színekvonalat tartalmaz. A gáz nyomásának csökkentésével a kisülést kísérő fényjelenség eltűnik. Egészen kicsi, mindössze néhány Pa nyomáson a negatív elektródról (a katódról) láthatatlan sugárzás, a *katódsugárzás* lép ki és halad a pozitív elektród (az anód) felé. A láthatatlan sugárzás azáltal vehető észre, hogy hatására az üvegcső fala, különösen a katóddal szemben, zöldes fénnel villog.

A 19. század végén kiváló kutatók sora vizsgálta a titokzatos katódsugarak tulajdonságait.

A kísérleti vizsgálatok tapasztalatai a következőkben foglalhatók össze:

- a katódsugár a katódból lép ki, és egyenes vonalban terjed;
- elektromos és mágneses térrel eredeti irányától eltéríthető (az eltérülés irányából arra lehet következtetni, hogy a *sugárzás negatív töltésű*);
- a katódsugarak energiát szállítanak (ha vékony fémlemezbe csapódnak, képesek az izzásig felmelegíteni);
- a katódsugárnak impulzusa van (a sugárzás útjába helyezett könnyű kis lapátkerék a rá eső katódsugarak hatására forgásba jön).
- több anyagon *fluoreszcenciát* okoz;

J. J. Thomson (1856-1940) angol fizikus a katódsugarak tulajdonságait azzal értelmezte, hogy a sugárzást negatív elemi töltésű, parányi részecskék árama alkotja. Elektromos és mágneses eltérítés együttes alkalmazásával meghatározta a katódsugarak részecskéinek fajlagos töltését, a töltés és a tömeg hányadosát (q_e/m). Bizonyította, hogy a katódsugarat alkotó részecskék



fajlagos töltése nem függ sem az elektródok anyagától, sem a kisülési csőben levő kisnyomású gáz minőségétől. Megállapította továbbá, hogy a részecskék sebessége jóval kisebb (mintegy ezred része) a fény sebességének. Ezekből a tényekből Thomson arra következtetett, hogy a katódsugarak részecskéi az eddig oszthatatlannak tartott atomokból származnak, ráadásul minden atomban megtalálhatók. Ezeket a negatív töltésű részecskéket nevezzük *elektronoknak*

Az elemi töltés közvetlen meghatározása után (Millikan) az katódsugarak eltérítési kísérleteiből kapott fajlagos töltés figyelembevételével meghatározhatóvá vált az elektron tömege is.

Az elektronok töltése: $Q = -q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$

Az elektronok nyugalmi tömege: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$



A9. Thomson módszere az elektron fajlagos töltésének meghatározására (egyidejűleg ható elektromos és mágneses térben történő eltérítéssel)

[Részletek >>>](#)

Az elektron fajlagos töltésének a meghatározására, lényegében Thomson módszerét követő speciális taneszköz (szálsugárcső) áll rendelkezésre



Elektronnyaláb eltérése Lorentz-erő hatására, az elektron fajlagos töltésének mérése szálsugárcsővel (emelt szintű mérőkísérlet), in.: [A fizika tanítása középiskolában II., Egyenáramok fejezet, EÁ33. melléklet \(483. o.\)](#)

7. AZ ELSŐ ATOMMODELLEK

A 20. század elején már számos kísérleti tény utalt arra, hogy az atom valójában nem oszthatatlan.

- Az atomok oszthatatlanságára vonatkozó kezdeti elképzelést a 19-20. század fordulóján felfedezett és utána részletesen vizsgált, *természetes radioaktivitás jelensége* cáfolta meg. Bebizonyosodott, hogy néhány, ún. „radioaktív” anyag pozitív töltésű héliumion-részecskéket (α -sugárzás), illetve elektronokat (β -sugárzás) bocsát ki magából. (Mind az α -, mind a β -sugárzást nagy energiájú elektromágneses sugárzás (γ -sugárzás)

kísérheti.) A radioaktív sugárzás kibocsátása következtében a sugárzó anyag átalakul, más elemmé válik.

- A katódsugarakkal végzett kísérletek alapján J.J. Thomson arra következtetett, hogy az elektron minden anyag atomjának része. Mivel azonban az atom egészében semleges, a negatív töltésű elektron csak úgy lehet minden atomnak része, ha mellette az atomban pozitív töltés is van.
- *D. J. Mengyelejev* orosz vegyészprofesszor 1869-ben megszerkesztette az elemek róla elnevezett *periódusos rendszerét*. A rendszer alapját az a felismerés adja, hogy a különböző elemek kémiai tulajdonságai a növekvő atomsúly függvényében szakaszosan ismétlődnek. A 19. század végén, a 20. század elején egyre többen vallották, hogy a periódusos rendszer törvényszerűségeinek magyarázatát az atomok szerkezeti tulajdonságaiban kell keresni.

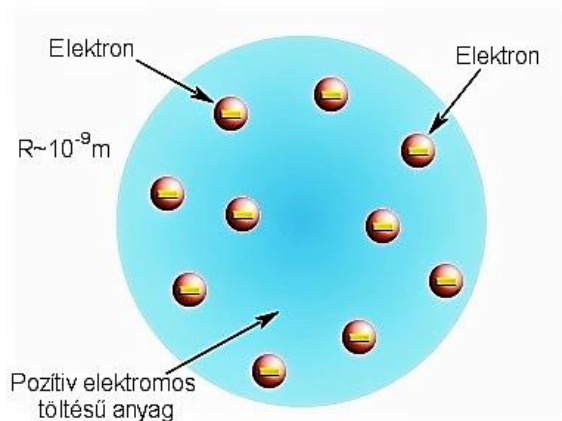
Az anyag szerkezetét kutató fizikusok, a kísérleti eredményeken alapuló egységes képbe igyekeztek összefoglalni az atomok szerkezetére vonatkozó elképzeléseiket. Így születtek meg a ma már inkább tudománytörténeti jelentőséggel bíró első atommodellek. Bár mai felfogásunk az atomról lényegesen eltér a korai modellektől, az első elképzelések áttekintése ma is hasznos. Jól nyomon követhető általuk a természet megismerésének folyamata. A modellek mindig a kísérleti tapasztalatokon és a fizika ismert törvényein alapulnak. Addig elfogadhatók, ameddig kielégítő magyarázatokat tudnak adni az ismert jelenségek széles körére és az új kísérleti felfedezésekre. Amikor egy modell már nem képes erre, azaz ellentmondásba kerül a kísérleti tapasztalatokkal, érvényét veszti, új értelmezésre új modellre van szükség.

A 20. század elején jelentek meg az első atommodellek.

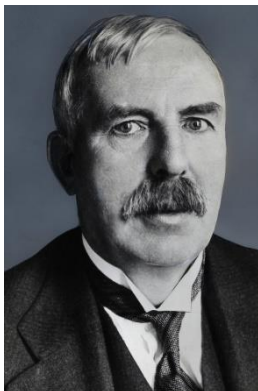
7.1. Thomson atommodellje

Az atom szerkezetéről az első tudományos igényességű modellt J. J. Thomson adta 1904-ben. Kiindulópontja az atomok méretére vonatkozó korabeli feltételezés volt, ami szerint az atomok gömbszerűek és sugaruk 10^{-9} m nagyságrendű (ezek ma is elfogadhatók), továbbá kifelé nem mutatnak elektromos töltést, elektromosan semlegesek. Thomson meg volt győződve arról, hogy az általa felfedezett negatív töltésű az atomhoz képest is parányi részecskék – az elektronok – az atomok alkotórészei. Mivel az atomok kívülről elektromosan semlegesek, a bennük lévő negatív elektronok töltését ugyancsak az atomban lévő pozitív töltéseknek kell kifelé közömbösíteni. Thomson hipotézise szerint az atomot egyenletes sűrűségű, nagy tömegű pozitív töltésfelhő alkotja, amelyben kis tömegű, pontszerű elektronok helyezkednek el. Az elektronok elrendeződését Thomson a klasszikus elektrodinamika segítségével határozta meg. Eszerint az elektronok a pozitív töltésfelhőben a középpontra szimmetrikusan, nagyszámú elektron esetén koncentrikus gyűrűrendszert képezve helyezkednek el.

Az elektronokat harmonikus (a kitéréssel arányos) erő tartja egyensúlyi helyzetben. A harmonikus erővel kötött elektronok rezgésével magyarázta Thomson pl. az atomok fénykibocsátását. Ez a magyarázat azonban nem bizonyult alkalmazhatónak a vonalas színeképek esetére. A Thomson-féle atommodell alapvető tarthatatlanságát egy új kísérleti eredmény, az atommag létének felfedezése egyértelműen bizonyította.



7.2. Az atommag felfedezése – a Rutherford-féle atommodell



Az atommag felfedezéséhez a radioaktív α -sugárzás tulajdonságainak vizsgálata vezetett el. Ernest Rutherford (1871-1937) α -részecskékáthaladását vizsgálta különböző anyagokon, így többek között vékony fémfóliákon is (lásd 14. pont). Meglepődve tapasztalta, hogy miközben a sugárzás döntő része szinte akadálytalanul hatolt át a fólián, a részecskék kis hányada azonban erősen eltért eredeti mozgásirányától. Tudott volt, hogy az α -részecskék elektromos és mágneses térben eltérülnek eredeti mozgásirányuktól. Mivel a fémfóliának nem volt kimutatható töltése, a sugárzás eltérülésére csak az anyag belső töltései adhattak magyarázatot. Az atomokról alkotott Thomson-féle kép azonban ennek ellentmondott. A Thomson-modell feltételezte, hogy az atomokban a pontszerűen kicsi negatív elektronok töltését az atom egész térfogatát kitöltő pozitív töltésfelhő kompenzálja. Rutherford számításokkal mutatta meg, hogy ha a Thomson-modell megfelelné a valóságnak, az α -részecskéknek eltérés nélkül kellene áthaladniuk az anyagon. Rutherford és két asszisztense, Hans Geiger és Ernest Marsden, hosszadalmas és fárasztó megfigyelések során hengeresen elhelyezett fluoreszkáló ernyővel vette körül a fémfóliát és mikroszkóppal figyelte, hogy az ernyő mely pontjain milyen gyakoriak a fólián áthaladó eltérülő α -részecskék becsapódásait jelző felvillanások. Közel kétéves munka eredménye egyértelműen igazolta, hogy a fólián áthaladó α -részecskék kis hányada jelentős irányváltozást szenved, és meghatározta a sugárzás eltérülésének szögeloszlását is. A kísérleti eredmények alapján Rutherford a kevés, de erősen eltérülő részecskékre vonatkozó tapasztalat értelmezésére a következő feltételezéseket tette:

- Az atom pozitív töltése az atom közepén kicsiny "magban" helyezkedik el.
- A mag és az α -részecskék közti (eltérítést okozó) kölcsönhatás az elektromos (Coulomb-) taszítás.
- A magban koncentrálódik az atom csaknem teljes tömege. Az α -részecske centrális ütközésekor a mag gyakorlatilag mozdulatlan, míg az α -részecske "visszapattan" róla.

Rutherford elméletileg kiszámította, hogy e feltételezések alapján a szórt sugárzás intenzitásának hogyan kell csökkennie az eltérülés szögének függvényében. Az elméleti számítások eredménye jól egyezett a mérési tapasztalatokkal. Az egyezés igazolta Rutherfordnak a szórás mechanizmusára, illetve az atommag létezésére tett feltételezését. Az atommodellek tárgyalásakor a Rutherford-modell – mint az atomok megismerésének egy fontos állomása – a kémia tantárgyban tanultak felidézésén és Rutherford szórás kísérletének fenti kvalitatív ismertetésén túl nem kíván részletesebb tárgyalást. A fizika iránt érdeklődő osztályokban a magfizika témakörében érdemes részletesebben tárgyalni a Rutherford-kísérletet (lásd [MF1](#). melléklet). A részletesebb tárgyalást a kísérlet történeti jelentőségén az is indokolja, hogy a magfizikának és az elemi részecskék vizsgálatának alapvető módszere a felgyorsított részecskék ütköztetésével végzett szórás kísérlet.

Az atommag felfedezése alapvetően megváltoztatta a fizika atomokról alkotott elképzelését. Rutherford kísérlete nyomán az atomokat parányi naprendszerhez hasonlónak képelték el. Eszerint a pontszerű, kis tömegű, negatív töltésű elektronok úgy keringenek kisebb-nagyobb körpályákon a pozitív töltésű, nagy tömegű, de szintén pontszerűen kicsiny atommag körül, mint a bolygók a Nap körül.

A Rutherford-féle atommodell az atommag felismerése révén jelentős előrelépés volt a Thomson-modellhez képest. Érdekes azonban, hogy szinte a modell megalkotásának pillanatában felmerültek a vele kapcsolatos alapvető nehézségek is. A modell alapvető problémája, hogy ellentmond a klasszikus elektromágneses sugárzáselméletnek. A keringő elektronok ugyanis gyorsulnak, a gyorsuló töltés pedig elektromágneses sugárzást bocsát ki. Az energiamegmaradás törvénye értelmében ez a sugárzás a keringő elektron energiáját felemésztene, és az elektron végül belezuhanna az atommagba. A „Rutherford-atom” tehát a klasszikus fizika törvényei szerint nem lehet stabil.

Megjegyzés:

- Az elektromágneses hullámok tárgyalásakor idő hiányában gyakran könnyű szívvel kihagyjuk az antenna körül kialakuló tér különböző mértékben lecsengő zónáinak tárgyalását, és meg sem említjük, hogy a nagy távolságra terjedő hullámtér kialakulásáért a gyorsuló töltések a felelősek. A Rutherford modellel szemben támasztható kételyt a gyorsuló töltések miatt fellépő sugárzási veszteségre alapozzuk, ami mutatja, hogy az atomfizika szerves felépítéséhez erre a tényre szükség van.

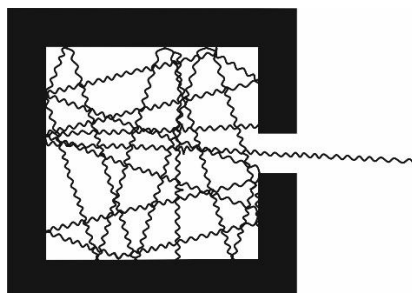
8. A MODERN KVANTUMFIZIKÁT ELŐKÉSZÍTŐ, A KLASSZIKUS FIZIKÁVAL NEM MAGYARÁZHATÓ KÍSÉRLETI TAPASZTALATOK

8.1. A hőmérsékleti sugárzás megoldhatatlannak tűnő problémája

Tapasztalati tény, hogy minden test *hőmérsékletétől függően* folytonos spektrumú elektromágneses sugárzást bocsát ki – *emittál*. Ezt a sugárzást nevezzük *hőmérsékleti sugárzásnak*. A sugárzás energiája a hőmérséklet növekedésével rohamosan nő, és frekvenciaeloszlása változik.

Kirchhoff (1860) ismerte fel, hogy egy test hőmérsékleti sugárzása nem független a test sugárzást elnyelő – *abszorbeáló* képességétől. A testek ugyanis nem csak folyamatosan sugároznak, hanem a környezetükből rájuk eső elektromágneses hullámok egy részét folyamatosan elnyelik. A környezetükkel termikus egyensúlyban lévő testek energiakibocsátása és elnyelése megegyezik. Figyelembe véve azt a közismert tényt, hogy a sötét színű, fekete testek jobban elnyelik az elektromágneses sugárzást, arra a következtetésre juthatunk, hogy ezeknek a testeknek sugárzása is erősebb.

A hőmérsékleti sugárzás törvényeinek vizsgálatához célszerűnek mutatkozott a legerősebben sugárzó (és elnyelő) testtel kísérletezni. Ilyen célra ideális az *abszolút fekete test* lenne, amely a teljes ráeső sugárzást elnyeli. Természetesen abszolút fekete test, a valóságban nem létezik. Jó közelítéssel így viselkedik azonban a belül feketére kormozott doboz oldalára fűrt kis nyílás. A nyíláson bejutó elektromágneses hullámok energiájának nagy része a doboz fekete falára esve azonnal elnyelődik. Ami nem, az a koromtól kissé rücskös falon diffúz módon szóródik, és addig verődik ide-oda a dobozban míg az ismételt ütközések során gyakorlatilag maradéktalanul abszorbeálódik. A doboz falán lévő lyuk tehát abszolút fekete testnek tekinthető.



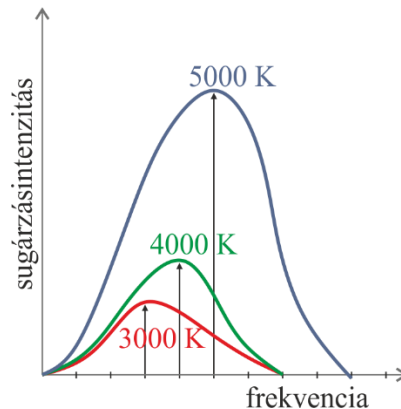
A múlt század utolsó évtizedeiben a fizikusok részletesen vizsgálták az abszolút fekete test hőmérsékleti sugárzásának sajátosságait. A belül kormozott üreg falát fűtötték, és a falon lévő kis nyíláson kilépő sugárzás intenzitását és frekvencia eloszlását mérték.

Stefan és Boltzmann megállapították, hogy az abszolút fekete test egységnyi felületéről kisugárzott E energia a test abszolút hőmérsékletének negyedik hatványával arányos, azaz

$$E = \sigma T^4$$

ahol a σ arányossági tényező értéke $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ (Stefan-Boltzmann-törvény).

A kisugárzott teljes energia a különböző hullámhosszúságú elektromágneses hullámok energiájából tevődik össze. A sugárzás különböző hőmérsékleteken mért intenzitás-eloszlását a frekvencia függvényében a grafikon mutatja.



A hőmérsékleti sugárzás intenzitása maximumgörbe szerint változik a frekvencia, illetve a hullámhossz függvényében. A hőmérséklet növekedésével a görbék maximuma egyre határozottabbá válik és a magasabb frekvenciaértékek (kisebb hullámhosszak) felé tolódik el. A tapasztalat szerint a maximumhoz tartozó hullámhossz (λ_{max}) és a hőmérséklet (T) fordított arányban állnak egymással (Wien-féle eltolódási törvény).

Az abszolút feketetest sugárzását a 19. század végéig nem sikerült a fizikusoknak kielégítően értelmezni, Max Planck (1785-1831) német elméleti fizikus volt az, aki a századfordulón gyökeresen új feltételezéssel élt a sugárzás értelmezésére, és a problémát megoldva új fejezetet nyitott a modern fizikában. Planck feketetest-sugárzási elméletéből fejlődött ki a kvantumfizika.

Megjegyzés:

- A feketetest-sugárzás intenzitáseloszlására Rayleigh és Jeans, valamint Wien vezetett le elméleti úton összefüggést. A Rayleigh–Jeans-törvény alacsony frekvenciákon, a Wien törvény pedig magas frekvenciákon igen jól közelítette a kísérleti úton kapott intenzitáseloszlást, de a belőlük levonható következtetések problémákhoz vezettek. Jól jelzi ezt a Rayleigh–Jeans-törvény, aminek levezetése alapján arra lehet következtetni, hogy a frekvencia növekedtével a sugárzás intenzitása a végtelenhez tartana. Ezt a paradoxont nevezték a korabeli fizikában „ultraibolya katasztrófának”. A hőmérsékleti sugárzásra a Planck-féle leírás egységes és ellentmondások mentes értelmezést ad, a Planck-törvény megfelelő közelítésekkel a mind a Rayleigh–Jeans-, mind a Wien-törvényt visszaadja.

8.2. Planck megoldása, az energiakvantum bevezetése

A fizikusok már korábban is tisztában voltak azzal, hogy az abszolút feketetestet modellező fűtött üreg nyílásán kilépő sugárzás intenzitása arányos az üregben kialakult sugárzási tér energiasűrűségével, továbbá, hogy a kilépő nyalábban a különböző hullámhosszak az üregbeli

arányoknak megfelelően vannak képviselve. Ezekből következik, hogy a hőmérsékleti sugárzás problémájának megoldása az üregben kialakult elektromágneses tér leírásával adható meg.

Planck feltételezte, hogy az üreget határoló test falában atomi méretű rezgő dipólusok – oszcillátorok – működnek, és ezek sugározzák ki az elektromágneses hullámokat. Az atomi oszcillátorok azonban az őket érő elektromágneses sugárzás hatására kényszerrezgést is végeznek. Az üregben az oszcillátorok és a sugárzás bonyolult kölcsönhatásának eredményeként egyensúly áll be: amennyi energiát a falban levő oszcillátorok kisugároznak, ugyanannyit el is nyelnek. Az üregben elektromágneses állóhullámok alakulnak ki. A hőmérsékleti sugárzás fent ismertetett tulajdonságainak értelmezéséhez az üregben kialakult állóhullámok energiájának, illetve frekvencia-eloszlásának hőmérsékletfüggését kellett meghatározni. Planck úgy találta, hogy a hőmérsékleti sugárzás spektrális energia-eloszlása csak akkor értelmezhető, ha feltételezi, hogy a sugárzó oszcillátorok energiája nem lehet tetszőleges. Feltételezése szerint a f frekvencián működő oszcillátor energiája csak

$$E = nhf$$

lehet, ahol $n = 1, 2, \dots$ és h állandó. Az oszcillátor akkor sugároz, ha egy magasabb energiájú állapotból egy alacsonyabb energiájú állapotba kerül. Az így kibocsátott elektromágneses sugárzás energiája – az oszcillátor sugárzás előtti és utáni energiájának a különbsége – tehát csak a hf energiaadag, az energiakvantum egész számú többszöröse lehet. Az oszcillátorokat a termikus energia, illetve az abszorbeált elektromágneses sugárzás gerjeszti magasabb energiájú állapotba.

A makroszkopikus mérések tapasztalatai szerint, a fizikai mennyiségek értéke folyamatosan, tetszőleges kicsiny értékkel is változhat. A 19. század végén ezek a tapasztalatok még egyértelműen meghatározták a fizikusok szemléletét. Planck történelmi jelentőségű lépése az, hogy az általános felfogással szemben feltételezte, hogy az oszcillátorok energiája kicsi, de csak jól meghatározott nagyságú energiaadagokban – kvantumokban – változhat meg.

A Planck mérész feltevéséből kiinduló számítások, tökéletes egyezést mutatnak a hőmérsékleti sugárzásra vonatkozó kísérleti tapasztalatokkal, ha az energiakvantum kifejezésében szereplő h állandó értéke

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J/s}$$

A h állandóval az atomi részecskék leírásánál, a kvantumfizikában nagyon gyakran találkozunk. *h-t a fizika univerzális állandói közé soroljuk, és Max Planck tiszteletére Planck-állandónak nevezzük.*

Megjegyzés:

- A hőmérsékleti sugárzás megoldását jelentő mérész feltételezés, miszerint az atomi harmonikus oszcillátorok energiasugárzása kvantált a korabeli fizikusok számára nehezen volt elfogadható. Későbbi visszaemlékezéseiben maga Planck is úgy írt, hogy eleinte ő maga sem tartotta fizikai tartalmat hordozó igazságnak az oszcillátorok energiájának kvantálását, inkább csak munkamódszernek, ami végül jól egyező eredményekre vezetett az addig értelmezhetetlen kísérleti tapasztalatokkal. A sugárzások energiájának kvantálása a klasszikus fizika számára értelmezhetetlen másik kísérleti jelenség a fotoeffektus Einstein-féle értelmezésével kapott fizikai megerősítést.

8.3. Fényelektromos hatás (fotoeffektus)

A 19. század második felében fedezték fel, hogy fémekből megvilágítás hatására elektronok lépnek ki. A jelenséget *fényelektromos hatásnak* vagy *fotoeffektusnak* nevezzük. A fotoeffektus jelensége egyszerű demonstrációs kísérlettel bemutatható.

Kísérlet:

Nagyjából 10 cm x 10 cm-es cinklemez fogjunk szigetelő állványba, és kössük elektroszkóphoz vagy elektrométerhez! Végezzük el sorrendben az alábbi kísérleteket:

1. Töltsük fel a cinklemez (és az elektroszkópot) megdörzsölt ebonitrúddal negatívra, és mintegy fél méter távolságból világítsuk meg higanygőzlámpával (kvarclámpával)! Az elektroszkóp mutatója lassan visszaesik, jelezve, hogy a lemez fokozatosan elveszíti a töltését.
2. Töltsük fel a cinklemez pozitívra (pl. selyemmel megdörzsölt üvegrúd segítségével), és világítsuk meg higanygőzlámpa fényével! A lemez nem veszíti el a töltését.
3. Töltsük fel ismét negatívra a lemezt, és világítsuk meg közönséges izzólámpával! A töltést jelző elektroszkóp állása a megvilágítás hatására nem változik, a lemez nem veszíti el a töltését.
4. Ismételjük meg az első kísérletet úgy, hogy amint a megvilágított lemez töltése csökkenni kezd, üveglapot helyezünk a cinklemez és a higanygőzlámpa közé. Az üveglap hatására a töltéscsökkenés megáll. Ha az üveglapot kiemeljük, az elektroszkóp töltése tovább csökken, ha visszahelyezzük, a csökkenés ismét megáll.
5. Világítsuk meg higanylámpával feltöltetlen állapotban az elektroszkóphoz kapcsolt fémlemez! Az elektroszkóp nem jelez töltést.

Az egyszerű kísérletekkel megalapozhatjuk a *fotoeffektus*, a modern fizika egyik alapjelenségének részletes tárgyalását. Az 1. és 2. kísérlet tapasztalata szerint csak a negatívan töltött fém veszti el töltését megvilágítás hatására. Ez alátámasztja, hogy a fémből elektronok lépnek ki. A 3. és 4. kísérlet igazolja, hogy az elektronok csak a nagyobb energiájú, ultraibolya sugárzást is tartalmazó kvarclámpafény hatására lépnek ki a lemezből. Az üveglappal végzett kísérlet itt különösen fontos, mert igazolja, hogy a jelenséget a láthatatlan ultraibolya sugárzás okozza. (Az üveg a látható fényt átengedi, de az ultraibolyát elnyeli.)

Az 5. kísérlet nehezebben magyarázható, másodlagos effektus következménye. Természetesen a megvilágítás hatására ekkor is kilépnek elektronok a cinklemezből, de pozitív töltéspárjuk a fémbe marad, és az elektromos vonzás megakadályozza az elektronok eltávolodását.

Megjegyzés:

- A kísérletek előtt célszerű a cinklemez csiszolópapírral megcsiszolni, mert az oxidálódott felületen nem jön létre a fotoeffektus.
- A lemezt az elektroszkóppal összekötő vezeték ne érjen az asztalhoz!
- Vegyük figyelembe, hogy a cinklemez feszültsége megváltozik, ha a lámpát közelítjük hozzá vagy távolítjuk tőle! A jelenség magyarázata egyszerű: a feltöltött lemez és a

lámpa földelt fémváza kondenzátort alkot, amelynek a kapacitása változik a „fegyverzetek” távolságával, így tehát a cinklemez feszültsége is változik.

- A kísérlet sikerét – más elektrosztatikai kísérletekhez hasonlóan – erősen befolyásolja a levegő páratartalma. (Lehetőleg száraz levegőjű helyiségben végezzük el a kísérletet.)

A jelenség részletes mennyiségi vizsgálata speciális kísérleti felszerelés a *fotocella* segítségével történik, ami a tanszerkereskedelemben is beszerezhető.

A fotocella két elektródot tartalmazó vákuumcső. Az egyik elektródot alkalmasan megválasztott fémből nagy felületűre képezik ki, ez a *fotokatód* (ezt világítják meg), a másik, vékony fémdróból készült elektród az anód. Ha a fotokatódot megfelelő színű fényel világítják meg, a katódról elektronok lépnek ki, és repülnek át az anódra. Az elektronok kilépésével a katód fokozatosan pozitív töltésű, míg az anód (ide rakódnak le az elektronok) egyre inkább negatív töltésű lesz. Ha az így kialakuló „ellentér” elegendően nagyvá válik, a megvilágított katódból már nem juthat át újabb elektron az anódra. A kilépő elektronokat az elektromos tér lefékezi, majd visszazippantja a katódra. A kilépő elektronok E_k kinetikus energiáját ilyenkor éppen felemészti az ellentér leküzdéséhez szükséges QU munka:

$$E_k = QU$$

A részletes kísérleti vizsgálatok tapasztalatai a következőképpen foglalhatók össze:

- A megvilágított fotokatódból elektronok csak akkor lépnek ki, ha a megvilágító fény frekvenciája meghaladja az f_h küszöbértéket. Az f_h neve határfrekvencia, értéke a fém anyagára jellemző.
- A kilépő elektronok maximális E_k kinetikus energiája (sebessége) a megvilágító fény frekvenciájával lineárisan nő, de nem függ a megvilágítás erősségétől.
- A kilépő elektronok száma a megvilágítás erősségétől függ. Ha a megvilágító fény frekvenciája meghaladja az f_h értéket, akkor az elektronok kilépése a megvilágítással egyidőben, azonnal bekövetkezik, még akkor is, ha a megvilágító fény intenzitása igen kicsi.

A fotoeffektus jelenségével szemben a klasszikus fizika tanácstalanul állt. A kísérleti tapasztalat gyökeres ellentétben volt a fény közismert hullámtulajdonságával. A hullámok energiája folyamatosan változhat, ami semmiképp sem egyeztethető össze fotoeffektus során tapasztalt kvantált energiakibocsátási folyamattal.

A fotoeffektus kísérleti tapasztalatait 1905-ben *Albert Einstein*nek sikerült értelmezni. *Einstein* Plancknak a hőmérsékleti sugárzást sikeresen értelmezhető kvantumhipotézisét alkalmazta a fényelektromos hatás magyarázatára. Feltételezte, hogy a fény hf energiájú *részecskékből* áll. A megvilágító fény részecskéje átadja energiáját a cinklemez egyik elektronjának, ami ennek hatására kilép a fémből. Ha a fény frekvenciája kicsi, azaz $f < f_h$, akkor az átadott energia nem elegendő ahhoz, hogy az elektron elhagyja a fémet. Ahhoz, hogy az elektron kilépjen, minimálisan $hf_h = W_{ki}$ energiával kell rendelkeznie, ahol W_{ki} , a fém anyagára jellemző *kilépési munka*. Amennyiben a megvilágító fény frekvenciája f_h -nál nagyobb, úgy a kilépő elektron kinetikus energiáját az

$$E_k = hf - W_{ki}$$

összefüggés, az ún. *Einstein-féle fényelektromos egyenlet* adja meg. Eszerint a fémből kilépő elektron kinetikus energiája a kísérleti tapasztalatoknak megfelelően a megvilágító fény frekvenciájával lineárisan változik.

A klasszikus fizika számos kísérlete bizonyítja, hogy a fény elektromágneses hullám. A fotoeffektus ezzel szemben arról tanúskodik, hogy a fény nem folytonosan, hanem *hf* adagokban adja le energiáját, azaz *a fény részecskéként viselkedik*. Einstein nyomán az energiaadagokat szállító fényrészecskéket *fotonoknak* nevezzük.

A fotocellával végzett mérőkísérlet frontális vagy kiscsoportos feldolgozása emelt szintű tanulócsoportokban ajánlott.



A10. A fotoeffektus vizsgálata fotocellával (emelt szintű szakköri kísérlet)

[Részletek >>>](#)

A fotoeffektus volt az első olyan tudományos tapasztalat, aminek értelmezése megkívánta, hogy az addig hullámtulajdonságúnak tartott fényt, az atomokkal történő kölcsönhatás során, mint energiaadagot és impulzust hordozó, részecskét kezeljük. A 20. század elején sokak elfogadhatatlannak tartották a fény kettős természetét, azaz azt, hogy a fény bizonyos esetekben hullámnak, máskor részecskének tekinthető. Az abszurdnak tűnő elképzelést azonban új kísérleti tények erősítették meg.

8.4. A fény részecske természetére utaló kísérleti jelenségek

Compton-szórás (Compton-effektus). Fénynyomás



A11. Compton-szórás (Compton-effektus). A Compton-formula levezetése (emelt szintű (szakköri) kiegészítő anyag). Fénynyomás

[Részletek >>>](#)

8.5. A fényrészecskék – fotonok – tulajdonságai

Az ismertett kísérletek szerint az elektromágneses hullámok és a korpuszkuláris (azaz részecskékből álló) anyag kölcsönhatása egyszerűen értelmezhető, ha az elektromágneses sugárzáshoz energia- és impulzushordozó részecskét – *fotont* – rendelünk. A λ hullámhosszúságú, f frekvenciájú elektromágneses sugárzáshoz tartozó foton tulajdonságai a következőkben foglalhatók össze:

A foton energiája: $E = hf = \hbar\omega$

A foton fénysebességgel halad, nyugvó foton nincs.

A foton impulzusa: $p_f = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$

A foton impulzusa alapján kínálkozik a lehetőség, hogy a mozgó fotonhoz tömeget rendeljünk ($m = \frac{hf}{c^2}$). Ennek fizikai értelmét sokan vitatják.

A fotonok lényeges tulajdonságainak teljessé tétele érdekében megemlítjük, hogy a fotonnak saját impulzusmomentuma (*spinje*) is van. A *fotonok egész spinű ún. Bose-részecskék (bozonok)*.

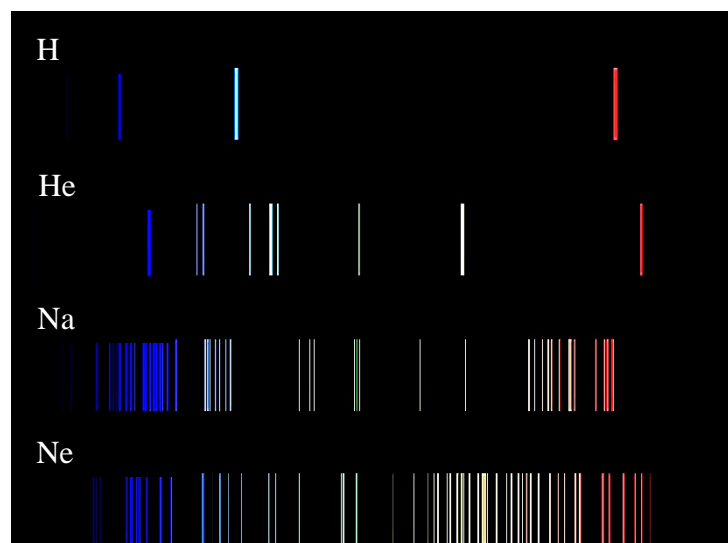
8.6. Gázok emissziós és abszorpciós színe

Az atomban kötött elektronok energetikai viszonyairól a spektroszkópiai módszerekkel kaphatunk információt. A magas hőmérsékleten izzó szilárd vagy cseppfolyó anyagok (pl. izzólámpa, a Nap) „kevert” vagy „fehér” fényt bocsátanak ki, A spektroszkóp a kevert fényt különböző hullámhosszú színösszetevőkre bontja fel, ezek együtt adják a fény spektrumát. A napfény vagy az izzólámpa fényének spektruma gyakorlatilag az egész látható színskálát tartalmazza, a színek átfedik egymást, összeolvadnak, a színek folytonos.

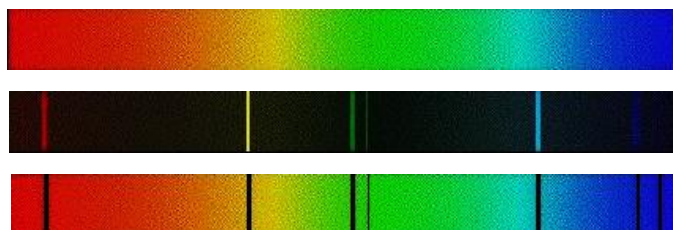


Az izzó gázok, illetve a kisülési csövekben elektromos áram hatására világító gázok fénye csak néhány színösszetevőből áll. A spektroszkóppal kapható színek mindössze néhány különböző színű, különálló vonalból áll (vonalas színek). A különböző anyagú gázok színek együttese más és más, az anyagi minőségre jellemző. A kalibrált spektroszkóp segítségével az egyes színek hullámhossza meghatározható.

Különböző atomi szerkezetű gázok/gőzök vonalas színe



A spektroszkópiai megfigyelések további érdekes tapasztalata, hogy ha folytonos színekű fehér fényel világítunk át valamilyen gázt, úgy a gázon való áthaladás után a megvilágító folytonos spektrum sajátos fekete vonalakat, azaz bizonyos hullámhosszágú fényösszetevők hiányát mutatja. Megállapítható, hogy a gáz a fehér fényből éppen azokat a hullámhosszokat szűri ki, amelyeket kisugároz, amikor fényt bocsát ki. A fekete vonalakat tartalmazó folytonos színháttérű spektrumot elnyelési vagy „abszorpciós színeknek” nevezzük. (A fénykibocsátásra jellemző színek az „emissziós színek”). Az alábbi ábra a folytonos színekét és a gázok emissziós-, illetve abszorpciós színekét mutatják.



A színek vizsgálatával a 19-20. században olyan kiemelkedő tudósok foglalkoztak, mint Bunsen, Kirchhoff, Fraunhofer és Balmer. A vizsgálatok egyrészt a színek részletes elemzésére vonatkoztak (melyik anyag színekében milyen hullámhosszágú vonalak láthatók) másrészt arra, hogy miként lehet a színek vizsgálatát anyagok azonosítására alkalmazni a kémiai analitikában. Az anyag atomos szerkezetének megismerése szempontjából azonban ennél fontosabb probléma volt a vonalas színek fizikai magyarázata. A kérdés sokáig megválaszolatlan maradt, és elfogadható magyarázatot csak a fotonelmélet és az atomi energiaszintek létezésének felismerése után, a Bohr-féle atommodell tudott rá adni.

A színek kísérleti vizsgálata az atomszerkezet energiaviszonyainak megismerése szempontjából nagyon fontos. Az atomok, molekulák belső, bonyolult energia viszonyainak kutatása bonyolult kvantummechanikai számításokkal és spektroszkópiai kísérletekkel történik. Megnyugtató, ha az elméleti számítások eredménye egyezik a spektroszkópiai tapasztalatokkal. Ha ellentmondás van köztük az azt jelzi, hogy a számítások kiindulási feltételezései tévesek, vagy esetleg számítási hiba történt. A középiskolai alapórákon sajnos nincs idő a spektroszkópia részletes feldolgozására. A jelenségkör érdekessége és látványossága azonban indokolja, hogy az érdeklődő diákok számára tartott kiegészítő foglalkozásokon vagy szakkör keretében foglalkozzunk a témával.



A12. A gázkisülések vizsgálata

[Részletek >>>](#)



A13. Színek kísérleti vizsgálata az iskolában (kiegészítő szakköri anyag)

[Részletek >>>](#)

9. A BOHR-FÉLE ATOMMODELL



Az atomról alkotott elképzelés fejlődésében lényeges előrehaladást jelentett *Niels Bohr* (1885-1962) modellje. Bohr atommodellje Thomson és Rutherford kísérleti tapasztalatain, a gázok fénykibocsátására vonatkozó spektroszkópiai méréseken, és Plancknak a hőmérsékleti sugárzást értelmező elméletén alapul. A Bohr-modell legnagyobb érdeme, hogy kiindulásul szolgált a modern atomelmélet, a kvantummechanika kidolgozásához.

Niels Bohr Planck kvantumhipotézisének felhasználásával fejlesztette tovább Rutherford atommodelljét. Elmélete két önkényes feltételezésre, a *pályafeltételre* és a *frekvenciafeltételre* épül.

9.1. A Bohr-féle pályafeltétel

A feltétel szerint az elektronok csak *meghatározott sugarú pályákon* keringhetnek az atommag körül. Ezeken a pályákon a keringő elektronra nem érvényesek a klasszikus elektrodinamika törvényei, ami abban nyilvánul meg, hogy az elektron itt nem sugároz, így energiája állandó marad. Az ilyen stabil elektronpályák sugarát az egyenletes körmozgás esetén állandó értékű impulzuszóráknak (perdületnek) a kvantálásával kaphatjuk meg. A Bohr-féle pályafeltétel kimondja, hogy *a megengedett elektronpályákon az elektron impulzuszórája (perdülete) csak $h/2\pi$ egész számú többszöröse lehet, azaz*

$$m_e v r = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

ahol m_e az elektron tömegét, v a sebességét, r a pálya sugarát jelöli, az n „kvantumszám” pozitív egész ($n = 1, 2, \dots$), h a Planck-állandó. A $h/2\pi$ hányados szokásos jelölése \hbar (olvasd h -vonás).

A Bohr-féle pályafeltétel alapján meghatározható az atomok *elektronpályáinak sugara*. A legegyszerűbb atom, a hidrogénatom esetén az első megengedett elektronpálya sugara egyben az atom méretét is jellemzi. A Bohr-elmélet egyszerű ellenőrzésére kínálkozik, a hidrogénatom számított elektronpálya-méretének összehasonlítása másképpen, például a kinetikus gázelmélet alapján kapható értékkel.



A14. A Bohr-féle pályafeltétel alapján végzett elemi számítás a H-atom méretének, illetve a mag körül keringő elektron alapenergiájának meghatározására (emelt szintű szakköri kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)

9.2. A Bohr-féle frekvenciafeltétel

Az atomok fénykibocsátását Bohr két állandó energiájú pálya közti elektronátmenettel értelmezte. Ha az elektron nagyobb energiájú, a magtól távolabb levő pályáról kisebb energiájú, a maghoz közelebbi pályára lép át, az atom ΔE energiát sugároz ki. Az atomok által kisugárzott energiát szállító elektromágneses hullám f frekvenciája Planck kvantumfeltételét alkalmazva:

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{E_n - E_m}{h}$$

ahol $E_n - E_m = \Delta E$ a két elektronpálya közti energiakülönbséget jelöli. Ez a Bohr-féle frekvenciafeltétel.

A Bohr-féle frekvenciafeltételt alkalmazva értelmezhetjük a gázok vonalas színeképét. Az egyes színeképvonalakhoz tartozó sugárzás f frekvenciája meghatározható, ha a Bohr-féle frekvenciafeltételbe behelyettesítjük az elektronok energiájára a Bohr-féle pályafeltételből adódó energia értékeket.

$$f = \frac{1}{h} \cdot \frac{k^2 Z^2 q_e^4 m_e}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

A legegyszerűbb esetben, a hidrogén esetén, a modelltől számított és a mért spektroszkópiai eredmények pontosan egyeznek.

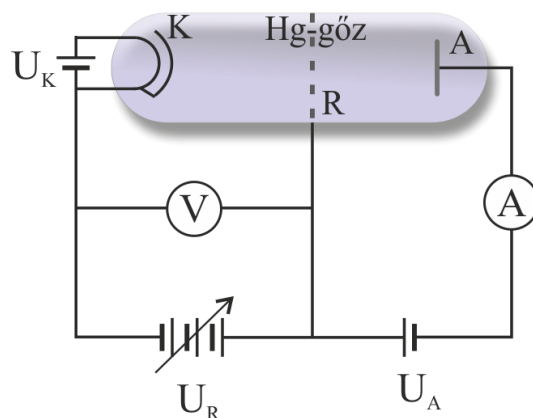
A színeképvonalak frekvenciájára a Bohr-modelltől kapott kifejezést összevetve az empirikusan meghatározott *Rydberg-formulával*, az R Rydberg-állandó értéke elméletileg kiszámítható. Az R számított és mért értéke jól megegyezik.

A fényelnyelést a fénykibocsátás fordított mechanizmusaként értelmezve, a Bohr-moddal az *elnyelési* (abszorpciós) *színekép is értelmezhető*. Az atom olyan f frekvenciájú hullámokat nyel el, amelyeknek energiája révén az elektron az alacsonyabb E_n energiájú pályáról a magasabb energiájú E_m pályára kerül át.

Az atomok energiájának kvantált jellegét a spektroszkópiai mérések mellett a, kifejezetten ennek vizsgálatára tervezett és elvégzett ellenőrző mérés, a *Franck–Hertz-kísérlet* is igazolja.

9.3. A Franck–Hertz-kísérlet

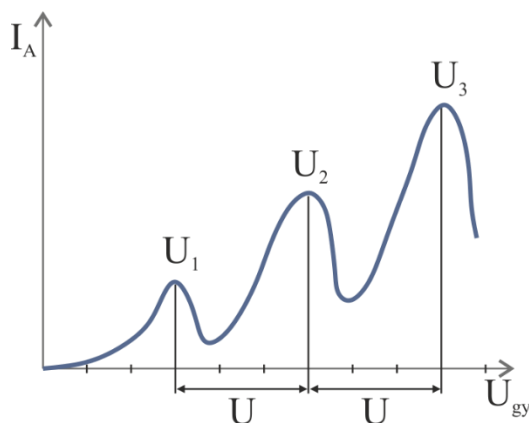
James Franck és *Gustav Hertz* speciális elektroncsövet szerkesztett, hogy a spektroszkópiai vizsgálatoktól független, más módszerrel, elektronok és gázatomok ütköztetésével ellenőrizzék a Bohr-modellnek az atomi energianívókra vonatkozó állítását. A speciális elektroncső, az ún. Franck–Hertz-cső zárt üvegcső, ami három elektródát tartalmaz, a cső egyik végén helyezkedik el az izzó katód, a másik végén az anódot. A két elektróda közti térrészben egy fémrács alkotja a harmadik elektródát. Az üvegcsőből a levegőt kiszívják és a térbe kevés higanyt juttatnak. A kísérlet során a csövet kályha helyezve felmelegítik úgy, hogy a higany gőz állapotú legyen. A kísérleti berendezést a szemléltető ábra szemlélteti. Működési elve a következő:



Az elektroncső K izzó katódjából kilépő elektronokat a katód és az R rács közé kapcsolt U_R pozitív feszültség felgyorsítja. Az A anód a rácshoz képest $-U_A$ kis negatív feszültségen van. Így az anód és a rács közti térrészben az elektronok fékeződnek, mozgási energiájukat fokozatosan elveszítik. Az anódot csak azok az elektronok érhetik el, amelyek E_k kinetikus energiája fedezi az ellentér legyőzéséhez szükséges munkát, azaz amelyekre

$$E_k \geq QU_A$$

Az elektroncsőben kisnyomású Hg-gőz van. A mérés során fokozatosan növeljük az U_R gyorsítófeszültséget (ezzel az elektronok kinetikus energiáját) és mérjük a cső anódáramát (az anódra eljutott elektronok számát). A mérés közben a $-U_A$ fékezőfeszültség értéke állandó. Az anódáram–gyorsítófeszültség görbe jellegzetes, lokális maximumokat és minimumokat mutató növekvő függvény.



A gyorsító feszültség növekedtével kezdetben az áram monoton nő, a kritikus U_1 feszültséget elérve azonban az áram hirtelen lecsökken. A rácsfeszültség további növekedése újabb gyors áramerősség-növekedést okoz, majd U_2 gyorsítófeszültség-értéknél az áram újból lecsökken, míg U_2 -t túllépve az áram ismét nő. Az U_1 és U_2 kritikus feszültségeken túl több hasonló U_3 , U_4 stb. olyan gyorsítófeszültség-érték található, amelynél hirtelen lecsökken az anódot elérő elektronok száma. Ez a kísérleti eredmény az atomok diszkrét energiaszintjeit feltételezve jól értelmezhető, így a kvantumos energiaelnyelés bizonyítékául szolgál.

A katód és a rács közé kapcsolt gyorsítófeszültség növelésével ugyanis egyre nő az elektronok kinetikus energiája, egyre több elektron jut el az anódra. (Az elektronok energiáját nemcsak a gyorsítófeszültség határozza meg, az izzó katódból kilépő elektronoknak is van már kisebb-nagyobb sebessége.) Az elektroncsőben az elektronok ütköznek a gázatomokkal. Az ütközések

eleinte nem járnak energiavesztéssel, tökéletesen rugalmasak. Ezt bizonyítja a rácsfeszültséggel együtt növekvő anódáram. Az U_1 gyorsítófeszültség elérésekor az áram hirtelen csökkenése figyelhető meg. Ez arra utal, hogy az elektronok jó részének az energiája lecsökkent, és így ezek nem érték el az anódot. Az energiacsökkenés oka, hogy az elektronok és a gázatomok között az ütközés veszteségessé, rugalmatlanná vált. A Franck–Hertz-kísérlet tapasztalatai szerint az elektron ütközése csak meghatározott E_k kinetikus energia elérésekor válik rugalmatlanná – azaz az atomok az elektronokkal való ütközéskor csak meghatározott nagyságú energiaadagok felvételére képesek. A gyorsító sebesség növelésével a cső árama ismét növekedni kezd, majd egy kritikus értéknél ismét visszaesik, és így tovább. A legegyszerűbb Franck–Hertz-berendezések segítségével csak a higanyatomok legmagasabb energiájú elektronjának alapállapota és ugyanezen elektron ezt követő első energiaszint (első gerjesztett nível) közti energiakülönbsége mérhető ki. Ilyenkor $U_2 \approx 2U_1$, $U_3 \approx 3U_1$ stb. A többi lehetséges energiaátmenetre a mérési pontosság növekedésével a görbe finomszerkezetéből lehetett következtetni.

A Franck–Hertz-kísérlet eredményei és a színeképelemzések adatai egymástól függetlenül, de egymással jól egyezve bizonyítják, hogy az atom energiája kvantált.



A15. Franck–Hertz-kísérlet iskolai bemutatása (fakultatív kiegészítő tananyag)

[Részletek >>>](#)

9.4. A Bohr-modell eredményei és hiányosságai

- A Bohr-féle atommodell igen lényeges előrelépést jelentett az atomok tulajdonságainak megismerésében. Számos korábban nem értelmezhető jelenségre adott mennyiségi és minőségi magyarázatot:
- A modell alapján kvalitatívan érthetővé vált a gázok vonalas színeképe, magyarázatot nyertek a spektroszkópia empirikus törvényei (Balmer-formula, Rydberg-formula). A legegyszerűbb atom, a hidrogénatom színeképét a Bohr-modell segítségével ki lehet számítani; a számított és mért értékek jól megegyeznek.
- A kísérleti tapasztalatok szerint a gázok színeképe mágneses tér hatására megváltozik. Mágneses térben minden eredeti színeképvonal helyett több egymáshoz közel átló vonal figyelhető meg. A jelenséget felfedezőjéről *Zeeman-effektusnak* nevezzük. Bohr modellje alapján lényegében a Zeeman-effektus is értelmezhető.
- Az atommag körül keringő elektront elemi köráramként kezelve lehetővé vált az anyagok mágneses tulajdonságainak jobb megértése is. A diamágnesség értelmezéskor többnyire ma is a szemléletes Bohr-modellhez nyúlunk vissza.
- Alapvető szerepet játszott a Bohr-modell a kémia gyors fejlődésében is.

A felsorolt látványos eredmények mellett azonban a Bohr-modellnek alapvető fogyatékoságai is vannak:

- A hidrogénatomot például a modell szerint kis lapos korongnak kellene elképzelnünk, ami ellentétben áll a kinetikus gázmodell jól bevált „golyó” hipotézisével.
- A Bohr-modell alapján a hidrogén spektrumát sikerült értelmezni, a magasabb rendszámú elemek színeképét azonban már nem. Az egyes spektrumvonalak közötti intenzitáskülönbségekre még a hidrogénspektrum esetében sem ad magyarázatot a Bohr-modell.
- Nem ad számot a modell a színeképek ún. finomszerkezetéről. Az egyre pontosabb vizsgálatok ugyanis azt mutatják, hogy a kezdetben egyetlen vonalnak hitt színeképvonalak valójában több, egymáshoz igen közel álló vonalból állnak. Ezt nevezik a spektrum *finomszerkezetének*.
- A modell belső logikai ellentmondásokat is tartalmaz. A klasszikus fizika törvényrendszerét ugyanis nem veti el, alapfeltevései azonban ellentmondanak ezeknek a törvényeknek. Ez az ellentmondás a modellen belül nem oldható fel.

Az eredményeket és a hiányosságokat együttesen figyelembe véve a Bohr-modellt már szinte a megalkotásától kezdve nem tekintették véglegesnek, dolgoztak kiegészítésén, továbbfejlesztésén (pl. *Sommerfeld* a körpályák mellett ellipszispályákat is figyelembe vett stb.).

Az egyre pontosabb és részletesebb kísérleti vizsgálatok és az elméleti erőfeszítések együtteseként beigazolódott, hogy a klasszikus fizika törvényei az atomok jelenségeinek értelmezésére általában nem alkalmazhatók, sajátos új törvények felismerésére, illetve ezek megfelelő matematikai leírására van szükség. Ezek az új törvények sejthetők meg a Bohr-modell eredményesnek bizonyuló „ad hoc” feltevései mögött. Az atomi részecskék tulajdonságait leíró, a klasszikus fizika törvényeitől eltérő egységes törvényrendszert a fizika 20. században kialakult új ága, a kvantummechanika foglalja össze. Az atomok tulajdonságai az új törvényeket alkalmazó kvantummechanika segítségével egységesen értelmezhetők.

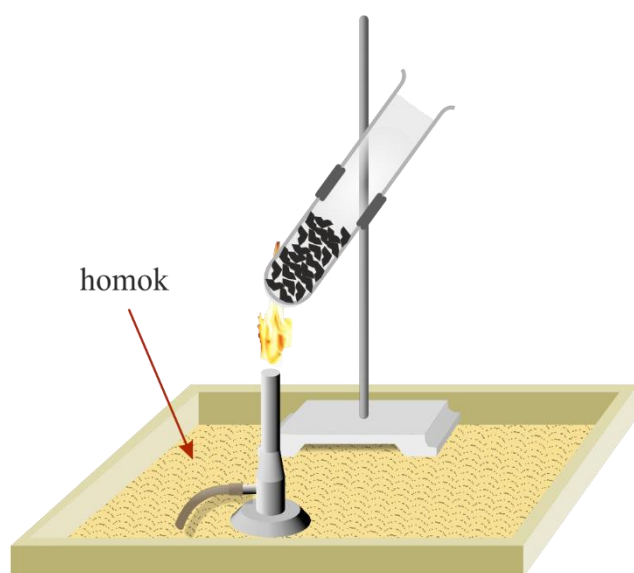
AZ ATOMFIZIKA MELLÉKLETEI

A1. Egyszerű szakköri kísérletek az állandó súlyviszonyok törvényének igazolására

Vas és kén egyesítése vasszulfiddá

Finom vaspor és kénpor elegyítésével készítünk négy különböző összetételű keveréket az alábbiak szerint:

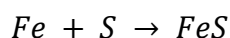
1.	3,8 g	kén	5,6 g	vas
2.	7,6 g	kén	11,2 g	vas
3.	3,8 g	kén	11,2 g	vas
4.	7,6 g	kén	5,6 g	vas



A bemért anyagokat öntsük egy-egy kémcsőbe! Mutassuk meg, hogy ha a kémcsövekhez kívülről mágneset közelítünk, vonzást tapasztalunk! (A mágnes hatására a vas kiválik a keverékből, és a kémcső falánál a mágneshez legközelebbi helyen gyűlik össze.) Miután a porokat ismét jól összekevertük, erősítsük az első kémcsövet kissé ferde helyzetben állványra (ábra), helyezzünk alá homokkal telt tálcát, majd Bunsen-lánggal óvatosan melegítsük!

A keverék hamarosan felizzik, és rövid ideig azután is izzásban marad, hogy a gázlángot eltávolítjuk. A kísérletet végezzük el valamennyi porkeverékkel!

A finom vaspor és a kén az



kémiai reakcióegyenlet szerint vasszulfiddá egyesül. A reakció beindításához melegítésre van szükség, később a felszabaduló reakcióhő biztosítja a szükséges energiát, és izzásban tartja az anyagot. Megfigyelhető, hogy az 1. és 2. keverékek esetén a legerősebb az izzás. A sztöchiometriai arányban összekevert vas- és kénpor (1. és 2. keverék) gyakorlatilag maradéktalanul reagál. A 3. keverékben vasból, a 4-ben kénből van felesleg, amely eredeti kémiai állapotában marad meg. Ennek igazolásául vizsgáljuk meg az 1., 2. és 3. anyagokat a reakció lejátszódása után mágnessel! Az 1. és a 2. anyag esetén nem tapasztalunk vonzást, a 3. anyag és a mágnes, bár gyengébben, mint a reakció előtt, de most is vonzza egymást. A mágnessel való kölcsönhatás bizonyítja, hogy a 3. keverékben a vas egy része megmaradt. A 4-es keverék kénfelesleget tartalmaz. A reakció során a kénfelesleg jelentős része gőzzé válik, majd a kémcső felső, hidegebb falára sárga bevonatként lecsapódik.

Megjegyzés:

- A „súlyviszony-törvények” megjelölés a tudománytörténeti hagyományt követi. Mai terminológiánk szerint tömegviszony-törvényt kellene mondanunk.
- Beméréskor a kénből a pontos sztöchiometriai aránynál kissé többet kell venni. Ez azért szükséges, mert az intenzív hőfelszabadulással járó reakció során a kén egy része gőz formájában elillan.
- A kémcső alá helyezett homokos tálra biztonsági okokból van szükség; gyakran előfordul ugyanis, hogy a reakció során a kémcső eltörik.

Ólom és kén reakciója

Izzítsuk gázlánggal kénpor és friss ólomreszelék keverékét letakart porcelántégelyben! Az ólom tömege a kénpor tömegének hatszorosa legyen! Az izzítás hatására az ólom és a kén ólomszulfiddá egyesül. Mérjük le a keletkezett termék tömegét, majd ismételjük meg a kísérletet változatlan ólom- és megduplázott kénpormennyiséggel! A reakció végén mérjük le ismét a reakciótermék súlyát! A mérlegelés eredménye az előző kísérlethez képest nem változik. A főlegben lévő kén elgőzölög, illetve kéndioxiddá ég el.

Végezzük el harmadszor is a kísérletet, de most mind az ólom, mind a kén tömegét duplázzuk meg! A mérlegelés eredménye bizonyítja, hogy a reakciótermék mennyisége is megduplázódott.

[Vissza >>>](#)

A2. Festékszemcsék, füstreszecskék Brown-mozgásának megfigyelése mikroszkóppal.

Festékszemcsék Brown-mozgása

Oldjunk fel kevés temperafestéket néhány cm^3 vízben! Rövid várakozási idő után, amikor a durvább szemcsék már leülepedtek az edény aljára, cseppentsünk egy csepp festékes vizet a mikroszkóp megfelelően előkészített tárgylemezére! (A tárgylemezre előzetesen célszerű felragasztani egy kb. 6-8 mm átmérőjű környílással ellátott műanyag szigetelőszalagot. Ha a vizsgálandó folyadékot ebbe a kis „medencébe” cseppentjük, nem fut szét, és egyenletes vastagságú réteget képez.) Takarjuk le a cseppet mikroszkóp-fedőlemezzel (ez kb. 0,1 mm vastag üveglemez)! Helyezzük a tárgylemezt a mikroszkóp tárgyasztalára, s világítsuk át a tárgyasztal alá épített kondenzor és tükör segítségével! A mikroszkóp objektívjét célszerű 40-szeres, az okulárt 20-szoros nagyításúra választani, így mikroszkópunk kb. 800-szoros nagyítású képet ad.

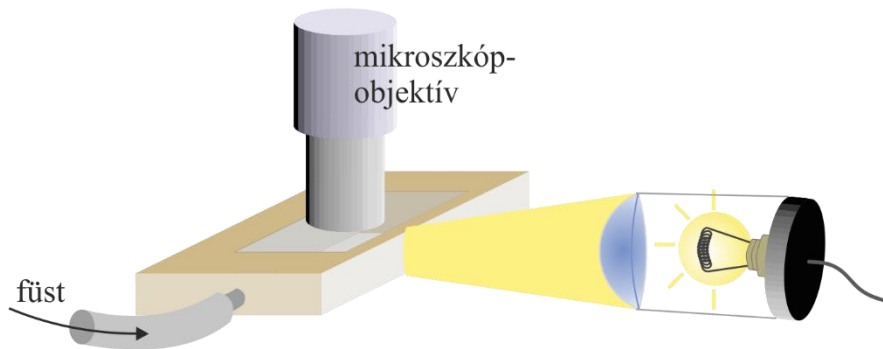
Megjegyzés:

- A Brown-mozgás megfigyelésére a temperafesték mellett jól bevált az erősen hígított Pelikán tus, illetve a vizezett tej is.
- A festékes víz hígítása akkor megfelelő, ha a tárgylemezre cseppentve színe már alig látszik. A hígított tus, illetve tej is szinte teljesen átlátszó legyen.
- A mikroszkóp megvilágítására célszerű természetes fényt használni. Ez egyszerűen megvalósítható, ha a mikroszkópot ablak mellé állítjuk, és az ablakon bejövő fényt a tükör segítségével a tárgyasztalra irányítjuk. Lámpával egybeépített mikroszkóp esetén megfelelően szórt fény kapunk, ha a fényútba matt üveget, pauszpapírt teszünk.

Füstreszecskék Brown-mozgása

A cigarettafüstben lebegő apró füstreszecskék Brown-mozgása mikroszkóp alá helyezett „füstkamrában” figyelhető meg.

A füstkamra kis, téglatest alakú plexidoboz, amelynek alját és oldalait fekete papír borítja. Az egyik oldalfalon azonban nincs borítás, és ezen keresztül a kamrába lehet világítani. A kamrát leemelhető üvegtető (pl. mikroszkóp-tárgylemez) zárja. A doboz egyik oldalfalába fűrt nyílásba kis csöcsönk illeszkedik, amely a csatlakozó gumicsővel (pl. szelepgumidarabbal) a cigarettafüst bevezetésére szolgál.



Állítsuk a füstkamrát a mikroszkóp tárgyasztalára, majd a mikroszkóp mellé helyezett lámpa és gyűjtőlencse segítségével világítsunk az oldalsó ablakon át a kamrába úgy, hogy az izzószál képe az objektív alatt jöjjön létre! (A mikroszkópot kis nagyítású objektívjei és nagyobb okulárral használjuk, hogy nagyítása kb. 200-szoros legyen.) Állítsuk élesre a mikroszkópot a füstkamra aljára, majd fűjünk cigarettafüstöt a kamrába, és az objektív óvatos emelésével állítsuk be az éles képet! Az oldalról jövő fény azért jut a mikroszkópba, mert szóródik a füstreszecskéken. A füstszemcsék megannyi sziporkázó, táncoló pontocskaként figyelhetők meg.

Megjegyzés:

- Mikroszkópra szerelhető videokamera segítségével a Brown-mozgás nagyszámú hallgatóság számára is bemutatható, illetve képmagnóra rögzíthető. A kísérlethez gyakorlatilag minden olyan kamera megfelel, amelynek objektívje kiszerezhető. A mikroszkóp szemlencséjét eltávolítjuk, és a kiszertelt objektívú kamerát a mikroszkóp fölé állítjuk. A kamera magasságának változtatásával megkeressük az éles képet. A videodemonstráció feltétele a részecskék megfelelően intenzív megvilágítása. Ez néhány mm átmérőjűre tágitott He-Ne lézernyalábbal egyszerűen megvalósítható.

[Vissza >>>](#)

A3. Brown-mozgás elmozdulás-idő összefüggésének vizsgálata modellkísérlet segítségével

A Brown-mozgást végző részecske véletlenszerűen lökődik ide-oda. Eredeti helyéről mégis többé-kevésbé eltávolodik. A mozgás véletlen jellegét figyelembe véve megadható, hogy adott idő alatt mekkora az adott eltávolodás valószínűsége.

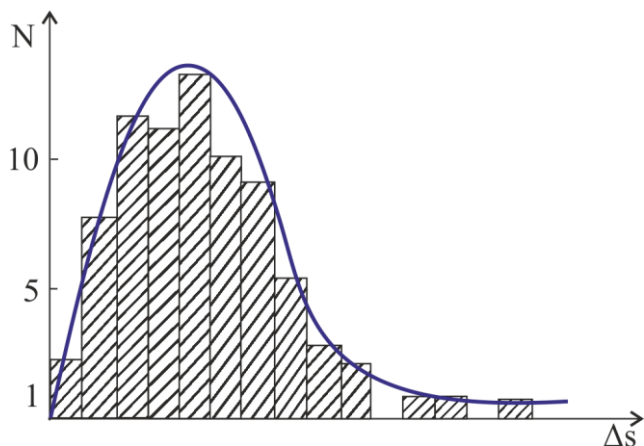
Egyszerűsítésként tegyük fel, hogy a Brown-részecske egyenlő Δt időközönként kap lökést valamely irányból, és hogy egy-egy lökés hatására mindig ugyanakkora Δs elmozdulást végez. Ilyen egyszerűsítések mellett a Brown-mozgást végző részecske pályája gémkapcsokból összefűzött láncsal modellezhető.

Készítsünk 16 vagy 25 db gémkapocs összefűzésével láncot! A láncot alkotó minden gémkapocs hossza a Δt időtartam alatt bekövetkező Δs elmozdulásnak felel meg. Ha a láncot összerázzuk és az asztalra dobjuk, az egymáshoz fűzött gémkapocsok a legkülönbözőbb irányokban helyezkednek el. A véletlenszerűen irányított láncszemek modellezik a Brown-mozgást végző részecske elmozdulásának egymás utáni szakaszait. A modellel az vizsgálható meg, hogy $16\Delta t$ (illetve $25\Delta t$) idő alatt milyen távra jut el a Brown-mozgást végző részecske. Ez a gémkapocslánc két vége közötti távolságnak felel meg.

Fogjuk a láncot két kezünkbe, majd a kockadobáshoz hasonlóan dobjuk lazán az asztalra! A dobás és a levegőben történő mozgás során az egyes gémkapocsok szomszédjaikhoz viszonyított helyzete szinte szabadon, véletlenszerűen változik. Mérjük le az asztalra leeső lánc két vége közti távolságot gémkapocshossz egységekben! Ismételjük meg a láncdobást sokszor egymás után!

A lánc két végének távolsága esetenként más és más. Vizsgáljuk meg, mekkora a legvalószínűbb, leggyakrabban előforduló láncvégtávolság! Összegezzük 100-200 dobás eredményét gyakoriságdiagramon

A hisztogram maximuma a legvalószínűbb láncvégtávolságnak felel meg, azaz annak a távolságnak, amelyet a Brown-mozgást végző részecske a modell-lánc láncszem-számának megfelelő időegység alatt megtesz. Elegendően sok dobás után a gyakoriság-görbe maximuma a gémkapocsok számának négyzetgyökénél állapodik meg.



A Brown-mozgást végző részecskének tehát a kezdeti helytől mért eltávolodása az indulástól eltelt idő négyzetgyökével arányosan változik:

$$\sum \Delta s \sim \sqrt{t}$$

Megjegyzés:

- A gémkapocslánccal végzett modellkísérlet nem csupán a fenti ún. bolyongási probléma szemléltetésére alkalmas, hanem jól felhasználható pl. a láncmolekulák statisztikusan változó alakjának, átlagos méretének tanítása során is.

[Vissza >>>](#)

A4. Különböző gázok porózus falon keresztül történő diffúziójának összehasonlítása (fakultatív szakköri feldolgozásra ajánlott)

Hidrogén és levegő diffúziója porózus falon keresztül

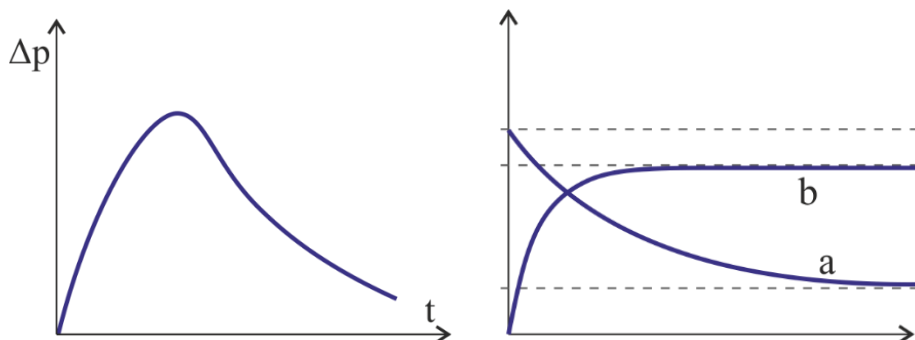
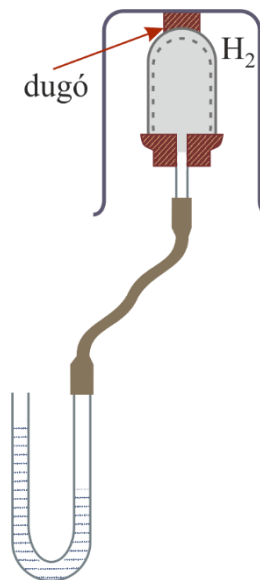
a) Az ábrán bemutatott készüléket alakítsuk át olyan módon, hogy az agyaghengert közvetlenül, a háromállású csap kiiktatásával csatlakoztassuk a manométerhez, továbbá az agyaghengert függőlegesen felfelé fordítva rögzítsük állványhoz!

A kémiai laboratóriumokban használatos egyszerű gázfejlesztő lombik vagy Kipp-készülék segítségével sósavból, granulált cink hozzáadásával állítsunk elő hidrogént!

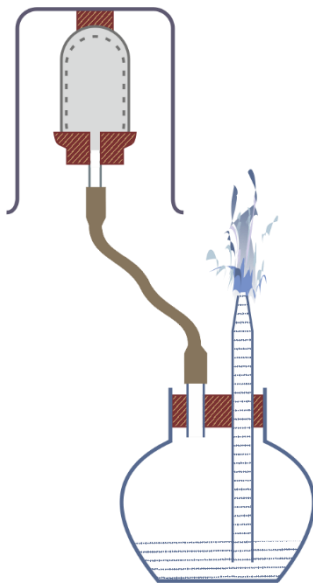
A fejlődő gázt nyílásával lefelé fordított főzőpohárban fogjuk fel (a H_2 könnyebb a levegőnél), majd a megtelt poharat borítsuk az agyaghengerre!

Kiindulási állapotban az agyaghenger belsejében a nyomás azonos a külső légnyomással. A hidrogénnel telt poharat ráborítva a hengerre a nyomásegyensúly megbomlik. A manométer először gyors nyomásnövekedést jelez, majd maximumot mutat. A maximum elérése után a nyomás ismét csökken. A csökkenés üteme kezdetben nagyobb, majd az egyensúlyi nyomásértékhez közelítve egyre kisebb.

A nyomásváltozás két, egymástól független részfolyamat eredőjeként értelmezhető. Az egyik folyamat a hidrogén bediffundálása az agyaghengerbe, a másik a levegő kidiffundálása a hengerből. A hengerben mért gáznyomás a hidrogén és a levegő parciális nyomásának mindenkori összege. A kezdőpillanatban az agyaghengerben légköri nyomású levegő van. A dinamikus egyensúly állapotában időegység alatt ugyanannyi gázcsepeke jut ki a falon keresztül, mint amennyi be. Amikor a hidrogénnel telt poharat ráborítjuk a hengerre, a dinamikus egyensúly felborul, a levegőmolekulák kifelé áramlanak, míg a hidrogén-molekulák befelé. Mindkét diffúziós folyamat hajtóereje a parciális nyomások különbsége a fal két oldalán. A levegő parciális nyomása a hengerben a p_0 légköri nyomásról exponenciálisan csökken, fokozatosan megközelítve a p_1 értéket (lásd az ábra *a* görbáját). A hidrogéntől származó nyomásjárulék a



hengerben kezdetben zérus, majd az ábra *b* görbéjének megfelelően egyre lassuló ütemben növekszik, és eléri a p_2 nyomásértéket. A nyomásváltozás az utóbbi esetben szintén exponenciális. A két részfolyamat p_1 , illetve p_2 aszimptotikus értékének összege a p_0 légköri



nyomással egyenlő. Mivel a kisméretű H_2 -molekulák mozgékonyabbak a levegő molekuláinál, a hidrogén diffúziójából származó nyomásnövekedés jóval gyorsabb a levegőmolekulák okozta nyomáscsökkenésnél. A két folyamat eredőjeként észlelt nyomásváltozást mutatja az ábra. Az egyensúly beálltakor a hidrogén parciális nyomása a fal mindkét oldalán p_1 , a levegő parciális nyomása p_2 . Egyensúlyban ugyanannyi levegő- és hidrogénmolekula jut át a falon mindkét irányban.

b) Az *a)* pontban leírt jelenség kvalitatív szinten látványosan bemutatható az ábrán látható kísérleti összeállítással. Az állványba függőlegesen rögzített agyaghengert gumicsővel egy kétfuratú dugóval lezárt Heron-labdához csatlakoztatjuk. A H_2 -vel telt főzőpoharat az agyaghengerre borítva bent a nyomás megnő, amit a Heron-labdából felszökő vízszugár jelez.

Megjegyzés:

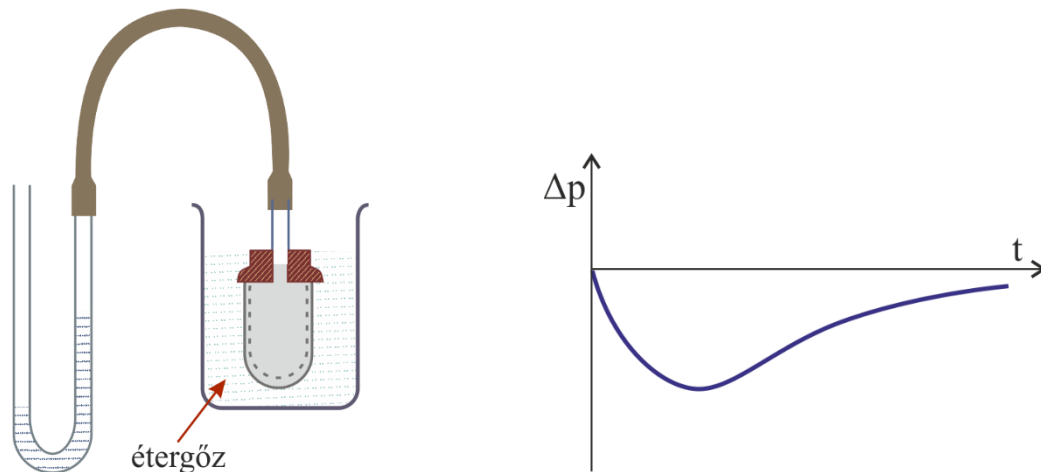
- Az *a)* és *b)* kísérletvariánsok bármelyikénél hidrogén helyett földgáz is használható. A földgáz döntő része a levegőnél könnyebb, mozgékonyabb molekulájú metán (CH_4). Természetesen a CH_4 és a H_2 molekulaméretének és mozgékonyságának különbsége miatt földgáz esetén az effektus kisebb, mint H_2 esetén.

b) Éter és levegő diffúziója porózus falon keresztül

Nagyméretű főzőpohár aljára öntsünk kevés étert, és takarjuk le a főzőpoharat kartonlappal! Az éter rövid idő alatt elpárolog, és kiszorítja a levegőt a pohárból (az éter nehezebb a levegőnél). Merítsük be a manométerrel összekötött agyaghengert az étergőzzel telt pohárba, és figyeljük meg, hogy a nyomás kezdetben gyorsan csökken, majd minimumát elérve, lassú emelkedésbe kezd. Ez a nyomásnövekedés, bár egyre kisebb sebességgel, de mindaddig tart, míg a kezdeti nyomásegyensúly vissza nem áll.

Emeljük ki ezután az anyaghengert a pohárból! A nyomásegyensúly ismét megbomlik. A változás az ábra grafikonjához hasonló.

A megfigyelt nyomásváltozások az éter és a levegő diffúziójával az *a)* kísérletben mondottakhoz hasonlóan értelmezhetők, figyelembe véve, hogy az étermolekulák ($C_4H_{10}O$) a levegő molekuláinál jóval nagyobbak és „lomhábbak”.



Megjegyzés:

- A leírt kísérlet éter helyett CO_2 -t alkalmazva is elvégezhető, az effektus azonban ekkor lényegesen kisebb.

Diffúzió folyadékfázisban: egymásra rétegzett folyadékok keveredése diffúzióval

Magasabb főzőpohárba vagy üveghengerbe öntsünk rézgálicoldatot, majd rétegezzünk rá desztillált vizet! Ha a rétegezést gondosan végezzük, a két folyadék között éles határvonal figyelhető meg. Mintegy 30-60 perc elteltével az éles határfelület észrevehetően elmosódik, a rézgálic egyre szélesebb vízréteget színez meg.

Megjegyzés:

- A folyadékok egymásra rétegzésére két egyszerű módszer ajánlható:
 - A pohárba először a nagyobb fajsúlyú folyadékot (rézgálicoldat) öntsük be, majd helyezzünk a felszínére a pohár belső átmérőjénél csak kicsit kisebb parafakorongot! A könnyebb folyadékot (desztillált vizet) közvetlenül a korong fölé tartott pipettából engedjük a korong közepére. Végezetül a parafakorongot óvatosan emeljük le a felszínről!
 - A kísérletek bemutatásához használjuk az ábrán bemutatott egyszerű eszközt, amely lényegesen egyszerűsíti a két folyadék egymásra rétegzését! Az eszköz állványra szerelt szélesebb üvegsőből és vele közlekedőedény-szerűen gumicsővel összekötött tölcserből áll. A gumicsövet szorítóbilincs zárja el. Az üvegsövet töltsük fel kb. harmadáig desztillált vízzel, a tölcserbe öntsünk rézgálicoldatot! A gumicsőből – nyomkodással – távolítsuk el az esetleg bennszorult levegőt, majd a tölcseret megemelve és a szorítóbilincset kissé megoldva engedjük, hogy az oldat lassan a víz alá rétegződjék, végül zárjuk ismét a szorítóbilincset.
- A kísérlet elvégezhető úgy is, hogy alulra glicerint, fölé rézgálicoldatot, vagy tiszta víz tetejére fukszinnal vörösre festett alkoholt rétegezzünk.

[Vissza >>>](#)

A5. Az Avogadro-szám és az atomok méretének meghatározása a kinetikus gázelmélet alapján

A kémiai atomelmélet kialakulásával gyakorlatilag párhuzamosan, a fizikában is egyre elfogadottabbá vált, hogy az anyag atomos szerkezetű. Az első hatékony bizonyítékot az atomok létére a gázok sajátságait sikeresen értelmező *kinetikus gázelmélet* adta.

A kinetikus elmélet segítségével meghatározható a gázrészecskék *átlagos szabad úthossza*. Eszerint gázokban a molekulák által két ütközés között megtett átlagos távolság (λ) a molekulák hatáskeresztmetszetével (σ), valamint az egységnyi térfogatban levő gázmolekulák számával (n) fordított arányban áll:

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n \sqrt{2}}$$

A molekulák átlagos szabad úthossza pl. normál állapotú levegőben kb. $1,3 \cdot 10^{-7}$ m.

A σ hatáskeresztmetszet r_o sugarú gömbnek képzelt molekulák esetén gyakorlatilag $4r_o^2\pi$ -vel egyenlő. Egy mólnyi gázt véve n az N_A Avogadro-szám és a V_m moláris térfogat hányadosával fejezhető ki ($n = N_A/V_m$). Az átlagos szabad úthossz mérésekkel meghatározott értéke hozzásegít r_o és N_A meghatározásához. Természetesen a fenti egyetlen egyenlet a két ismeretlen meghatározásához nem elegendő, további összefüggésre is szükségünk van. Jó támpontot kínál ehhez például a *gázok belső súrlódásának* kinetikus elmélettel történő értelmezése. E szerint a gázok jól mérhető η *viszkozitása* a molekulák átlagos szabad úthosszával (λ), a molekulák átlagos sebességével (v) és a térfogategységben levő molekulák számával (n) a következő kapcsolatban áll:

$$\eta = \frac{1}{3} n v \lambda$$

A gázmolekulák átlagos sebessége ugyancsak megbecsülhető a kinetikus gázmodell alapján (az *ekvipartíciós tétel* alpont) felhasználásával $v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$.

Az átlagos szabad úthosszra felírt korábbi, és a molekulák átlagsebességét megadó második egyenlet segítségével, λ és η mért értékeinek felhasználásával a molekulák mérete és az Avogadro-szám kiszámítható.

Az Avogadro-szám értéke:

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ részecske/mol}$$

A gázmolekulák méretének nagyságrendje pedig:

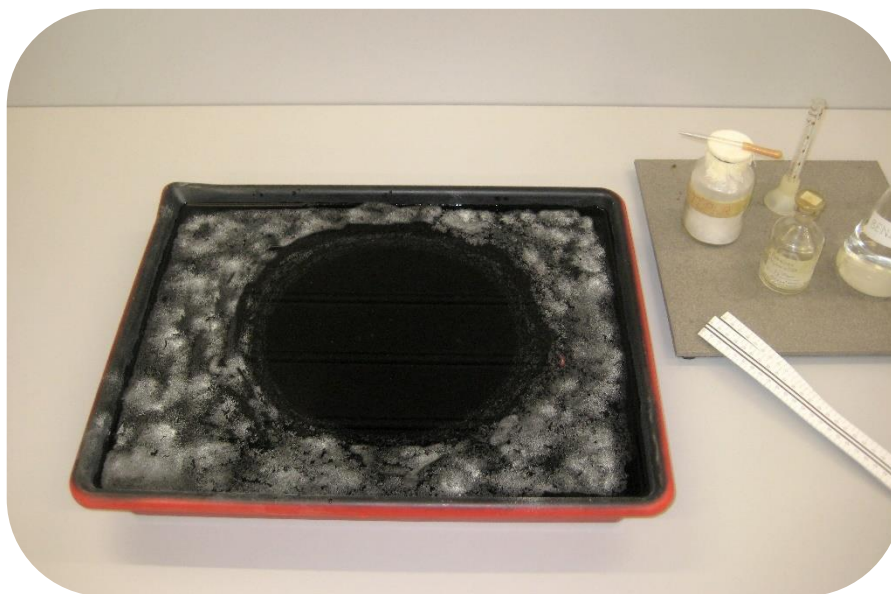
$$d = 2r_o \cong 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

[Vissza >>>](#)

A6. Molekulák méretének nagyságrendi becslése, vízfelületen kialakult olajfolt méretéből

Közismert, hogy az olaj vékony hártaként terül szét a víz felszínén. A hártya területe mindaddig növekedhet, míg a vízfelszín egyetlen molekularétegben borítja az olaj. Ismert térfogatú olajmennyiség felvitele esetén az olajfolt területét lemérve a monomolekuláris réteg vastagsága meghatározható. Ilyen módon a molekulák méretének nagyságrendje megbecsülhető.

Nagyméretű, kb. 20-30 cm átmérőjű tál aljára helyezünk fekete papírt (ez megszünteti az esetleg zavaró fény reflexiókat), majd töltjük tele a tálat vízzel! A víz felületére szórjunk kevés likopódium port vagy finom krétaport! Várjuk meg, amíg a víz áramlása teljesen leáll (kb. 5-10 perc), majd szemcseppentővel a felszín közvetlen közeléből cseppentsünk egy csepp 0,05 térfogat%-os benzines olaj savoldatot a víz közepére! A csepp kör alakú foltta fut szét. Rövid idő múlva a benzin elpárolog, és a víz felszínén monomolekuláris olajsav hártya marad vissza. A likopódium port a hártya a szabad vízfelületre szorítja vissza, így a hártya határvonala nagyon jól érzékelhető. Ha a víz nyugalomban van, és a levegő áramlása sem zavarja meg a felszín, az olajfolt igen jó közelítéssel kör alakú.



Mérjük le keskeny mm-papír csíkkal a folt d átmérőjét! Az olajfolt térfogatát a 0,05 térf. %-os benzines oldat egy cseppjében lévő olajsav adja. Ezt az oldat csepp térfogatának lemérésével határozhatjuk meg. Csepegtessünk 10 ml-es mérőhengerbe 1 ml oldatot és számoljuk meg a cseppek számát! Ebből egy csepp térfogata meghatározható, a koncentráció felhasználásával a benne lévő olajsav mennyiség térfogata kiszámítható. Az egyetlen cseppben lévő olajsav V térfogatából az olajfolt h vastagságára

$$h = \frac{V}{\frac{D^2}{4} \pi}$$

adódik.

Megjegyzés:

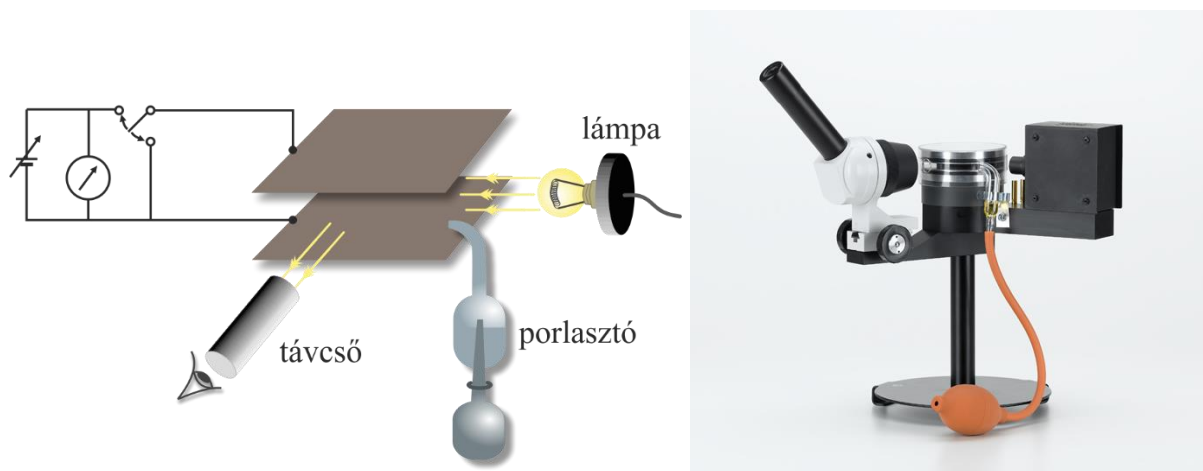
- A 0,05 térfogatszázalékos benzines olajsavoldat elkészítésének egyszerű módja a következő: Orvosi fecskendővel mérjük ki 19 ml benzint, és adjunk hozzá 1 ml olajsavat! Miután az elegyet jól összeráztuk, vegyünk ki belőle 1 ml-nyit, és adjunk ehhez 9 ml benzint. Ezt a 0,5 %-os oldatot ismét 1:9 arányban hígítva kapjuk a kísérletben használt 0,05 %-os oldatot.
- Olajsav helyett jól alkalmazható palmitin- vagy sztearinsav benzines oldata is. Mivel ezek az anyagok szilárd porok, a térfogatszázalékos oldat helyett tömegszázalékos oldatot készítünk (pl. 200 ml benzinben kb. 0,5 g – de pontosan lemért – palmitinsavat oldunk). A zsírsav moláris tömegének ismeretében, az Avogadro-törvény felhasználásával meghatározható az oldat 1 ml-ében, illetve a csepp térfogatának lemérése után az oldat 1 cseppjében lévő molekulák száma.

[Vissza >>>](#)

A7. Az elemi töltés meghatározása a Millikan-kísérlettel

R. A. Millikan fizikatörténeti jelentőségű kísérlete bizonyítja az elektromos töltés kvantumosságát, és lehetővé teszi az elemi töltés nagyságának meghatározását.

A kísérlet iskolai bemutatásához szükséges eszköz a tanszer-kereskedelemben beszerezhető, de jó műhelyháttér esetén akár házilag is elkészíthető. A kísérleti összeállítás elvi rajza és az iskolai taneszköz fotója az ábrán látható.



A kísérlet során a vízszintesen elhelyezett síkkondenzátor fegyverzeteire feszültséget kapcsolunk úgy, hogy a felső lemez pozitív, az alsó negatív polaritású legyen. A lemezek közé porlasztópumpával apró olajcseppeket juttatunk. A porlasztáskor a cseppek, egyszerű dörzselektromos hatás révén, csekély negatív töltéshez jutnak. A töltött kondenzátor lemezei közt a negatív töltésű olajcseppek többsége függőleges irányban egyenletes sebességgel mozog. A csepp mozgásának irányát az elektromos és a nehézségi erő eredőjének iránya szabja meg. Ha az elektromos erő a nagyobb, akkor a csepp felfelé, ha a nehézségi erő nagyobb, akkor lefelé mozog. A mozgást a közegellenállás teszi egyenletessé. (Természetesen előfordulhat olyan eset is, amikor a felfelé és lefelé mutató két erő egyenlő, ekkor a csepp egyhelyben lebeg.) A mozgó csepp sebességét a nehézségi erő, a levegőben ható felhajtóerő, az elektromos tér által a töltésekre gyakorolt erő és a közegellenállás együttesen határozza meg. Állandó sebességgel emelkedő olajcseppekre ható erők egyensúlyát a

$$EQ - Vg\rho_o + Vg\rho_1 - 6\pi r v \eta = 0$$

egyenlet írja le. Az egyenletben az első tag a q töltésű cseppekre az E térben ható erő ($E = U/d$, ahol U a kondenzátor lemezeire kapcsolt feszültség, d a lemezek távolsága). A második tag a v térfogatú cseppekre ható nehézségi erő (ρ_o az olaj sűrűsége), a harmadik a cseppekre ható felhajtóerő (ρ_1 a levegő sűrűsége), a negyedik pedig az r sugarú, v sebességgel emelkedő cseppekre ható Stokes-féle közegellenállási erő (η a levegő viszkozitása). A fenti mozgásegyenletből a cseppek Q töltése meghatározható, ha mérjük a csepp emelkedési sebességét, és ismerjük a többi adatot.

A sebességet a csepp mozgását megfigyelve mérhetjük meg. Az olajcseppeket oldalról megvilágítjuk, és mikroszkópon keresztül szemből figyeljük. A mikroszkóp szemlencséje mikrométerskálával van ellátva, a cseppek e skála előtt mozognak. Ha a skála osztását ismerjük, és mérjük, hogy a csepp mennyi idő alatt halad át két kiválasztott osztásvonal között, a sebesség az út és az idő hányadosaként adódik.

A csepp sugarának mérése helyett célszerű újabb sebességmérést végezni. Az elektromos teret kikapcsolva határozzuk meg a korábban már vizsgált csepp esési sebességét! Az egyensúlyi egyenlet ekkor

$$6\pi r v^* \eta - Vg\rho_0 + Vg\rho_1 = 0$$

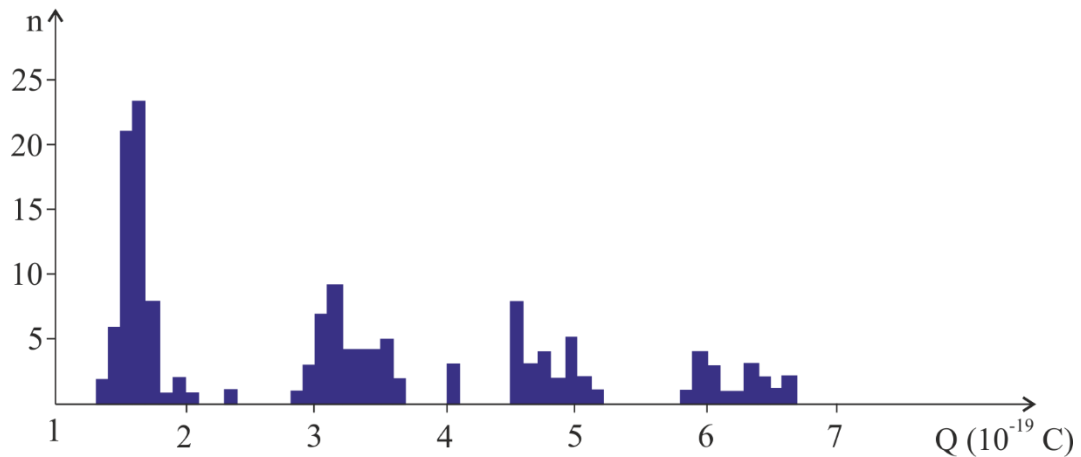
ahol v^* a lefelé mozgó csepp sebessége. Innen a csepp sugarát kifejezve és az előző egyenletbe visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$Q = 18\pi \frac{d}{U} (v + v^*) \cdot \sqrt{\frac{v \eta^3}{2g(\rho_0 - \rho_1)}}$$

A mérés végrehajtása

Kapcsoljunk 400-500 V egyenfeszültséget a kondenzátorra, kapcsoljuk be a lámpát, majd porlasszunk olajat a lemezek közé! A mikroszkópban válasszunk ki a látótér felső részén egy lassan lefelé mozgó cseppet! (A mikroszkóp fordított állású képet ad, a valóságban felfelé emelkedő csepp a mikroszkópban lefelé mozog!) A kísérlethez két stoppert használunk. Az egyikkel az elektromos térben mérjük a csepp mozgásának idejét, a másikat a tér kikapcsolása után megfigyelhető mozgás sebességének mérésére használjuk. Amikor a kiválasztott csepp éppen a mikroszkóp mikrométerskálájának valamelyik osztásvonala előtt halad el, indítsuk el az első stoppert, és mérjük meg, hogy mennyi idő alatt mozdul el a csepp néhány osztás vonalnyit! (A távolságot célszerű nagyra választani, de csak annyira, hogy a csepp a mérés befejezése után is a mikroszkóp látóterében maradjon, nehogy szem elől veszítsük.) A mérés befejezése után süssük ki a kondenzátort, majd, amikor a megfigyelt csepp felfelé mozogva ismét éppen egy skálavonal előtt halad el, indítsuk el a második stoppert, és mérjük meg most is, hogy mennyi idő alatt tesz meg a csepp néhány skálarésznyi utat! A bevezetőben levezetett összefüggés segítségével határozzuk meg a vizsgált csepp Q töltését, majd ismételjük meg a mérést különböző cseppekkel, minél többször! Az egyes mérések eredményeként adódó töltések nagysága változó.

Ábrázoljuk a különböző nagyságú töltések előfordulási gyakoriságát! A hisztogram vízszintes tengelyén célszerű 10^{-19} C osztású skálát készíteni. Az ábra közel 200 cseppen végzett mérés gyakorisággörbéjét mutatja. A hisztogram szabályosan, egymástól azonos távolságra ismétlődő gyakoriságmaximumokat mutat. Ez azt jelzi, hogy a cseppek töltése nem folyamatosan, hanem diszkrét lépésekben változik. Az egymást követő maximumokhoz tartozó töltéskülönbség az elemi töltés ($q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C).



Megjegyzés:

- A mérések végrehajtásakor lehetőleg kicsi, lassan mozgó cseppeket válasszunk ki! A mérés szempontjából azok a cseppek a legjobbak, amelyek elektromos tér nélkül 0,5-1 mm/s sebességgel mozognak.
- A mikroszkóp skálájának hitelesítésére objektív-mikrométert, esetleg nagy rácsállandójú optikai rácsot használhatunk.
- A kisméretű cseppek mozgásának leírásakor a makroszkopikus esetben érvényes Stokes-törvény korrekcióra szorul. Ekkor ugyanis a cseppek mérete összemérhető a levegő molekuláinak átlagos szabad úthosszával, így a levegő már nem tekinthető folytonos kontinuumnak. A kis cseppek esetén a viszkozitás korrigált értékével (Cunningham-korrekció) kell számolnunk:

$$\eta_{korr} = \eta \left(1 + \frac{b}{rp}\right)^{-1}$$

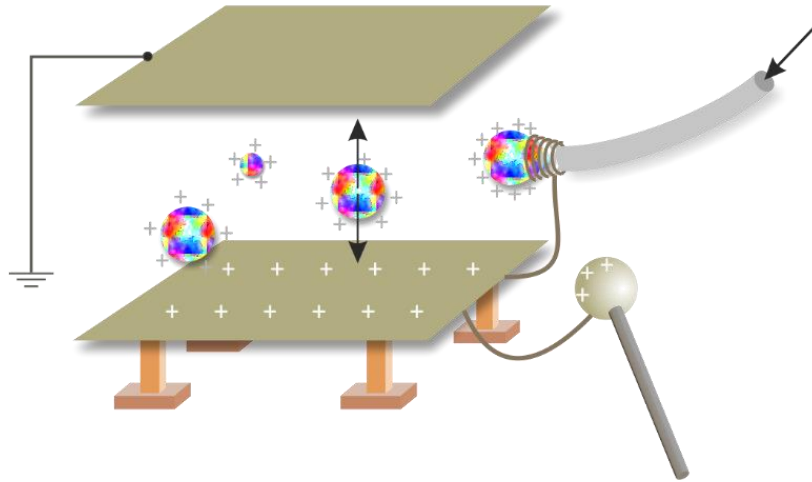
ahol $b = 6 \cdot 10^{-3}$ N/m, empirikusan meghatározott érték, p a gáz nyomása. Normál nyomású levegőben a viszkozitási tényező korrigálatlan értéke $\eta = 1,81 \cdot 10^{-5}$ Ns/m².

- A mérés során feltételezzük, hogy a cseppek mérete állandó, a párolgást elhanyagoljuk. Ez az elhanyagolás az erősen gömbült felület miatt csak akkor jogos, ha kis gőznyomású olajat, pl. nagyvákuum-olajat használunk.
- A mérések során esetenként megfigyelhetünk az elektromos térben éppen lebegő cseppeket is. Ilyen cseppek töltése egyetlen sebességméréssel (a tér nélküli esetben) is meghatározható.
- A Millikan-kísérlet hosszadalmas és tipikusan egyszemélyes mérés. Ha csoportosan akarjuk elvégezni, az eszköz mikroszkópjára videokamerát kell szerelni és annak képét ernyőre kivetíteni.

A Millikan-kísérlet modellje

Helyezzünk el két nagyméretű fémlamezt vízszintes helyzetben egymás fölé! A felső lemezt állványhoz rögzítve földeljük le, az alsót tegyük porcelán szigetelőlábakra, és kapcsoljuk pozitív töltést adó szalaggenerátorhoz vagy megosztógéphez! Fémhuzalból készítsünk egyre

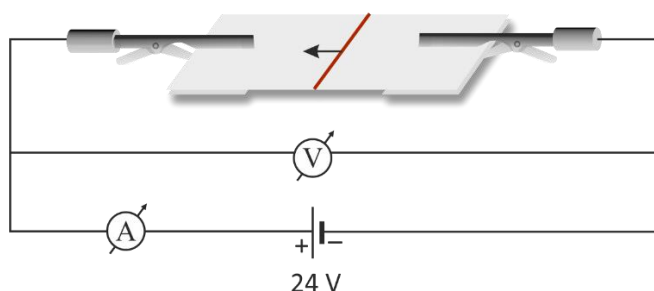
szűkülő átmérőjű spirált, és szorítsuk egy hosszabb gumicsőhöz csatlakozó fém csődarabra, majd vékony vezetékkel kössük össze az alsó, töltött lemezzel (ábra)! A spirált mártsuk mosószeroldatba, és a gumicsővön keresztül fújjunk buboréksorozatot! A kisebb-nagyobb buborékok töltöttek, így a lemezek közti térben hasonlóan viselkednek, mint a Millikan-kísérletben az olajcseppek; lesz olyan, amelyik felfelé emelkedik, lesz, amelyik esik, és olyan is, amelyik éppen lebeg. A lemezek közti feszültséget változtatva, a buborékok mozgása változik.



[Vissza >>>](#)

A8. Az elemi töltés nagyságának becslése MnO_4^- -ionok vándorlási sebességéből

Mikroszkóp-tárgylemezre fektessünk több rétegben 2-3 cm széles, híg KNO_3 -oldattal átitatott szűrőpapírszalagot! Az itatóscsíkra a tárgylemez két végén borítsunk alufóliát, és szorítsuk össze őket krokodilcsipesszel! Ügyeljünk arra, hogy a fóliacsíkok éle legyen párhuzamos, a köztük lévő távolság mindenütt állandó, kb. 2 cm legyen. Egy nagyobb kálium-permanganát (KMnO_4) kristállyal vagy



KMnO_4 -oldatba mártott hurkapálcával húzzunk egyenes, lila vonalat (vonalzó segítségével) a nedves itatóspapír közepére, az elektródokkal párhuzamosan! Kapcsoljuk a két fémfóliát 20-30 V-os egyenfeszültségű tápegységre! Az itatóspapírba szívódott elektrolit ionjai az elektromos tér hatására elmozdulnak, a permanganát ionok helyét jelző lilásbarna csík az anód felé vándorol (ábra). Mérjük a csík elmozdulását az idő függvényében, és az adatokból határozzuk meg az ionok átlagos v vándorlási sebességét! Az ionmozgás sebességét ismerve, az elemi töltés nagysága az alábbi gondolatmenet alapján megbecsülhető.

Az ionok állandó sebességgel vándorolnak az anód felé, mert az elektromos erőter által kifejtett $F_e = q_e E$ elektromos erő és a mozgást fékező $F_S = 6\pi r v \eta$ Stokes-féle erő egyenlő:

$$q_e E = 6\pi r v \eta$$

A kifejezésben q_e a MnO_4^- -ionoknak (az elemi töltéssel megegyező) töltése, r az ionok sugara, η az oldat viszkozitása. Az elektromos tér E térerőssége az elektródok közötti U feszültség és l távolság ismeretében kiszámítható: $E=U/l$. A v vándorlási sebesség helyébe s/t -t írva az elemi töltésre az

$$e = \frac{6\pi\eta r l s}{U t}$$

kifejezés adódik.

Az r ionsugár értékét közelítőleg $2 \cdot 10^{-10}$ m-nek vehetjük. A KNO_3 -oldat η viszkozitását – híg oldat esetén – a vízzel közelíthetjük ($\eta = 10^{-3}$ kg/ms). A közelítések miatt a fenti módszertől csak az elemi töltés nagyságrendi becslését várhatjuk.

Megjegyzés:

- Ne kapcsoljunk a javasoltnál nagyobb feszültséget az elektródok közé (a leírt geometriai elrendezés mellett), mert az elektródok túlzottan felmelegednek, és a katódon nagyon heves gázfejlődés indul meg.
- A MnO_4^- -ionok által lilára festett csík meghúzásánál ügyeljünk arra, hogy a csík végig azonos vastagságú legyen. Érdeemes kihegyezett, bemetszett hegyű hurkapálcát használni.
- A csík elmozdulását úgy is megmérhetjük, hogy a szűrőpapírra még a beáztatás előtt milliméterskálát rajzolunk ceruzával, s ezen olvassuk le a megtett utat.
- A mérés kiértékelésekor nem várhatunk pontos eredményt (megelégedhetünk a helyes nagyságrenddel), hiszen számos körülményt, ami mérésünket befolyásolja, nem vesszük figyelembe, így elhanyagoljuk a papír rostjainak hatását a részecskék mozgására, eltekintünk a jelentős áramerősség következtében fellépő melegedéstől stb.
- A mérés alapján, a Faraday-állandó felhasználásával, az Avogadro-állandó közelítő értéke is meghatározható. Az Avogadro-állandó (N_A) és a Faraday-állandó (F) közötti kapcsolat ($F = q_e N_A$) felhasználásával az Avogadro-számot az összefüggésből határozhatjuk meg. Köbös ionrácsot feltételezve az ionsugár kifejezhető a kálium-permanganát kristály ρ sűrűségével és az M moláris tömeggel. Az Avogadro-állandó értéke ekkor az

$$N_A \approx 4 \cdot \sqrt{\frac{\rho}{M} \left(\frac{FUt}{6\pi\epsilon ls} \right)^3}$$

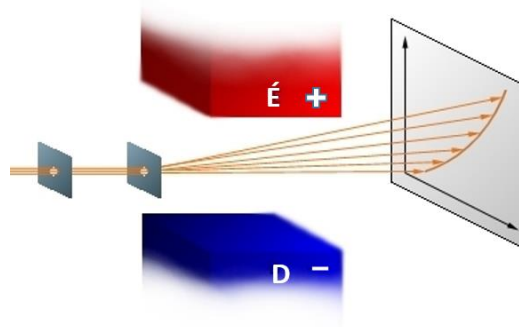
kifejezéssel becsülhető.

[Vissza >>>](#)

A9. Thomson módszere az elektron fajlagos töltésének meghatározására (egyidejűleg ható elektromos és mágneses térben történő eltérítéssel)

J. J. Thomson történelmi kísérletét gázkisülési csőből nyert katódsugarakkal végezte. Nehezítette helyzetét, hogy a részecskék sebességét nem ismerte, sőt abban sem lehetett biztos, hogy a sebességek azonosak. E problémák megoldására egyszerre alkalmazott elektromos és mágneses eltérítést. Mindkét eltérítés, a fajlagos töltés mellett, az elektron sebességétől is függ, a kettős eltérítés tehát lehetőséget ad a sebesség hatásának kifejtésére.

Kísérleti berendezését Thomson úgy alakította ki, hogy az elektromos és mágneses tér iránya párhuzamos legyen, így módon az elektromos és a mágneses hatásból adódó eltérülés éppen merőleges egymásra. Ha a katódsugárcső fluoreszkáló ernyőjén felvesszünk egy (x,y) koordináta-rendszert, és az eltérítetlen nyaláb becsapódásával kijelölt pontot választjuk origónak, akkor a ábra rajzán bemutatott kísérleti elrendezés esetén az elektromos tértől származó eltérülés x irányú, míg a mágneses tértől származó y irányú.



Az ernyő valamely $P(x,y)$ pontjába becsapódó, v_0 sebességű részecske x , y koordinátáit a mágneses, illetve elektromos eltérítésből meghatározhatjuk. Eredményül az adódik, hogy

$$y = \frac{Q}{m} \frac{U_e L L}{d} \frac{1}{v_0^2}$$

$$x = \frac{Q}{m} B L L \frac{1}{v_0}$$

Mivel mind x , mind y függ a sebességtől, a különböző sebességű elektronok az ernyő különböző pontjaiba csapódnak be. A becsapódási pontok parabolaíven fekszenek, a parabola $y=f(x)$ egyenlete a fenti két formulából a v_0 paraméter kiküszöbölésével kapható meg:

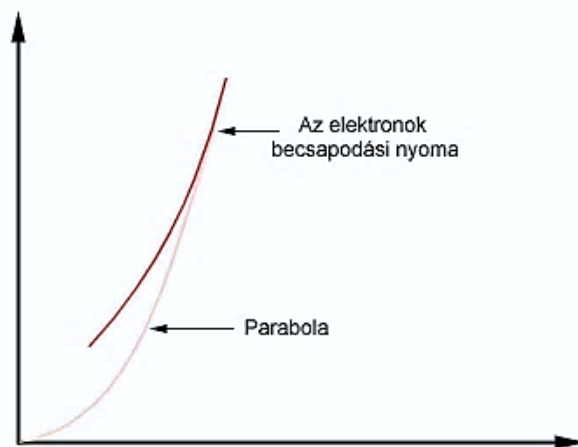
$$y = \frac{m}{Q} \frac{U_e}{dB^2 L L} x^2$$

Thomson a becsapódási pontok koordinátáit leolvastva ennek az egyenletnek az alapján határozta meg Q/m értékét. A fajlagos töltés meghatározásának ezt a módszerét *Thomson-féle parabolamódszernek* nevezzük.

Az elektronok tömegének sebességfüggése

A századfordulón a relativitáselmélet kialakulásának idején izgalmas kérdés volt a tömeg sebességfüggésének vizsgálata. A Thomson által kidolgozott parabolamódszer a fajlagos töltés nagy pontosságú mérését tette lehetővé. Az érzékeny Q/m mérés segítségével *Kaufmann* igazolta az elektron fajlagos töltésének csökkenését (a tömeg növekedését) nagy sebességű elektronok esetében.

Egyszerű katódsugárcsőben előállított elektronok esetén a sebesség nem nagy, ezért az effektus nem jelentkezik. Kaufmann radioaktív bomlásból származó (*β -bomlás*) elektronok eltérülését vizsgálta. Az ilyen sugárzásban kis és nagy sebességű elektronok egyaránt előfordulnak. A parabolamódszerrel végzett mérés azt mutatta, hogy a becsapódási pontokról kirajzolt görbe a koordináta-rendszer origójának közelében eltér az ábra szerint parabolától.



Az elektromos eltérülés mértéke a mágneses eltérüléshez viszonyítva megnőtt. A változást az elektron tömegének relativisztikus növekedésével, a fajlagos töltés csökkenésével lehet magyarázni. A mérések szerint a nyugalmi állapotban m_0 tömegű elektrontömeg a sebességgel az

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

összefüggés szerint változik, ahol c a fénysebesség. Látható, hogy $v \ll c$ esetén a tömeg változása elhanyagolható.

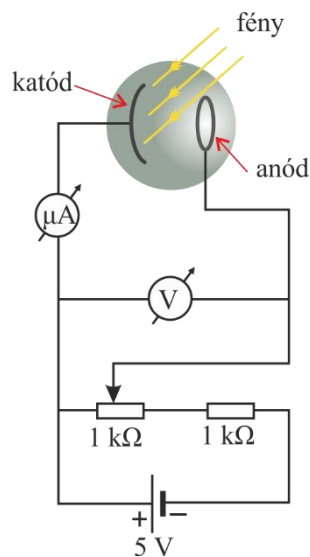
[Vissza >>>](#)

A10. A fotoeffektus vizsgálata fotocellával

Az eszköz leírása és a mérés elve

A vákuumfotocellát – amely a fotoeffektus pusztá bemutatásán túl mérésre is alkalmas – és annak áramkörbe kapcsolását az ábra mutatja.

A vákuumcsőbe két elektród van beépítve. Az egyik, az ún. fotokatód, nagy felületű, és úgy helyezkedik el, hogy könnyen meg lehessen világítani; anyaga olyan fém (pl. Cs, K, Na), amelyből kis kilépési munkával kiválthatók elektronok. A másik elektród – az anód – vékony fémdrótból készült hurok, anyaga olyan fém, melyre nagy kilépési munka jellemző. Ha a fotokatódot megfelelő frekvenciájú monokromatikus fényvel megvilágítjuk, akkor a féltér minden irányába elektronok lépnek ki belőle. A kilépő elektronok egy része a



cella légritkított terében eljut az anódra, és az anód áramkörében μA nagyságrendű áramot hoz létre. A fémből kilépő elektronok átlagos sebessége (energiája) függ a katódot megvilágító fény frekvenciájától. Az elektronok átlagos energiája úgy határozható meg, hogy az anódot a katódhoz képest negatív potenciálra kötjük. Az elektronok ekkor csak az „ellentét” legyőzve juthatnak el az anódra. Ha az ellentér feszültségét lassan növeljük, egyre kevesebb elektron éri el a katódot. Amikor már a legnagyobb energiájú elektronok sem érik el az anódot, az anódáram zérusra csökken. Az elektronok maximális mozgási energiája tehát a

$$W_{kin} = q_e U_0$$

munkatétel alapján kiszámítható, ahol U_0 az ellentér maximális feszültségét jelöli.

Megjegyzés:

- A mérendő fotoárammal ellentétes irányú áramot hoznak létre – az anódból kilépő elektronokon kívül – azok az elektronok is, amelyeket a fény az anódra lerakódott maradék gázból vált ki. Igényes méréseknél a hiba kiküszöbölésére az anódot a mérés előtt néhány **másodpercen** át izzítani szokták. Az izzításhoz használjunk transzformátort, mellyel a fűtőfeszültséget lassan növeljük mindaddig, míg a katód halvány vörösen izzani nem kezd
- A fotocellát megvilágító rendszer és a fotocella felületén **lévő** szennyeződések (por, **ujjlenyomat**) a fény szóródhat, s ez zavaró hatású lehet. Ezért ezeket a részeket a mérés előtt tisztítsuk meg!

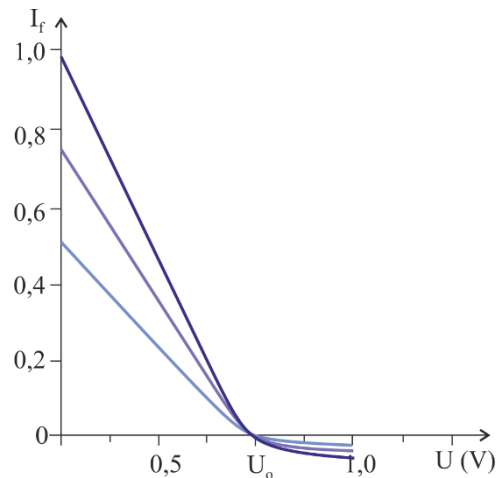
A fotoáram függése a megvilágító fény intenzitástól

Állítsuk össze a korábbi ábrán bemutatott kapcsolást, és a cella katódját világítsuk meg! A megvilágítást célszerű úgy megoldani, hogy izzólámpa fényét kondenzorral résre gyűjtjük, majd a rés képét lencsével a katódra vetítjük. (A képet először a fotocella helyére tett ernyőn

érdeemes élesre állítani, és a cellát utóbb odahelyezni.) A fotocella elé helyezzünk színszűrőt, hogy a megvilágítás monokromatikus legyen!

A potenciométer finom állításával növeljük a fotocella elektródjai közötti ellenteret, mérjük a feszültséget és az anódkörben folyó fotoáramot! Ábrázoljuk a fotoáramot (I_f) az ellentér feszültségének (U) függvényében! Változtassuk ezután a fotocellába jutó fény intenzitását (pl. az izzó, a kondenzor és a rés kölcsönös helyzetének módosításával), és vegyük fel a fotoáram-feszültség jelleggörbét különböző intenzitású megvilágítás esetén is!

A mellékelt ábra különböző intenzitású, de azonos színű megvilágítás esetén adódó jelleggörbéket mutat.



A grafikonról leolvasható, hogy a görbék a vízszintes tengelyt ugyanazon U_0 -nál metszik, vagyis a maximális elektron energia (amely arányos U_0 -lal) nem függ a fény intenzitásától. Az intenzitás csak a fotoáram erősségét befolyásolja: minél erősebb a fény, annál nagyobb a fotoáram (adott feszültség mellett).

A maximális elektronenergia függése a fény frekvenciájától

Állítsuk a megvilágítás intenzitását maximálisra, és vizsgáljuk meg, hogyan változik a kilépő elektronok energiája a megvilágító fény frekvenciájával! Helyezzünk a fotocella elé különböző színű szűrőket, és határozzuk meg azokat a feszültségeket, amelyeknél a különböző színű megvilágításnál a fotoáram zérussá válik!

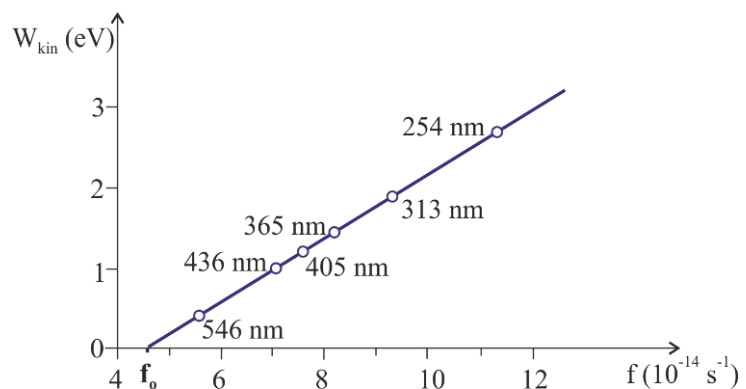
Ábrázoljuk a maximális elektronenergiát (W_{kin}) az alkalmazott fény frekvenciájának (f) a függvényében! (Az optikai színszűrők által átengedett fény frekvenciája a színszűrőkhöz mellékelt gyári adat.) A mérési pontok a frekvenciatengelyt metsző egyenesre illeszkednek. A metszési pont azt a határfrekvenciát (f_0) jelenti, amelynél kisebb frekvenciájú fény hatására már nem lép ki elektron a katódból. A határfrekvenciából számított hf_0 energia a fémre jellemző W_k kilépési munka.

A Planck-állandó értékének meghatározása fotóeffektus alapján

A méréseink eredményét mutató grafikont egybevetve az Einstein-féle

$$W_{kin} = hf - W_k$$

fényelektromos egyenlettel, látható, hogy a h Planck-állandó értéke a mérési grafikon egyenesének meredekségével egyezik meg.



Megjegyzés:

- A fotocellára jutó fény frekvenciáját színszűrőkkel változtathatjuk. Higanygőzlámpa fényét egyenesállású prizmával bontsuk fel összetevőire és az egyes színeket elkülönítve juttassuk a fotocellába (pl. rés segítségével). A komponensek hullámhosszát és frekvenciáját a táblázat tartalmazza.

SZÍN	sárga	zöld	kékeszöld	kék	ibolya
λ (nm)	578	546	492	436	405
f (10^{-14} Hz)	5,19	5,49	6,08	6,88	7,41

[Vissza >>>](#)

A11. A Compton-szórás (Compton-effektus). Fénynyomás. A Compton-formula levezetése

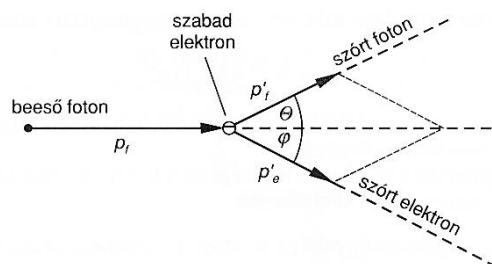
A Compton-jelenség

A fény részecsketulajdonságát igazolja az is, hogy a fény és az elektron kölcsönhatása két részecske, a foton és az elektron rugalmas ütközéseként írható le. Ezt bizonyítja az ún. *Compton-jelenség*.

Compton röntgensugarak szóródását vizsgálta paraffinon, és azt tapasztalta, hogy a szórt sugárzás hullámhossza nagyobb (frekvenciája kisebb), mint a megvilágító röntgenfényé. A megfigyelt jelenséget *Compton-jelenségnek* vagy *Compton-szórásnak* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a Compton-szórás csak olyan anyagokon figyelhető meg, amelyekben gyengén kötött, majdhogy nem szabad elektronok vannak, és a jelenség annál jobban észlelhető, minél nagyobb energiájú (keményebb) röntgenfényel dolgozunk.

A jelenség az elektromágneses hullámok segítségével nem magyarázható. Aszerint ugyanis a beeső hullám és a szóródó sugárzás hullámhossza azonos. (A változó elektromágneses tér kényszerrezgésbe hozza az anyag elektronjait. A rezgő töltés által kibocsátott sugárzás – a szórt sugárzás – frekvenciája megegyezik a kényszerrezgést kiváltó hullám frekvenciájával.) A Compton jelenség jól értelmezhető, ha a röntgensugárzást hf energiájú részecskék – fotonok – áramának fogjuk fel. A szórást a fotonok és az anyagban levő elektronok ütközésével magyarázzuk. Az ütközés következtében a foton eltérül eredeti mozgásának irányától (szóródik) és energiája is megváltozik. Az ütközés tökéletesen rugalmasnak tekinthető, ha az impulzusegymaradás törvénye mellett érvényes az energiamegmaradás törvénye is. A két megmaradási törvényből kiindulva kiszámítható a szóródó sugárzás hullámhosszának megváltozása.



A számítások végeredményeként a szórt röntgensugárzás hullámhosszának változása a

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta)$$

kifejezéssel adható meg. Az elméleti leírást Compton első kísérletei után további részletes mérésekkel igazolták, kimutatták a hullámhosszváltozás szögfüggését, illetve az elektronok meglökődését is.

A számítás részleteit lásd alább.

A Compton-formula levezetése

A jelenséget értelmező fenti ábra foton és szabad (gyengén kötött) elektron ütközését mutatja. Az ütközés előtt az elektron nyugszik, ütközés után elmozdul, a szórt foton hullámhossza pedig a beesőhöz képest megváltozik. Az ütközésre érvényes mind az impulzus, mind az energiamegmaradás törvénye.

A számítások azért bonyolultabbak a középiskolai mechanika rugalmas ütközésre vonatkozó számításainál, mert a meglökött elektron olyan nagy sebességet érhet el, hogy figyelembe kell venni a relativisztikus hatásokat, továbbá mivel a foton nyugalmi tömege zérus, ismerni kell az impulzusára vonatkozó

$$p_f = \frac{hf}{c}$$

összefüggést. (Ez mindenképpen korábbi, vagy az elektromágneses hullámok tananyagból, vagy ha szerepelt a relativitáselmélet, akkor onnan ismert összefüggés.)

A becsapódó foton impulzusa $\frac{hf}{c}$, míg az ütközés következtében θ szögben szóródó foton impulzusa $\frac{hf'}{c}$. Feltesszük, hogy a fénysebességgel becsapódó fotonhoz képest az elektron az ütközés előtt nyugalomban levőnek tekinthető, azaz kezdeti impulzusa zérus. Az ütközés során az elektron sebessége annyira megnő, hogy számolnunk kell a relativisztikus tömegnövekedéssel is (lásd a [22.2.3.](#) pont).

A v sebességű elektron impulzusa $\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, ahol m_0 az elektron nyugalmi tömege, c a fénysebesség.

Ezeket figyelembe véve az impulzusmegmaradás törvényét az ütközésre az ábra segítségével, x és y komponensben kifejezve a

$$\frac{hf}{c} = \frac{hf'}{c} \cos\theta + \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cos\varphi$$

$$0 = \frac{hf'}{c} \sin\theta - \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sin\varphi$$

alakban írhatjuk fel.

A foton–elektron rugalmas ütközésre felírt energiamegmaradási törvény pedig a

$$hf + m_0 c^2 = hf' + \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2$$

formát ölti, ahol a meglökött elektron energiájának kifejezésében ismét figyelembe vettük a relativisztikus tömegnövekedést. A felírt megmaradási törvényekből kifejezhetjük a foton megváltozott frekvenciáját a θ szóródási szög függvényében.

A számítások végeredményeként a szórt röntgensugárzás hullámhosszának változása a

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta)$$

kifejezéssel adható meg. Az elméleti leírást Compton első kísérletei után további részletes mérésekkel igazolták, kimutatták a hullámhosszváltozás szögfüggését, illetve az elektronok meglökődését is.

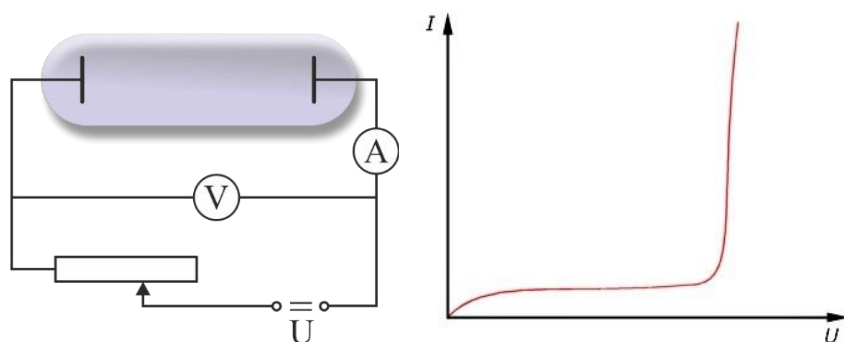
A fénynyomás

Kísérleti tény, hogy a fénynyomást fejt ki a megvilágított anyagokra. (Lásd: Lebegyev kísérlete, [A fizika tanítása a középiskolában II.](#), ERH16., 712. old.) A jelenség az elektromágneses hullámok fogalomkörében is magyarázható, de legalább ennyire kézenfekvő, ha a fénynyomást a fotonok ütközésének következményeként értelmezzük. A jelenség fotonütközésekkel történő leírása az elektromágneses hullámelméletben tárgyalt leírással azonos eredményt szolgáltat.

[Vissza >>>](#)

A12. A gázkisülések vizsgálata

A 19. században neves fizikusok sora (köztük Kirchhoff, Bunsen, Fraunhofer, Balmer) foglalkozott a gázok elektromos vezetésének és az azzal kapcsolatos látványos fényjelenségeknek a vizsgálatával. A kis nyomású gázzal töltött, leforrasztott üvegcső két végébe fém elektródákat vezettek (ezt nevezzük „gázkisülési csőnek”). Az elektródák közé változtatható feszültséget kapcsolva mérték a körben folyó áramot. Az ábra a kisülési csövet és áramkörét, valamint a csőben lévő gázokra jellemző sematikus áram-feszültség grafikont mutatja.



A mérések szerint a gázok nem abszolút szigetelők, már kis feszültség esetén – csekély mértékben ugyan – de vezetik az áramot. Eleinte az áram nő a feszültség növekedésével, hamarosan azonban telítődés lép fel, és az áram széles feszültségtartományban állandó marad. Ha a feszültséget tovább növeljük, bizonyos érték meghaladása után a kisülési cső árama rohamosan növekszik, aminek látványos kísérője a fénykibocsátás. A kibocsátott fény színe függ a gáz anyagi minőségtől. Az adott feszültség mellett mérhető áram függ a csőben lévő gáz nyomásától.

A gázok elektromos vezetését és a vele járó fénykibocsátást röviden a következőkkel magyarázzuk. A gázokban kis számban mindig találhatóak ionok. (A gázatomokból ionok keletkezhetnek radioaktív sugárzás, kozmikus sugárzás hatására is.) A kisülési cső elektródjaira kapcsolt feszültség hatására a pozitív ionok a katód, a negatív ionok az anód felé gyorsulnak. Mozgásuk során az ionok minduntalan molekulákkal, illetve más ionokkal ütköznek. Az ütközések során az ionok egy része elveszíti elektromos töltését – rekombinálódik. A feszültség növekedtével az ionok gyorsabban érik el az elektródákat, és így a rekombináció valószínűsége kisebb – ez az oka, hogy a kisülési cső árama eleinte nő a feszültséggel. További feszültségnövelés hatására az áram telítődik, ilyenkor az ionok rekombinációja már elhanyagolható, gyakorlatilag minden ion eléri az elektródát. Tovább növelve a feszültséget, az áramerősség ismét növekszik, ennek magyarázatát az egyre nagyobb számban keletkező ionok adják. Nagy feszültség hatására a gázban eleve meglévő ionok annyira felgyorsulnak, hogy ütközéskor a semleges gázatomokat ionizálják. Mivel ilyenkor a töltéshordozók számát nem a külső ionizáló hatás szabja meg, hanem azok a vezetés mechanizmusa során keletkeznek, *önfenntartó gázkisülésről* beszélünk.

Az önfenntartó gázkisülések látványos kísérője a fénykibocsátás. A kibocsátott fény színét közvetlenül látjuk, a fény hullámhossz szerinti összetételét azonban spektroszkóppal vizsgáljuk. (Iskolai célú kézi- vagy asztali spektroszkópok számos iskola szertárában megtalálhatók, a tanszerkereskedelemben is beszerezhetők. Némi ügyeskedéssel diákjaink, vagy mi magunk is készíthetünk iskolai kísérletekre alkalmas kézi spektroszkópot (lásd [A13.](#)).

A gázok nemcsak elektromos feszültség hatására, kisülési csőben sugároznak ki fényt. Hasonló fénykibocsátás figyelhető meg magas hőmérsékleten is. Ha például színtelen alkohol-lángba vagy gázlángba különböző sókat szórunk, a meleg lángban a vegyületek felbomlanak, az alkotórészek elpárolognak, miközben jellegzetesen megfestik a lángot. A színes lángot spektroszkóppal vizsgálva a gázkisüléshez hasonló vonalas színekép figyelhető meg.

A gázok vonalas színeképének vizsgálatával foglalkozó kutatók közül kiemelkedik a svájci középiskolai fizikatanár, *J. J. Balmer*, aki a periódusos rendszer első eleme, a hidrogén esetén kereste, hogy milyen törvényszerűség szerint követik egymást a színeképvonalak. Megállapította, hogy a színeképvonalak hullámhossza a

$$\lambda = 3645,6 \frac{n^2}{n^2 - 4}$$

empirikus formulával jól megadható, ahol n helyébe a 3, 4, 5, 6 egész számokat kell rendre behelyettesíteni.

Balmer a hidrogén spektrumát a látható fény hullámhossztartományában vizsgálta, ahol mindössze négy színeképvonal van, formulája is ezekre vonatkozott. A későbbiek során kiderült, hogy a hidrogén a látható fénynél kisebb, illetve nagyobb frekvenciatartományban is sugároz. A teljes elektromágneses spektrum leírását *J. R. Rydberg* hasonló formulával a következőképpen foglalta össze:

$$f = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

ahol f a kibocsátott sugárzás frekvenciája, m és n természetes számok és $n > m$, R az ún. *Rydberg-állandó* (értéke $3,29 \cdot 10^{15}$ 1/s).

A Rydberg-formula $m = 2$ esetén Balmer összefüggését adja vissza.

A Balmer- és Rydberg-formulák nem adtak ugyan magyarázatot a gázkisülési csövekben a különböző gázok esetén változó jellegzetesen vonalas színeképekre, de erősítették az a meggyőződést, hogy a színeképelemzés az, ami betekintést adhat az atomok belső szerkezetébe.

[Vissza >>>](#)

A13. Színképek kísérleti vizsgálata az iskolában (kiegészítő szakköri anyag)

Az atomok, molekulák elektronszerkezetéről a spektroszkópiai megfigyelések nyújtanak részletes képet. Ezek szolgálták alapul az elektronok leírására szolgáló kvantumszámok bevezetéséhez, a kvantummechanikai atommodell kidolgozásához.

A spektroszkópiai vizsgálatok két, technikájában különböző csoportba sorolhatók. Az *emissziós spektroszkópia* a különböző módszerekkel – izzítással, elektronbombázással – gerjesztett atomok, molekulák által kibocsátott fényt vizsgálja, bontja fel összetevőire. Az *abszorpciós spektroszkópia* azt vizsgálja, hogy az anyagok milyen hullámhosszakat nyelnek el az őket megvilágító folytonos spektrumú fehér fényből.

Az atomos gázok, gáz állapotú ionok által kibocsátott fény spektroszkóppal jól elkülöníthető diszkrét frekvenciákat, színképvonalakat tartalmaz (*vonalas színkép*). Hasonlóan vonalas szerkezetű abszorpciós spektrumuk is. A molekulák színképe sűrűn egymás mellett álló vonalakkól áll, amelyek megkülönböztetése iskolai körülmények közt nem is lehetséges – ilyenkor *sávós színképről* beszélünk.

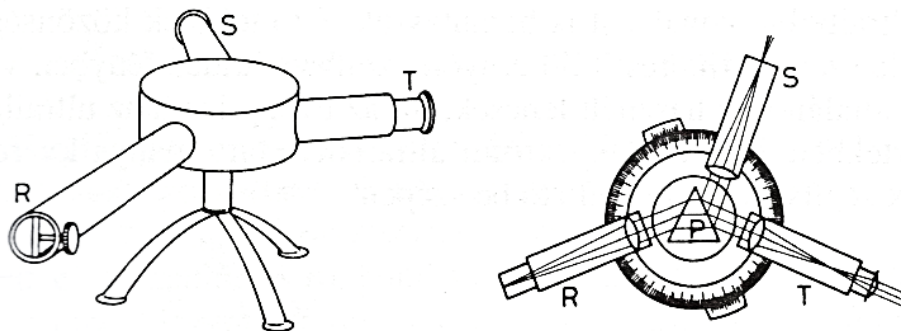
Az iskolában egyszerű demonstrációs kísérletekkel mutathatjuk be a legfontosabb spektroszkópiai módszereket, a jellegzetes színképeket. A kísérletek célja az, hogy a diákok megértsék, hogyan következtethetünk az anyagok fénykibocsátása, illetve fényelnyelése alapján az elektronszerkezetre.

Iskolai célra alkalmas spektroszkópok, speciális fényforrások

A színképvetítés alapvető technikáival (színkép előállítása prizmával, ráccsal), az optikai padon összeállítható spektroszkópmodellekkel a [Fizikai kísérletek gyűjteménye 1.](#) kiadvány interneten elérhető elektronikus változata tárgyalja (lásd. a kiadvány VIII.6.1.3 és IX.3.3.3. pontjait). Az ott ismertetett demonstrációs összeállítás alkalmas arra, hogy az intenzív fényforrások (pl. Hg-gőz lámpa, spektrállámpák) emissziós spektrumát, illetve egyes anyagok abszorpciós színképét népes hallgatóság számára bemutassuk. Az igényesebb egyéni megfigyelésekhez, szakköri munkához a Bunsen-féle asztali prizmás spektroszkópot ajánljuk.



A Bunsen-féle asztali spektroszkópot az ábra mutatja.



A műszerbe az R állítható szélességű résen keresztül lép be a fény, majd a P prizma színeire bomlik. A spektrumot a prizma felületére fókuszált T távcsövön keresztül figyelhetjük meg. A távcsövet mozgatva az egész látható színek tartományát végigpásztázhatjuk. A színek vonalainak hullámhosszát a spektrumra vetített skálán olvashatjuk le. A hullámhossz-skála az S skálavetítő optika elején található, megvilágítására zseblámpaizzót használhatunk. A megvilágított skálát az optika – a spektrumvonalakhoz hitelesen illesztve – a prizmára vetíti, így az a színekkel együtt látható a távcsőben.

A színek iskolai megfigyelésére használhatóak a kisméretű, ún. *kézi spektroszkópok* is. Ezekben a színek és a hitelesített hullámhossz-skálát, a Bunsen-féle asztali spektroszkóphoz hasonlóan, egyszerre figyelhetjük meg. A kézi spektroszkópok felbontása az előbbihez képest kisebb, kétségtelen előnyük azonban, hogy kezelésük egyszerűbb, nem igénylik a gondos beállítást, a hullámhossz-skála külön megvilágítását, elegendő, ha szemünkhöz tartva a fényforrás felé fordítjuk őket.

A kézi spektroszkópok közé sorolható a CD vagy DVD lemez felhasználásával házilag elkészíthető reflexiós rácsú spektroszkóp is. Az eszköz elkészítését a fejezet végén ismertetjük.

Emissziós színek vizsgálatához a tanszerkereskedelem *speciális spektrállámpákat, spektrálcsőveket* forgalmaz. Ezek nagy tisztaságú gázzal, fémgőzzel töltött kisülési csövek, amelyekben az atomok elektronokkal ütközve gerjesztődnek. Az iskolai gyakorlat szempontjából a *spektrállámpák* közül a higany-, a nátrium- és a neonlámpa a legfontosabb. Intenzív fényük lehetővé teszi, hogy vonalas színeküket az egész osztály számára kivetítsük. A spektrállámpák a 220 V-os hálózatról, alkalmas fojtótekerics sorba kötésével üzemeltethetők. A spektrállámpák megfelelő színszűrővel kiegészítve monokromatikus fényforrásként is használhatók.

A *spektrálcsővek* vékony kapillárisra szűkülő kisülési csövek, amelyekben a gerjesztett atomok, molekulák világító fényfonalat adnak. Ezek sugárzása fényszegény, csak közvetlenül a spektroszkóp nyílása elé állítva használhatóak. A spektrálcsővek nagyfeszültségű tápegységről üzemeltethetők. A spektrálcsővekben alkalmazott töltőgázok: Hg, Ar, Ne, He (vonalas spektrumot adnak), H₂, N₂ (sávós színek adnak).

Emissziós színeképek vizsgálata

a) Higanylámpa színeképek vetítése

A higanylámpa vonalas színeképek vetítése optikai sínen összerakott elrendezéssel prizma és optikai rács felhasználásával egyaránt lehetséges. A prizmával előállított színekép vetítési összeállítása megegyezik a folytonos színekép vetítésével. A részletes leírás a fentebb hivatkozott [Kísérletgyűjtemény I. e-kiadvány](#) VIII.6.1.3.2.a alpontjában megtalálható. A spektrum ráccsal történő felbontása és kivetítése ugyanott a IX.3.3.3. pontban található.



Mindkét esetben érdemes törekedni arra, hogy a spektrum látható vonalai mellett az ultraibolya vonalakat is bemutassuk. Ez utóbbiak közönséges vetítőernyőn alig látszanak, fluoreszkáló ernyőn azonban zöldecs fényben világítanak. A vetítésnél általánosan használt lencsék, illetve az üvegprizma az ultraibolya fényt jelentős mértékben elnyeli. A spektrum ultraibolya tartománya kvarcprizma és kvarclencsék segítségével mutatható be szépen.

b) Lángfestés alkálifémekkel, alkáliföldfémekkel

a) Vastagabb vasdrót végére hajtsunk 1-2 mm átmérőjű hurkot, mártsuk hígított sósavoldatba, majd tartsuk színtelen gázlángba! Rövid idő után a drót felizzik, és a szennyezések leégnek róla. Nyomjuk a meleg drótot konyhasóba, majd tartsuk ismételten a lángba! A láng intenzív sárga fényvel világít. Irányítsuk az asztali vagy kézi spektroszkópot a világító lángra! A spektroszkópban egy igen intenzív sárga vonalat, továbbá néhány kevésbé fényes más színű vonalat látunk. (A domináns fényű sárga vonal valójában két szorosan egymás melletti vonal, amit a kis felbontású spektroszkópok nem különböztetnek meg.) Hasonló módon végezzük el a kísérletet más alkálifémek, illetve alkáliföldfémek sóival is.

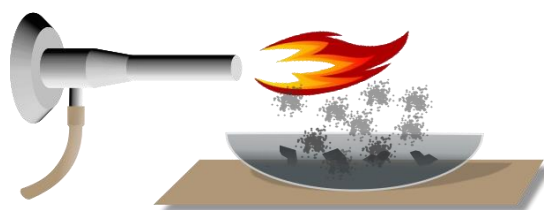
Az alkálifémek, alkáliföldfémek ionjai anyagi minőségüktől függően a következő jellegzetes színekre festik a gázlángot:

Na sárga, K fakó ibolya, Ca téglavörös, Sr bíborvörös, Ba fakó zöld. A megfestett láng spektruma minden esetben vonalas szerkezetű, a domináns színeképvonal a láng közvetlenül észlelhető színének megfelelő.

Megjegyzés:

- A nátrium erősen festi a lángot, ezért a többi színt elnyomja, ha nem ügyelünk arra, hogy az egymást követő kísérletekben az anyagok ne keveredjenek.

b) Lapos porcelántálba öntsünk hígított sósavoldatot, oldjunk fel benne késhegynyi alkálifém- vagy alkáliföldfém-sót, majd dobjunk az oldatba cinkdarabkákat! Rögzítsünk a tál fölé vízszintes helyzetbe színtelen lángú gázégőt (ábra). A cink hidrogént fejleszt a sósavból. A hidrogénbuborékok az oldat felszínére szállva szétpattannak, és eközben a tálka feletti térbe



porlasztják az oldatot. Az oldatban lévő alkáli ionok a forró lángban gerjesztődnek, és fényt bocsátanak ki. Az eredetileg színtelen gázlángot a tálka fölött az oldott só – minőségétől függően – megfesti. A festett láng spektrumát most is asztali vagy kézi spektroszkóppal vizsgáljuk!

c) A lángfestés felhasználása kémiai analízisre

A spektroszkópia egyik gyakori alkalmazási területe az anyagok kémiai analízise, az összetevők azonosítása. Ennek megmutatására alkalmas a következő, szakköri feldolgozásra ajánlható kísérletsorozat.

Végezzék el a tanulók a b) pontban leírt kísérletet különböző sókkal, és mindegyik esetben jegyezzék fel, hol vannak a jellegzetes színképvonalak a spektroszkóp skáláján! Az előzetesen így megvizsgált anyagokból állítsunk össze sókeveréket, amelynek összetevőit a diákoknak spektroszkópiai módszerekkel azonosítani kell. Ez úgy lehetséges, ha az ismeretlen sókeveréssel is megismétlik a kísérletet, és a jellegzetes színképvonalakat összevetik a kalibráló mérések vonalaival.

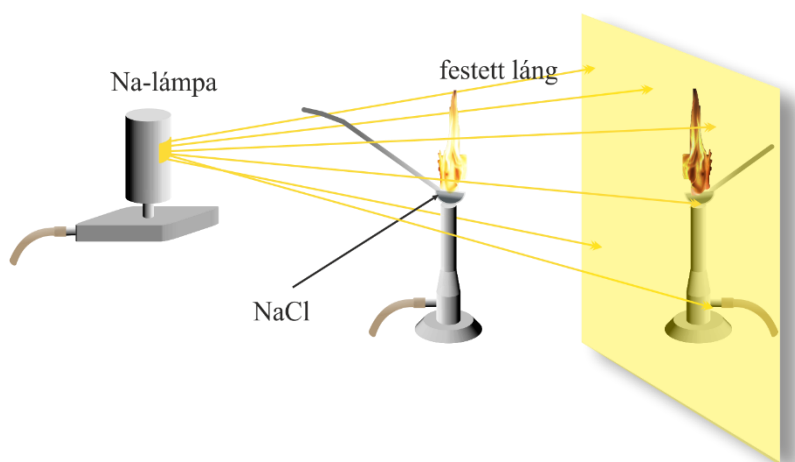
Megjegyzés:

- Az ismeretlen sókeverékhez egyáltalán ne, vagy csak igen kis mennyiségben keverjünk nátrium-vegyületet, mert erős színe miatt a többi vegyületet nem tudnánk érzékelni.

Abszorpciós színképek vizsgálata

a) Nátrium rezonancia-abszorpciójának bemutatása

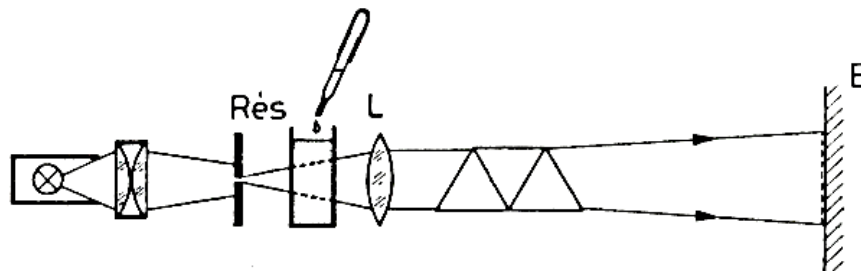
Bunsen-égő láng felső harmadába tartsunk konyhasót! A láng melegétől a sóból Na-gőzök válnak szabaddá és intenzív sárga színre festik a lángot. Világítsuk meg Na-lámpával a megfestett lángú Bunsen-égőt és az árnyékképet fogjuk fel ernyőn! Figyeljük meg az árnyékképet!



Érdekes módon, a sárga fény megvilágításban a láng sárgára festett részének lényegesen erősebb az árnyéka, mint a többi résznek. A jelenség oka, hogy a sárga gázlángban lévő Na-részecskék abszorbeálják az irányított megvilágítás fényéből ugyanazt sárga fényt, amit maguk is kibocsátanak. Az elnyelt sárga fotonok gerjesztik a láng Na-részecskéit, amit a Na-atomok másodlagos fényforrásként újra szétsugároznak, de a tér minden irányába. A sárga gázláng megfigyelt sötét árnyéka azt jelzi, hogy az ernyő ezen részére a megvilágító Na-lámpa fotonjaiból, a lángban lévő Na-

atomok abszorpciója és irányítatlan emissziója miatt kevesebb jut a sárga láng mögött az ernyőre.

b) Kálium-permanganát-oldat abszorpciós színeke



Vetítsünk egyenes látású prizmával folytonos színeképet vetítőernyőre! (lásd [Fizikai kísérletek gyűjteménye 1.](#) kiadvány interneten elérhető elektronikus változata.) A fényútba helyezzünk el egy tiszta vízzel töltött küvettát, majd a vizet káliumpermanganát-oldat hozzásepegtetésével színezzük meg! Az összeállítást az ábra mutatja.



A lilára színeződő oldat a folytonos színeképből zöld színű fényt nyel el. A híg oldat esetén a színeképben még jól elkülöníthető két sötét sáv a festékanyag mennyiségének növelésekor egyre sötétebbé válik és összeolvad.

c) Növényi festékanyagok abszorpciós színeképek vizsgálata

Néhány zöld levelet dörzsöljünk szét tiszta, durvaszemcsés homokkal, majd öntsünk rá alkoholt! Az alkohol kioldja a szétroncsolt növényi sejtek festékanyagait, és zöld színt kap. Ha az alkohol színe már elég erős, szűrjük le folyadékot! Az így elkészített átlátszóan tiszta zöld oldat egy részét töltsük küvettába, és az előző kísérlethez hasonlóan vetítsük ki, és figyeljük meg abszorpciós színeképet! A színeképben sötét abszorpciós sávok figyelhetők meg. Az oldat fennmaradt részébe lógassunk szűrőpapírcsíkot! Az itatóspapír felszívja a festékanyagokat tartalmazó alkoholt, ami a különböző festékanyagokat különböző magasságig viszi magával. Így a levélben lévő különböző színanyagok elkülöníthetők. A festékanyagok ilyen elkülönítése a gyakran alkalmazott, ún. „kromatográfiai” eljárás.

Figyeljük meg, hogy az abszorpciós színeképben látható sötét sávok azokon a színeképtartományokon figyelhetők meg, ahol az itatóspapíron elkülönített festékanyagok kiegészítő színe helyezkedne el.

Megjegyzés:

- A b) és c) pontban leírtakhoz hasonlóan a legkülönbözőbb festékek abszorpciós színeke vizsgálható.

d) Fraunhofer-féle abszorpciós vonalak megfigyelése a Nap színeképeben

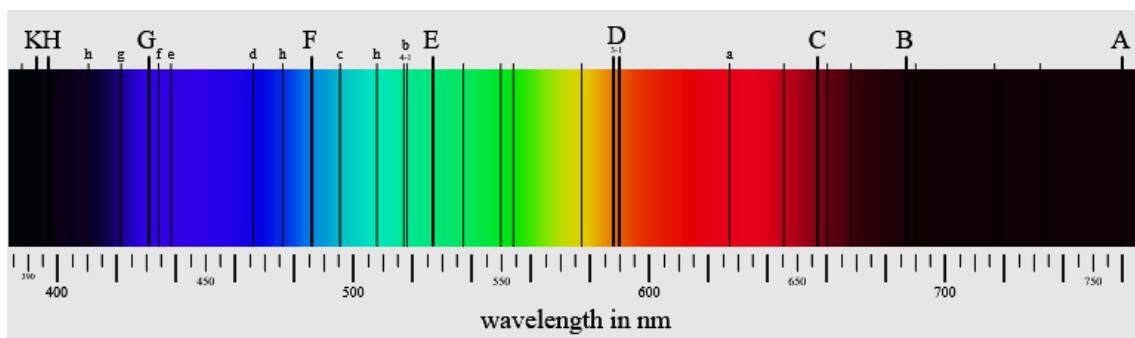
1814-ben Joseph Fraunhofer német tudós észrevette, hogy a Nap folytonos spektrumában sok vékonyabb-vastagabb fekete vonal figyelhető meg. Gondosan listázta mely hullámhosszú fény

helyén láthatók e vonalak, majd eredményeit publikálta. Azóta a tudomány Fraunhofer-féle vonalaknak nevezi a jelenséget.

A fekete vonalak a folytonos színekben tulajdonképpen egy-egy hullámhosszú fény hiányát vagy csökkentett intenzitását jelzik a spektrumban. Magyarán, hogy a Nap fotoszférájából kilépő fény áthalad a Nap külső rétegein, majd a Földet elérve a légkörön. E közegek atomjai a saját energiaszerkezetüknek megfelelő fotonok fényét elnyelik a napsugárzásból. Az abszorpciót a spektroszkópban a Nap eredetileg folytonos spektrumában csökkent intenzitású (sötét) vonalak jelzik. A Fraunhofer vonalak tanulmányozása lehetővé teszi, hogy a Naptól hozzánk érkező fény útjába eső atomi részecskék anyagi minőségére következtessünk.

A Fraunhofer-vonalak asztali spektroszkóppal már az iskolában is bemutatható. Irányítsuk a spektroszkópot a Nappal ellentétes irányban az kék égboltra! (FIGYELEM! A spektroszkópot nem szabad a Napra irányítani, mert szemsérüléséhez vezethet!)

Az égboltról visszaszóródó napfény spektrumában megfigyelhetők az markánsabb abszorpciók vonalak. A Vikimédiáról átvett színek-ábra segít az intenzívebb Fraunhofer-vonalak megtalálásában.

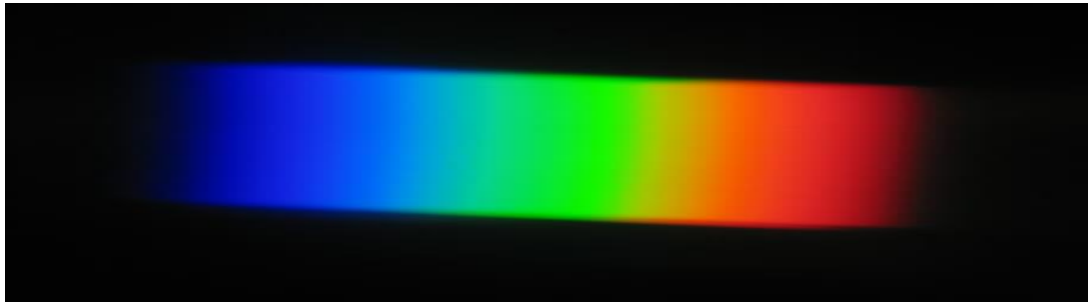


Házilag készíthető egyszerű iskolai spektroszkóp és alkalmazása

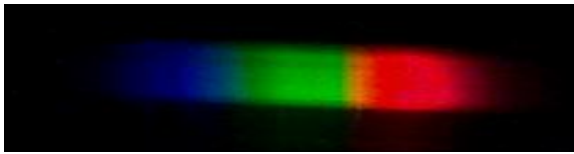
A számítástechnikában használatos CD és DVD lemezek felületén finom barázdákat találhatók. A barázdák ismétlődési távolsága a látható fény hullámhossztartományába esik, ezért reflexiós optikai rácsként viselkedik. Ezt kihasználva könnyen építhetünk magunk számára iskolai célokra megfelelő spektroszkópot. A számítógépes világhálón több részletes leírás olvasható a CD-spektroszkópok készítéséről: <http://www.arvindguptatoys.com/toys/cdspectroscope.html>; http://sci-toys.com/scitoys/scitoys/light/cd_spectroscope/spectroscope.html; <http://www.kidsmakestuff.com/articles/show/5312>

A házilag elkészített CD-spektroszkóppal szinte minden kísérlet elvégezhető, amiről a korábbiakban szó volt. Érdekes vele megvizsgálni különböző fényforrásokat (pl. hagyományos fémzálas izzólámpák, LED-lámpák, fénycsövek, színes reklámcsövek, számítógép-képernyő, Bunsen-égő különböző alkáli ionokkal „megfestett” lángja stb.) színekét

Az alábbi fotók sajátkészítésű CD-spektroszkóppal előállított és okostelefonnal fotózott színekpet mutatnak be.



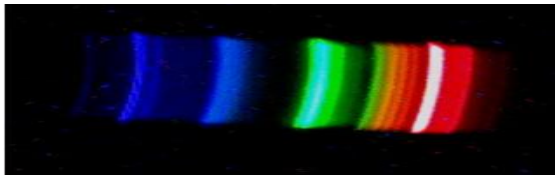
Hagyományos izzólámpa folytonos színe



Gyertyaláng spektruma



Gyertyalángba szórt konyhasó esetén a folytonos spektrumban megjelenik a Na-ra jellemző intenzív sárga színepvonal



Tantermi fénycső színe



Energiatakarékos kompakt-lámpa színe

[Vissza >>>](#)

A14. A Bohr-féle pályafeltétel alapján végzett elemi számítás a H-atom méretének, illetve a mag körül keringő elektron alapenergiájának meghatározására (emelt szintű szakköri kiegészítő anyag)

A Bohr-modell szerint az atommag körül körpályán keringő elektron centripetális gyorsulását az elektron és a mag között működő Coulomb-vonzás biztosítja:

$$k \frac{q_e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

ahol $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

Az összefüggést célszerűen átalakítva (az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk mr^3 -al, majd rendezzük át) és felhasználva az elektron impulzusmomentumára kimondott Bohr-féle kvantumfeltételt, az

$$r_n = \frac{n^2 \hbar}{kmq_e^2}$$

összefüggéshez jutunk. A H-atom első elektronpályájának ($n = 1$) sugara ebből:

$$r_H = 0,53 \cdot 10^{-10} m$$

ami jól egyezik a kinetikus elméletből kapható eredménnyel.

A pályafeltétel alapján meghatározható az elektronok energiája a lehetséges pályákon. A hidrogénatomban az n -edik pályán keringő elektron energiája kinetikus és potenciális energiából tevődik össze:

$$E_n = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{kq_e^2}{r_n}$$

ahol a második tag a pozitív q_e töltésű atommagtól r_n távolságban levő elektron potenciális energiája. Figyelembe véve, hogy az elektront a Coulomb-vonzás tartja körpályán:

$$E_n = -\frac{kq_e^2}{2r_n}$$

Behelyettesítve ide az r_n -re kapott korábbi kifejezést, az n -edik pályán keringő elektron energiájára azt kapjuk, hogy

$$E_n = -\frac{k^2 q_e^4 m}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Az elektron energiája tehát a pályát jellemző n kvantumszám függvénye. A hidrogénatom alapállapotában ($n=1$) az energia

$$E_1 = -\frac{k^2 q_e^4 m}{2\hbar^2}$$

A negatív előjel mutatja, hogy az elektron a mag környezetében kötött állapotban van.

Ilyen nagyságú energiát kell a H-atom elektronjával közölni, hogy összenergiája nullára emelkedjék. Ekkor az elektron kötött állapota megszűnik és elhagyhatja az atomot; a H-atom ionizálódik. Ezért $|E_1|$ -et ionizációs energiának nevezzük, és I -vel jelöljük.

A H-atomra vonatkozó eredmény egyszerűen általánosítható tetszőleges Z rendszámú atomra is: az elektronok közötti kölcsönhatást elhanyagolva a Zq_e nagyságú magtöltés miatt az összefüggés

$$E_n = -\frac{k^2 Z^2 q_e^4 m}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

alakúra módosul.

[Vissza >>>](#)

A15. Franck–Hertz-kísérlet iskolai bemutatása

A Bohr-féle atommodellben megfogalmazott diszkrét energiaszintek létezésének közvetlen bizonyítására *James Franck* és *Gustav Hertz* elektronütköztetési kísérleteket végzett. Az elektronokat speciálisan kialakított elektroncsőben higanygőz atomjaival ütköztették. A Franck–Hertz-féle elektroncső áram-feszültség karakterisztikája alapján az energianívók közti átmenet energiája meghatározható. Franck és Hertz történelmi jelentőségű kísérletei döntően hozzájárultak ahhoz, hogy az 1920-as években a korábbi Rutherford-modellt a fejlettebb Bohr-féle atommodell váltotta fel. Az utóbbi évtizedekben a tanszergyártó cégek a Franck–Hertz kísérlet látványos demonstrációs összeállítást kínálnak fizikaórai bemutatásra. Az összeállítás központi eleme az üvegfalú fűthető szekrényben elhelyezett Franck–Hertz-cső. A szekrény homlokfalán a cső kapcsolási rajza látható, míg az üvegfalon keresztül megfigyelhető a cső elektródarendszere, a fűtött katód, az anód és közti térben elhelyezett rács. A kísérlet tartozéka az üzemeltetést szolgáló tápegység, és a grafikont a számítógép képernyőjén megjelenítő szoftver is. A demonstrációs összeállítást az ábra mutatja.



A demonstrációs Franck–Hertz-csőket általában higany-gőzzel töltik, de más töltőgázzal is forgalmazzák. A lassan növekvő maximumok és minimumok szabályos váltakozása adja a jellegzetes Franck–Hertz-görbét. Két szomszédos maximum, illetve minimum távolsága állandó. Ezt a feszültséget *gerjesztési potenciálnak* nevezzük. (A gerjesztési potenciál értéke a töltőgáztól függ, Hg esetén kb. 4,9 V, Ne esetén kb. 20 V).

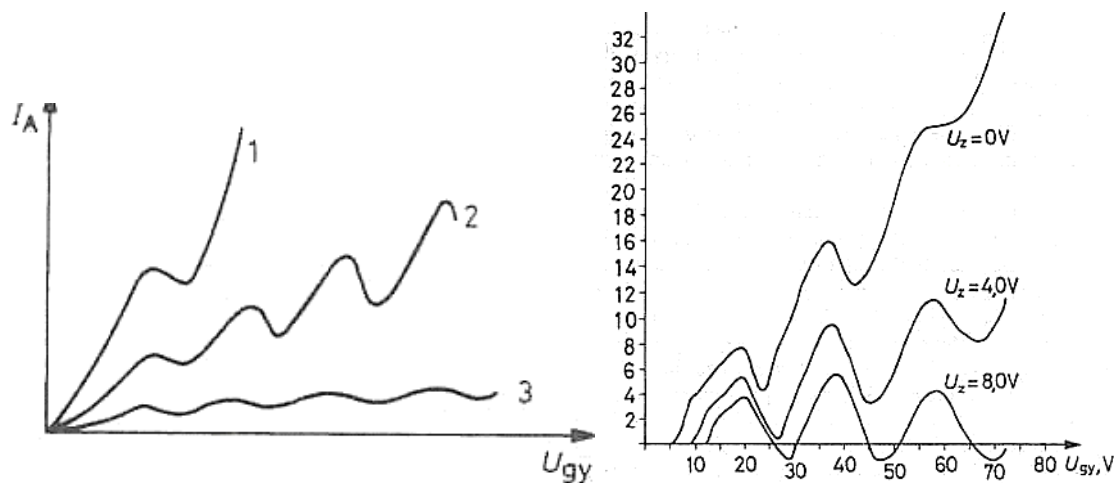
A demonstrációs kísérlet könnyen és gyorsan üzembehelyezhető. A kísérlet összeállításakor, ügyeljünk a következőkre:

- A berendezés összeállításakor vigyázzunk a helyes polarításra.
- Az összeállítás után először a katód fűtőfeszültségét állítsuk be, s várjunk néhány percet a katód hőmérsékletének stabilizálódásáig. Ezután állítsuk be a záró- (és az irányító) feszültséget. Végül a gyorsítófeszültséget kis lépésekben növelve, megkezdődhet az U_{gy} - I_A jelleggörbe felvétele. A cső kikapcsolását fordított sorrendben végezzük.

- Semmiképpen ne használjunk a cső leírásában javasolt értékeknél nagyobb feszültségeket! Különösen a nagy fűtő-, illetve gyorsítófeszültség veszélyes a cső szempontjából; ekkor ugyanis a lavinaszerűen növekvő elektronáram miatt a cső a gázkisülési csövekhez hasonlóan „begyújt”, és hamar tönkremehet.

A klasszikus változat a *higanygőz töltésű cső* (Franck és Hertz ezzel dolgoztak). Az ilyen csőben normál körülmények között a higany kis cseppek formájában van jelen. A kísérlet megkezdése előtt a csövet 180-200 °C-ra kell melegíteni, hogy kellő sűrűségű higanygőz töltsen ki az elektródok közti teret. A Franck–Hertz-görbe lefutása erősen függ a hőmérséklettől. Az ábrán bemutatott grafikonok közül az 1. számú a nem kellően felfűtött csővel adódik, a 2. optimális hőmérsékleten végzett mérés, a 3. grafikon a túlfűtött csőre jellemző.

A *neontöltésű cső* legnagyobb előnye a higanyossal szemben, hogy nem kell külön felfűteni.



[Vissza >>>](#)

KVANTUMFIZIKA – AZ ANYAGSZERKEZET KVANTUMFIZIKAI LEÍRÁSA

10. Az anyaghullámok

11. A hullámfüggvény meghatározása

12. Kötétt részecskék kvantummechanikai
leírása

13. Az atomok kvantumfizikája

Bevezetés

A kvantumfizika elvi problémái

A kvantumfizika alapjainak tárgyalása során a klasszikus fizikai képet, vele többnyire össze nem illő önkényes feltevésekkel kiegészítve és a történeti utat követve, toldoztuk-foltoztuk a meglévő fizikai ismereteket.

Ha lényegi képet akarunk adnia kvantumfizikáról, nem kerülhetjük el az anyaghullámok bevezetését és tulajdonságainak leírását. Mielőtt ebbe belefognánk vázoljuk a fogalmi és didaktikai nehézségeket, amelyekkel a téma tárgyalásakor tanárként szembesülünk.

Az első és még nem a fogalmi kérdéseket érintő probléma, hogy a kvantumfizika szinte a fizika minden területén szerzett ismeretekre támaszkodik. Emiatt, és a téma különleges absztrakciós igénye miatt, a klasszikus fizikaanyag lezárásaként biztos érdemes belefognunk. Feldolgozásához mindenképpen szükségesek a fényinterferenciára vonatkozó ismertek is.

A következő probléma oka az, hogy a mikrorészecskékkel kapcsolatban nem rendelkezünk érzékszervi tapasztalatokkal és tulajdonságaikat a makroszkopikus testekre vonatkozó ismereteink alapján akarjuk megérteni, és a fizika más területein kialakult fogalmakkal leírni. Az atomi részecskék leírásának problematikusságát mutatja, hogy a kvantumfizika kidolgozásában úttörő szerepet játszó kutatók gyakran maguk is visszarettentek következtetéseik végig vitelétől és teljes elfogadásától.



KV1. A kvantumfizikát megalapozó tudósok kételyei (kiegészítő háttéranyag)

[Részletek >>>](#)

Miért tanítsuk a kvantumfizikát, és mit tanítsunk?

Felmerülhet a kérdés, hogy ha a kvantumfizika ilyen sok félreérthető és nehezen emészthető fogalomra épül, ugyanakkor matematikai modellje sem egyszerű, akkor miért nem hagyjuk ki a középiskolai tantervekből, hiszen fogalmi nehézsége miatt a tévképzetek melegágyává válhat, és gyengítheti a természettudományokba vetett hitet is. A kvantumfizikára épülő, gyakorlati életben használt eszközök sokasága azonban elkerülhetetlenné teszi a középfokú képzésben is a fontosabb törvények megismertetését. A kvantummechanika egyre nagyobb teret nyer a fizikai kutatásban, a nanotudományok, a lézerfizika, az orvosi képalkotás, a félvezetők fizikája mind kvantummechanikai alapon tárgyalható. Ezekén túl a kvantummechanikán alapul néhány teljesen új és ígéretes technológia is, például a kvantumszámítógép, a kvantum titkosítás stb. A kvantumfizika mára az egyetemi tanterveknek is szerves részévé vált, mind a mérnöki, mind a természettudományos területen. A gyakran absztrakt és túlmatematizált tárgyalásmód azonban az utóbbi években már vita tárgyát képezi.

A kvantummechanika tárgyalására több lehetőség is adódik, de mindegyiknek vannak nehézségei. A leginkább kézenfekvő talán a történeti út, ami a témakör története mentén a fogalmakat kialakulását követve dolgozza fel az anyagot. A történet követése módot ad a viták és a kételyek ismertetésére és a tananyag színesítésére az alapítókkal kapcsolatos anekdoták, érdekességek elmesélésével. Ennek persze könnyen lehet a következménye, hogy a tananyagból kimaradnak, a fontos és nehezen megérthető részek, a mese üressé, természettudományos szinten értéktelenné válhat. Ezt mindenképpen el kell kerülnünk. Egy másik lehetőség, hogy a technikai alkalmazások mentén, a lézerek, tranzisztorok stb., vezessük be a szükséges fogalmakat. Ez az út a szerteágazó alkalmazások miatt minden bizonnyal a tanár érdeklődésének szolgáltatja ki a tantervet, és a fogalmak elméleti jelentése könnyen elsikkadhat benne. Természetesen választhatjuk a matematikai modellekre épített feldolgozást is, ez azonban középiskolák számára nyilvánvalóan nem követhető.

A kvantummechanika alapvetően változtatta meg a világról alkotott képünket és a természeti jelenségek megértését. A tanításban a legnehezebb a megszokott szemlélettől eltávolodó fogalmak megértetése. Sajnos nem követhető a kvantummechanika alkalmazásának útja, azaz a fogalmak mély definíciójának taglalása helyett annak megmutatása, hogy a Schrödinger egyenletre épülő számítások mindig helyes eredményre vezetnek. Schrödinger hullámegyenlete másodrendű parciális differenciálegyenlet, egzakt megoldással csak igen egyszerű esetekben bír, így a matematikai nehézségek ezt az utat lezárják a középiskolai tanításban.

Megjegyzés:

- Newton második törvénye is másodrendű differenciálegyenletre vezet, mégis régóta része a középiskolai tananyagban. Ott azzal váltjuk ki a matematikai ismereteket, hogy néhány egyszerű esetben pl. állandó erő, harmonikus erő esetén kísérletekre támaszkodva közöljük a megoldást, és a továbbiakban olyan feladatokra szorítkozunk, amelyek tárgyalásához ezek az ismeretek elegendőek. Hasonló érvelés néhány esetben a Schrödinger-egyenlet megoldásakor is elegendő, azonban mivel a Schrödinger-egyenlet parciális differenciálegyenlet, s a megoldandó feladatok is kevésbé kézzelfoghatóak, mint a mechanikában, ez az eljárás csak a feladatok szűk körében alkalmazható.

Kénytelenek vagyunk megmaradni a fogalmi leírásnál, ami elkerülhetetlenné teszi a szóbeli hasonlatok és metaforák használatát. Ebben komoly segítséget nyújthat a számos kvantummechanikát népszerűsítő könyv (Gribbin, 2001, 2004, Károlyházi, 1976). Az anyag kettős természete, a valószínűségi törvények, a határozatlansági elv és a szuperpozíció azonban egyáltalán nem nyilvánvaló fogalmak, nem szemléletesek és ellentmondanak a klasszikus fizikai ismereteknek. Megértésük gyökeres változást igényel gondolkozásunkban, és ez tanításban is a fogalmi változtatás megvalósításához szükséges útkeresésre ösztönöz. Segítségünkre lehet, hogy vizualizációs technika fejlődése olyan eszközt ad kezünkbe, ami a nehéz matematikai leírás helyett szimulációkkal szemlélteti a hullámfüggvény tulajdonságait és a kvantummechanika rendszerek viselkedését. Jelenleg a tanítás ebbe az irányba, a fogalmi megértetés és a vizualizációs módszerek alkalmazásának irányába, tolódik. A kevés matematikát használó, fogalmi megközelítés teszi lehetővé, hogy a kvantummechanikát középiskolában, illetve egyetemi bevezető kurzusokban tanítsuk. Sok országban (Anglia,

Német és Olaszország, USA) már több éve, jelenleg pedig Hollandiában és Franciaországban vált a felső középiskolai tantervek részévé, de Norvégiában is tesztelnek kísérleti kvantummechanika modulokat. Hazánkban a kvantummechanika oktatásának nagy hagyományai vannak, azonban az 1980-as évektől bevezetett tankönyvek tudományos alaposága és matematika precizitása jócskán túlterhelte a középiskola korosztály befogadó képességét.

A középiskolai tanítás javasolt útja

Nyilvánvaló, hogy a középiskolában a fenti lehetőségek keverékéből érdemes kialakítani az adott tanulócsoporthoz illeszkedő tanítási módszert.

A következőkben a módszertani javaslatok területén olyan utat követünk, ami véleményünk szerint a leginkább elfogadott álláspontot tükrözi, azaz a Bohr-Born-féle valószínűségi értelmezést fogadjuk el. Ez az értelmezés szorosan épül a fény kettős természetének felismerésére. A mikrorészecskék kvantumfizikai leírása akkor hozott gyökeres változtatást a klasszikus fizikai szemlélettel szemben, amikor a fény kettős természete után a hullám-részecske kettősséget tetszőleges anyagi részecskékre kiterjesztették. A tanításban, mint már említettük, számos utat választhatunk, előnyösnek tartjuk azonban a történeti út követését és a mikrorészecskék szemléletünkől idegen viselkedését alátámasztó kísérletek (vázlatos) ismertetését. A kvantummechanikát megalapozó kísérletek többnyire bonyolultak, ezért egyszerűsített és a fénytanból ismert változataikkal való analóg tárgyalást javasoljuk.

Középiskolai szinten, mindenképpen érdemes feldolgozni az anyag kettős természetére vonatkozó kísérleteket, bevezetni a hullámfüggvény valószínűségi jelentését, a határozatlansági relációt és az alagúteffektust (Ez utóbbi a technikai alkalmazások sokasága miatt szükséges).

10. AZ ANYAGHULLÁMOK

10.1. De Broglie hipotézise



A fény tulajdonságainak hullám-részecske kettőssége 1924-ben arra indította *Louis de Broglie* (1892-1987) francia fizikust, hogy feltételezze, ez a kettősség az anyagi világ általános sajátja. Annak mintájára, hogy a hullám tulajdonságú fényhez részecske (foton) rendelhető, de Broglie a *részecskéknél* (elektron, proton stb.) *hullámot feleltetett meg*. A hullám jellemzőinek (λ, f) meghatározásához a fotonra vonatkozó összefüggéseket fogadta el. Eszerint az E energiájú, m tömegű, v sebességű, részecskéhez

$$f = \frac{E}{h}$$

frekvenciájú és

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

hullámhosszúságú síkhullám rendelhető.

De Broglie hipotézise jól illeszkedett az atomról alkotott kezdeti elképzeléshez, a Bohr-modellhez. Ha ugyanis elfogadjuk, hogy az elektronhoz a fenti egyenletek szerint hullám rendelhető, akkor a Bohr-féle elektronpályák önkényesnek tűnő kiválasztására magyarázat adódik. Az atommag körül az elektron olyan pályákon kering stabilan (sugárzás nélkül), amelyekre teljesül, hogy a pálya hossza épp az elektron λ hullámhosszának egész számú többszöröse.

Megjegyzés:

- De Broglie doktori disszertációjában tisztán elméleti megfontolások alapján vetette fel a részecske hullám kettősség minden részecskére történő általánosítását. A gondolat annyira új volt, hogy Langevin a doktori bizottság elnöke elküldte a dolgozat kéziratát Einsteinnek, hogy véleményét kérje. Szerencsére Einstein rendkívüli és előre vivő elméletként értékelte, így a dolgozat védelme zöld utat kapott.

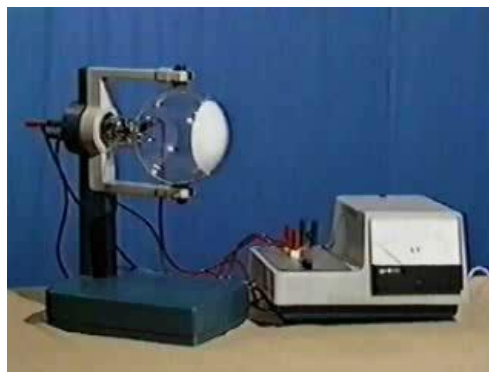
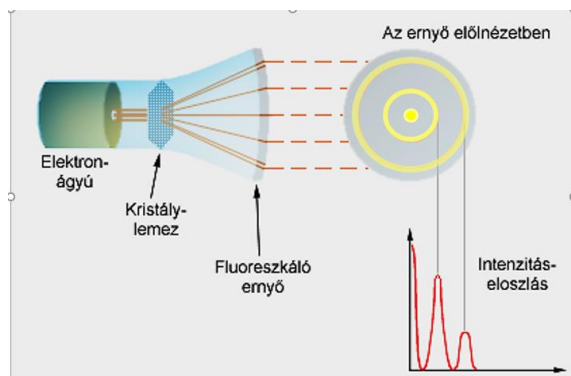
10.2. A mikrorészecskék hullámtermészetének kísérleti igazolása

A részecskehullám dualizmus kísérleti bizonyítékait a fizikusok azonnal elkezdték keresni. Érthető, hogy De Broglie hipotézisét a legkönnyebben hozzáférhető részecskére az elektronra vonatkozóan sikerült először kísérletileg igazolni.

10.2.1. A Davisson–Germer-kísérlet

Davisson és *Germer* 1927-ben kristályra bocsátott elektronnyaláb elhajlásával megmutatta az elektron hullámtulajdonságát, és igazolta a hullámhossz és a részecske impulzusa között de Broglie által feltételezett kapcsolat fennállását.

Davisson és Germer célszerűen átalakított katódsugárcsővel végezte kísérletét. A felgyorsított elektronok útjába vékony kristálylemezt (grafitot, illetve fémfóliát helyezett el. Feltételezték, hogy az elektronok, ha hullámtulajdonsággal rendelkeznek, a kristályban szabályosan rendeződött atomokon a röntgenhullámokhoz hasonlóan elhajlást szenvednek és a katódsugárcső fluoreszkáló ernyőjén interferenciakép jön létre. A kísérlet sikerült, a polikristályos fólia koncentrikus gyűrűkből álló interferencia-képet eredményezett. A interferencia-gyűrűk távolságát mérve az elektronok hullámhossza, kristály rácsállandójának ismeretében meghatározható. Davisson és Germer kísérleti berendezésének sematikus vázlatát a rajz, az eszköz iskolai demonstrációs változatát a fotó mutatja.



10.1. ábra: Davisson–Germer-kísérlet elvi vázlata; Demonstrációs iskolai mérőeszköz

Amennyiben a fénytannban elegendő részletességgel tárgyaltuk a fényelhajlás tulajdonságait, és foglalkoztunk a röntgensugárzás kristályokon történő elhajlásával, akkor az ott tárgyaltak alapján a demonstrációs kísérlettel könnyen meghatározhatjuk az elektronhullám hullámhosszát is. A hullámhossz meghatározásához - a fény hullámhosszának optikai rácson történő elhajlásához hasonlóan - az interferenciagyűrűk középponttól mért d távolságát kell mérnünk. Az elektronok hullámhossza a rácsállandó (a) és a kristály ernyőtől mért távolságának (l) ismeretében, az optikából ismert,

$$\lambda = a \sin \alpha \approx a \frac{d}{l}$$

összefüggéssel határozható meg. A demonstrációs kísérletben az elektronok gyorsító feszültsége változtatható. A gyorsító feszültség változtatásával az interferenciagyűrűk távolsága megváltozik. A kísérleti megfigyelések jól értelmezhetők a λ hullámhossz és az elektronok impulzusa (sebessége) közti $\lambda = \frac{h}{mv}$ de Broglie-összefüggéssel.

Az anyaghullámokkal végzett interferenciakísérletek technikailag rendkívül bonyolultak, pontos megértésük sok ismeretet kíván. A középiskolai tanításban el kell fogadnunk (illetve tanítványainkkal el kell fogadtatnunk), hogy a kísérleteknek csak elvi vázát, valamint az eredmények lényegét ismertetjük. A kísérletek és kísérleti eredmények ismertetése azonban nem hagyható el. A mikrorészecskék fizikáját éppen eléggé terheli a közvetlen érzékszervi tapasztalatszerzés hiánya, nem távolíthatjuk tovább a témakört a diákoktól azzal, hogy elveszük a hangsúlyt a kísérleti tapasztalatszerzésről is. A kvantumfizika törvényeit következetesen mindig a kísérleti tapasztalatokra kell építeni. Ebben a kontextusban alapvető fontosságú a tanár személyiségének hitelessége. Amennyiben a korábbi tanulmányok során tanítványainkat meggyőztük a kísérletek fontosságáról és saját szakmai tudásunkról, akkor jó esélyünk van arra, hogy a kvantumfizika alapozó kísérleteinek egyszerűsített változatai alapján meggyőző tapasztalati alappal szolgáljunk a kvantumfizika meglepő tulajdonságainak elfogadtatásához.



KV2. Az elektrondiffrakció iskolai kísérleti igazolása és a Planck-állandó meghatározása (kiegészítő szakköri tananyag)

[Részletek >>>](#)

Megjegyzés:

- A részecske hullám dualitás kísérleti kimutatása az elektron esetén természetesen nem bizonyítja, hogy minden anyagi részecske hullámként is viselkedik. (Elképzelhető lett volna, hogy ez csupán az elektron sajátossága.)
- Érdekes a de Broglie-hullámhossz nagyságrendjét néhány jellegzetes mikrofizikai és hétköznapi életből vett példával illusztrálni. Határozzuk meg a katódsugárcsőben 100 V feszültséggel gyorsított elektron és proton hullámhosszát. Az U feszültséggel gyorsított, Q töltésű, m tömegű részecske hullámhossza a $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ összefüggésből számítható ki, ha felhasználjuk, hogy a munkatétel szerint a részecske impulzusa:

$$p = mv = m \sqrt{\frac{2QU}{m}} = \sqrt{2QUm}$$

- Ebből az elektron és a proton tömegét, valamint töltését behelyettesítve az elektron hullámhosszára $3,9 \cdot 10^{-9}$ m a protonéra pedig $9 \cdot 10^{-11}$ m adódik. Határozzuk meg egy makroszkopikus méretű test pl. az 1t tömegű 108 km/ó sebességű személygépkocsi hullámhosszúságát is. Azt kapjuk, hogy $\lambda_{\text{gép}} = 2,2 \cdot 10^{-38}$ m. Összehasonlításképpen emlékeztetünk arra, hogy a vörös fény hullámhossza $6-700$ nm = $6-7 \cdot 10^{-7}$ m. Megállapíthatjuk, hogy a gépkocsi esetén esély sincsen arra, hogy olyan méretű akadállyal találkozzék, amelyen elhajlást szenved.

A hullámtermészet a kvantumfizika alapfeltevése, azonban világos az is, hogy hétköznapi világunkban egyáltalán nem jelenik meg. A fenti példák mutatják, hogy ezért a Planck-állandó kicsiny értéke felelős, hiszen a makroszkopikus testek de Broglie-hullámhossza ezért válik extrém módon kicsinnyé.

Mindennek ellenére a fizikusok egyre nagyobb és nagyobb méretű részecskékkel végeznek interferencia kísérleteket, hogy kimutassák azok hullámtulajdonságát, kutatva ezzel a mikro- és makrovilág határvonalát. A kísérleti fizikusok szívós munkával igazolták, hogy az elektronok mellett sokféle más atomi és atomcsoportokból álló részecske (neutronok, atomok, kis molekula csoportok, a bakiballnak nevezett C₆₀, molekulák, 400-nál több atomból álló szerves molekulák) is mutatnak hullámtulajdonságokat és eleget tesznek a de Broglie-összefüggésnek. A bakiball molekulákkal és a nagy szerves molekulákkal végzett kísérletek azért is jelentősek, mert ekkora atomcsoportok lényegében már klasszikus testnek tekinthetők, így átmenetet jelentenek a mikro- és makrovilág között. Ezek a kísérletek már elegendő bizonyítékul szolgálnak arra, hogy higgyünk abban, hogy a részecske hullám dualizmus minden test elválaszthatatlan tulajdonsága.

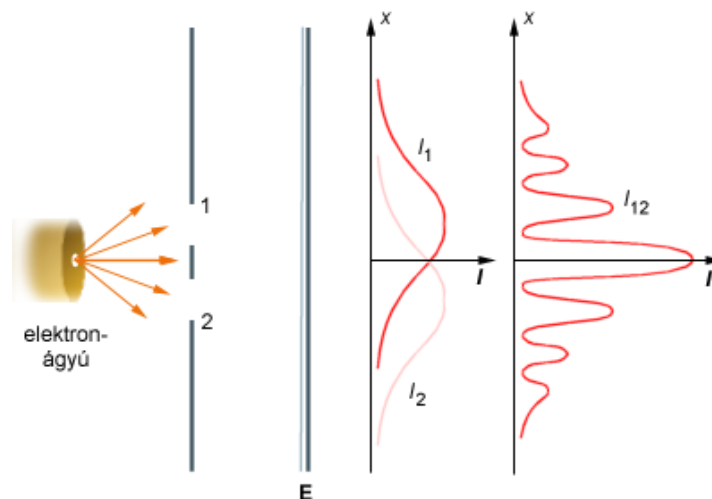
10.2.2. A kétréses interferenciakísérlet

Az elektronok hullámtulajdonságát először Davisson és Germer kísérlete bizonyította. Ezt követően több további kísérlettel is igazolta a fényhullámok és az elektronhullámok hasonlóságát. Közülük az egyik legszemléletesebb, és elvileg is a legegyszerűbb, az elektronok

kétréses interferenciája, ami a fény hullámtermészetét igazoló történelmi Young-kísérlet elektronokkal történő megismétlése.

A Young-kísérletet a fénytannban általában részletesen elemezzük (lásd Optika [2.4.1.](#) Young történelmi kísérlete a fény hullámtermészetének igazolására). Itt lényegében pontosan ugyanazt ismétljük az elektronra vonatkozóan, amit a fény esetén már elmondtunk. A részletes elemzés bár sok tekintetben ismétlődő jellegű mégis igen fontos, mert a részecskék merőben szokatlan viselkedését emeli ki.

Az elektronokkal végzett kétréses interferencia-kísérlet sematikus rajzát az ábra mutatja.



10.2. ábra: Kétréses interferencia elektronokkal

Az elektronágyúból kilépő elektronok útjába helyezett falon két kis nyílás van. A két résen áthaladó elektronnyaláb az E ernyőn (pl. fotólemezen) interferenciaképet hoz létre. Az ábrán feltüntettük, hogy hogyan változik az ernyőn a sugárzási intenzitás (I), ha csak az egyik, illetve, ha csak a másik rés van nyitva, valamint azt, hogy milyen az intenzitáseloszlás, ha mindkét rés nyitott. Ha a két rés közül csak az egyik van nyitva, akkor az ernyőn folytonos intenzitáseloszlást (I_1 , illetve I_2 észlelünk, amelynek maximuma pontosan a nyitott réssel szemben van. Ha mindkét rés nyitott, az ernyőn jellegzetes intenzitásingadozás – interferenciakép jelenik meg. Érdekes, hogy a legerősebb intenzitásmaximum éppen a kísérleti elrendezés tengelyébe esik, noha vele szemben a falon nincs nyitott rés.

Az elektronok becsapódását részleteiben tanulmányozhatjuk, ha fotólemez helyett az ernyő síkjában mozgatható kifelületű elektronikus érzékelőt alkalmazunk. Különösen jól érzékelhető képet kapunk, ha a detektor hangjelzést ad, ha felületét a kritikus értéknél nagyobb energia éri.

Kísérletsorozatot végezve a berendezéssel fontos következtetésekre juthatunk. Ha az elektronnyaláb intenzitása elegendően kicsi, akkor a detektor mindig hasonló, impulzusszerű hangjelzést ad.

Az ernyő adott pontján elhelyezett érzékelő teljesen véletlenszerűen jelez. Hosszabb, azonos időtartamokban ismételve a mérést, a kattanások száma az átlagos érték körül ingadozik. A detektor helyétől függően az átlagos beütésszám változik. Az átlagos beütésszámot ábrázolva a

hely függvényében, a fotólemezen rögzített intenzitáseloszláshoz hasonló görbét kapunk. Két nyitott rés esetén az eloszlási görbe jellegzetes interferenciakép. Ha a gyenge sugárzást egyetlen érzékelő helyett egyszerre többel detektáljuk, további fontos megfigyelést tehetünk. Az ernyő különböző pontjaiban elhelyezett detektorok közül véletlenszerűen hol egyik, hol másik szólal meg, de *két detektor egyszerre soha nem jelez*.

A kísérleti tapasztalatok az elektron sajátos, klasszikus szemléletünk számára szokatlan tulajdonságaira mutatnak rá.

Az elektronok *osztatlan egészként*, apró golyóként, csapódnak be az ernyő egy-egy pontjába. Nem tudjuk megmondani, hogy az ernyő mely pontjára melyik elektron érkezik, sőt még azt sem, hogy mikor csapódik be egy-egy elektron a kiválasztott pontba. Az elektronok becsapódása *véletlenszerű*. Az osztatlan egészként becsapódó elektronok tapasztalatával a klasszikus szemlélet szerint ellentmondásban áll az ernyőn felfogható interferenciakép. *Az interferencia térben kiterjedt hullámokra utal. Különösen érdekes az a tény, hogy az interferenciakép akkor is kirajzolódik, ha az elektronnyaláb intenzitása olyan kicsi, hogy biztosak lehetünk benne, hogy egyszerre csak egyetlen elektron tartózkodik a berendezésben.* Ilyenkor nem lehet tehát szó több elektronhullám interferenciájáról - az elektron látszólag önmagával interferál, majd becsapódik az ernyő valamelyik pontjára. A hulláminterferenciának megfelelő intenzitáseloszlás sok-sok elektron becsapódásának eredménye. Az intenzitás-maximumok, illetve -minimumok helyét az elektronok de Broglie-hullámhosszát felhasználva a hulláminterferencia klasszikus szabályai szerint lehet meghatározni.

Összefoglalva: Az elektroninterferencia kísérleti tényére építve a mozgó elektronhoz (általában minden részecskéhez) hullámvonulat rendelhető. A hullámcsoportot a $\Psi(x,t)$ hullámfüggvény jellemzi, amelynek közelítő hullámhosszát a de Broglie-összefüggés adja meg.

Megjegyzés:

- A kísérlet bár elvileg egyszerűnek látszik, gyakorlati kivitelezése igen nehéz. A mérést csak 1961-ben sikerült O. Jönsson-nak elvégeznie. Zeitschrift Für Physics-ben megjelent cikkének angol fordítását az Am. J. Phys. (AJP) 1973-ban jözölte. (Jönsson, 1973). A kétréses elektroninterferencia kísérlet didaktikai értéke rendkívül nagy, ezért a kísérleti fizikusok komoly erőfeszítéseket tettek és tesznek arra, hogy viszonylag egyszerű eszközökkel is megvalósítható legyen. A legnagyobb problémát kezdetben a megfelelő rések elkészítése jelentette, az elektronmikroszkópia fejlődése 2007-re azonban lehetővé tette, hogy nano méretű réseket készítsenek, így már közönséges elektronmikroszkópban is sikerült megvalósítani a kísérletet.

WWW

[Kétréses interferencia szimulációja](#)



Ezeknek bemutatása nagyban segít a kísérleti berendezések elvi felépítésének és az eredményeknek a pontos megértésében. A szimulációval „játszó” diákokban az interferenciakísérletből adódó eredmények vizuálisan is rögzülnek. Megfelelő tanári irányítás mellett a tananyag fogalmi szintű elsajátítása is könnyebbé válik. A “megfelelő tanári irányítás” azonban csak akkor lehetséges, ha a tanár maga is befektette az időt a program használatának elsajátításába. Bár a programok kezelése nagyon egyszerű, a lehetőségek megismerése és a szimuláció tanórai beépítése csak saját tapasztalatok megszerzésével érhető el.



KV3. kiegészítő módszertani ajánlások a kétréses elektroninterferencia tanításához (tanári háttéranyag)

[Részletek >>>](#)

10.3. A hullámfüggvény valószínűségi értelmezése

Az egyedi elektronok véletlenszerű becsapódása nyomán a de Broglie-féle hullámok fizikai



értelmezését *Max Born* (1882-1970) adta meg. Eszerint az elektronok $\Psi(x,t)$ hullámfüggvénye az ernyő különböző pontjaiban a becsapódás valószínűségét határozza meg. Mivel azonban a hullámfüggvény negatív értékű is lehet, nem azonosítható közvetlenül a valószínűséggel. Az elektron becsapódási valószínűsége az ernyő adott helyén a kiszemelt helyen vett hullámfüggvény abszolút értékének négyzetével¹ arányos. Ez olvasható le a kétréses interferencia-kísérlet intenzitásgörbéiről is. Egyetlen rés esetén az ernyőn mérhető intenzitás a berendezés szimmetriatengelyében:

$$I_1 = I_2 \propto |\Psi_{10}|^2 = |\Psi_{20}|^2$$

Két nyitott rés esetén:

$$I_{12} \propto |\Psi_{10} + \Psi_{20}|^2 = 4|\Psi_{10}|^2$$

$$I_{12} \propto 4I_1 = 4I_2$$

¹ A Ψ -függvény általában ún. komplex függvény, amely $\Psi = \alpha + i\beta$ alakban írható fel. Itt α és β a szokásos hullámfüggvények, és $i = \sqrt{-1}$. Mivel fizikai jelentése csak valós függvénynek lehet, ezért kellett a megtalálási valószínűségét a Ψ -függvény abszolút értékének négyzetével kapcsolatba hozni. Definíció szerint:

$$|\Psi|^2 = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2$$

Látható, hogy amennyiben $\beta \equiv 0$, azaz az állapotfüggvény valós, akkor $|\Psi|^2 = \Psi^2$.

azaz két rés esetén az intenzitás az ernyő közepén éppen négyszerese az egyetlen rés esetén kapott intenzitásnak. (Az állapotfüggvény mellé írt alsó indexek közül az első azt jelzi, hogy melyik rés van nyitva, a második szám a függvény értékének aktuális helyét jelzi a kísérleti elrendezés tengelyétől számítva, így a jelen felírásban szereplő 0 arra utal, hogy az állapotfüggvény értékét a berendezés tengelyében vizsgáljuk.)

Általánosan megfogalmazva: Az anyaghullámokat leíró $\Psi(x,t)$ hullámfüggvény (állapotfüggvény) ismeretében megmondható, hogy az adott részecske a térnek valamely kis ΔV tartományában milyen valószínűséggel mutatható ki. A részecske megtalálási valószínűsége a tetszőlegesen kiszemelt ΔV térfogatban arányos a hullámfüggvény adott r helyen vett abszolút értékének négyzetével:

$$P(r) = |\Psi(r)|^2 \Delta V$$

ahol $P(r)$ a megtalálási valószínűséget jelenti az r -nél levő ΔV térfogatban, $|\Psi(r)|^2$ hullámfüggvény r helyen vett abszolút értékének négyzetét jelöli.

Figyelembe véve, hogy az egész térben a vizsgált részecske biztosan megtalálható - azaz ennek a valószínűsége 1 -, adódik, hogy

$$\sum |\Psi|^2 \Delta V = 1$$

illetve

$$\int_V |\Psi|^2 \Delta V = 1$$

A hullámfüggvény négyzete tehát a részecske térbeli megtalálási valószínűsége-sűrűségét jellemzi.

10.4. Az anyaghullámok tulajdonságai

Louis de Broglie az mv impulzusú részecskéhez $\lambda = \frac{h}{mv}$ hullámhosszúságú végtelen síkhullámot rendelt ($\Psi = \Psi(x,t)$). Az impulzus és a hullámhossz kapcsolatát a kísérletek a mérési hibán belül igazolták. A síkhullámról a bevezetés szintjén a tanulóknak elegendő annyit mondanunk, hogy hullámfrontjai egymással párhuzamos síkok. Humán osztályokban a hullámfüggvény matematikai alakjának felírása nélkül érdemes bemutatni szimulációt a térben terjedő síkhullámokról, illetve a síkban terjedő egyenes hullámokról. Amikor a részecskékhez anyaghullámot rendelünk - hacsak a diákok nem kérdeznek rá közvetlenül - célszerű hallgatni arról, hogy a hullám kitérése milyen fizikai mennyiség változását írja le.

Megjegyzés:

- A hullámfüggvény tárgyalásának szintje a tanulók hullámtani ismereteinek mélységétől függ. A legegyszerűbb esetben mind a rajzos, mind pedig az algebrailag felírt hullámfüggvény esetén egydimenziós esetre szorítkozunk. A rajzolt szinuszhullám a térben és időben periodikus hullámfüggvényről készített

pillanatfelvételt, vagy egyetlen pontban a hullám lefolyását mutatják. A vízszintes tengelyre a helykoordináta, vagy az idő, a függőlegesre pedig a hullámfüggvény kitérése kerül. A tapasztalat szerint a síkhullámot a tanulók nehezen fogadják el az elektron képeként, nehezebben, mint a hullámcsomag elképzelést (a hullámcsomaggal a következő pontban foglalkozunk). Ennek oka valószínűleg az, hogy a tanulók számára a végtelen kiterjedésű síkhullám és az eddigiekben mindig pontszerűnek képzelt elektron semmiképpen sem egyeztethető össze. A diákok klasszikus fizikában gyökerező szemléletének van valóságtartalma. A mozgó részecske kiterjedésének mindenképpen végesnek kell lennie, hiszen az elektronok a katódból kilépve véges sebességgel, mérhető idő alatt érik el a fluoreszkáló ernyőt, továbbá, az ernyőn minden egyes elektron becsapódását egy-egy pontszerű felvillanás jelzi. Ez mindenképpen ellentmond a „végtelen kiterjedésű síkhullám” elképzelésnek.

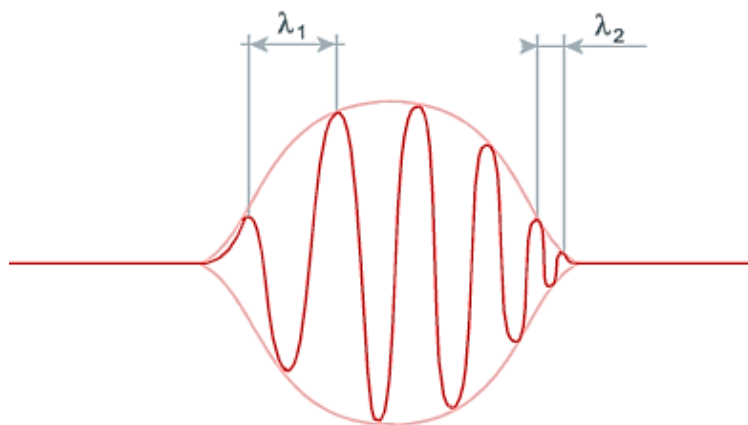


KV4. A síkhullám kép ellentmondásossága (emelt szintű kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)

10.4.1. A hullámcsomag

A síkhullámmal kapcsolatos problémák megszüntethetőek, és a Davisson–Germer-kísérlet tapasztalatainak is eleget teszünk, ha a részecskéhez nem végtelen kiterjedésű síkhullámot, hanem az ábrán bemutatott *véges hullámvonulatot (hullámcsoportot)* rendeljük hozzá. A továbbiakban ezt a hullámcsoportot jelöljük $\Psi(x,t)$ -vel és *hullámcsomagnak* nevezzük.



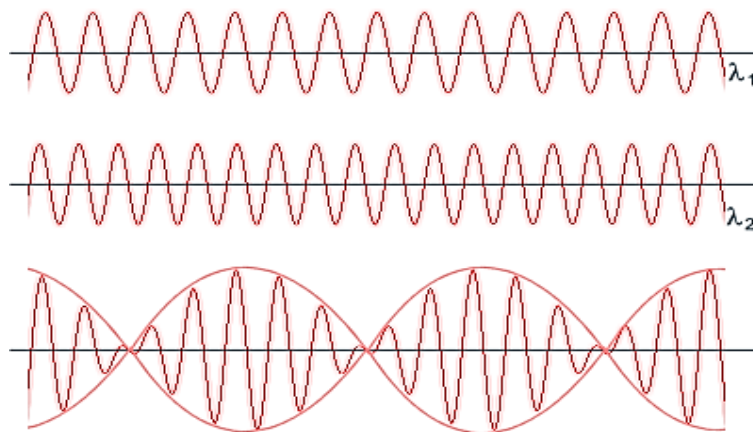
10.3. ábra: Hullámcsomag

Hullámcsoport esetén a hullámfüggvény amplitúdója csak a tér kisebb-nagyobb tartományában különbözik zérustól. A hullámcsoporttal reprezentált részecske (elektron) nem végtelen kiterjedésű, hanem a térnek abban a tartományában található, ahol $\Psi(x,t) \neq 0$.

A hullámcsomag bevezetésekor erőteljesen támaszkodni kell a szemléletre és a csillapított rezgéssel vett analógiákra, ahol a csökkenő amplitúdó ellenére felismerhető a mozgás periodicitása. A hullámcsomag azonban egyáltalán nem periodikus függvény, a hullámzás jellegű kitérés függvényben legfeljebb néhány periódus fedezhető fel. Ennek alapján képzelhetjük úgy, hogy a teljes csomaghoz hozzárendelhető valamilyen hullámhosszúság. Az ábra mutatja, hogy a csomag két széléhez különböző hullámhossz rendelhető.

A hullámcsomag kép rendbe szedhető, ha megmutatjuk, hogy az ábrán bemutatott hullámcsomagot több különböző hullámhosszúságú szinusz hullám szuperpozíciójaként lehet előállítani. A kicsit eltérő hullámhosszúságú hullámokból egyre többet összeadva különböző hullámcsomagok állíthatók elő. Egyes osztályokban a hullámok összeadásának számítógépes bemutatásánál meg is állhatunk. Elegendő annyit mondani, hogy a csomag terjedési sebessége az amplitúdó maximumának terjedési sebességével azonos, ami általában nem egyezik az összetevő hullámok sebességével.

A legegyszerűbb eset két egymástól kicsit eltérő frekvenciájú hullámnak a szuperpozíciója, a hangtanból jól ismert. „lebegési görbe”. Az ábra két eltérő frekvenciájú tiszta szinuszhullám szuperpozíciója által létrejött - hullámcsomagokból álló - lebegési görbét mutat.



10.4. ábra: Két szinuszhullám szuperpozíciójából adódó „lebegési görbe”

Több különböző hullámhosszúságú összetevő esetén a lebegési görbe periódustávolsága egyre növekszik. Megmutatható, hogy amennyiben λ_1 -től λ_2 -ig minden lehetséges hullámhosszú síkhullám (λ folytonosan változik) részt vesz a hullámcsomag kialakításában, akkor a lebegési periódustávolság végtelen, és az eredő hullám a tér korlátozott tartományára kiterjedő egyetlen hullámcsoport. A hullámcsoport Δx kiterjedése annál nagyobb, minél kevésbé tér el egymástól λ_1 és λ_2 értéke, illetve annál kisebb, minél tágabb az összetevő síkhullámok hullámhossztartománya.

A λ_1 és λ_2 hullámhosszhatárok közé eső végtelen sok különböző hullámhosszúságú hullám eredőjeként adódó hullámcsoport nem szabályos szinusz hullám, nincs pontosan meghatározható hullámhossza. A hullámcsoportot csak közelítő λ értékekkel jellemezhetjük. A hullámcsoporthoz rendelt λ olyan szinuszos síkhullámnak a hullámhossza, amely viszonylag jól fedésbe hozható a csoport hullámvonulatával. Az interferenciakísérletekkel igazolt de

Broglie-összefüggés a hullámcsoporra jellemző közelítő λ értéket határozza meg, illetve hozza kapcsolatba a részecske impulzusával. (A λ közelítő jellegéből adódó impulzusbizonytalansággal a következő szakaszban foglalkozunk.)

Megjegyzés:

- Matematikailag jobban felkészült osztályokban hivatkozhatunk a Fourier tételre, amely szerint tetszőleges, periodikus, vagy nem periodikus zavar előállítható periodikus függvények összegeként, (vagy hullámszám szerinti integráljaként.) A tétel kimondása nélkül érdemes ezt számítógépes szimulációkkal érzékeltetni.

WWW

[Hullámcsomag-szimuláció \(Fourier\)](#)



A hullámcsoport bevezetésével feloldódik a de Broglie-hullámokkal jellemzett részecske terjedési sebességének és a relativitáselméletnek látszólagos ellentmondása. A térben lokalizált részecske sebessége ugyanis nem a hullám fázissebességével, hanem az egész hullámcsomag előrehaladási sebességével, az ún. *csoportsebességgel* azonos. A hullámvonulat fázissebességének nincs szemléletes fizikai tartalma.

A hullámfüggvény a részecske helyét (a hullámcsomag szélességén keresztül), és a részecske impulzusát (a de Broglie-hullámhosszon keresztül), röviden a részecske állapotát jellemzi. Ez azt jelenti, hogy a hullámfüggvénnyel történő leírással nemhogy veszítünk a klasszikus fizikai leíráshoz képest, hanem inkább nyerünk, hiszen a hely és impulzus együttes jellemzéséhez jutunk.

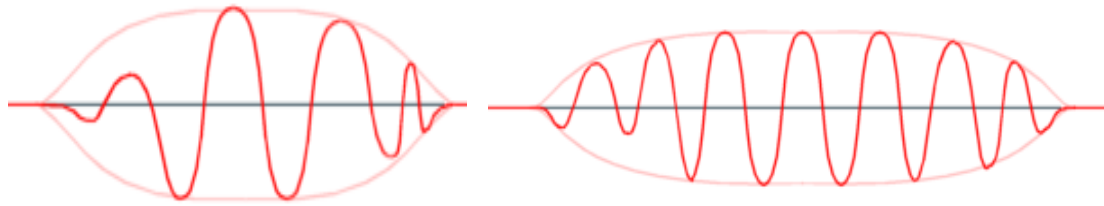


KV5. A fázis- és csoportsebesség (emelt szintű kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)

10.4.2. A hullámcsomag szétfolyása

A hullámcsomag mozgása során nem őrzi meg alakját. Ha pillanatfelvételeket készítünk róla, akkor kiderül, hogy a csomag szétterül.



10.5. ábra: Szétfolyó hullámcsomag

Az ábra az x -tengely mentén v sebességgel mozgó részecskének megfelelő hullámvonulat terjedését szemlélteti. A $t = 0$ pillanatban a részecske az $x_1 \pm \Delta x_1/2$ helyen található (Δx_1 a hullámcsomag kiterjedését jelöli). A későbbi $t = T$ időpillanatban a részecske már elmozdult korábbi helyéről, a hullámcsomag az x tengely mentén eltolódva az $x_2 \pm \Delta x_2/2$ helyen található. Az ábra érdekes jelenségre utal. A részecske mozgása során az öt jellemző hullámvonulat *térbeli kiterjedése megnő*.

A jelenséget a hullámcsopotról már elmondottak segítségével szemléletesen értelmezhetjük. A hullámcsoportot csak közelítő λ hullámhosszal jellemezhetjük. Az ilyen közelítő hullámhossz megadása azonban nem teljesen egyértelmű, több olyan ideális síkhullám is található, amelyek hullámhossza kicsit különböző, a hullámcsopot amplitúdó ingadozását azonban mindegyik egyaránt jól közelíti. Tegyük fel, hogy a mozgó ábrán bemutatott hullámcsopot egyformán jól jellemezhető a λ_1 , illetve λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) hullámhosszakkal, illetve a de Broglie-összefüggés értelmében a $p_1 = mv_1$, illetve $p_2 = mv_2$ impulzusokkal ($p_1 < p_2$). A mozgó részecske helye T idő elteltével így egyaránt megadható az

$$x_2 = x_1 + v_1 T$$

illetve az

$$x'_2 = x_1 + v_2 T$$

kifejezéssel. Ez csak akkor lehetséges, ha a hullámcsomag kezdeti Δx_1 kiterjedése T idő alatt

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + (v_2 - v_1) T$$

értékűre növekedett. Az ábra azt is jól érzékelteti, hogy a hullámcsopot kiszélesedése nem a hullámhosszak növekedésének, hanem új maximum- és minimumhelyek megjelenésének következménye. A kiszélesedett hullámvonulatnak a terjedés irányába eső tartománya inkább a kisebb (λ_2) a hátsó része inkább a nagyobb (λ_1) hullámhosszal jellemezhető.

A fenti példa általános törvény speciális esete. A hullámcsomagok részletesebb matematikai vizsgálata mutatja, hogy *a magára hagyott (erőmentesen mozgó) hullámcsomag mindig szétterül. A szétfolyás annál gyorsabb, minél keskenyebb volt az eredeti szélesség.*

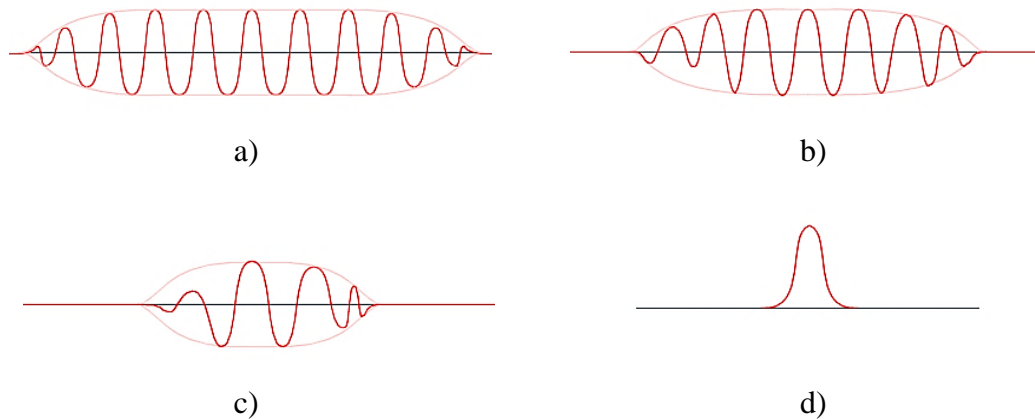
10.5. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció



Megmutattuk, hogy a szabadon mozgó részecskékhez (pl. elektronhoz) hullámcsoport rendelhető. Már ebből érthetően következik, hogy a mozgó részecske pontos helyéről nem beszélhetünk. A „részecske helye” kifejezésen a hullámcsoport Δx kiterjedésének megfelelő tartományt kell értenünk, ennél pontosabb helymeghatározás lehetetlen.

A következőkben a hullámcsomag sajátjaiból kiindulva a kvantummechanika egyik legfontosabb alapösszefüggésével, az ún. *Heisenberg-féle határozatlansági relációval* foglalkozunk. A relációt W. Heisenberg (1901-1976) német fizikus mondta ki.

A mozgó részecskéhez rendelt hullámcsomagot térbeli kiterjedése, Δx , valamint átlagos hullámhossza (illetve annak egyértelműsége vagy éppen nagy bizonytalansága) jellemzi. A rajzos ábrák különböző kiterjedésű hullámcsomagokat mutatnak.



10.6. ábra: Hullámcsomagok

Az a) rajzon szélesen kiterjedt hullámvonulat látható, középső része szinte egyetlen tökéletes szinuszhullám. Az ilyen hullámcsoporttal jellemzett részecske helyéről csak igen keveset mondhatunk – a részecske a térnek abban a széles tartományában található, amelyre a hullámvonulat kiterjed. A részecske impulzusát azonban igen pontosan megmondhatjuk, hiszen a hullámcsoport λ -ja jól meghatározható.

A b) hullámcsoport kiterjedése kisebb, de egyúttal a középső szabályos tartomány mérete is csökkent, a torzult periodicitású szélső tartományok relatív aránya megnőtt. Az így jellemzett részecske helyét jóval pontosabban ismerjük, mint az előző esetben, a jellemző hullámhossz, illetve az ehhez kapcsolódó impulzus megadása azonban sokkal bizonytalanabb, mint a korábbi hullámvonulatnál.

A c) és különösen a d) ábrán a hullámcsomag már nagyon élesen egy helyre korlátozódik, olyannyira, hogy a hullám periodicitása is nehezen ismerhető fel. Az ilyen hullámcsomag csak nagyon széles hullámhossztartományba eső harmonikus hullámok összetételével állítható elő.

Ekkor a részecske helyét jó pontossággal ismerjük, impulzusa felől azonban csak nagy bizonytalansággal nyilatkozhatunk.

A fenti ábrákra támaszkodó szemléletes gondolatmenetből arra következtethetünk, hogy *a részecskék helye és impulzusa nem határozható meg egyszerre tetszőleges pontossággal.*

Az ábrásor alapján egyszerű becslést adhatunk a hely és impulzus együttes pontosságára. A részecske helyének bizonytalanságát a hullámcsomag kiterjedésével, azaz a

$$\Delta x \approx n\lambda = \frac{nh}{p}$$

mennyiséggel becsülhetjük meg. Az impulzus pontossága a hullámhossz pontosságán múlik, s az utóbbi nyilván annál pontosabb, minél több hullámvonulatból áll a hullámcsomag. Így a hullámhossz $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ relatív bizonytalanságára $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{1}{n}$. Mivel $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta p}{p}$, így

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{1}{n}$$

A hely és az impulzus bizonytalanságára adott becslésből a hely és impulzus bizonytalanságának szorzatát kifejezve azt kapjuk, hogy

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx h$$

A speciális alakú hullámfüggvényekre intuitív úton kapott összefüggés tetszőleges jelalak esetén az alábbi, csekély mértékben módosított formában áll fenn:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ezt a Heisenberg által 1927-ben kimutatott összefüggést *határozatlansági relációnak* nevezzük. Hasonló összefüggés teljesül természetesen mindhárom hely- és impulzuskomponensre, azaz

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

A határozatlansági reláció – mint látni fogjuk – jól használható bizonyos fizikai mennyiségek nagyságrendi becslésére. Ezekben a becslésekben a határozatlansági relációt többnyire

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$$

alakban használjuk.

A makroszkopikus szemléletünk számára rendkívül szokatlan határozatlansági reláció annak a következménye, hogy a mikrofizikai mérésekben a mérőeszköz mindig befolyásolja a mérés eredményét. A makroszkopikus mennyiségek mérésekor természetes, hogy tetszőleges

pontosságú mérés esetén található olyan módszer, amellyel a mérőeszköz hatása kiküszöbölhető az eredményből. A mikrofizikai mérésekre ez nem teljesül!

Megjegyzés:

- A határozatlansági reláció nem a mérési pontatlanság következménye, hanem a mikrorészecskék hullámfüggvénnyel való leírásának következménye. Vegyük észre, hogy a hullámfüggvény egyszerre ad információt a mikroobjektum helyéről és impulzusáról, és így a kettő közötti összefüggésről. Emiatt nemhogy pontatlanabb a klasszikus leírásnál, hanem inkább sokrétűbb, gazdagabb nála. Szemléletes képként elfogadhatjuk, hogy minél hosszabb a csomag, annál inkább elkent a részecske helye, és minél kisebb a szélesség és egyben cizelláltabb a hullám kép, annál kevésbé állapítható meg az impulzus.

Elemi szintű kvantummechanikai tárgyalás során gyakran indulunk ki a határozatlansági relációból. Így például a H-atom mérete (az alapállapotú elektron térbeli kiterjedése közelíthető a megtalálási bizonytalanság mértékével) és energiája is megbecsülhető a határozatlansági reláció alapján (lásd [13.1.1.](#)).



KV6. A határozatlansági reláció igazolása gondolkísérlettel (emelt szintű kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)



KV7. További határozatlansági relációk (emelt szintű kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)

11. A HULLÁMFÜGGVÉNY MEGHATÁROZÁSA

A kísérleti tapasztalatok (atomfizika) azt mutatják, hogy az elektron, de általában más mikrorészecskék és részecskékből álló rendszerek is, leírhatók hullámfüggvénnyel. A hullámfüggvény jellemzi a rendszer fizikai állapotát és mozgását is. A szabad részecskéket (pl. szabad elektront) leíró hullámfüggvényt - a hullámcsomagot - intuitív alapon írtuk fel, illetve rajzoltuk meg. Nyilvánvaló, hogy általános érvényű és jól használható mikrofizikai elmülethez csak akkor juthatunk, ha megtaláljuk azt a törvényt, amelynek segítségével a hullámfüggvény tetszőleges probléma esetén meghatározható.



Erwin Schrödinger (1887-1961) osztrák fizikus optikai analógia alapján írta fel elsőként azt az egyenletet, amelynek megoldása tetszőleges körülmények közt megadja adott részecske vagy részecskerendszer hullámfüggvényét. Az egyenlet, amelyet az ő tiszteletére *Schrödinger-egyenletnek* nevezünk, a mikrofizikában leggyakrabban használt alapösszefüggés. Az Erwin Schrödinger által felírt hullámegyenletek megoldásai a mikrorészecskék leírására szolgáló de Broglie-féle hullámfüggvények.

A Schrödinger egyenlet másodrendű parciális differenciálegyenlet, így középiskolai szinten nem tanítható, ezért a hullámfüggvény meghatározásához intuitív alapon kell eljutnunk. Annyit azonban mindenképpen érdemes elmondani, hogy létezik a hullámfüggvény meghatározására alkalmas matematikai módszer.

A valós fizikai problémák nagy részében az elektronok nem szabadon mozognak, hanem valamilyen térrészben például az atommagok környezetében a vagy a fémek belsejében kötött állapotban találhatók, és állapotuk időben állandó, stacionárius.

Az atomokhoz kötött elektronok megtalálási valószínűsége csak a mag közelében számottevő. Ez azt jelenti, hogy a részecskét leíró hullámfüggvény mindig csak az atommag közelében különbözik nullától, vagyis az elektron a mag környezetében lokalizálódik. (Ez lényeges eltérés az eddig tárgyalt szabadelektron-hullámfüggvényhez, a hullámcsomaghoz képest, amely az idő múlásával egyre szélesedik, „szétfolyik”.)

Az atommaghoz kötött elektronok tárgyalása előtt bevezetőként megvizsgáljuk, hogyan határozható meg az olyan mikrorészecske lehetséges hullámfüggvényei, amelyet a lehető legegyszerűbb módon azzal tettünk kötötté, hogy merev falú képzeletbeli dobozba zártuk.

Megjegyzés:

- Érdemes megjegyezni, hogy az 1970-es években hazánkban is folytak próbálkozások a Schrödinger-egyenlet középiskolai tárgyalására. Azóta általánosan elfogadottá vált, hogy a kvantummechanikai hullámfüggvény tanítása nem fér bele a fizika középiskola keretei közé. A tárgyalás ugyanis érdemben meghaladja az átlagos középiskolás diákok kognitív szintjét és matematikai ismereteit is. A Schrödinger-egyenlet jelentősége abban van, hogy módszert ad a kötött elektron-rendszerek - így az atomi elektron-állapotok kvantitatív energetikai tárgyalására. A módszer kevésbé szemléletes, de hatékony, kár, hogy a modern fizikának ezt a területét a középiskolásoknak nem lehet bemutatni. Mivel a kvantummechanika eredményei fontosak ezeket kvalitatív ismertetésére szorítkozhatunk. Jegyzetünkben a kötött elektronállapotok tárgyalását a mechanikai hullámtanban tárgyalt állóhullámok analógiájára vezetjük be. Schrödinger-egyenlet mellékletben közölt vázlatos tárgyalását tanári emlékeztető anyagnak szánjuk.

KV8. A Schrödinger-egyenlet tárgyalása (tanári emlékeztető anyag)

[Részletek >>>](#)

12. KÖTÖTT RÉSZECSKÉK KVANTUMMECHANIKAI LEÍRÁSA

Az atomban az elektronok állandósult állapotban vannak. Az elektronok hullámként történő leírására olyan hullámfüggvényeket keresünk, amelyek a tér egy tartományára terjednek ki és nem változtatják helyüket. A fizikai intuícióna hivatkozva kell diákjainkkal elfogadtatni, hogy a kötött részecskék állapotát leíró hullámfüggvények – *állóhullámok*.

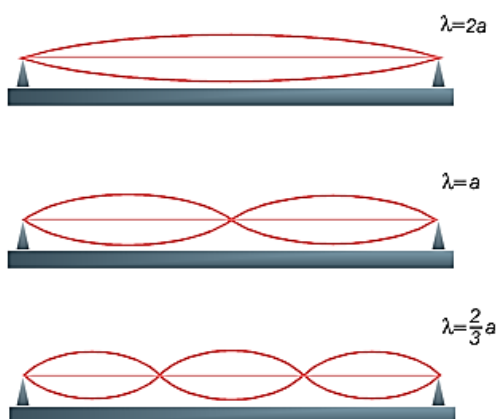
Megjegyzés:

- A gumikötélen kialakuló állóhullámokra visszagondolva nyilvánvaló, hogy az állóhullám nem azt jelenti, hogy a kötélen részecskéi nem mozognak, hanem azt, hogy a hullámfüggvény időben mindenütt ugyanúgy változik, csak az amplitúdója változik helyről helyre. Matematikailag ezt úgy fejezhetjük ki, hogy a hullámfüggvény csak helytől és csak időtől függő rész szorzatára bontható. Az állóhullám alakot a térben állandó amplitúdó függvény rajzolja ki, így a mindenütt azonos időfüggést gyakran figyelembe sem vesszük.

Az állóhullámokat leíró függvények a hullámalakot kialakító geometriai kényszer figyelembevételével sokszor számítások nélkül a szemléletes állóhullám kép alapján közvetlenül is felírhatók, illetve felrajzolhatók. Ez lehetővé teszi, hogy néhány egyszerűbb kvantummechanikai problémát középiskolai szinten a Schrödinger-egyenlet megoldása nélkül is tárgyaljunk. A következőkben ezzel a módszerrel, a bonyolult számítások kikerülésével érzékeltetjük a kötött elektronok kvantummechanikai leírását.

A húrmodell

Az a egyenes szakaszon kötött részecske lehetséges állapotfüggvényei a húron kialakuló rugalmas rezgés állóhullámjainak felrajzolásával és analógiás értelmezésével határozhatók meg. A rugalmas húron kialakuló állóhullámokkal a hangtan, vagy a rugalmas hullámok tárgyalásakor már kellett foglalkozni, most az ott tárgyalt ismerteket idézzük fel. Az a hosszúságú, mindkét végén befogott rugalmas húron kialakuló állóhullámok esetén a húr két befogott végén csomópont van, azaz a kitérés zérus. A csomópont létrejöttéhez az szükséges, hogy az a távolságon a hullámhossz felének egész számú többszöröse férjen el, azaz $a = n \frac{\lambda}{2}$. Ennek a feltételnek megfelelő legegyszerűbb állóhullám alakzatokat mutatja az alábbi ábrásor. Analógia alapján fogadjuk el, hogy az a hosszúságú szakaszra kényszerített részecskét jellemző $\varphi(x)$ állapotfüggvény amplitúdó függvénye ugyanolyan, mint a rezgő alakja.



12.1. ábra: Állóhullámok húron

Hasonló feltételnek kell teljesülnie a mikrorészecske hullámfüggvényére is. Így a $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ összefüggéssel adódik, hogy

$$a = n \frac{h}{2mv}$$

Miután az a szakaszon a részecske energiája tisztán kinetikus energia, $mv = \sqrt{2mE}$, így

$$a = n \frac{h}{2\sqrt{2mE}}$$

Felhasználva a $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ összefüggést, az n -edik energiaértékre

$$E_n = n^2 \frac{\pi}{2m} \left(\frac{\hbar}{a} \right)^2$$

eredmény adódik.

A húrmodell alapján a kvantumfizika számos fogalmát szemléletesen és jól érthető módon vezethetjük be.

A húrmodell alapján kapott energia kifejezésből látható, hogy a részecske lehetséges energiáját az $n = 1, 2, \dots$ értékekkel számlálhatjuk. Az n számot *kvantumszámnak* nevezzük. A kvantumszám szemléletesen azt mutatja meg, hogy az állapotfüggvénynek az adott szakaszon hány csomópontja van. Ha a kvantumszám értéke n_l , akkor a hullámfüggvénynek $(n_l - 1)$ belső, illetve a két véggel együtt összesen $(n_l + 1)$ csomópontja van. Látható, hogy a dobozba zárt részecske energiája nem változhat folytonosan, hanem csak diszkrét lépésekben. Nyilvánvaló az is, hogy az energia azért válik kvantálttá, mert a részecske térbeli mozgását korlátoztuk.

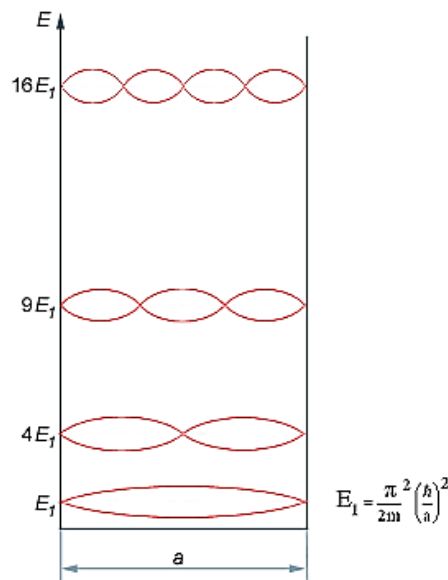
Általában igaz, hogy a kötött részecskék mozgása csak meghatározott energiák, az ún. *energia-sajátértékek* mellett állandósulhat. Az energia-sajátértékekhez tartozó állapotfüggvényeket *energia-sajátfüggvényeknek* nevezzük. A minimális energiájú állapotot, amely az $n = 1$ kvantumszámhoz tartozik, a részecske *alapállapotának* nevezzük.

Alapállapotban a részecske energiája

$$E_n = \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{\hbar}{a}\right)^2$$

A részecskék alapállapottól különböző olyan állapotait, amelyben a hullámfüggvénynek belső csomópontjai vannak, *gerjesztett állapotoknak* nevezzük. A lehetséges energiaértékek sorozata adja a részecske *energiaspektrumát*.

Tanulságos a húrra korlátozott részecske energiaszintjeinek grafikus megjelenítése is. Az, hogy a részecske csak az l hosszúságú szakaszon tartózkodhat, fizikailag úgy is fogalmazható, hogy a részecskének végtelen nagy energiára lenne szüksége ahhoz, hogy a húrt elhagyja. Ezt úgy fejezhetjük ki, hogy a részecske végtelen mély potenciálgödörben van. Szemléltessük ezt azzal, hogy a húrra merőleges tengelyt rajzolunk a részecske energiájának megjelenítésére. A doboz helyett érdemes azt képzelni, hogy a részecske végtelen mély potenciálgödörben van.



12.2. ábra: Az állóhullámok és energiaszintek a végtelen mély potenciálgödörben

A részecske a gödör alján mozog, de érdemes a „dobozt” jelképező a szélességű szakasz végpontjaiba állított függőleges egyenesekkel jelképezni a végtelen magas „energiafalakat” és a falakra energiaskálát tenni. Ezután, a részecske állapotait leíró állóhullámokat olyan magasságba rajzolhatjuk be, amekkora a gerjesztett állapot energiája.

Megjegyzés:

- A módszertani kutatások arra utalnak, hogy a fenti kép nem nyilvánvaló a diákok számára, és gyakran a magasabbra rajzolt hullámfüggvény egyben azt is jelenti számukra, hogy a részecske felemelkedik.
- Az analógia sohasem tökéletes, most sem. A rezgő húr állóhullámai megmutatják a hullámfüggvény amplitúdójának alakját, de a húr rezgése energetikai analógiaként már nem megfelelő. Az állóhullámként rezgő húrnak kinetikus és potenciális energiája is van. Az elektronhullám azonban a potenciálgödörben csak kinetikus

energiával rendelkezik, és bármennyire nem szemléletes is de el kell fogadnunk, hogy impulzusa és sebessége is van, annak ellenére, hogy az l hosszúságú szakaszt nem hagyja el.

- Az egyetlen szakaszra korlátozott részecske n -ik hullámfüggvényének amplitúdója egyszerűen felírható például koszinusz függvénnyel közelítve, ha figyelembe vesszük, hogy a húrként viselkedő részecske a húr kezdő és végpontjában rögzített, ott az amplitúdó zérus, és az n -ik hullámfüggvény éppen n fél hullámot alkot a húron. A részleteket a melléklet tartalmazza.



KV9. Hullámfüggvények az egydimenziós potenciálgödörben (emelt szintű kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)

A végtelen mély potenciálgödörben tartózkodó elektron gerjesztésének tanulmányozásával előkészíthetjük az atomok gerjesztésének és vonalas színekének magyarázatát. A potenciálgödörben kötött elektron csak egyik diszkrét energiaszintről a másikra ugorva bocsáthat ki, illetve nyelhet el energiát. Amennyiben a gerjesztés megvilágítással, tehát fotonok elnyelésével történik, akkor az elektron a fehér fényből a következő hullámhosszakat szűrheti ki:

$$f = \frac{\Delta E_{n,k}}{h} = \frac{1}{h} \left(n^2 \frac{1}{8m} \left(\frac{h}{a} \right)^2 - k^2 \frac{1}{8m} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right) = \frac{h}{8ma^2} (n^2 - k^2)$$

A fehér fény színekében ekkor sötét vonalak jelennének meg. Ebben az esetben az elektron a gerjesztő foton elnyelésével a k -ik pályáról ugrik az n -ik pályára, tehát $n > k$.

Az alapállapotból történő gerjesztés esetén a formula egyszerűsödik:

$$f = \frac{\Delta E_n}{h} = \frac{h}{8ma^2} (n^2 - 1)$$

Természetesen a gerjesztett elektron ugyanilyen fotonok kibocsátásával kerülhet vissza alacsonyabb energiájú állapotba. A színek a kibocsátott frekvenciának megfelelően vonalas lenne.

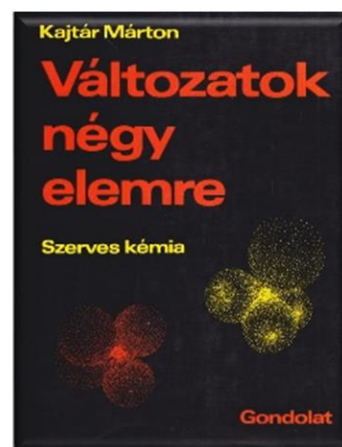
A vonalszakaszra zárt elektron energiáját a képletben szereplő állandók mellett döntően az a szakasz hossza szabja meg. A molekuláris tartományában a méretek néhány ångströmtől néhány nanométerig terjedhetnek. Minél kisebb helyre szorítjuk be az elektront, annál nagyobb lesz a kinetikus energiája, és annál nagyobb energia szükséges a gerjesztéséhez. Érdekes a nagyságrendek érzékeltetésére néhány húr hosszúság mellett kiszámítani az alapállapot és az első gerjesztett állapot energiáját, valamint az átmenet során elnyelt foton frekvenciáját:

a (m)	$E_1 = \frac{h^2}{8ma^2}$ (aJ)	$E_2 = \frac{4h^2}{8ma^2}$ (aJ)	$hf = E_2 - E_1$ (aJ)
10^{-10}	5,43	21,8	16,35
$2 \cdot 10^{-10}$	1,36	5,44	4,08
$4 \cdot 10^{-10}$	0,34	1,36	1,02
$6 \cdot 10^{-10}$	0,15	0,6	0,45 (ibolya)
$8 \cdot 10^{-10}$	0,08	0,32	0,24 (piros)
$10 \cdot 10^{-10}$	0,05	0,2	0,15
$20 \cdot 10^{-10}$	0,014	0,056	0,042
$30 \cdot 10^{-10}$	0,006	0,024	0,018

Látható, hogy minél kisebb szakaszra korlátozzuk az elektront, annál nagyobb lesz a kinetikus energiája.

Megjegyzés:

- A rövid egydimenziós szakaszra korlátozott elektron példája és a rá vonatkozó számítások mesterkéltnek, és feleslegesen száraz elméleti ismeretnek tűnhetnek. Ezért érdemes megemlíteni, hogy ilyen modellszámítás alkalmas természetben megfigyelhető jelenségek szemléletes értelmezésére is. Ilyen érdekesség pl. egyes speciális felépítésű láncmolekulájú vegyületek (pl. a sárgarépa színét adó *karotin*, vagy a paradicsom piros színét okozó likopin) színének értelmezése. Ezen anyagok molekuláinak gerincét láncszerűen egymáshoz kapcsolt szénatomok adják. Az elektronok számára energetikailag kedvező (az elektron kinetikus energiája csökken), ha az elektron-állóhullám a szénlánc egész hosszára kiterjed. (Ezt az teszi lehetővé, hogy a láncban a minden második szénatom kettős kötéssel kapcsolódik össze. A második, ún. π -kötést adó elektronok delokalizálódnak széthúzódnak a lánc hosszában. A delokalizált π -kötés fogalmát a diákok kémiából általában ismerik.) Az így kialakuló állóhullám-állapotok közt olyan kicsi a hullámhossz-különbség (azaz a kinetikus energia-különbség), hogy az már a látható fény energiatartományába esik. Az ilyen molekulák tehát képesek elnyelni, és az elektronok gerjesztésére fordítani, a látható fény egyes színösszetevőit. Az anyagot ezért az elnyelt szín kiegészítő színében látjuk. A karotin molekula a fehér fényből a kék színt nyeli el, ezért a sárgarépa színe a kék kiegészítő színe, azaz narancssárga. Az érett paradicsom piros színének magyarázata, hogy a gyümölcsben lévő likopin molekulák a fehér fény zöld összetevőjét nyelik el.
- A láncmolekulák szerkezetéről és színéről, továbbá egyes síkban kiterjedt szerves molekulák (pl. *klorofill*, és a vér festékanyagát adó *hemin*.) színének, biológiai



funkciójának, és molekulaszervezeti felépülésének kapcsolatáról fizikai szempontból is érdekes ismertek találhatók Kajtár Márton „Változatok négy elemre” (Gondolat Kiadó Bp. 1984, Bp.) két kötetes szerves kémia könyvében.)



KV10. Mennyire zárt a véges mélységű potenciáldoboz?
Alagúteffektus (fakultatív kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)



KV11. Két dimenziós potenciál-tartományba zárt részecske (fakultatív kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)



KV12. Háromdimenziós potenciáldobozba (téglatestbe) zárt részecske (fakultatív kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)



KV13. Színcentrumok sókristályokban (kiegészítő gyakorlati példa a potenciáldobozba zárt elektronra)

[Részletek >>>](#)

13. AZ ATOMOK KVANTUMFIZIKÁJA

Az atomok felépítésével a diákok a kémia órákon ismerkednek meg. A szerkezeti kémia az atomban kötött elektronok sajátágaival foglalkozik. Magyarázza az anyagok kémiai tulajdonságait, az atomokat molekulákká összekapcsoló kémiai kötések, az elemek periódusos rendszerét stb. A kémiában tanított elektronszerkezeti ismeretek általában az egyszerű tényközlés szintjén maradnak, mélyebb értelmezést nemigen kapnak, hiszen a fogalmi alapoásra a 9-10. évfolyamon nincs lehetőség. A kvantumfizika alapismeretei után a fizikában érdemes felidézni a kémiából tanult atomszerkezeti ismereteket és legalább kvalitatív, félkvalitatív szintű magyarázatokkal, szemléletes képekkel, analógiákkal utólag megvilágítani a már tanultak háttérét. A kémiai elemek atomjaiban a pozitív töltésű mag vonzó hatására a negatív elektron megkötődik a mag környezetében. Kvantumfizikai szemlélettel ezt úgy

fogalmazzuk, hogy az atom elektronjainak megtalálási valószínűsége csak az atommag közelében számottevő, azaz a részecskét leíró hullámfüggvény mindig csak az atommag közelében különbözik nullától. Az atommag gömbszimmetrikus Coulomb-terében befogódott elektronok hasonlóan viselkednek, mint korábbi egyszerűen tárgyalható képzelt példánkban a potenciáldobozba zárt elektronok. A mag környezetében az elektronok gömbszerű potenciáldobozba zárt állóhullámokként értelmezhetők. Az elektronokat leíró állapotfüggvények segítségével magyarázhatók az anyag olyan alapvető kémiai sajátságai is, amiket sem a klasszikus atommodellek, sem az őket követő félklasszikus Bohr-modell nem tudott igazán értelmezni. (Pl. az atomok színe, beleértve a spektrumok finomszerkezetét is, a periódusos rendszer felépítése, a különböző kémiai kötések létrejötte, az atomok közti kötések erőssége, irányfüggése, ami pl. meghatározza a molekula térbeli alakját stb.) Az atomok kvantumfizikájának részletes tárgyalására a fizika órák keretében sincs lehetőség. A legegyszerűbb atom a hidrogén atom néhány tulajdonságát – pl. az atom kiterjedését, elektronjának alapenergiáját, a hidrogén néhány színekvonalának értelmezését már a Bohr-modell megadta. Folytatásként megvizsgáljuk, hogy mennyiben kell változtatnunk a Bohr-modell alapján a H-atomról kialakított képen, továbbá félkvantitatív és kvalitatív példákon érzékeltetjük a diákokkal, hogy a kvantumfizika általános módszer az atomi részecskék, atomok, molekulák tulajdonságainak, illetve a kémiai anyag magasabb szintű szerveződésének értelmezésére.

13.1. A hidrogénatom

A legegyszerűbb atom a *hidrogénatom*, amely egyetlen protonból és egyetlen elektrontól áll. A kvantumviselkedés vizsgálata során a protont mozdulatlan pontszerű részecskének tekintjük, és lényegében csak a potenciál meghatározására használjuk, amelyben az elektron mozog. Hullámszerű viselkedést csak az elektronnak tulajdonítunk. Mivel a hidrogénatom stabil képződmény, és az elektron a mag környezetébe lokalizálódik, leírására olyan stacionárius hullámfüggvényeket kell keresnünk, amiket a mag közelében tart a $V(r) = -k \frac{q_e}{r}$ Coulomb-potenciál. (q_e a mag töltése, r a magtól való távolság, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$).

Hullámfüggvény és potenciáldoboz

A hidrogénatom hullámfüggvényeinek egzakt meghatározása az egyetemi kvantummechanika kurzusok alapfeladata, szokásos módszere a Schrödinger-egyenlet megoldása. Tanárként a módszert és annak eredményeit mindenképpen ismernünk kell, de középiskolai szinten ezt nem használhatjuk. A hullámfüggvények meghatározásához a korábbi hullámtani ismeretek intuitív alkalmazásával és a dobozba zárt részecske tárgyalásakor már felhasznált rezgéstani analógiák alapján juthatunk el. A hidrogén-atom azonban nem téglalatest alakú merev falú potenciáldoboz. Alakja gömbszerű, de határai nem szigorúan rögzítettek, hiszem az atomban az elektront-hullámot a mag pozitív töltéséből adódó Coulomb-potenciál lokalizálja a térben. A feladat kettős: egyrészt a meg kell találnunk a hidrogénmag gömbszimmetrikus potenciáletterében

kialakuló elektron-állóhullámokat, másrészt meg kell határoznunk a potenciálgömb effektív sugarát, ami az állandósult hullámállapotok kiterjedését jellemzi.

Gondolatmenetünk kétlépcsős. Tétélezzük fel először, hogy az elektron a legalacsonyabb energiájú állapotban (alapállapot) van, ahol az elektron számunkra még nem ismert r sugarú gömbben tartózkodik.

A Heisenberg-féle határozatlansági reláció ($\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$) értelmében, ha az elektron helyének bizonytalansága $2r$, az elektron impulzusára $\Delta p \geq \frac{\hbar}{4r}$ adódik. Figyelembe véve a de Broglie-összefüggést az alapállapotú elektron-állóhullám hullámhossza jó közelítéssel $\lambda \approx 4r$. A kapott eredmény jó térbeli megfelelője a körabroncsra feszített szappanhártya alaprezgése. Jól megfigyelhető, hogy az abroncs kerülete csomóvonal, a hártya közepe pedig maximális amplitúdóval rezeg (lásd: [Fizika tanítása a középiskolában II. kötet](#), MH.8., 126.old.)

A hidrogén atom elektronja alapállapotban olyan térbeli állóhullámmal írható le, amelynek hullámhossza az atom kiterjedésének kétszerese (az atom határán csomófelület található és az elektronhullám amplitúdója az atom közepén, (az atommag helyén) maximális. A H-atom elektronjáról adott szemléletes kép akkor ad mennyiségi leírást a legegyszerűbb kémiai elem atomjáról, ha meg tudjuk határozni az alapállapotú elektron hullámhosszát (azaz az atom kísérletileg meghatározható átmérőjét), továbbá kiszámítjuk a mag körül keringő elektron energiáját (aminek egyeznie kell a hidrogén ionizációs energiájának mért értékével).

13.1.1. Az H-atom alapállapotának mennyiségi jellemzése (az atom mérete, az elektron kötési energiája)

Az önkényesen választott r sugarú gömbben kialakuló állóhullámok energiájának megállapításához azt kell figyelembe venni, hogy az elektron nem merev falú dobozba került. Mivel a potenciálfal nem végtelen magas, így a gömb sugarát az állóhullám alakhoz igazíthatjuk az energiaminimum elv alkalmazásával. Az elektron energiája stabilis állapotban minimális. Klasszikus közelítésben ez azt jelentené, hogy az elektron csak akkor kerülhet egyensúlyi állapotba, ha belezuhan a magba. Ez azonban a Heisenberg-féle határozatlansági reláció miatt nem történhet meg! Ha az elektront nagyon kicsiny sugarú gömbbe szorítjuk, akkor az igen pontos helykoordináta miatt a $v = 0$ átlagsebesség mellett igen nagy sebességbizonytalanság lép fel.

Az r sugarú gömbben tartózkodó elektron esetén a hely bizonytalanságát a gömb sugarával jellemezhetjük, tehát a határozatlansági reláció értelmében az elektron sebességét a

$$v \approx \frac{\hbar}{mr}$$

formulával adhatjuk meg.

Az elektron energiája ekkor:

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - k \frac{q_e^2}{r}$$

ahol az energia-kifejezés első tagja az elektron kinetikus energiáját, a második tag a Coulomb-vonzásból adódó potenciális energiáját írja le.

Határozzuk meg az energia minimális értékét, ami feltevésünk szerint az elektron alapállapotbeli energiáját adja meg az atomban! A minimális energia és a sugár, amely mellett megvalósul, differenciálszámítással határozható meg rutinszerűen. Mivel ez a középiskolai matematikai ismereteket meghaladja, a szélsőértéket elemi módszerrel határozzuk meg. Alakítsuk át ehhez a fenti összefüggést a következőképpen:

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2mkq_e^2}{\hbar^2} \frac{1}{r}$$

Ezután a jobboldali kifejezést alakítsuk teljes négyzetté

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{mkq_e^2}{\hbar^2} \right)^2 - \left(\frac{mkq_e^2}{\hbar^2} \right)^2$$

Leolvasható, hogy az energia minimális értékét az $\frac{1}{r} - \frac{mkq_e^2}{\hbar^2} = 0$ -ból adódóan az $r = \frac{\hbar^2}{mkq_e^2}$ sugár mellett

$$E = -\frac{mk^2q_e^4}{\hbar^2} \approx -2 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

adja. Az első pálya sugara az adatokkal:

$$r_o = \frac{4\pi\epsilon_o\hbar^2}{mq_e^2} \approx 0,0529 \text{ nm}$$

A H-atom sugarára és az alapállapot energiára kapott összefüggések jól egyeznek a kísérleti adatokkal. A sugárra kapott eredmény pl. egyszerűen ellenőrizhető a folyékony hidrogén 1,7 g/cm³-es sűrűségéből kiszámítható atomsugárral. A számításunkból az energiájára kapott érték egyezik a H atom elektronjának alapállapot kötési energiájára kísérletileg is adódó értéket (ami megegyezik a hidrogénatom ionizációs energiájával).

Megjegyzés:

- A kvantummechanikai számítás sikeressége a határozatlansági relációra választott $v \approx \frac{\hbar}{mr}$ közelítésen múlt. Mintha az eredmény ismeretében választottuk volna meg a közelítést! Ezt nem is kell tagadnunk. A kvantumfizikai számítás analógiákra épített szemléletes képekre és nem a Schrödinger-egyenletre épült! Nem elítélendő tehát az a kis „trükk”, hogy a pontos eredmény ismeretében választjuk meg az alkalmas közelítést.

13.1.2. A H-atom elektronjának pályaimpulzus- és mágneses momentuma – a kvantumfizikai atommodell és a Bohr-modell kapcsolata

A H-atom kvantumfizikai leírása (akár a Schrödinger-egyenlet megoldásával, akár a fenti kvantumfizikai szemléletű elemi közelítéssel) az alapállapotú elektron energiájára és az

elektronburok (azaz az atom) térbeli kiterjedésére ugyanazt az eredményt adja, mint a Bohr-féle atommodell (lásd [A14.](#)). Az egyezés Bohr zseniális ötletének köszönhető, ráértett arra, hogy az elektronok lehetséges körpályái a keringő elektronok impulzusmomentumának kvantálásával választhatók ki (pályafeltétel). A H-atom kvantumfizikai leírásában az elektronok pályaimpulzus momentuma, más módon ugyan, de szintén alapvető, és hozzá kapcsolódva értelmezhető az elektronok mágneses momentuma is.



KV14. Hidrogénatom elektronjának pályaimpulzus momentumának és mágneses momentumának elemi kvantumfizikai tárgyalása (emelt szintű kiegészítő tananyag)

[Részletek >>>](#)

13.1.3. Az elektron gerjesztett állapotainak leírása a H-atomban

A H-gáz vonalas színeképét a Bohr-modell sikeresen értelmezte. Ez azt jelzi, hogy az atommag potenciálterében az elektronnak nem csak egy lehetséges energiaállapota van, hanem további diszkrét energiaértékű (gerjesztett) állapotok is léteznek. Ezeket a lehetséges gerjesztett energiaállapotokat is, az alapállapothoz hasonlóan határozhatjuk meg. Az alapvető különbség annyi, hogy a gerjesztett állapotok hullámfüggvényét – a húr sajátrezgéseinek mintájára - már csomópontokkal osztott állóhullámoknak tekintjük. Az alapállapothoz képest megváltozik tehát a gerjesztett állapotú elektron hullámhossza és ebből adódóan az elektron kinetikus energiája, továbbá az elektronállapot térbeli kiterjedése és ezzel a gerjesztett elektron potenciális energiája is. Az összenergia korábbi számításunkhoz hasonló minimalizálásával adódnak a gerjesztett energiaértékek, és az elektronfelhő mag körüli kiterjedése is. A számítások végeredménye megegyezik a Bohr-féle leírás eredményével, H-atommag környezetében az elektron stacioner állapotainak (alapállapot, illetve gerjesztett állapotok) lehetséges energiaértékei az n ún. főkvantumszámtól függenek. (alapállapotban $n = 1$, az első gerjesztett nívón $n = 2$ stb.)

$$E_n = -\frac{mq_e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

A nagyobb energiájú gerjesztett elektron távolabb kerül a magtól, az atom mérete tehát növekszik.

Az n főkvantumszámú gerjesztett elektron esetén a H-atom r_n effektív sugara

$$r_n = n^2 \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{mq_e^2} = n^2 r_0$$

ahol r_0 az elektronburok sugarát jelenti alapállapotban.

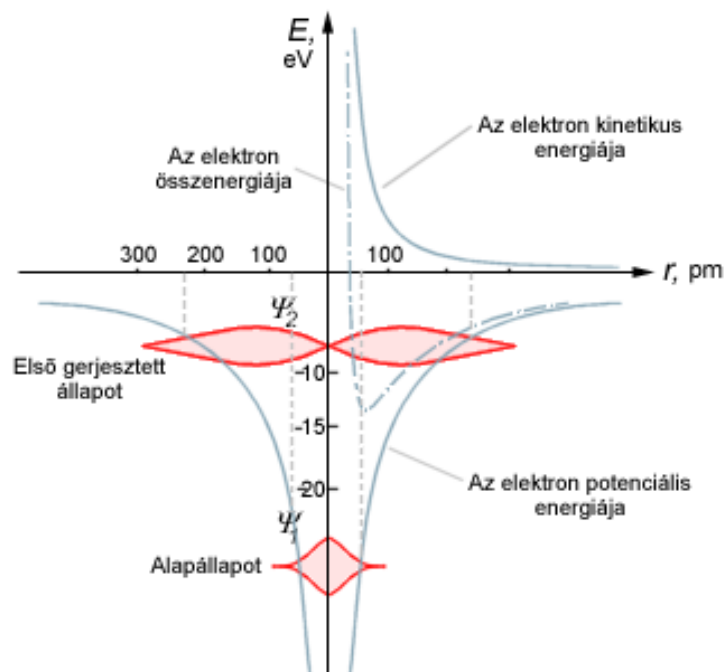


KV15. A hidrogénatom gerjesztett energiaszintjei (emelt szintű kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)

A hidrogénatom egyszerűsített kvantumfizikai ábrázolása

A H-atom kvantumfizikai tárgyalásának eredményét grafikusán az alábbi ábra illusztrálja.



13.1. ábra: A hidrogénatom energiaszintjei és hullámfüggvényei

A síkbeli rajz a H-atom elektronjának energiáját és állapotfüggvényét (alapállapot és első gerjesztett állapot) mutatja az atomátmérő mentén. A metszet azért használható a térbeli atom jellemzésére, mert a Coulomb-potenciál gömbszimmetrikus. A koordináta-rendszer függőleges tengelyén az elektron összenergiája, a vízszintesen a magtól való távolság olvasható le. A vízszintes tengely az összenergia nulla szintjén keresztezi a függőleges tengelyt. Jól látszik, hogy az atommag terében az elektronok kötött állapotúak, azaz összenergiájuk negatív. Ez a Coulomb vonzásból eredő negatív potenciális energia és az elektron pozitív kinetikus energiájának összegzéséből adódik. A rajz az energiaszinteken túl szemléletesen illusztrálja az elektronok eltérő, állóhullámszerű állapotfüggvényét is a potenciálgödörben. Az elektronhullám mindkét esetben kicsit túlnyúlik a potenciálgödör berajzolt határán. Ez azt jelzi, hogy a Coulomb-potenciál nem merev falú potenciáldoboz. Az alapállapotú elektron mélyen helyezkedik el a gödörben, annak ellenére, hogy szűk hullámtartománya miatt kinetikus energiája nagy. A nagy negatív Coulomb-energia biztosítja, hogy az elektron megtalálási valószínűsége erre a szűk mag körüli tartományra koncentrálódjék. A gerjesztett elektronállapot összenergiája számottevően nagyobb, mint az alapállapoté. Bár hullámfüggvénye jóval kiterjedtebb (kinetikus energiája kisebb), negatív potenciális energiája is kisebb ugyan, de még így is meghatározó. A gerjesztett elektron hullámfüggvényének érdekessége az is, hogy a mag helyén csomópontja (a térben csomósíkja) van. Az ilyen elektronok jellemzője, hogy nagyon ritkán találhatók meg a mag közvetlen környezetében, ami azért érdekes, mert ellentmondani látszik az elektron és a mag ellentétes elektromos töltése miatt várt erős vonzásnak.

Megjegyzés:

- A H-atom első gerjesztett energiaszintje az $n = 2$ főkvantumszámú állapotok energiája. A Schrödinger-egyenlet megoldása szerint az egy belső csomó-gömbbel osztott elektronállapot, illetve az egy csomósíkkal osztott elektronállapot energiája egyenlő. A csomósíkok azonban nem vehetők fel tetszés szerint. Csak három egymásra merőleges sík ad különböző állapotfüggvényt, így a csomósíkkal osztott állapotokból csak három van. Az $n = 2$ főkvantumszámhoz tehát négy különböző állapotfüggvényű de azonos energiájú állapot tartozik. A bemutatott ábrán a H-atom első gerjesztett energiaszintjét az ekvivalens állapotok közül az egyik csomósíkkal osztott ún. *p-pálya* jeleníti meg. Ennek az előnye, hogy alakja jól érzékelteti a gerjesztett állapot hullámhosszának növekedését (kinetikus energiájának csökkenését) továbbá az elektron potenciális energiájának és térbeli kiterjedésének változását is.

A H-atom elektronszerkezetének egzakt tárgyalására a középiskolában nincs lehetőség. A kvantumfizika döntően számításokkal kapható eredményeit nem lehet a maguk gazdagságában bemutatni. A fenti egyszerűsített tárgyalásmód csak a figyelmet igyekszik felhívni arra a szemléletmódra, amivel a kvantumfizika megközelíti a mikrovilág jelenségeinek leírását. Az atomok elektronburkának kvantumfizikai leírása a kémia tudománya számára rendkívül fontos. A középiskolai kémia tananyagában is gyakran vannak utalások ezekre a kvantumfizikai módszerekkel kapott eredményekre. A következőkben néhány, a kémia szempontjából fontos kérdést kiemelünk és az érdeklődő diákok számára kicsit részletesebben is bemutatjuk azok hátterét.

13.1.4. Az elektron H-atomban lehetséges hullámállapotainak jellemzése kvantumszámokkal

A H-atom szerkezeti tulajdonságai kiemelt jelentőségűek a magasabb rendszámú elemek atomjainak kvantumfizikai leírásában. Az egyetlen protonból és egyetlen elektronból álló rendszer a legegyszerűbb atom. A Schrödinger-féle kvantumfizikai leírás szerint a hidrogénatom elektronja (de bármely más atom tetszés szerinti elektronja is) négy kvantumszám segítségével jellemezhető, ami meghatározza a hullámfüggvényt és a hozzá tartozó sajátenergiát.

Az *n* főkvantumszám döntően meghatározza az elektron energiáját.

Az *l* mellékvantumszám az elektron-állóhullámok csomósíkjainak számát adja meg, és ezzel a hullámfüggvény alakját, az elektron megtalálási valószínűségének anizotrópiáját jellemzi.

Az *m* mágneses kvantumszám az elektron-állóhullámok térbeli orientációját szabja meg az iránykvantált impulzusmomentum meghatározásán keresztül (lásd [KV13](#)).

Az *s* spin-kvantumszám az atomokban az elektronállapotok jellemzésére használt negyedik kvantumszám, ami az elektron sajátperidületének nagyságát és térbeli irányát határozza meg. Elektronok esetén a spin kvantumszám mindössze két értéket vehet fel ($s = \pm 1/2$). Ennek a

H-atom egyetlen elektronja esetén nincs igazán jelentősége, de a magasabb elektronszámú atomok esetén már fontossá válik (lásd [KV16.](#)).



KV16. Kvantumszámok és hullámállapotok (fakultatív kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)

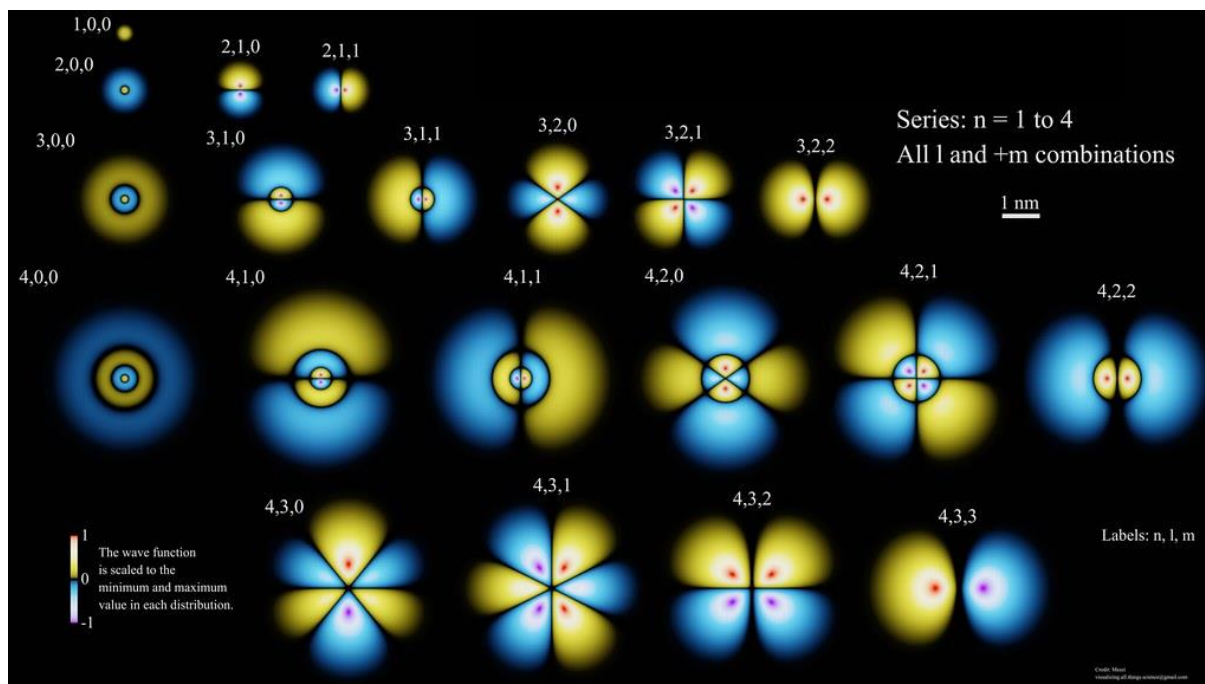


[Szimuláció a hullámfüggvények tanulmányozására](#)



Adott (n, l, m, s) kvantumszámsorozat esetén az elektron állapota meghatározható. A kvantumszámok lehetséges számértékének tartománya nem független egymástól. Az állapotfüggvények kvantumszámokkal történő felírásával a középiskolában nem foglalkozunk, de foglalkoznunk kell az elektronállapotok hullámfüggvény-leírásából adódó fizikai következményeivel. A hullámfüggvény maga nem hordoz közvetlen fizikai tartalmat, az állapotfüggvény abszolútértékének négyzete azonban az egyes elektronállapotokra vonatkoztatva megadja az elektron térbeli megtalálási valószínűsűrsűrűségét és ebből adódóan az elektronállapotok térbeli elhelyezkedését (alakját) az atommag környezetében. Az elektron térbeli elhelyezkedésének lehetséges változatait nevezzük atomi *elektronpályáknak*. (Megjegyezzük, hogy a „pálya” hétköznapi jelentése ez esetben inkább zavarja, mint segíti a megértést. Itt a pálya azon pontok összességét jelenti a térben, ahol az adott állapotú elektron megtalálási valószínűségének (gyakoriságának) számottevő értéke van.

A H-atom lehetséges elektronhullám-állapotaiból számítható elektronpályák térbeli kiterjedését és alakját számítógépes ábrákkal szemléltethetjük. A táblázatos összesítő ábra ilyen számítások eredményeit mutatja. Az egyes képek fényintenzitás-eloszlása az atommag körül az elektronok megtalálási valószínűségét jelzi. A fényes foltok közötti sötét sávok a csomófelületeket mutatják. Minden kép mellett megtalálható az adott elektronpályát jellemző négy kvantumszám értéke.



13.2. ábra: A hidrogénatom elektronállapotai

(forrás: https://live.staticflickr.com/65535/49963063667_251bcca215_b.jpg)

A H-atom elektronpályáinak bemutatása azért fontos, mert a magasabb rendszámú atomok elektronszerkezetében is hasonló elektronpályák találhatóak és így a magasabb rendszámú atom elektronjai a pályák betöltési sorrendjében könnyen azonosíthatók.

13.2. Magasabb rendszámú atomok kvantumfizikai tárgyalása

A magasabb rendszámú atomokat gondolatban úgy is felépíthetjük, hogy a Z számú protont tartalmazó mag terében először egy elektront helyezünk el, majd fokozatosan egyre több elektronnal népesítjük be a mag környezetét. Közelítésként feltételezzük, hogy a $(+Ze)$ töltésű mag terében elhelyezett egyetlen elektron lehetséges állapotai lényegében megegyeznek a hidrogénatom elektronjainak állapotaival. A két eset gyakorlatilag csak a mag potenciáljának erősségében különbözik. Az első elektron esetén az analógia tökéletes a következő elektron elhelyezése azonban már problémát okoz. A magból és két elektrontól álló rendszer már jóval bonyolultabb, mint a hidrogénatom. Az eltérést az okozza, hogy a mag és az elektron kölcsönhatása mellett az elektronok kölcsönhatását is figyelembe kellene venni. Fokozottan igaz ez a magasabb rendszámú sok elektrontól felépülő atomok elektronpályái esetén. A több elektront tartalmazó atomok elektronjainak sajátságai csak közelítőleg határozhatóak meg. Szerencsénkre szemléletes és jó közelítésnek bizonyul, ha úgy képzeljük, hogy az atommag terébe bevitt elektronok a hidrogénszerű atom hullámfüggvényeiből adódó gerjesztett állapotokat töltik be egymás után. Ezt a képet a periódusos rendszer 18-as rendszámú eleméig (argon, Ar) jól alkalmazhatjuk, a továbbiak esetén az elektronburok feltöltésének sorrendjében módosításra kényszerülünk, az elektronok kölcsönhatásának figyelembevételével.

Megjegyzés:

- A magasabb rendszámú atomok elektronpályáinak betöltésénél H-szerű pályákban gondolkodhatunk, de három fontos kiegészítő szabályt figyelembe kell vennünk (ezeket diákjaink kémiából nagy valószínűséggel tanulják). Az első ilyen szabály az *energiaminimum elv* figyelembevétele, azaz az elektronok az elektronpályákat a pályák növekvő energiájának sorrendjében, a legmélyebb szinttől felfelé haladva, lépésenként töltik be. A második fontos szabály a *Pauli-elv*, ami kimondja, hogy egy atomban azonos (n, l, m) kvantumszám-hármasval jellemzett pályán csak két ellentétes spinű elektron lehet (Bővebben lásd a következő pontot!). A harmadik szabály a *maximális multipllicitásra törekvés elve*. Eszerint az azonos energiájú elektronpályák betöltési sorrendje olyan, hogy először minden pályára egy-egy azonos spinű elektron épül be, majd ezután folytatódik a betöltés a második (az előbbivel ellentétes) spinű elektronokkal.

A spin-quantumszám és a Pauli-elv

A spin-quantumszám, amint azt említettük, az elektron sajátimpulzusmomentumát (nagyságát és irányát), illetve az elektron ebből adódó mágneses momentumát jelöli. Az elektron spin-quantumszáma két értéket vehet fel, azaz $s = \pm \frac{1}{2}$.

A Pauli-elv a kvantumkémia egyik legfontosabb alaptörvénye. Azt mondja ki, hogy a több elektront tartalmazó kvantummechanikai rendszerekben (atom, molekula, kristály stb.) minden egyes elektron más-más kvantumállapotban van. Ennek megfelelően az atomokban minden elektron esetében a jellemző négy kvantumszám közül legalább egynek különböznie kell a többi elektronétól. Ebből következik, hogy az első három kvantumszámmal meghatározott térbeli elektronpályákon maximálisan csak két ellentétes spinű elektron lehet. Hasonlóan igaz ez a megszorítás a később tárgyalandó molekula-pályákra is.

Megjegyzés:

- A spin-quantumszámmal nem csak az elektronok, de a többi kvantumrészecske is rendelkezik. A spin alapján az elemi részecskék két csoportba sorolhatók. Az elektronhoz hasonló részecskék spin-quantumszáma $s = \pm \frac{1}{2}$. Ezek a részecskék az ún. *fermionok*. A Pauli-elv az elektronokon kívül minden feles spinű részecskére – fermionra – általánosan érvényes. A fermionok közül számunkra legfontosabb az atomokat felépítő elektron, proton, neutron. A kvantum-részecskék másik csoportját a *bozonok*, alkotják, amelyek spin-quantumszáma pozitív egész szám. A bozonok közé tartozik pl. a foton. A bozonok esetén ugyanabban a kvantummechanikai rendszerben tetszés szerinti számú bozon tartózkodhat ugyanabban a kvantumállapotban.

A különböző elemek atomjainak elektronszerkezete

A Pauli-elv alapján a magasabb rendszámú atomok felépítését első közelítésben a hidrogénatom mintájára képzelhetjük el. A $(+Ze)$ töltésű mag terében egyetlen elektron állapotfüggvényei a hidrogénatom állapotfüggvényeinek mintájára az n, l, m, s kvantumszámokkal adhatók meg.

Hanyagoljuk el az elektronok kölcsönhatását! Ekkor a $(+Zq_e)$ töltésű mag terének elektronokkal való feltöltése úgy képzelhető el, hogy az elektronokat egyre újabb és újabb „hidrogénszerű” pályákon helyezük el. Az újabb elektronok elhelyezkedése tehát olyan, mintha az egyetlen elektron számára lehetséges gerjesztett állapotokat töltenék be. Ahogyan fentebb megállapítottuk, a Pauli-elv értelmében egy elektronpályán legfeljebb két ellentétes spinű elektron lehet. Az atomhoz tartozó elektronok mindegyike más és más kvantumszám négyessel jellemezhető.

A többelektronos atomban adott n főkvantumszámhoz tartozó elektronpályák száma n^2 . A mágneses kvantumszám miatt ugyanis minden l értékhez $2l + 1$ állapot tartozik, s adott n mellett l a $0, 1, 2, \dots, n - 1$ értékeken fut végig, a pályák száma tehát:

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2$$

Így az n főkvantumszámmal jellemzett pályákon a spin két különböző értéke miatt összesen $2n^2$ elektron tartózkodhat.

Az adott n főkvantumszámmal jellemzett pályák összességét *elektronhéjnak*, ezen belül az adott l mellék kvantumszámmal jellemzett pályákat *alhéjnak* nevezzük. Az atomok kémiai tulajdonságait az elektronok elhelyezkedése szabja meg az elektronhéjakon, illetve alhéjakon. Az elemeket táblázatosan összefoglaló *Mengyelejev-féle* periódusosrendszer az atomok héjakra és alhéjakra szerveződött elektronszerkezetével értelmezhető.



KV17. Az elektron saját impulzusmomentuma (spin) (kiegészítő tananyag)

[Részletek >>>](#)



KV18. A Mengyelejev-féle periódusos rendszer (kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)

13.3. A kémiai kötések kvantumfizikája

A természetben igen ritkán található magányos atomok. Az atomok általában egymással összekapcsolódva molekulákat, kristályokat képeznek. Az atomok összekapcsolódása, a *kémiai kötés* kialakulása rendszerint energia felszabadulással járó „spontán” folyamat, aminek révén az anyag az atomos állapotnál alacsonyabb energiájú állapotba kerül. A kémiai kötés három alaptípusa: a *kovalens*, a *fém* és az *ionos* kötés.

A *kovalens kötéssel* összekapcsolódó atomokból *molekulák* vagy kristályok keletkeznek. A molekula az anyagnak az a legkisebb részecskéje, amely még rendelkezik az adott anyag kémiai tulajdonságaival és önállóan létezhet. A molekulák általában néhány atomból állnak, de vannak olyanok is – az ún. *makromolekulák* –, amelyeket több tízezer atom épít fel. Kovalens kémiai kötés tartja össze az atomokat az ún. *atomrácsú* kristályokban is. Ilyenkor nem szoktunk molekuláról beszélni, hiszen az egész kristály egyetlen molekulának tekinthető.

A *fémes kötés* a fémkristályok atomjait kapcsolja össze.

Az *ionos kötés* töltéssel rendelkező atomi részecskék sokaságát kapcsolja össze elektrosztatikus kölcsönhatással kristállyá. A pozitív, illetve negatív ionok a semleges atomok kölcsönhatása révén alakulhatnak ki. Az ionvegyületekben az ionok össztöltése mindig zérus.

Az egyes kötéstípusok tulajdonságait a következőkben részletesen is ismertetjük.

Az atomok összekapcsolódásának gyakorlati törvényeivel a kémia foglalkozik. A fizika feladata az, hogy az atomok közti kötések elméleti szinten értelmezze.

Megjegyzés:

- Az atomok közt kialakuló kémiai kötések fenti összefoglalása a fizikaórán nem új ismeret a tanulók számára. A kémiából tanultakat idézzük fel, és ha szükséges esetleg kiegészítjük. A kvantumfizikai törvények megismerése a kémiában megtanult lexikális ismereteket biztosabb alapra helyezi. A más tárgyból tanultak eredményes felidézésének fontos feltétele azonban, hogy a fizikatanár tudja, pontosan mit, és milyen megfogalmazásban tanultak korábban a diákok.

13.3.1. A kovalens kötés általános jellemzése

A hidrogénatomokat molekulává kapcsoló kötés általánosításaként a kovalens kémiai kötés a következőképpen jellemezhető.

A kovalens kémiai kötést olyan elektronpár vagy elektronpárok hozzák létre, amelyek egyidejűleg két vagy több atommaghoz tartoznak. A közös elektronok megtalálási valószínűsége döntően a tér meghatározott tartományára koncentrálódik, ezt a tartományt az atomi elektronpályák fogalmának analógiájára *molekulapályának* nevezzük. A molekulapálya szabja meg a molekulák térszerkezetét, aminek fontos szerepe van az anyagok fizikai és kémiai tulajdonságaiban.

A hidrogénmolekula létrejöttén keresztül szemléletesen illusztrálhatjuk a kovalens kötés lényegét. A kvantummechanika módszereivel a molekula elektronállapotai, ezen keresztül a molekula szerkezete és fizikai tulajdonságai számítással meghatározhatók.

A hidrogénmolekula és a hidrogénmolekula-ion

A legegyszerűbb kovalens kötéssel kialakuló molekula a hidrogénmolekula. Vizsgáljuk meg, hogyan kapcsolódhat össze két hidrogénatom egyetlen molekulává! A kötés kialakulása a következő gondolat kísérlettel szemléltethető.

Induljunk ki a semleges, alapállapotú hidrogénatomból, amihez igen távolról magányos protont (H-atommagot) közelítünk. Amíg a távolság nagy, a két részecske különállóan létezik, a közeledéssel a változás mindössze annyi, hogy a hidrogénatom eredetileg gömbszimmetrikus elektronfelhője egyre inkább deformálódik, elhúzódik a közeledő pozitív töltés irányába. Ha a protonnal. kb. két hidrogénatom-átmérőnyire megközelítettük az atomot, minőségi változás következik be. A két atommagnak az elektronra gyakorolt vonzóhatása egyenlővé válik, azaz az elektron már mindkét maghoz egyenlő mértékben kötődik. Az elektron megtalálási valószínűsége kiterjed, mindkét magra, egyetlen kvantummechanikai rendszerre kapcsolva össze a két protont. A két protonból és egy „közös” elektronból álló rendszert hidrogénmolekula-ionnak (H_2^+) nevezzük. A hidrogénmolekula-ion példája érzékletesen mutatja be a kovalens kémiai kötés lényegét. A két atommagot összekapcsoló elektron kvantumfizikai jellemzője a molekulapálya. A kémiai kötés akkor jön létre, ha a két atommagra kiterjedő molekulapályán az elektron sajátenergiája kisebb, mint a kiindulási rendszer energiája.

A két protonból és egy „közös” elektronból álló hidrogénmolekula-ionnak (H_2^+) energiája a kvantummechanikai számítások szerint:

$$E = -1,32 \frac{mq_e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \approx -2,9 \cdot 10^{-18} J$$

Ez az energia alacsonyabb, mint a hidrogénatom elektronjának $-2,2 \cdot 10^{-18} J$ alapállapotú energiája, így a hidrogénmolekula-ion stabil képződmény.



KV19. Hidrogénmolekula-ion kötési energiájának becslése (kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)

A molekulaióból semleges molekula akkor jöhet létre, ha a második elektron spinje ellentétes a már meglévő elektron spinjével. Ha ez a feltétel teljesül, a második elektron az elsőhöz hasonlóan szétterül a két proton közti térrészben. A két elektron minden szempontból egyenértékű, egymástól megkülönböztethetetlen. A hidrogénmolekula kötési energiája majdnem kétszerese a molekulaióból kötési energiájának. A második elektron felvételével járó energia felszabadulást gyakorlatilag ugyanaz a mechanizmus, tehát az elektron szétterülése határozza meg, mint az első elektron esetén. Az elektronok közötti taszítás a felszabaduló energiát csak csekély mértékben csökkenti. Ennek megfelelően a hidrogénmolekula két protonját közössé vált elektronpár kapcsolja össze. A kötést biztosító elektronok megtalálási valószínűsége mindkét mag körül azonos.



KV20. Molekulapályák értelmezése (fakultatív kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)

Poláros molekulák

A sósav (HCl) természetes állapotában gáz állapotú vegyület. Molekulája kovalens kötéssel kapcsolódó klór- és hidrogénatomból áll. Az atomok közti σ -kötés a hidrogén *s*-pályájának és a klór egyik *p*-pályájának szuperpozíciójaként jön létre. A molekulapályán levő két elektron azonban mégsem egyenrangúan tartozik mindkét atommaghoz. Erre mutat az a kísérleti tapasztalat, hogy a sósavmolekulának erős dipólusmomentuma van (a sósav ezért oldódik jól vízben). Ugyancsak erre következtethetünk a sósavszintéziskor (hidrogén és klórgáz egyesítésekor) felszabaduló jelentős energia alapján is.

Megjegyzés:

- A hidrogén- vagy a klórmolekulában a közös elektronok egyenlő mértékben tartoznak mindkét atomhoz. Ha ez a sósavmolekula esetén is így lenne, akkor az eredeti molekulák felbontásához szükséges energia és a HCl képződésekor felszabaduló energia kb. azonos lenne. A tapasztalatok szerint azonban két sósavmolekula lényegesen mélyebb energiaszintet jelent a két hidrogén- és a két klóratom számára, mint a H₂, illetve Cl₂ állapot.

A hidrogénatom gömbszimmetrikus *s* állapota és a klór *p*-elektronpályájából olyan molekulapálya jön létre, amelyben az elektronok megtalálási valószínűsége a klór atommagjának erős lokális vonzása miatt eltolódik a klóratom irányába. A jelenség szemléletes magyarázata a következő: a klór atommagjában levő 17 proton pozitív töltését a 17 elektron nem árnyékolja minden oldalról egyenletesen. A legkülső héj telítetlen *p*-pályája olyan hatású, mintha „lyuk” lenne a magot árnyékoló elektronburkon. Ezen a *lyukon* keresztül a mag erős elektronvonzó hatása fokozottan érezhető és nagysága meghaladja a hidrogénmag egyetlen protonjának gömbszimmetrikusan egyenletes vonzóhatását. A hidrogénklorid-molekula klór felőli része így relatív elektrontöbbletet mutat, míg a hidrogén felőli oldalon viszonylagos pozitív töltés érezhető – a molekula elektromos dipólusként viselkedik.

Az elektronegativitás

A dipólus momentummal rendelkező molekulákat poláros molekuláknak nevezzük. A kovalens kötésű vegyületek legtöbbször poláros molekulájú (ilyen pl. a víz, az ammónia, a kénhidrogén stb.). A kovalens kötésű molekulák többségének poláros jellege annak a következménye, hogy a különböző minőségű atomok a molekulapályán levő elektronokat eltérő mértékben vonzzák maguk felé. E vonzás mennyiségi jellemzésére vezette be *L. Pauling* amerikai fizikus az *elektronegativitás* fogalmát.

Pauling a különböző molekulák felbontásához szükséges energiákból kiindulva a különböző atomokhoz egy energia dimenziójú számot, az ún. *elektronegativitást* rendelte hozzá. Pauling meggondolásának menetét itt nem részletezzük. Az elemek elektronegativitását a periódusos rendszer tartalmazza. Az elektronegativitás értékének ismeretére általában két anyag összehasonlításakor van szükség. Minél nagyobb az elektronegativitás értéke, annál inkább

ragaszkodik az atom a kötést létesítő elektronokhoz. Minél jobban különbözik egymástól a molekulát alkotó atomok elektronegativitása, annál erősebb a molekula poláros jellege.

13.3.2. Az ionos kötés magyarázata

Az ionos kémiai kötés az előző szakaszban tárgyalt poláros molekulákban keletkező kötés határesetének tekinthető. Olyan esetekben, amikor a kapcsolódó atomok közül az egyiknek igen nagy, a másinak nagyon kicsi az elektronegativitása, a nagy elektronegativitású atom teljesen magához szippantja partnerének elektronját. Így az egyik atom negatív töltésű, a másik pozitív töltésű ionná válik. Az ionokat, mint ellentétesen töltött kis golyókat elektrosztatikus erők tartják össze. Az ilyen ún. *ionvegyületek*, néhány különleges esetet kivéve, nem párosával kapcsolódva (molekula) található meg a természetben, hanem millió és millió ellentétes töltésű ion együtteseként vagy kristályos állapotban.

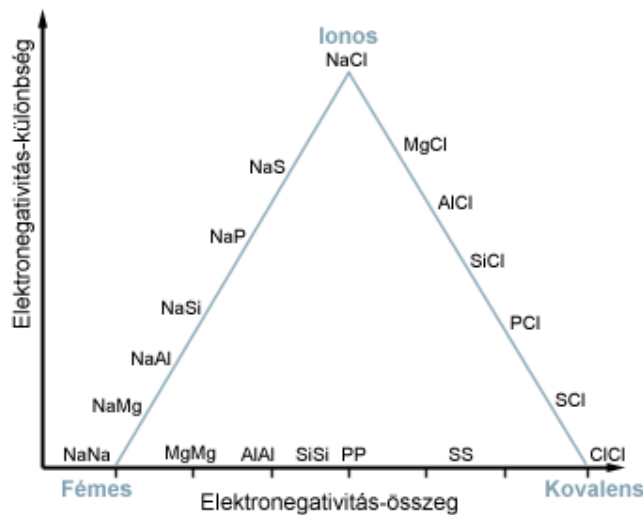
13.3.3. A fémes kötés magyarázata

A fématomok közt szilárd, valamint olvadék állapotban működő kémiai kötés az ún. *fémes kötés*. A kötés lényege, hogy a kapcsolódó atomok külső, általában *s*-állapotú elektronjai közössé válnak. Az ilyen közös elektronok megtalálási valószínűsége a kristály bármely atomja körül azonos, az elektronok delokalizálódnak. A fématomok jellegzetesen olyanok, hogy könnyen elvesztik külső elektronjaikat, illetve, hogy a kristályban vagy fémolvadékban a külső elektronok már nem egyetlen atomhoz, hanem egyenlő mértékben az összes atomhoz tartoznak. Ez a tulajdonság jól tükröződik az elektronegativitás-értékekben is. A fémek elektronegativitása az elemek közt a legkisebb.

A fémes kötés magyarázata az, hogy a delokalizációval az elektronok energiája erősen lecsökken. Ennek az az oka, hogy a kristályban mindenütt egyenlő valószínűséggel megtalálható elektronok állapotfüggvényeit jellemző hullámhossz gyakorlatilag a fém makroszkopikus méreteire nő. A megnövekedett hullámhossz a de Broglie-összefüggés és a Heisenberg-féle határozatlansági reláció értelmében a kinetikus energia csökkenését jelenti. Az elektronok kinetikus energiájának csökkenése miatt a delokalizált elektronokat tartalmazó rendszer energiája jóval kisebb, mint az atomi állapotok energiájának összege.

13.3.4. A kötéstípus elektronegativitás szerinti áttekintése

A kovalens, ionos és fémes kötés a kémiai kötés három ideális határesetének tekinthető. A különböző vegyületek általában e kötéstípusok közötti valamilyen átmenetet valósítanak meg. Az elektronegativitások összevetésével tapasztalati szabályok állapíthatók meg, amelyek jó áttekintést nyújtanak két elem között kialakuló kötés típusáról.



13.3. ábra: Kötéstípusok és átmenetek

Átmeneti kötés típusok szemléltetése

Az ábra a harmadik periódus elemeinek néhány lehetséges vegyületét mutatja az elektronegativitások összegének és különbségének koordináta-rendszerében.

A harmadik periódus elemeire vonatkozó tapasztalatok általánosan is igazak. Megállapítható, hogy:

- *kovalens kötés esetén*: az elektronegativitások összege nagy, különbsége kicsi, ideális esetben (azonos atomok esetén) zérus.
- *fémies kötés* akkor keletkezik, ha az elektronegativitások összege kicsi; a különbsége pedig közel zérus.
- *az ionos kötésnél* az elektronegativitások összege és különbsége is nagy.

A kovalens-fémies átmenetnél az elektronegativitások különbsége változatlanul kicsi, amíg az összeg csökken. Fémies-ionos átmenetnél mind az elektronegativitások összege, mind a különbsége nő. Végül az ionos és kovalens kötés határeseteiben az elektronegativitások összege nő, a különbségük azonban csökken.

Az elektronegativitások ismeretében tehát a kémiai kötések finom átmenetei is jól jellemezhetők.



KV21. Sokrészecske-rendszerek kvantummechanikai leírása (emelt szintű fakultatív kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)

A KVANTUMFIZIKA MELLÉKLETEI

KV1. A kvantumfizikát megalapozó tudósok kételyei (kiegészítő háttéranyag)

Planck, a feketetest sugárzás leírására általa bevezetett energiakvantum fogalmának nem tulajdonított igazi fizikai tartalmat, csak technikai segédletnek tekintette, és a fényt továbbra is a klasszikus hullámnak tartotta. *Einstein* volt az, aki a fotoeffektus értelmezésekor fizikai valóságnak tekintette a fénykvantumokat. Ezt *Millikan*, a kor egyik legjobb kísérleti fizikusa, nem akarta elfogadni és tíz évig végzett méréseket, hogy Einstein feltevését megcáfolja. Egyik, 1949-es cikkében azt írta; „I spent ten years of my life testing that 1905 equation of Einstein’s and contrary to all my expectations, I was compelled to assert its unambiguous verification in spite of its unreasonableness.” azaz: Életem 10 évét töltöttem azzal, hogy Einstein 1905-ös egyenletét ellenőrizzem, és minden várakozásom ellenére be kellett vallanom, hogy az egyenlet teljes észszerűtlensége ellenére egyértelműen teljesül.

A fény és anyag kettős természetének elfogadtatásában jelentős szerepet játszó Einstein maga sem volt mentes a kételyektől. Bár hitt a sugárzás kvantáltságában, a hullámfüggvény valószínűségi értelmezését már ő sem fogadta el. *Max Bohrnak* írt 1926-os leveléből származik a sokat idézett, a kvantummechanikával kapcsolatos kételyeit kifejező részlet: „Quantum mechanics is certainly imposing. But an inner voice tells me that it is not yet the real thing. The theory says a lot, but does not really bring us any closer to the secret of the 'old one'. I, at any rate, am convinced that He does not throw dice.” (A kvantummechanika lenyűgöző. Az elmélet sokatmondó, mégis egy belső hang azt súgja, hogy egyáltalán nem visz közelebb bennünket az „öreg” [Isten] titkaihoz. Mindenesetre meggyőződése, hogy Ő nem vet kockát.) Tömörebben gyakran csak annyi az idézet, hogy „Isten nem játszik kockajátékot”. Einstein olyannyira kételkedett a kvantummechanika valószínűségi értelmezésében, hogy két munkatársával (*Podolski* és *Rosen*) megkonstruálta a híressé váló, a szerzők kezdőbetűiből álló betűszóval ismertté váló EPR (akkor még csak) gondolatkísérletet, amellyel bizonyítani kívánta, hogy a kvantummechanika nem teljes elmélet, és valószínűségi értelmezése teljesen abszurd. Ezt arra alapozta, hogy a kvantummechanika törvényeiből olyan nem lokális tulajdonságok következnek, amelyek két részecske kapcsolatát akkor is pillanatszerűen létrehozhatják, ha a részecskék nagyon távol vannak egymástól. Anélkül, hogy a pontos részletekbe belemennénk, ez annyit jelent, hogy például két egyszerre és korreláltan kibocsátott foton bármilyen messze is távolodik egymástól, ha az egyiket mérést végzünk, akkor a másik foton hullámfüggvénye is összeomlik és például a spinje meghatározottá válik. Ezt Einstein annak ellenére nem hitte el, hogy a kvantumfizika törvényei szerint ez az esemény várhatóan bekövetkezik. A lehetőséget a fizikától idegen és teljesen abszurd távolhatásnak tartotta. Az EPR paradoxonban felvetett kérdést, ugyan jóval a kérdés felvetése után, 1982-ben, *Aspect* kísérletileg a kvantummechanikából levezethető eredmény javára döntötte el. Bármennyire is hihetetlen, de a nemlokális tulajdonságok beigazolódtak.

A kételkedők sorából nem maradt ki *Schrödinger* sem, aki a hullámeigenlet felírásával olyan matematikai eszközt adott a fizikusok és mérnökök kezébe, amelynek segítségével a technikai alkalmazásokhoz szükséges számítások elvégezhetővé váltak anélkül, hogy a felhasznált

fogalmak tartalmát, interpretációját vizsgálni kellene. Így a konceptuális kérdéseket felvető ellentmondásra vezető gondolatokkal a fizikusok nagy része nem is foglalkozott. Ezt a felfogást fogalmazza meg a híres, *Feynmannak* tulajdonított kissé nyegle szlogen: „shut up and calculate” (Tartsd a szád és számolj.). Maga Schrödinger azonban komoly ellenérzésekkel viseltetett a klasszikus fizikát felborító kvantumfizikai leírással szemben, nem hitt például a kvantumugrásokban sem.

[Vissza >>>](#)

KV2. Az elektrondiffrakció iskolai kísérleti igazolása és a Planck-állandó meghatározása (kiegészítő szakköri tananyag)

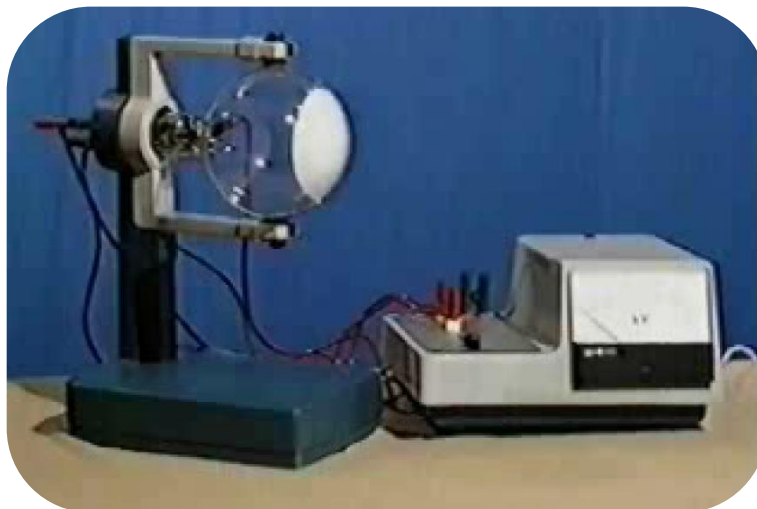
Az elektron hullámtermészete interferencia-kísérlettel igazolható. Ha megfelelően felgyorsított elektronokból álló nyaláb útjába vékony kristály fóliát helyezünk, az elektronok áthaladnak rajta, de közben jó részük eltérül eredeti irányától. Az elektronok irányváltozása fluoreszkáló ernyő segítségével láthatóvá tehető. Az ernyőn megfigyelhető kép az optikai rácson elhajló fény interferenciaképehez hasonló. Sajátossága, hogy az intenzitásminimumok és -maximumok helye változik attól függően, hogy a kristályrétegre eső elektronokat előzőleg mekkora sebességre gyorsítottuk fel. Az első ilyen kísérletet 1923-ban Davisson és Germer végezte, bizonyítva ezzel de Broglie hipotézisét, amely szerint minden korpuszkuláris részecskehez

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

hullámhossz rendelhető, ahol p a részecske impulzusa, h a Planck-állandó.

Elektrondiffrakció

A fizikatörténeti jelentőségű Davisson–Germer-kísérlet iskolai bemutatására a tanszergyártó cégek demonstrációs eszközt fejlesztettek ki. Az összeállítás általában több részből áll: tápegységből, feszültségmérő műszerből és egy speciális katódsugárcsőből. A gyártó cég gyakran összeépíti a mérőműszert és a tápegységet, míg az üvegből készült katódsugárcsővet külön állványon árulja (ábra), a 70-es években a magyar Tungstam cég is gyártott ilyen taneszközt, amit egyetlen közös műszerházba helyezve tett egyszerűen és könnyen kezelhetővé.



A tápegységen található potenciométer-gomb segítségével az elektronokat gyorsító feszültség 12 kV felső határig változtatható. A feszültséget beépített műszer jelzi. Ugyancsak a tápegységen található az a két másik szabályzó gomb, amellyel az elektronnyaláb fókuszálható, illetve intenzitása változtatható.

A katódsugárcsőben felgyorsított, jól fókuszált elektronnyalábot több elektródból álló „elektronágyú” szolgáltatja. Az elektronok a közvetett fűtésű katódból lépnek ki, majd a katód és az anód közötti térben gyorsulnak fel. Az elektronok többsége áthalad az anód közepén található lyukon, a mögötte lévő blendéken és fókuszáló elektródokon, és behatárolt keskeny nyalábban hagyja el az elektronágyút. Az elektronnyaláb útjába helyezik el a vékony



kristálylemezt. Davisson és Germer erre a célra fémfóliát használt. A demonstrációs eszközben finom rézhálóra felvitt vékony, polikristályos grafitréteget alkalmaznak. A kristályon áthaladó elektronok a katódsugárcső fluoreszkáló bevonatú ernyőjére esnek. Az ernyőn eszközben koncentrikus gyűrűkből álló interferenciakép figyelhető meg.

A kísérlet bemutatása rendkívül egyszerű. Kapcsoljuk be a készüléket, állítsunk be 5-6 kV gyorsító feszültséget, és csavarjuk középállásba az intenzitásszabályozó potmétert! Néhány másodperces bemelegedési idő után a fluoreszkáló ernyőn gyűrűk

vagy szabálytalan zöld foltok jelennek meg. Ez utóbbi arra utal, hogy a sugár fókuszálása nem megfelelő; ilyenkor a fókuszálás szabályozóján kell állítani, amíg az interferenciagyűrűk ki nem rajzolódnak. Mutassuk meg, hogy az elektronokat gyorsító anódfeszültség változtatásával az interferenciagyűrűk átmérője változik! A feszültség növelésekor a gyűrűrendszer zsugorodik, a feszültség csökkentésekor tágul.

A gyűrűs interferenciakép értelmezéséhez, érdemes felidézni az egyszerű optikai rácson fellépő fényelhajlást, és elvégezni néhány egyszerű kiegészítő kísérletet.

Tartsunk lézernyalábbba optikai rácst, és az elhajlási képet fogjuk fel ernyőn! Ismételjük meg ezután a kísérletet két, egymásra merőleges helyzetű rácscsal, majd minél többel, úgy, hogy a rácscok mind más irányban álljanak! Az egymásra helyezett rácscok elhajlási képe a rácscok elforgatott helyzetének megfelelően vetül egymásra. A kapott kép alapján könnyen elfogadható, hogy nagyon sok rácscs együttes elhajlási képe gyűrűs szerkezetű.

A grafit jellegzetesen rétegrácscos szerkezetű, rétegei hatszögesen összekapcsolódó szénatomokból állnak. Az ábra a grafitréteg szerkezetét mutatja. Készítsünk másolatokat az ábráról, és illesszük össze azokat egyetlen, legalább A4-es méretű síkrácscsá, majd készítsünk a mintázatról fekete-fehér fotonegatívot, és így kicsinyítsük le a szerkezetet! A negatív képet optikai síkrácscsként használva tartsuk lézerfénybe, és fogjuk fel ernyőn az elhajlási képét! Az interferenciamaximumok hatszöges rendbe illeszkednek. Helyezzünk egymásra több negatívot, és vizsgáljuk meg elhajlási képét! A hatszögek helyett gyűrűrendszer rajzolódik elénk.

Az optikai rácscsal végzett interferencia-kísérlet felhasználható hullámhossz-mérésre. Ha a rácscsállandójú optikai rácscs l távolságban van az ernyőtől, és a jobbra és balra eső első elhajlási maximumok távolsága az ernyőn x , továbbá x jóval kisebb, mint l , akkor a fény hullámhossza

a

$$\lambda = \frac{dx}{2l}$$

kifejezéssel adható meg.

Ugyanezen összefüggést felhasználhatjuk az elektronhullám hullámhosszának meghatározására is. A fenti képletben szereplő d rácsállandó értéke grafit esetén $d = 0,246$ nm, az l rács-ernyő távolság a készülék gyári adata, a gépkönyvben megtalálható.

A kísérleti tapasztalatok szerint a gyorsító feszültség növekedésével az elhajlási gyűrű átmérője csökken. Ebből a fenti formula alapján a hullámhossz csökkenésére következtethetünk.

Megjegyzés:

- Az eszköz használata közben az intenzív direkt sugár egyetlen pontban éri az ernyőt, ezért itt az ernyő fluoreszkáló bevonata könnyen „kiég”. Ennek megelőzésére ajánljuk, hogy a készüléket ne tartsuk hosszú ideig bekapcsolva, illetve a mérések között csökkentjük a nyaláb intenzitását.

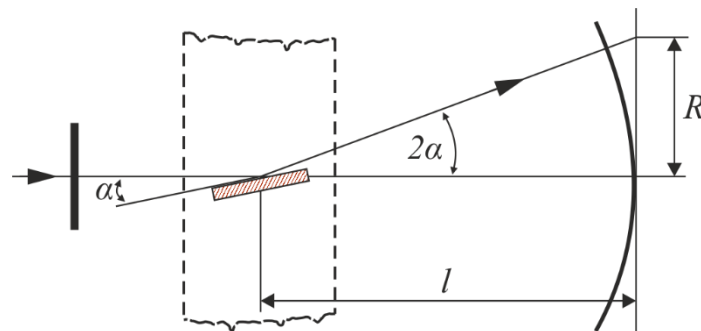
A második diffrakciós gyűrű átmérője általában pontosabban mérhető, mint az elsőé. Ha a mérést a második gyűrűn végezzük, akkor ezt a hullámhossz kiszámításánál értelemszerűen figyelembe kell venni, tehát

$$\lambda = \frac{dx}{l}$$

A gyűrűkből álló elhajlási kép, a fent részletezett optikai analógián túl, jól értelmezhető a kristálydiffrakciót leíró

$$2d \sin \alpha = k\lambda$$

Bragg-egyenlet alapján is, ahol d a kristály hálózati síkjainak távolsága, α a rácssík és a beeső sugár által bezárt szög, λ a hullámhossz, k egész szám (az első elhajlási gyűrű esetén $k = 1$, a másodikén $k = 2$ stb.).



Az ábra a polikristályos grafitréteg egy alkalmasan álló kristály lemezét, és az ezen elhajlást szenvedő elektronnyalábot mutatja, bejelölve az egyenletben szereplő α szöget. Az α szög a kristály-ernyő távolsággal (l) és a diffrakciós gyűrű leírt sugarával ($R = \frac{x}{2}$) határozható meg:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{x}{2l}$$

Kis α értékek esetén alkalmazható a $\tan 2\alpha \approx \sin 2\alpha \approx 2 \sin \alpha$ közelítés, amelynek felhasználásával az elektronok hullámhosszára ismét a

$$\lambda = \frac{dx}{2l}$$

kifejezés adódik.

A polikristályos anyagok jellegzetes, gyűrűkből álló diffrakciós képét Debye–Scherrer-diagramnak, a maximumokat Debye–Scherrer-gyűrűknek is nevezik.

A Planck-állandó értékének meghatározása a demonstrációs elektrondiffrakciós kísérlet alapján

Az elektron hullámhosszát megadó kísérleti formula és a de Broglie-képlet összevetése lehetőséget ad a Planck-állandó értékének meghatározására. A hullámhosszra vonatkozó két formulát egyenlővé téve a

$$\frac{dx}{2l} = \frac{h}{\sqrt{2eUm}}$$

összefüggést kapjuk, ahol a négyzetgyökös kifejezés az U feszültség hatására felgyorsult elektron impulzusa. A fenti kifejezésből, ha behelyettesítjük az ismert adatokat és a kísérletileg mért x és U értékeket, a h Planck-állandó meghatározható.

A mérési hiba csökkentésére egyetlen mérés adatai helyett érdemes méréssorozatra alapozni h meghatározását. Változtassuk a gyorsító feszültséget, és minden feszültséghez határozzuk meg x értékét!

A minta-mérés adatait a táblázat mutatja

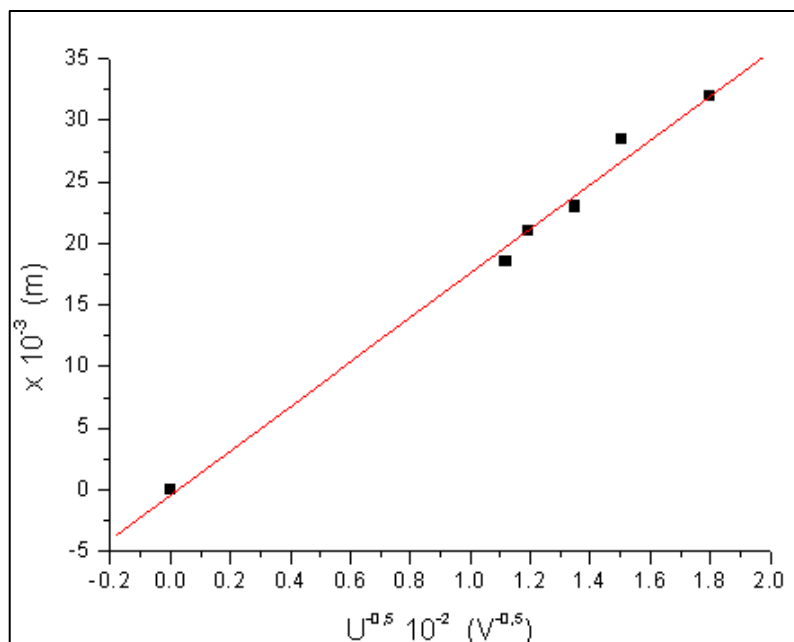
$X \cdot 10^{-3}$ (m)	32	28,5	23	21	18,5
U (V)	3100	4400	5500	7000	8000
$U^{-0,5}$	$1,796 \cdot 10^{-2}$	$1,507 \cdot 10^{-2}$	$1,348 \cdot 10^{-2}$	$1,195 \cdot 10^{-2}$	$1,118 \cdot 10^{-2}$

A fenti összefüggést rendezzük át az U független és az x függő változónak megfelelően

$$x = h \left(\frac{2l}{d\sqrt{2qm}} \right) U^{-1/2}$$

alakúra.

Ábrázoljuk a mért x értékeket $U^{-1/2}$ függvényében!



A mérési pontok origóból induló egyenesre illeszkednek. Az egyenes meredekségét leolvastva a h Planck-állandó értéke számítással meghatározható.

A számítás eredménye a bemutatott mérés esetén: $h = 7,3 \cdot 10^{-34}$ Js, ahol felhasználtuk a kísérleti paraméterek ismert számértékeit. ($d = 0,246 \cdot 10^{-9}$ m, $L = 120 \cdot 10^{-9}$ m, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg)

A Planck-állandó irodalmi értéke: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Js. Demonstrációs mérésünk eredménye nagyságrendileg helyes, pontossága elfogadható.

[Vissza >>>](#)

KV3. Kiegészítő módszertani ajánlások a kétréses elektroninterferencia tanításához (tanári háttéranyag)

Az interferencia kísérlet rendkívüli jelentőségű. A tanulók felé erőteljesen hangsúlyozni kell a kísérletből adódó kérdéseket és kiemelni, hogy a válaszok nem nyilvánvalók. Az egyetlen részecskével végzett kétréses interferenciakísérlet a következő kérdéseket veti fel! Hogyan lehetséges, hogy a mind a kibocsátáskor, mind az észleléskor pontosan lokalizált részecske, amely sokkal kisebb, mint a rések szélessége, információt szerez arról, hogy a nagy távolságban lévő rések közül csak az egyik, vagy mindkettő nyitva van-e? Miért nem tudjuk követni a részecskék pályáját, anélkül, hogy a hozzá rendelt hullámfüggvény lerombolódna? Hogyan érthetjük meg az interferencia kép keletkezését, ha a részecskék egymással biztosan nem lépnek kölcsönhatásba és egyenként véletlenszerűen csapódnak be az ernyőre?

A kérdésekre adott válasz a kvantumviselkedés lényegét, a részecske hullámkettősség elfogadását igényli. El kell fogadnunk és a tanulókkal el kell fogadtatnunk, hogy a kibocsátáskor és észleléskor részecskeként viselkedő objektumok a forrás és a becsapódás közötti terjedés során, amikor nem követjük nyomon (nem figyeljük meg) őket, hullámként viselkednek, nemlokálissá válnak. A klasszikus (makroszkopikus) részecskék a forrás és az ernyő között is meghatározott pályán haladnának, a kvantumviselkedésű mikrorészecskék pályája azonban nem követhető. A mikrorészecskéről elvileg sem szerezhető ilyen információ. A részecske hullámkettősség egyben a véletlenszerűség és determinisztikus viselkedés kettősségére is vezet. Az ernyőn kialakuló kép egyértelműen mutatja a részecskesokaság előre jósolható eloszlását, de semmit sem mond az egyes részecskék előre jósolhatatlan becsapódási helyéről



A probléma lényegére a kétréses interferenciakísérlet Richard Feynman (1918-1988) által javasolt változata mutat rá. Feynman gondolatkísérletet javasolt annak megfigyelésére (Feynman, Mai Fizika 3. Műszaki Kiadó, Bp. 1985, p.150.), hogy eldöntsük, melyik résen mentek át az egyes elektronok. Bár a gondolatkísérlet Feynman által adott részletes tárgyalása mind didaktikai, mind a kérdéskör fogalmi megértése szempontjából rendkívül tanulságos, itt csak a kísérlet legfontosabb eredményeit ismertetjük. A gondolatkísérlet eredményeként megállapítható, hogy amennyiben minden elektront kísérletileg megfigyelünk, és kiderítjük, hogy melyik résen ment át, akkor a rések mögötti ernyőn nem interferenciakép rajzolódik ki. Az ernyőn kapott kép ebben az esetben megegyezik azzal, amit akkor kapnánk, ha hol csak az egyik, hol csak a másik rés lenne nyitva. Amennyiben a megfigyelés nem terjed ki minden elektrorra, akkor azok az elektronok, amelyekről nem észleltük, hogy melyik résen mentek át az interferenciaképet rajzolják ki. Azaz, ilyenkor hosszabb idő alatt a külön-külön nyitott rések mögötti és az interferenciakép együttese észlelhető. Az eredményt Feynman azzal magyarázza, hogy a mikrorészecskéken nem végezhetünk úgy mérést, hogy ne befolyásolnánk állapotukat, s ez már elegendő ahhoz, hogy a hullámszerű kép megváltozzék.

A gondolkísérlet eredménye jól érzékeltethető a következőképpen. Az elektron, amíg nem figyeljük meg, kiterjedt felhőként viselkedik. Amennyiben a felhőbe „bedugjuk egyik ujjunkat”, és ujjunk „vizes lesz” akkor az egész felhő összeugrik az adott pontba. Ha azonban két ujjunkat dugjuk egyszerre a felhőbe, akkor legfeljebb az egyik lehet vizes. Az észleléskor az elektron oszthatlan egészként viselkedik. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az elektron kiterjedt hullámfüggvényét az észleléssel leomboltuk. Végül megjegyezzük, hogy Feynman gondolkísérletét elektronmikroszkópban végzett méréssel sikerült 2017-ben megvalósítani.

[Vissza >>>](#)

KV4. A síkhullám kép ellentmondásossága (emelt szintű kiegészítő anyag)

Írjuk le a részecskét de Broglie szerint a $\lambda = \frac{h}{mv}$ hullámhosszú,

$$\Psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

hullámfüggvénnyel. (Ezt a függvényt tekinthetjük a síkhullám terjedési irányában vett egyenes mentén vett részecskének.) Kézenfekvőnek tűnik, hogy a hullám terjedési sebessége a részecske sebességével azonos.

A hullám terjedési sebessége: $v = \lambda f$

amely az $E = hf$, valamint a $\lambda = \frac{h}{mv}$ összefüggések felhasználásával

$$v = \frac{h}{mv} \cdot \frac{E}{h} = \frac{E}{mv}$$

alakban fejezhető ki. A relativitáselmélet értelmében egy részecske teljes energiája:

$$E = mc^2$$

ahol m a mozgó részecske relativisztikus tömege. Ezt visszahelyettesítve az előző kifejezésbe a hullám terjedési sebességére $v = c$ eredmény adódik. A részecske terjedési sebessége eszerint megegyezne a fénysebességgel, ami ellentmondásban van a relativitáselmélet alapfeltevésével.

[Vissza >>>](#)

KV5. A fázis- és csoportsebesség (emelt szintű kiegészítő anyag)

A hullámcsoport bevezetésével feloldódik a de Broglie-hullámokkal jellemzett részecske terjedési sebességének és a relativitáselméletnek látszólagos ellentmondása. A térben lokalizált részecske sebessége ugyanis nem a hullám fázissebességével, hanem az egész hullámcsomag előrehaladási sebességével, a *csoportsebességgel* azonos. A hullámvonulat fázissebességének nincs szemléletes fizikai tartalma.

A fentiek illusztrációjaként foglalkozunk a következő egyszerű esettel! Állítsuk elő az

$$y_1 = A \sin(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{és} \quad y_2 = A \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

hullámok szuperpozíciójából adódó hullámot, és határozzuk meg a csoportsebességet, ha a két összetevő hullám fázissebessége azonos, tehát

$$v_f = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$$

A $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ azonosság felhasználásával, és a $k = 2\pi/\lambda$ hullámszám bevezetésével adódik, hogy

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\frac{\Delta k x - \Delta\omega t}{2} \sin(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

ahol $\Delta k = k_2 - k_1$, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ a hullámszámok, illetve a körfrekvenciák közötti eltérés, és

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

Amennyiben $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$ és $\Delta k \ll \bar{k}$ az eredő hullám a 2.4.1.pontbn tárgyalt hullámcsomag ábráján láthatóhoz hasonló. A gyorsan változó, kicsiny hullámhosszúságú hullám amplitúdóját egy lassú, nagy hullámhosszúságú függvény modulálja. A két hullám összege végtelen sok hullámcsomag egymásutánjaként fogható fel.

A hullámcsomag sebességét, a csoportsebességet esetünkben az amplitúdómoduláció terjedése szabja meg;

$$v_{cs} = \frac{\frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta k}{2}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

A $\Delta k \rightarrow 0$, illetve $\Delta\omega \rightarrow 0$ határesetben

$$v_{cs} = \frac{d\omega}{dk}$$

Felhasználva az $\omega = \frac{E}{\hbar}$ és $k = \frac{p}{\hbar}$ valamint az

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$v_{cs} = \frac{dE}{dp} = v$$

[Vissza >>>](#)

KV6. A határozatlansági reláció igazolása gondolkísérlettel (emelt szintű kiegészítő anyag)

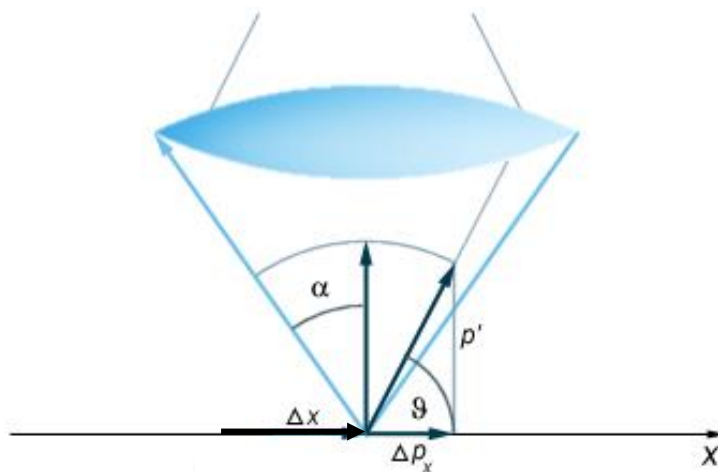
A határozatlansági összefüggés igazolására sok gondolkísérletben követték végig a mérőeszköz és a mért mennyiség közötti kölcsönhatást. A legismertebb példa az ilyen gondolkísérletek közül, az ún. *Heisenberg-féle mikroszkópkísérlet*.

Vizsgáljuk mikroszkópban a K katódból kibocsátott és U feszültséggel x irányban felgyorsított elektronnyalábot! A nyaláb elektronjainak impulzusa ekkor $p_x = \sqrt{2meU}$, míg a másik két impulzuskomponens zérus; $p_y = p_z = 0$. Az egyes elektronok helye a nyalábban gyakorlatilag teljesen határozatlan.

Az elektronok helyének meghatározására figyeljük meg a mikroszkóp lencséjén keresztül egy, az x -tengelyre merőlegesen haladó hf_0 energiájú fotonokból álló fénynyaláb szóródását az elektronokon! A képsíkon áthaladó fotonok helyéből visszakövetkeztethetünk az elektron és a foton ütközésének helyére, azaz az elektron helyzete az ütközés pillanatában lokalizálható. A mikroszkóp azonban a tárgyponthoz nem egyetlen képpontot rendel, hanem egy *diffrakciós képet*, s ez határt szab a mikroszkóp felbontóképességének (lásd Optika [F38.](#) mellékletét: *A mikroszkóp felbontóképessége*). Esetünkben a helymeghatározás bizonytalansága nyilván a mikroszkóp által még különállónak észlelhető két tárgyponthoz távolsága, azaz

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{\sin \alpha}$$

ahol az α szög értékét az ábrán látható módon a mikroszkóp geometriája szabja meg.



A Heisenberg-mikroszkóp kísérlet

A fotonnal való ütközés következtében a szórt foton x irányú impulzusának

$$\Delta p_x = \frac{hf}{c} \cos \vartheta - \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} (\cos \vartheta - 1)$$

változása miatt az elektron impulzusa

$$-p_x = (1 - \cos \vartheta) \frac{h}{\lambda}$$

értékkel változik (lásd ábra). A ϑ szórási szögéről azonban csak annyit tudunk, hogy $90^\circ - \alpha$ és $90^\circ + \alpha$ közé esik, hiszen a szórt foton bejutott a mikroszkópba. Így az elektron p_{ex} impulzusa az ütközés után a

$$p_x - \frac{h}{\lambda} \sin \alpha < p_{ex} < p_x + \frac{h}{\lambda} \sin \alpha$$

tartományba esik. Az impulzus bizonytalansága tehát:

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\lambda} \sin \alpha$$

A hely és impulzus bizonytalanságának szorzata:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar$$

Valóban teljesül tehát a Heisenberg-féle határozatlansági reláció ebben a konkrét esetben is.

Általában elmondható, hogy tetszőleges konkrét mérésre mindig megbecsülhető a hely és impulzus bizonytalanságának szorzata, s adott esetben mindig megtalálható a fizikai oka annak, hogy a két mennyiség miért nem adható meg egyszerre pontosan. A határozatlansági reláció éppen azt mondja ki, hogy a bizonytalanság minden esetben – a körülményektől függetlenül – fennáll.

[Vissza >>>](#)

KV7. További határozatlansági relációk (emelt szintű kiegészítő anyag)

Végül megjegyezzük, hogy az impulzus- és helykoordinátára vonatkozó határozatlansági relációhoz hasonló összefüggés áll fenn pl. egy részecske megfelelő *szög- és impulzusmomentum koordinátáinak bizonytalansága* között is, azaz

$$\Delta\alpha \cdot \Delta N_\alpha \geq \frac{\hbar}{2}$$

ahol α az adott tengely körül vett elfordulás mértéke, N_α pedig az erre a tengelyre vonatkozó perdület (impulzus momentum).

Általában a rendszer tetszőleges q koordinátájának és a hozzá tartozó p impulzusnak a bizonytalanságára teljesül, hogy

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ugyancsak érvényes a

$$\Delta E \cdot \tau \geq \frac{\hbar}{2}$$

összefüggés is, ahol ΔE az energia bizonytalansága, τ pedig az adott folyamat időbizonytalanságát jelöli. Ez utóbbi határozatlansági összefüggésből azonnal következtethetünk például arra, hogy ha az elektron gerjesztett állapotának energiája ΔE szélességű, akkor az alapállapotba történő visszatérés – azaz a megfelelő energiájú foton kisugárzása – τ időtartam erejéig bizonytalan. A gerjesztett állapot élettartama így

$$\tau \approx \frac{\hbar}{\Delta E}$$

nagyságúra becsülhető.

[Vissza >>>](#)

KV8. A Schrödinger-egyenlet tárgyalása (tanári emlékeztető anyag)

A Schrödinger-egyenlet egydimenziós alakja a következő:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V\varphi$$

ahol m az adott részecske nyugalmi tömege φ a részecske állapotát jellemző hullámfüggvény, $V = V(x, t)$ az a potenciál, amelyben a mikrorészecske mozog. A részecske állapotát jellemző hullámfüggvény a helynek és az időnek is függvénye. A $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ *parciális derivált* jelölés a hullámfüggvény idő szerinti deriváltját jelöli (miközben a hely állandó), $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ jelölés a φ hely szerinti második deriváltját jelöli (miközben t állandó) Az egyenletben szereplő i értéke: $i = \sqrt{-1}$.

Megjegyzés:

A Schrödinger-egyenlet megoldásai *komplex függvények*, amelyek általában $\varphi = \alpha + i\beta$ alakban írhatók fel ($i = \sqrt{-1}$). A komplex függvényeknek közvetlen fizikai jelentése általában nincsen. Ez azonban az adott esetben nem jelent problémát, mert mint már láttuk, fizikai tartalmat az előzőekben is csak a $|\varphi|^2 = \alpha^2 + \beta^2$ függvénynek tulajdonítottunk, s ez a függvény már valós.

Az időtől független Schrödinger-egyenlet

A kötött részecskék stacionárius állapota állóhullámmal fejezhető ki. Ebben az esetben a Schrödinger egyenlet a hullámfüggvény időtől független részének részére vonatkozó egyenletre egyszerűsíthető.

Az időtől független Schrödinger-egyenlet egydimenziós alakja a következő:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (E - V(x))\varphi = 0$$

ahol E az elektron összenergiája, φ pedig a most már csak helytől függő állapotfüggvény. (Az állapotfüggvénynek természetesen most is van időtől függő része, ez azonban a mechanikai állóhullámok esetéhez hasonlóan mindenütt ugyanolyan.)

A Schrödinger-egyenlet elméleti alátámasztása

A Schrödinger-egyenlet nem vezethető le a fizika más alaptörvényeiből, a kvantumfizika önálló alaptörvénye. Bevezetése azonban sokféle elméleti megfontolással is alátámasztható. A következőkben ilyen gondolatmenetet mutatunk be. Végiggondolását csak azoknak ajánljuk, akik tisztában vannak a differenciálszámítás elemeivel.

Abból indulunk ki, hogy a fizika törvényei általában differenciálegyenletekkel fogalmazhatók meg matematikai alakban. Feltételezhetjük tehát, hogy a részecskék állapotát leíró

$$\varphi(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$$

hullámfüggvény is valamilyen differenciálegyenlet megoldásaként adható meg. Természetesen ilyen egyenlet sokféle létezhet! Keressünk most olyat, amelyik kapcsolatba hozható egy részecske mozgásával.

Induljunk ki ehhez a V potenciáltérben mozgó E összenergiájú részecskére vonatkozó

$$\frac{p^2}{2m} + V = E$$

energiamegmaradási törvényből. Tekintsük érvényesnek továbbá az energiára vonatkozó $E = hf = \hbar\omega$ Planck féle kvantumfeltételt, valamint a $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$ de Broglie-hullámhosszra vonatkozó feltevését.

Könnyen belátható, hogy a hullámszám, illetve a körfrekvencia a hullámfüggvény segítségével az

$$k^2 = -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

illetve

$$\omega = -\frac{1}{i\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

alakban írható fel. Behelyettesítve ezeket az energiamegmaradást kifejező egyenletbe és beszorozva a kapott összefüggést φ -vel a

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V\varphi$$

hullámeqyenlethez jutunk. Az egyenletnek a de Broglie-hullámfüggvény nyilvánvalóan megoldása. Még egyszer hangsúlyozzuk, hogy ez a gondolatmenet nem levezetés, hanem a kvantummechanika alapegyenletének analógiás alapon történő bevezetése

A Schrödinger-egyenlet megoldása általában matematikailag nagyon bonyolult. Egzakt megoldás csak a legegyszerűbb esetekben lehetséges. Szabad részecskék esetén megoldásként a már megismert de Broglie-hullámok – a hullámcsomag – adódik. A Schrödinger-egyenlet igazi jelentősége azonban az, hogy felhasználásával kötött részecskék, például az atomban kötött elektronok hullámfüggvénye is meghatározható.

[Vissza >>>](#)

KV9. Hullámfüggvények az egydimenziós potenciálgödörben (emelt szintű kiegészítő anyag)

Vegyük fel a koordináta-rendszer kezdőpontját a potenciálgödör közepén, ekkor az a hosszúságú húr végei a $\mp \frac{a}{2}$ helyre esnek. Az alapállapotú részecskének csak a határpontokon van zéruspontja, így $a = \frac{\lambda}{2}$. Könnyen belátható, hogy hullámfüggvénye

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_o \cos(kx) = \varphi_o \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right), & \text{ha } -\frac{x}{2} \leq 0 \leq \frac{x}{2} \\ 0, & \text{ha } x \leq -\frac{a}{2} \text{ vagy } x \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$

Az n -ik gerjesztett állapotban a hullámfüggvénynek a két vég mellett $n-1$ belső csomópontja is van, így $a = n\frac{\lambda}{2}$, azaz a hullámfüggvény

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi_{no} \cos(k_n x) = \varphi_o \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), & \text{ha } -\frac{x}{2} \leq 0 \leq \frac{x}{2} \\ 0, & \text{ha } x \leq -\frac{a}{2} \text{ vagy } x \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$

Ennek megfelelően a részecske megtalálási valószínűsége a húr dx hosszúságú darabján alapállapotban

$$\varphi^2(x)dx = \begin{cases} (\varphi_o \cos(kx))^2 dx = \left(\varphi_o \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right)^2 dx, & \text{ha } -\frac{x}{2} \leq 0 \leq \frac{x}{2} \\ 0, & \text{ha } x \leq -\frac{a}{2} \text{ vagy } x \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$

Az n -ik gerjesztett állapotban pedig

$$\varphi_n^2(x)dx = \begin{cases} (\varphi_{no} \cos(k_n x))^2 dx = \left(\varphi_{no} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right)^2 dx, & \text{ha } -\frac{x}{2} \leq 0 \leq \frac{x}{2} \\ 0, & \text{ha } x \leq -\frac{a}{2} \text{ vagy } x \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$

A függvényekben szereplő állandók abból a feltételből határozhatók meg, hogy a részecske biztosan a húron van, azaz a valószínűségek összege a teljes húrra vonatkozóan 1. Alapállapotban a koszinusz négyzet függvény alatti területet kell meghatározni, ami pl. [A fizika tanítása a középiskolában II.](#) kötet E113. mellékletében leírt eljárással meghatározható. A

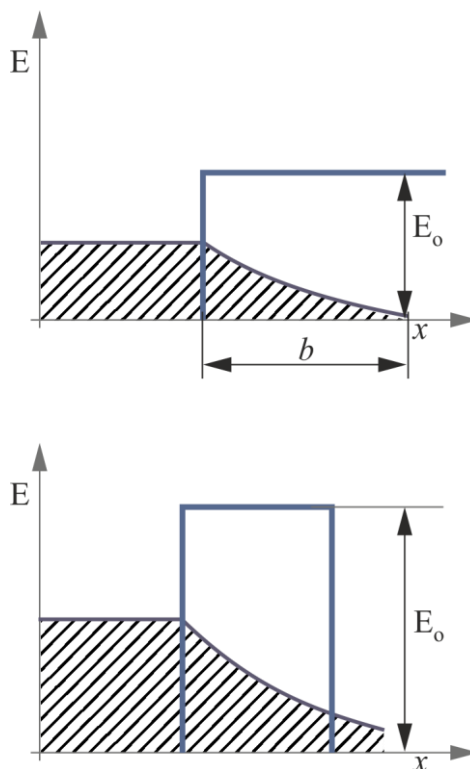
számítás szerint $\varphi_{n0} = \sqrt{\frac{2}{a}}$ tetszőleges gerjesztett állapotra a hullámfüggvény maximális értéke ugyanakkora.

[Vissza >>>](#)

KV10. Mennyire zárt a véges mélységű potenciáldoboz? Alagúteffektus (fakultatív kiegészítő anyag)

Az egydimenziós dobozba zárt elektron tárgyalásakor a dobozt végtelen magas „potenciálfalak” határolták. Az elektron megtalálási valószínűsége a $-\frac{a}{2} \leq 0 \leq \frac{a}{2}$ tartományon kívül zérus, s az elektront a doboz belsejében állóhullám reprezentálja. Az állóhullám képhez úgy is eljuthatunk, hogy a mechanikai, illetve fényhullámok analógiájára feltételezzük, hogy az elektronhullám a doboz falának ütközve visszaverődik, és önmagával interferálva alakítja ki az időben stabilisan fennmaradó állóhullámot. A végtelen magas potenciálfalak helyett reális esetben a potenciálgát magassága is véges, és a potenciálfal szélessége is korlátozott lehet.

A részletes kvantummechanikai számítások azt mutatják, hogy amennyiben a bezárt részecske mozgását csak *véges magasságú és szélességű potenciálgát* korlátozza, akkor az anyaghullámok véges valószínűséggel áthatolhatnak a potenciálgáton.

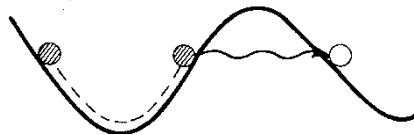


Különböző szélességű akadályba ütköző részecske hullámfüggvénye

A furcsa jelenséget *alagúteffektusnak* nevezzük. Az elnevezés onnan ered, hogy a klasszikus mechanikában semmilyen test, sem juthat át az előtte tornyosuló hegy (potenciálgát) túloldalára, ha nincs elegendő energiája a hegy „megmászására” hacsak nem talál a hegybe fűrt alagutat.

Ez a viselkedés a klasszikus fizika szabályai szerint teljesen lehetetlen. Amennyiben hasonló mozgás makroszkopikus körülmények között is végbemehetne, akkor ez azt jelentené, hogy a

hegyoldalon felfelé gurított golyó esetenként akkor is átkerülne a szomszédos völgybe, ha mozgási energiája a hegy lábánál kisebb, mint a hegy tetején a helyzeti energia, azaz $\frac{1}{2}mv_0^2 < mgh$. Az áthatolás azonban nem mindig következne be, hanem csak véletlenszerűen, s a hegy magasságának és szélességének növekedtével egyre ritkábban. Tovább növelné az ilyen ritka események furcsaságát az, hogy a szomszéd völgyből a hegyen átjutó golyót sohasem a hegy tetején, hanem mindig az $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$ összefüggésnek megfelelő h magasságában pillantanánk meg először. Ezt valóban úgy képzelhetjük, mintha a potenciálgáton áthaladó részecske nem a gátat megmászva, hanem alagúton keresztül került volna át az akadályon



Alagúteffektus szemléltetése

A hullámfüggvény viselkedése az alagúteffektus során szimulációval tanulmányozható.



[A hullámfüggvény átjutása a potenciálgáton:\(alagúthatás és hullámsomagok\)](#)



Az alagútjelenség jellegzetesen kvantummechanikai természetét a határozatlansági reláció segítségével érthetjük meg pontosabban. Ahhoz, hogy a részecskét a d szélességű akadályban kimutassuk, helyzetét $\Delta x \approx d$ pontossággal kell lokalizálnunk. Így az impulzus bizonytalansága $\Delta p \approx \frac{\hbar}{d}$ lesz, ami

$$\Delta E = \frac{(p + \Delta p)^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} = \frac{2p\Delta p}{2m} + \frac{(\Delta p)^2}{2m} \geq \frac{(\Delta p)^2}{2m}$$

energia-bizonytalansághoz vezet. Tehát

$$\Delta E > \frac{\hbar^2}{2md^2}$$

A részecske akkor hatolhat át potenciálgáton, ha energiájának bizonytalansága eléri a potenciálgát magasságának (U_0) és a részecske energiájának (E) különbségét, tehát ha

$$U_0 - E \approx \Delta E \approx \frac{\hbar^2}{2md^2}$$

Adott U_0-E energiakülönbség esetén tehát a részecske körülbelül

$$d = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_0 - E)}}$$

mélységig hatol a potenciálfalba.

Megjegyzés:

- Pontosabb számítások szerint eddig a távolságig a részecske körülbelül 1/3 valószínűséggel jut el. Azonnal adódik, hogy kétszer ekkora távolságba 1/9, háromszoros mélységbe pedig 1/27 valószínűséggel kerül a részecske. A behatolás mélysége tehát a gát szélességével exponenciálisan csökken. Az alagúteffektus hatékonysága a potenciálgát szélessége mellett az alagútazó részecske tömegével, illetve a potenciálgát magasságának növekedésével csökken.

Az alagúteffektus általában a könnyű elektronok mozgásakor jelentős, (az alagúthatás mindennapi életünket is befolyásolja, ugyanis a konnektorba dugott csatlakozóba az elektronok alagúteffektussal jutnak át a hálózathoz), de szerepet játszik az α -sugárzás kibocsátásakor is.

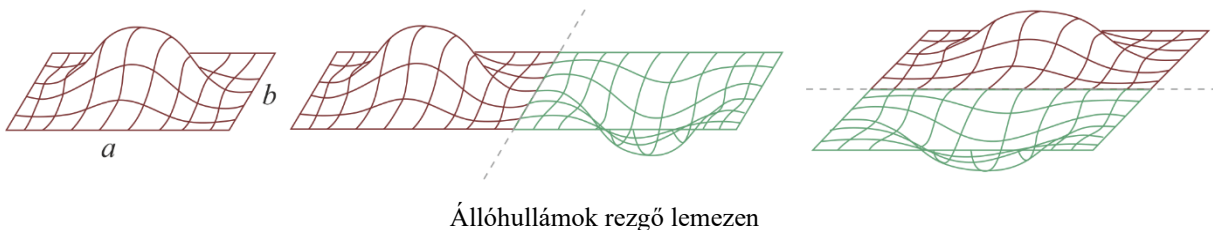
[Vissza >>>](#)

KV11. Két dimenziós potenciál-tartományba zárt részecske (fakultatív kiegészítő anyag)

Az egydimenziós példa alapján egyszerűen eljuthatunk a síkban, elzárt részecskére vonatkozó eredményekhez is.

Téglalap alakú tartományba kényszerített részecskék sajátrezgése

Az a , b élhosszúságú, téglalap alakú tartományba kényszerített részecske stacionárius állapotai az élei mentén befogott lap rezgéseivel modellezhetők. A lapon az élek mentén egymástól függetlenül alakulhatnak ki a húr mentén megismert állóhullám-alakok. Ennek megfelelően az energia a két egymásra merőleges irányban kialakuló állóhullám energiájának összege. Természetesen ebben az esetben csomópontok helyett az ábrán látható *csomóvonalak* jelennek meg. Ahhoz, hogy a jelenséget értelmezzük, vagy rezgő lemezeire vonatkozó kísérleteket, vagy számítógépes animációt kell bemutatni, A diákok ennek alapján könnyen megértik, hogy a téglalap két éle mentén mért hullámhosszúságok nem egyenlők.



Megjegyzés:

- A lemezen kialakuló állóhullámok jól szemléltethetők a hosszúságú téglalap alakú keretre feszített szappanhártya rezgéseivel. (Lásd. [A fizika tanítása a középiskolában II.](#) MH8. melléklet. Készítsünk 4:1 oldalarányú keretet és csatlakoztassunk hozzá hosszabb oldalának közepén nyelet. Feszítsünk a keretre szappanhártyát, majd mozgassuk a keretet a nyélnél fogva fel-le. Eltalálva a megfelelő ütemet, a hártyán félhullámhosszi állóhullám alakul ki. (A félhullámhossz a keret két oldala mentén nem ugyanannyi.) Ez a hártya állóhullámjainak legegyszerűbb mintázata. Forgassuk ezután a keretet ide-oda a nyél, mint tengely körül. Megfelelő ütemű mozgással a hosszabb tengely mentén egy, illetve másfél hullámhosszúságú állóhullám is létrehozható. Ezekben a mintázatokban a kisebb tengellyel párhuzamosan egy, illetve két csomóvonalat figyelhetünk meg a hártyán. A rövidebb oldalra merőlegesen nincsen csomóvonal, ami azt jelenti, ennek az oldalnak mentén most is félhullámhossz alakul ki. A szappanhártya kézi rezgésével bonyolultabb hullámalakok nehezen alakíthatók ki, számítógépes animációkon azonban érdemes tanulmányozni őket.

A lemez állóhullámjai a téglalpra kényszerített elektron hullámfüggvényeit rajzolják ki. Az a , b , élhosszúságú téglalpra zárt részecske energiája az élek mentén két egymásra merőleges

irányban kialakuló, egymástól független állóhullám energiájának összege. Az állóhullám alakban létező elektron (mozgási) energiája az egydimenziós gondolatmenet általánosításával egyszerűen megkapható.

Feküdjék a téglalap a oldala a Descartes–koordináta-rendszer x , b oldala pedig az y tengelye mentén. Az x - és az y -tengely mentén kialakuló állóhullámokra érvényes az $a = n_x \frac{\lambda_x}{2}$, illetve $b = n_y \frac{\lambda_y}{2}$. Az elektron energiája tiszta kinetikus energia, így az impulzusvektorral a

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m}$$

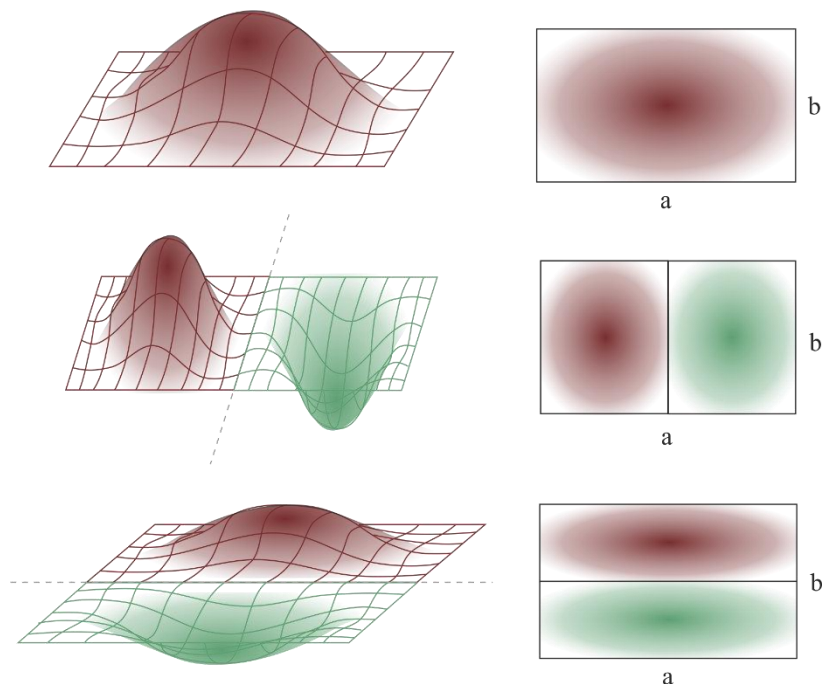
alakban fejezhető ki. Az impulzuskomponenseket a $p = \frac{h}{\lambda}$ de Broglie-összefüggéssel meghatározva $p_x = \frac{h}{2a} n_x$ és $p_y = \frac{h}{2b} n_y$.

Így az elektron energiája

$$E(n_x, n_y) = \frac{h^2}{8m} \left[\left(\frac{n_x}{a} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{b} \right)^2 \right]$$

Ekkor az elektron állapota két kvantumszámmal (n_x, n_y) jellemezhető.

Az n_x, n_y , kvantumszámok azt jelentik, hogy az a él mentén haladva $(n_x - 1)$, a b él mentén pedig $(n_y - 1)$, *csomóvonalat találunk az élre merőlegesen*. Alapállapotban a $n_x = 1$ és $n_y = 1$. Az alapállapotban nincsenek csomóvonalak. A további, gerjesztett állapotokra egyszerűen az (n_x, n_y) kvantumszám-pár megadásával hivatkozhatunk. Az $(2,1)$ például azt az állapotot jelenti, amelyben az x -tengelyre merőleges, az $(1,2)$ pedig azt, amelyben az y -ra merőleges csomóvonal van. Anélkül, hogy pontosan meghatároznánk érdemes a hullámfüggvényeket illusztráló pillanatfelvételt mutató ábrák mellett az elektron megtalálási valószínűségét is szemléltetni.



A megtalálási valószínűséget szemléltető ábrákon a pontok sűrűsége jelzi a valószínűség nagyságát, a pontok színe pedig arra emlékeztet, hogy az állapotfüggvény a két tartományban minden pillanatban ellentétes fázisú. A valószínűsége sűrűség természetesen mindenütt pozitív.

Megjegyzés:

- Felvetődhet a kérdés, hogy a csomóvonalakat miért a téglalap éleivel párhuzamosan és pl. miért nem az átló síkjában helyeztük el? A csomóvonalak természetesen nemcsak az élekkel párhuzamosan jelölhetők ki. Megmutatható azonban, hogy a szabadon választott irányítású, de egymásra merőleges két csomóvonal-sereg révén adódó állapotfüggvényekből matematikai módszerekkel tetszőleges más stacionárius állapotfüggvény előállítható. Sőt ennél több is igaz! Az időben állandósult állapotokból tetszőleges nemstacionárius állapot hullámfüggvénye is kikeverhető.

A levelek zöld színét adó klorofill molekula atomjai síkbeli elrendezésűek, a molekula alakja kissé torzult négyzethez hasonlít. Ideális négyzet esetén az egész molekulában megtalálható, ún. *delokalizálódott elektronok*, (2, 1), és (1, 2) állapotainak energiája azonos. A klorofill molekula csekély „torzultsága” miatt ezek az energiák kissé különböznek. Ez az energiakülönbség azonban olyan kicsiny, hogy már a kis energiájú vörös fény fotonjai elegendőek ahhoz, hogy az alacsonyabb energiájú állapotból a magasabb energiájú állapotba gerjesszék az elektronokat. A klorofill molekulák a fehér fényből elnyelik a vöröset, így a levelekről a vörös kiegészítő színe – a zöld – jut a szemünkbe. Ezért látjuk zöld színűnek a klorofillt tartalmazó leveleket.

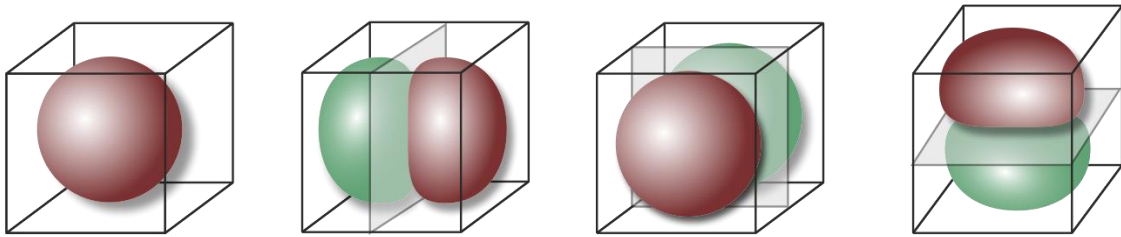
Körlap-tartományra kiterjedt részecske sajátrezgéseit lásd a [Fizika tanítása a középiskolában II.](#) MH8. és MH9. mellékletek.

[Vissza >>>](#)

KV12. Háromdimenziós potenciáldobozba (téglatestbe) zárt részecske (fakultatív kiegészítő anyag)

A téglatestbe zárt részecske

Az a , b , c élhosszúságú, téglatestbe zárt részecske stacionárius állapotai a test lapjain rögzített rugalmas közeg állóhullámaival modellezhetők. Ebben az esetben azonban a közeg térbeli rezgéseinek elképzelése önmagában is nehéz. A háromdimenziós elrendezés miatt a részecskék kitérését nem tudjuk jól szemléltetni. A húr és a lemez részecskéivel szemben, most a részecskék kitérése nem rajzolható meg világosan, ezért célszerűbb a lemez rezgéseire jellemző csomóvonal analógiájára a csomólapok számával jellemezni a valószínűségi sűrűséget. Az analógia most az lehet, hogy a húr állóhullámaiban csomópontok, a lemezében csomóvonalak, a téglatestében csomósíkok alakulnak ki. Alapállapotban a téglatest belsejében nincsen csomósík, az első gerjesztett állapotokban pedig a téglatest oldallapjaival párhuzamosan egy-egy csomósík alakul ki. Az ábra az alapállapot és a gerjesztett állapotok valószínűségi sűrűségét mutatja a lemez állóhullámainak analógiájaként. A pontok sűrűsége a valószínűségi sűrűség nagyságával arányos, a kétféle szín arra utal, hogy a különböző színű helyeken az állapotfüggvény ellentétes előjelű.



Feküdjék a téglatest a oldala a Descartes–koordináta-rendszer x , b oldala az y , c pedig a z tengelye mentén. Az x - és az y -tengely mentén kialakuló állóhullámokra érvényes az $a = n_x \frac{\lambda_x}{2}$ illetve $b = n_y \frac{\lambda_y}{2}$ összefüggést természetes módon egészíthetjük ki a $c = n_z \frac{\lambda_z}{2}$ összefüggéssel. Az elektron energiája most is tiszta kinetikus energia, így az impulzusvektorral

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}$$

alakban fejezhető ki. Az impulzuskomponenseket a $p = \frac{h}{\lambda}$ de Broglie-összefüggéssel meghatározva $p_x = \frac{h}{2a} n_x$, $p_y = \frac{h}{2b} n_y$ és $p_z = \frac{h}{2c} n_z$.

Így az elektron energiája

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{h^2}{8m} \left[\left(\frac{n_x}{a} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{b} \right)^2 + \left(\frac{n_z}{c} \right)^2 \right]$$

Ekkor az elektron állapota három kvantumszámmal (n_x, n_y, n_z) jellemezhető.

Az n_x , n_y és n_z kvantumszámok azt jelentik, hogy az a él mentén haladva $(n_x - 1)$, a b él mentén $(n_y - 1)$, a c él mentén pedig $(n_z - 1)$ csomósíkot találunk az élre merőlegesen. Alapállapotban a $n_x = n_y = n_z = 1$. Az alapállapotban nincsenek csomósíkok a tartomány belsejében. Az alapállapot energiája tehát:

$$E(1,1,1) = \frac{h^2}{8m} \left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2 \right]$$

Kocka alakú doboz esetén ez:

$$E(1,1,1) = \frac{3h^2}{8ma^2}$$

A további, gerjesztett állapotokra egyszerűen az (n_x, n_y, n_z) kvantumszám-hármas megadásával hivatkozhatunk. Az $(2,1,1)$ például azt az állapotot jelenti, amelyben az x -tengelyre merőleges, az $(1,2,1)$ illetve azt $(1,1,2)$ amelyben az y -ra illetve z -re merőleges csomósík van. Vegyük észre, hogy kocka alakú doboz ennek a három különböző állapotnak az energiája ugyanakkora:

$$E(2,1,1) = E(1,2,1) = E(1,1,2) = \frac{6h^2}{8ma^2}$$

ami éppen kétszerese az alapállapot energiájának. Azokat az állapotokat, amelyekben különböző hullámfüggvényekhez azonos energia tartozik, *elfajuló* (idegen szóval *degenerált*) állapotoknak nevezzük.

Megjegyzés:

- Ha a téglatest alakú doboz élei közül valamelyik például a c oldal nagyon kicsiny, akkor ott jó eséllyel csak az $n_z = 1$ kvantumszámú állapot létezhet, mert a gerjesztéshez nagyon nagy energia lenne szükséges. Szokás ezt úgy kifejezni, hogy az $n_z > 1$ kvantumszámú állapotok be vannak fagyva.

[Vissza >>>](#)

KV13. Színcentrumok sókristályokban (kiegészítő gyakorlati példa a potenciáldobozba zárt elektronra)

Gyakorlati példa a potenciáldobozba zárt elektronra

A természetes alkálihalogenid kristályokban általában különböző színekben találhatók meg. A színeket különböző szennyezések, kristályhibák okozzák, a tiszta anyagokból mesterségesen növesztett kristályok víztiszták és színtelenek. Érdekes, hogy az eredetileg színtelen átlátszó kristályok utólagos kezelésekkel színessé tehetők. Legegyszerűbb (de nem iskolai kísérlet) módszer, hogy a kristályt röntgensugárzásnak teszik ki. Bonyolultabb, de akár iskolai szakkörön is elvégezhető eljárást mutat az ELTE-én készített, kristályokkal végzett kísérleteket bemutató videó-összeállítás második rövidfilmje.



WWW

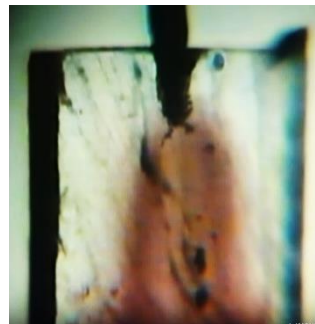
[Kristályok színe. Színcentrumok](#)



A videón látható kísérletben elsőként színtelen KCl, majd NaCl kristályt magas hőmérsékletre hevítve fémelektrodák között elektrolizálunk. A magas hőmérséklet biztosítja, hogy a kristályban kellő számú üres rácshely képződjön, amíg a kristályba helyezett elektróda (csúcshatással) elektronokat juttat a kristályba. A KCl kristály kék, a NaCl kristály barnászörös színűvé válik.



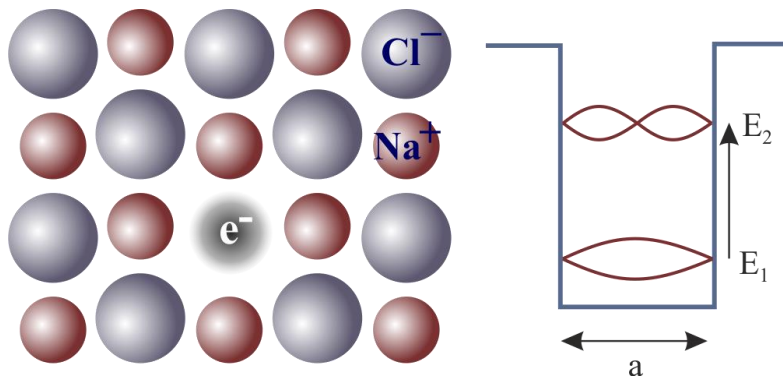
KCl



NaCl

A jelenség szemléletes példát kínál a potenciáldobozba zárt elektron kvantumállapotainak bemutatására. A kristály utólagos színét speciális kristályhibák, ún. *színcentrumok* adják. A színcentrumok az alkálihalogenid kristályokban akkor keletkezhetnek, ha a negatív ionok kilépnek rácsbeli helyükről, elektronjukat elvesztik és atomként beszorulnak a kristályrácsba. A negatív ion helyén keletkező rácslyuk közvetlen környezete pozitív alkáli ionokból áll, így az elektronok az üres tartományt rácsállandó méretű potenciáldobozként érzékelik. A potenciáldoboz képes befogni a negatív ionokról leszakadó szabad elektronokat,

A potenciáldoboz csapdájába esett elektronok lehetséges kötött állapotait állóhullámok jelentik. Legegyszerűbb közelítésként azt mondhatjuk, hogy alapállapotban az elektron hullámhossza kb. a rácsállandó kétszerese, az első gerjesztett állapotban maga a rácsállandó.



Az ábra bal oldalán a térbeli rácsszerkezet egy metszetét látjuk. A negatív kloridionokat a nagyobb vörös körök, a kisebb méretű pozitív káliumionokat a kék körök jelzik. A kristályból hiányzik egy kloridion, a helye üres. Az ábra jobb oldala hiányzó ion helyén kialakult potenciálgödör sematikus rajza látható. A gödör szélessége a kristály a rácsállandója, mélysége a hiányzó negatív ion helyén a környező pozitív ionok elektronra gyakorolt vonzásából adódó potenciális energiát jelzi. A „dobozba zárt” elektron alapállapotának és első gerjesztett kvantumállapotának energia különbségét a hullámok magassága jelzi. Az alkálihalogenid kristályokban a színcentrumba zárt elektron alapállapota és első gerjesztett állapota közti energiakülönbség a látható fény energiatarományába esik. Így a színcentrum alapállapotú elektronjai a fehér fény megfelelő frekvenciájú összetevőit elnyelve gerjesztődnek. Ennek eredményeként a kristályt az elnyelt fénykvantum kiegészítő színében látjuk.

Egydimenziós közelítést alkalmazva elemi kvantummechanikai megfontolásokat végezhetünk. A potenciáldobozba befogódott elektron állandósult hullámállapotú, így állóhullámmal jellemezhető. Alapállapotában az állóhullám hullámhossza $\lambda_1 \approx 2a$, az első

gerjesztett állapotban $\lambda_2 \approx a$. Az elektron kinetikus energiája a hullámhossz négyzetének reciprokával arányos

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

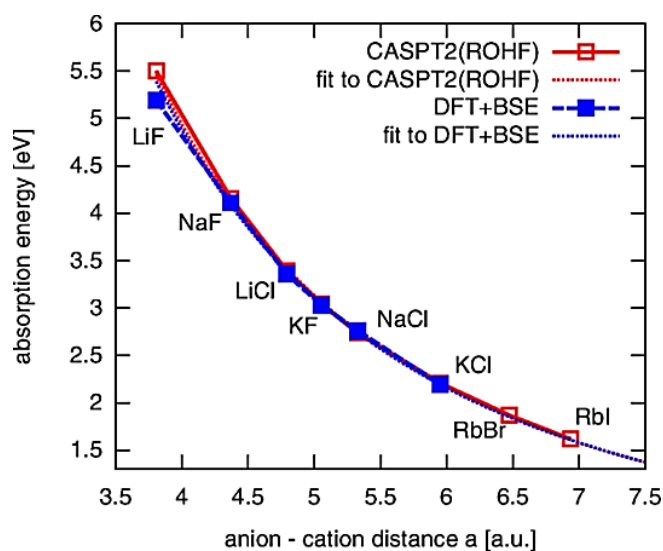
Az alapállapotú elektron a látható fény bizonyos hullámterületét elnyelve a magasabb energiájú gerjesztett pályára kerülhet. Az elektronállapotok energiakülönbsége tehát az elnyelt fényfrekvencia energiájával egyezik meg:

$$hf = E_2 - E_1$$

A fenti összefüggések felhasználásával adódik az eredetileg színtelen alkálihalogenid kristályokban utólagos kezeléssel létrehozott színcentrumok által a fehér fényből elnyelt frekvenciák közelítő értéke:

$$f \approx \frac{3h}{8ma^2}$$

A fenti számítás eredménye összhangban a kísérleti tapasztalatokkal. Különböző utólagosan megszínezett alkálihalogenid kristályokon abszorpciós spektrumvizsgálatokat végeztek, és meghatározták a színcentrumok által a fehér fényből elnyelt fényfrekvenciákat. Számításunk eredménye ezzel megegyezik. Az eredmények igazolták, hogy a különböző kristályokban elnyelődött fény frekvencia-átlaga a kristályok szerkezetét jellemző a rácsállandók négyzetével fordított arányban változik. Ezt az ún. *Mollwo-féle összefüggést* mutatja mérési eredményeket összefoglaló grafikon.



(P. Tiwald at all. [Physical Review B](#) 92 (2015):144107)

A kísérleti eredmény és a fenti egyszerű számításunk eredménye elfogadhatóan egyezik.

[Vissza >>>](#)

KV14. H-atom elektronjának pályaimpulzus momentumának és mágneses momentumának elemi kvantumfizikai tárgyalása (emelt szintű kiegészítő tananyag)

Az elektron pálya-impulzusmomentuma

Niels Bohr félklasszikus atommodellje a mag körül keringő elektron impulzusmomentumára tett kvantálási feltételre épült. Vizsgáljuk most az elektronok impulzusmomentumát a hullámmechanika alapján! Eszerint az elektron már nem kering a mag körül klasszikus értelemben és így elvesztettük azt a szemléletes képet, amellyel az elektron impulzusmomentuma könnyen meghatározható lenne. Az elektron azonban a hullámmechanikai leírás szerint is rendelkezik jól meghatározott perdülettel (impulzusmomentummal).

A hidrogénatom elektronjára felírt Schrödinger-egyenlet pontos megoldása szerint a különböző elektronállapotokhoz tartozó impulzusmomentum nagysága (abszolút értéke) az

$$|N| = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$$

összefüggés szerint kvantált.

Az iránykvantáltság

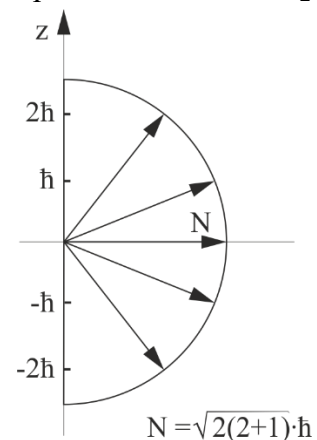
Az elektron impulzusmomentumának iránya nem adható meg pontosan. Annyit mondhatunk csak, hogy amennyiben fizikailag kiválasztottunk (pl. mágneses térrel) egy irányt, s az ebbe az irányba mutató impulzusmomentum-összetevő értékét pontosan meghatározzuk, akkor az impulzusmomentum másik két összetevőjének az iránya bizonytalan. (A bizonytalanság mértékére határozatlansági relációval adhatunk becslést.)

A kiválasztott irányban sem változhat azonban folytonosan az impulzusmomentum értéke. Ha pl. a z -tengelyt a kiválasztott irányban vesszük fel, akkor az impulzusmomentum N_z összetevője csak \hbar egész számú többszöröse lehet, azaz $N_z = m\hbar$, $m = 0, 1, 2, \dots$

A kiválasztott irány természetesen a tér bármely iránya lehet! Ezt úgy kell értenünk, hogy amennyiben az impulzusmomentum adott irányba eső összetevőjét pontosan mérjük, akkor magával a méréssel kitüntetünk egy irányt.

Az ábra $l = 2$ esetén mutatja, hogy az $|N| = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$.

nagyságú impulzusmomentum adott irányba eső vetülete hogyan lehet \hbar egész számú többszöröse. A hidrogénatom elektronjának impulzusmomentuma tehát iránykvantált.



A pályaperdület beállása

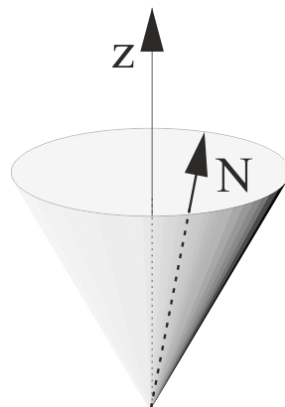
Magyarázatra szorul, hogy miért nem adható meg az impulzusmomentum pontos iránya és miért nem vehető fel a kiválasztott z tengely ebben az irányban.

A felvetett kérdésre határozatlansági reláció ad magyarázatot. Kimutatható, hogy az impulzusmomentum komponensei nem adhatók meg egyszerre tetszőleges pontossággal. Amennyiben az egyik, pl. z -komponens $N_z = m\hbar$, akkor fennáll a

$$\Delta N_x \cdot \Delta N_z \geq \frac{\hbar}{2} |m| v$$

határozatlansági reláció. Ez a magyarázata, hogy az impulzusmomentum abszolút értéke nem egyezhet meg az N_z összetevő $l\hbar$ maximális értékével. Ha ugyanis ez fennállna, úgy mind az N_x , mind az N_y komponensek értékének pontosan zérusnak kellene lennie, ami a fenti határozatlansági relációval összeegyeztethetetlen.

Megjegyzés: Ezt a határozatlanságot a pörgettyű precessziós mozgásával szemléltethetjük. Az impulzusmomentum-vektor ilyenkor úgy jár körül egy irányt, hogy az ebbe az irányba eső vetülete állandó marad. Maga az impulzusmomentum-vektor viszont kúpfelületet söpör végig, az adott irányra merőleges két komponense tehát állandóan változik



Az impulzusmomentum beállása

A mágneses kvantumszám értéktartománya

Az impulzusmomentum kvantálási szabályaiból adódik, hogy adott l mellékkvantumszám esetén $2l + 1$ különböző állapotfüggvény lehetséges. Már az előző pontban, a hullámfüggvények számbavételekor utaltunk arra, hogy az állóhullám állapotokat a csomófelületek száma mellett a csomósíkok irányítottságával lehet jellemezni. Ez az irányítottság éppen az impulzusmomentummal adható meg. Így az elektronok állapotfüggvénye az n fő- és az l mellékkvantumszám mellett az impulzusmomentum irányítottságára utaló m kvantumszámmal jellemezhető. Az m kvantumszám értéke a $-l \leq m \leq l$ tartományon belül egész értékeket vehet fel.

Az impulzusmomentum iránykvantálására utaló m kvantumszámot *mágneses kvantumszámnak* nevezzük.

Megjegyzés:

- A mágneses kvantumszám elnevezést az elektron mágneses tulajdonságai és az impulzusmomentuma közti szoros kapcsolat indokolja. Ez a kapcsolat szemléletesen mutatható meg a Bohr-modell keringő elektronja kapcsán. A keringő elektron köráramot képvisel, amelynek mágneses momentuma van.
- A μ mágneses momentum nagyságát az elektron N impulzusmomentumával a

$$\mu = -\frac{q_e}{2m_e}N$$

alakban fejezhetjük ki, ahol q_e az elektron töltése, m_e az elektron tömege.

Az impulzusmomentum és a mágneses momentum arányát megadó $\frac{q_e}{2m_e}$ tényezőt *giromágneses faktornak* nevezzük. Az elektronok mágneses momentumának nagysága az impulzusmomentumnak megfelelően kvantált.

A mágneses momentum értéke csak a μ_B alapérték többszöröse lehet, azaz

$$\mu = \sqrt{l(l+1)} \cdot \mu_B$$

μ_B az ún. *Bohr-magneton* értéke:

$$\mu_B = \frac{q_e \hbar}{2m_e}$$

A keringő elektronra egyszerűen felírható összefüggés az elektron hullámmechanikai leírása esetén is érvényes marad.

Megjegyzés:

- Állításunkat, a bizonyító erőjű számításokat mellőzve, azzal támaszthatjuk alá, hogy érzékeltetjük, kapcsolat teremthető az elektron-állóhullámok és a körpályán keringő elektron elképzelése közt. Tekintsünk egy $l = 1$ mellékkvantumszámú elektront! A három egymásra merőleges elektronrezgésnek megfelelő állóhullám közül kettőnek az eredője keringésként is felfogható, hasonlóan ahhoz, ahogy a klasszikus mechanikában két merőleges rezgés körmozgássá összegződik.

[Vissza >>>](#)

KV15. A hidrogénatom gerjesztett energiaszintjei (emelt szintű kiegészítő anyag)

Az alapállapothoz hasonlóan határozható meg a gerjesztett állapotok energiája is, ha figyelembe vesszük, hogy az első gerjesztett állapotban az adott tartományban két fél hullámhosszúságú állóhullám képződik. Mivel $p = \frac{h}{\lambda}$, ez azt jelenti, hogy változatlan sugár mellett az eredeti $\frac{h}{r}$ impulzus megkétszereződne. Az n -edik gerjesztett állapotban n fél hullámhosszúságú állóhullám keletkezik, így az eredeti impulzus $n \frac{h}{r}$ -re változik. Ennek megfelelően az n -edik gerjesztett állapot energiája:

$$E_n = \frac{p^2}{2m} + q_e V(r_n) = n^2 \frac{\hbar^2}{2mr_n^2} - \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$$

A gerjesztett állapot energiáját, s a hozzá tartozó gömb sugarát most is az energiaminimum-elvből, azaz a

$$\frac{dE_n}{dr_n} = 0$$

összefüggésből határozzuk meg. Ebből

$$-n^2 \frac{\hbar^2}{2m r_n^3} + \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = 0$$

és innen

$$r_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{mq_e^2} \approx n^2 r_0$$

Vegyük észre, hogy ismét a Bohr-modell alapfeltevéseivel jól egyező eredményt kaptunk. (Bohr a Balmer-formulára alapozva éppen azt tételezte fel, hogy a stabilis elektronpályák sugara $n^2 r_0$.)

Az $r_n = n^2 r_0$ értékek felhasználásával az elektron energiájára az

$$E_n = -\frac{mq_e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

összefüggés adódik. Ezeknek az energiáknak a felhasználásával, a Bohr-modell tárgyalásakor alkalmazott gondolatmenettel, a hidrogénatom színeképeiben megfigyelt hullámhosszak mennyiségileg is meghatározhatók.

Az elektron lehetséges energiaértékeit a hidrogénatomban a Bohr-modell jól visszaadta. Az elektron megengedett energiaértékei eszerint az

$$E_n = \frac{mq_e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

összefüggéssel határozhatók meg. Az n kvantumszám értéke a pozitív egész számokon fut végig. A kvantummechanikai leírás sem ad más eredményt, mint a Bohr-féle energia kifejezés, a formula levezetése, illetve értelmezése azonban alapvetően más.

[Vissza >>>](#)

KV16. Kvantumszámok és hullámállapotok (fakultatív kiegészítő anyag)

A hullámfüggvények áttekintése a kémiából ismert kvantumszámok segítségével történhet. Ebben a tananyagrészben új, a csomósíkok és csomófelületek elhelyezkedése és a kvantumszámok közötti összefüggések világos kimondása.

A főkvantumszám

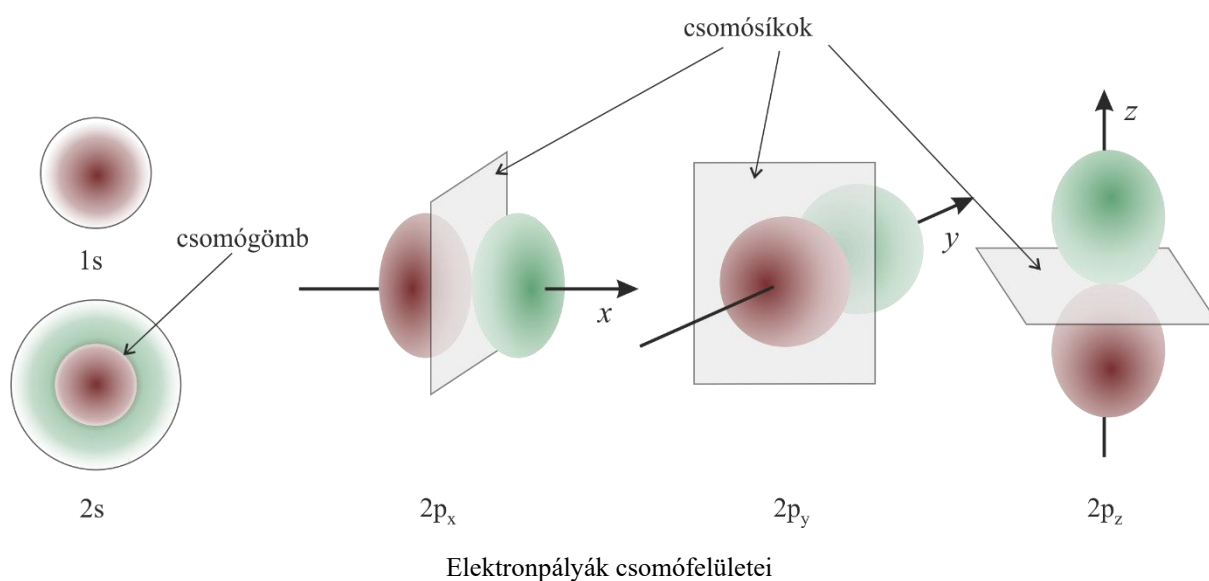
Az előzőekben meghatároztuk a hidrogénatom lehetséges energiaértékeit. Megállapítottuk, hogy az energia egyetlen kvantumszámtól (n) függ. Ennek az ún. *főkvantumszámnak* az értéke eggyel nagyobb a hullámfüggvény *belső csomófelületeinek* f számánál, azaz $n = f + 1$.

A mellékvantumszám

Amennyiben nemcsak az elektron energiáját, hanem az állapotfüggvény térbeli elhelyezkedését is jellemezni akarjuk, akkor az n főkvantumszám mellett meg kell adni a csomósíkok l számát is. Ezt a számot *mellékvantumszámnak* nevezzük. A két kvantumszám n és l ismeretében a csomógömbök g száma már meghatározható.

Nem ismerjük azonban még a csomósíkok pontos orientációját. Ennek meghatározása – mint látni fogjuk – egy újabb (m) kvantumszám bevezetését igényli. Az állapotfüggvény megadása tehát a hidrogénatom esetén három kvantumszám segítségével lehetséges.

Tudjuk, hogy fizikai jelentése csak az elektron megtalálási valószínűségét meghatározó $|\Psi|^2$ függvénynek van, ezért az ábrán ezt a függvényt rajzoltuk fel az $n = 1, 2$ főkvantumszám érték mellett.

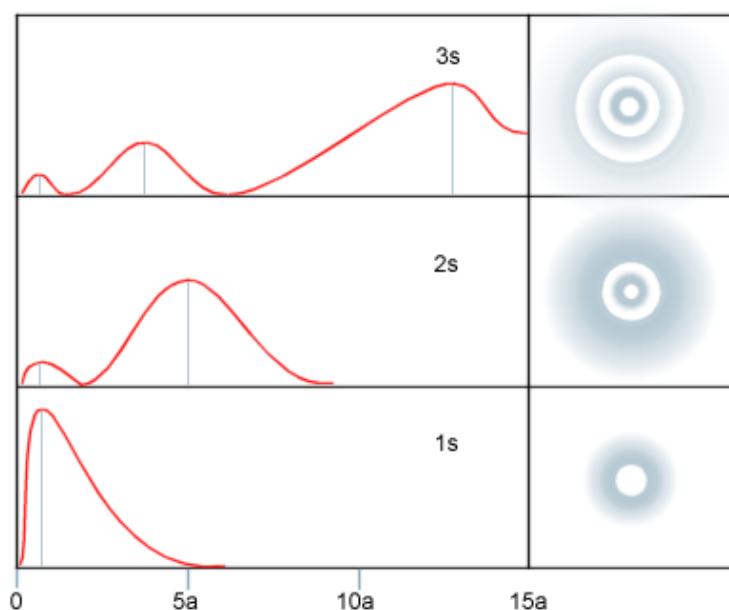


Ezek az ábrák mennyiségi becslésekre nem alkalmasak. Lényegében csak azt mutatják, hogy az elektronok megtalálási valószínűsége ($|\Psi|^2$) hol különbözik zérustól. A megtalálási valószínűségre ugyanakkora érték adódik az állapotfüggvény ellentétes fázisú értékeiből. A megtalálási valószínűség ábráin a különböző fázisú állapotfüggvény részek eltérő színezésével emlékeztetünk erre.

Az elektronpályák

A $|\Psi|^2$ függvények alakja mutatja, hogy a különböző gerjesztett állapotokban az elektron a tér más és más tartományában helyezkedik el nagy valószínűséggel. Ezeket az egyes állapotfüggvényekhez tartozó tértartományokat *elektronpályáknak* nevezzük. Az elektronpályák alatt feltüntettük a kémiában szokásos jelölést is. Eszerint a főkvantumszám mellé *s* betűt írunk, ha $l = 0$, *p* betűt, ha $l = 1$, *d*-t, ha $l = 2$ és *f*-et, ha $l = 3$. A betű mellé írt index a pálya orientációjára utal. A $2p_x$ jelölés pl. azt jelenti, hogy a főkvantumszám értéke kettő, *s* az egyetlen csomópont az *x* tengelyre merőleges.

A $|\Psi|^2$ valószínűsűrűség függvény ismeretében meghatározható, hogy a magtól milyen távolságban tartózkodnak leginkább az elektronok. Annak valószínűsége, hogy az elektron r távolságban a dr vastagságú gömbhéjban tartózkodik, $P(r) = 4r^2\pi|\Psi|^2 dr$. A $4r^2\pi|\Psi|^2$ függvény az elektron térbeli valószínűség-eloszlását jellemzi.



Radiális valószínűség eloszlás

Az ábra az $n = 1, 2$ főkvantumszámhoz tartozó állapotfüggvényeket, a hozzájuk tartozó $|\Psi|^2$ megtalálási valószínűsűrűségeket és az elektron térbeli valószínűség eloszlását mutatja a magtól mért távolság függvényében. Az elektron térbeli valószínűség eloszlását jellemző függvény jellegzetes maximumokat mutat. A számítások azt mutatják, hogy a függvények maximumhelyei a Bohr-féle pályák sugarával egyeznek meg. A Schrödinger-elmélet szerint az elektron maximális valószínűséggel éppen a Bohr-pályák környezetében tartózkodik.

A mágneses kvantumszám

A mágneses kvantumszám értelmezése az elektron pálya-impulzusmomentumához kapcsolódik. Az impulzusmomentum iránykvantáltságának (lásd [KV14.](#)) megfelelően az elektron mágneses momentumának iránya is kvantált. Ezt jellemzi az m mágneses kvantumszám. Az elektron mágneses momentumának ez a tulajdonsága akkor válik lényegessé, ha az atom mágneses térbe kerül. Ilyenkor a külső tér irányához képest különböző irányú mágneses momentummal rendelkező elektronok energiája különbözővé válik. Mágneses térben az elektronok energiája az n főkvantumszám mellett az m mágneses kvantumszámtól is függ.

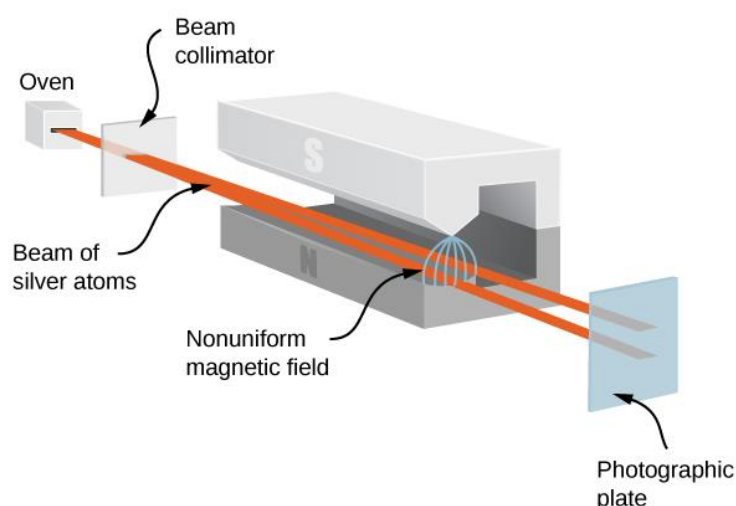
Az elektronok impulzusmomentumáról, illetve mágneses momentumáról mondtak jól egyeznek a spektroszkópiai tapasztalatokkal. A színeképvizsgálatok során megfigyelték, hogy a színeképvonalak száma mágneses tér hatására megnő. Egy-egy eredeti színeképvonal több egymáshoz közel álló vonalra hasad szét. Ez a jelenség az ún. *Zeeman-effektus*. A jelenség kvalitatív magyarázata a következő: Adott l mellékkvantumszámhoz $(2l + 1)$ számú különböző, a mágneses kvantumszámban eltérő elektronállapot tartozik. Külső mágneses tér hiányában ezek energiája nem különbözik egymástól. Az ilyen állapotok $(2l + 1)$ -szeresen *degeneráltak*. A különböző degenerált energiaszintek közötti átmeneteknek egy-egy színeképvonal felel meg. Mágneses tér hatására a degeneráltság megszűnik, az elektronállapotok energiái különbözővé válnak. Így az energianívók számának növekedésével nő a lehetséges energia átmenetek, azaz a megfigyelhet színeképvonalak száma is.

[Vissza >>>](#)

KV17. Az elektron saját-impulzusmomentuma (spin) (kiegészítő tananyag)

A Stern–Gerlach-kísérlet

Stern és Gerlach az atomok elektronoktól származó mágneses momentumát vizsgálta oly módon, hogy atomokból álló részecskenyalábot inhomogén mágneses téren vezetett keresztül. Inhomogén térben a mágneses momentummal rendelkező részecskékre erő hat, ezért az atomok eltérülnek eredeti mozgásirányuktól. Az atomok eltérüléséből, valamint a mágneses tér inhomogenitásának mértékéből az atomok mágneses momentuma meghatározható. A kísérlet azonban nemcsak erre alkalmas! Eldönthető belőle az is, hogy valóban fennáll-e az elektron impulzusmomentumának iránykvantáltsága. Amennyiben az impulzusmomentum, és a vele együtt járó mágneses momentum iránya nem lenne kvantált, akkor az atomok mágneses momentumának iránya tetszőlegesen lehetne a külső tér irányához képest, és ezért az eltérített részecskék folytonos eloszlásban csapódnának az ernyőre. Ha azonban az iránykvantáltság fennáll, akkor az eltérített atomok csak néhány jól elkülönülő foltban érik az ernyőt. A Stern–Gerlach-kísérlet meggyőzően bizonyítja az impulzusmomentum iránykvantáltságát.



A Stern–Gerlach-kísérletet hidrogénatomokkal elvégezve meglepő eredményt kapunk, az atomok két foltban csapódnak be az ernyőre.

A hidrogénatom alapállapotban levő elektronjának mellékkvantumszáma $l = 0$, így az elektronnak mágneses momentuma nem lehet. A Stern-Gerlach-kísérlet ezen utóbbi eredménye csak úgy magyarázható, ha feltesszük, hogy az elektronnak magának is van mágneses momentuma, és az, irányítottsága szerint, kétféle lehet. A mágneses momentum nagysága:

$$\mu_s = \frac{q_e \hbar}{2m_e}$$

Az elektronspin

Mivel a mágneses momentum mindig impulzusmomentummal jár együtt, ezek a kísérleti eredmények azt bizonyítják, hogy az elektronoknak az előzőekben tárgyalt ún. *pálya-impulzusmomentumtól* függetlenül rendelkezniük kell egy másik, ún. *saját impulzusmomentummal* is. Az elektronok saját-impulzusmomentumát *spinnek* nevezzük. A pálya-impulzusmomentumhoz hasonlóan az elektron spinje is iránykvantált. A saját-impulzusmomentumnak valamilyen kitüntetett irányra, pl. a külső mágneses tér irányára vonatkoztatott vetülete mindig

$$s_z = \pm \frac{\hbar}{2}$$

Látható, hogy a spin és a vele társuló mágneses momentum *aránya* (a *giromágneses faktor*) most éppen kétszerese az előbbinek.

A spin irányának jellemzésére *Goudsmit* és *Uhlenbeck* javaslatára bevezették az *s spinkvantumszámot*, amely a $+\frac{1}{2}$ vagy a $-\frac{1}{2}$ értéket veheti fel. Így az elektronállapot teljes jellemzéséhez négy kvantumszám szükséges: n, l, m, s .

Megjegyzés:

- Fermionok és bozonok: az eddigiekben csak az elektron spinjéről szoltunk. A kísérleti és elméleti vizsgálatok bizonyítják, hogy más elemi részecskéknek is van spinjük. A proton és neutron spinje például az elektronokéhoz hasonlóan $\frac{1}{2}$, a fotonok spinje 1, a mezonoké pedig zérus. A spinnel együtt az elemi részek általában mágneses momentummal is rendelkeznek. Például a foton mágneses momentuma azonban zérus. Mind a proton, mind a neutron rendelkezik saját mágneses momentummal, a spin és a mágneses momentum aránya azonban különböző. A feles spinű részecskéket *fermionoknak*, az egész spinűeket pedig *bozonoknak* nevezzük.

[Vissza >>>](#)

KV18. A Mengyelejev-féle periódusos rendszer (kiegészítő anyag)

A többelektronos atomok héjszerkezete alapján megmagyarázható az elemek *Mengyelejev-féle periódusos rendszere*. Mengyelejev a periódusos rendszert a növekvő atomsúlyok szerint szakaszosan ismétlődő kémiai tulajdonságok alapján szerkesztette meg. A rendszerben az elemek egymás alá rendezett hét sorban – periódusban – úgy helyezkednek el, hogy az egymás alatti elemek nyolc oszlopot alkotnak. Az egy oszlopban levő kémiai elemek viselkedésük szerint igen hasonlóak. Az egyre növekvő rendszámú (a rendszámmal együtt növekszik az atomsúly) atomokban az elektronhéjak, és ezen belül az alhéjak betöltődési sorrendje az első három periódusban megfelel a kvantumszámok növekvő sorrendjének.

Az első két elektronhéj

Az első elektronhéjon ($n = 1$) a mellékkvantumszám csak zérus lehet, így alhéj nincs. Az ennek megfelelő $1s$ pályán összesen két elektron helyezkedhet el; egy elektronja van a hidrogénatomnak (H), két elektronja a héliumnak (He). A második elektronhéjon ($n = 2$) az $l = 0$ és $l = 1$ mellékkvantumszámnak megfelelően két alhéj alakul ki. Ezek a $2s$ -, illetve $2p$ -pályákból állnak. A gömbszimmetrikus $2s$ -pályán helyezkednek el a lítium (Li) és a berillium (Be) elektronjai. Ezután töltődik fel a $2p$ alhéj három pályája ($2p_x, 2p_y, 2p_z$), amelyen összesen hat elektron helyezkedhet el. A második héjat a 10-elektronos neon (Ne) zárja le.

A magasabb főkvantumszámú elektronhéjak

Hasonló módon töltődnek fel a 3. elektronhéj $3s$ és $3p$ alhéjai. A $3p$ alhéj betöltődése a 18 elektronos argonnal (Ar) fejeződik be. Ezután azonban nem a $3d$ alhéj betöltődése folytatódik, hanem elkezdődik az $n = 4$ főkvantumszámmal jellemezhető negyedik periódus s alhéjának betöltődése úgy, hogy az $n = 3$ héj d -állapotai (összesen 10 elektronhely) még betöltetlenül marad. Az eddigi betöltési szabályok látszólagos megsértését az elektronok közti taszítással magyarázhatjuk. Az eddigiekben a többelektronos atomok elektronállapotait, és azok energiáját is, a hidrogénatom gerjesztett állapotaival megegyezőnek tekintettük. Az elektronok közti taszítás azonban megváltoztatja az egyes állapotok energiáját (az állapotfüggvények gyakorlatilag változatlanok maradnak). Ez az első két periódusban csak azzal az elhanyagolható következménnyel jár, hogy a p -elektronok energiája megnő az s -állapotok energiájához képest. Az $n = 2$ -nél nagyobb főkvantumszámú héjak esetén az elektronok taszítása miatt a d -állapotok energiája már annyira megnő, hogy nagyobbá válik a következő főkvantumszámú pálya s elektronjainak energiájánál. Az energiaminimum-elv értelmében tehát az n -edik héj ($n \geq 3$) ns és np állapotainak betöltődése után mindig a következő elektronhéj ($n + 1$) s -állapotai töltődnek be, és csak ezután kezdődik meg az nd , illetve $n \geq 4$ esetén az nf alhéjak feltöltődése.

Kémiai tulajdonságok

Az elemek kémiai tulajdonságait általában az atom legnagyobb főkvantumszámú héjának s - és p -állapotú elektronjai, az ún. *vegyértékelektronok* szabják meg. Ezek az alhéjak a periódusos rendszer 8 oszlopának megfelelően 8 elektront tartalmazhatnak.

Az első két oszlop elemeinek külső két elektronhéját s elektronok alkotják. Ezen elemek (alkálifémek és alkáliföldfémek) reakcióképessége nagy. (Megjegyezzük, hogy a fémek kémiai aktivitása az oszlopokban fentről lefelé nő.) A p -állapotok fokozatos betöltődésének megfelelően az elemek *fémes* tulajdonságai csökkennek.

A periódusos rendszer VI. és VII. oszlopában található elemek (oxigéncsoport, halogének) kifejezetten *nemfémes* tulajdonságúak. Az elemek nemfémes aktivitása az oszlop tetején a legnagyobb, fentről lefelé haladva csökken.

A nyolcadik oszlop elemei, a nemesgázok kémiaiilag közömbösek, csak különleges körülmények közt lépnek reakcióba más anyagokkal. A nemesgázok telített s - és p -pályáin levő elektronok gyakorlatilag gömbszimmetrikusan, minden oldalról egyenletesen veszik körbe az atommagot. Ez az oka annak, hogy kémiaiilag közömbösek.

A d és f elektronállapotok betöltésével a legkülső héj elektronjainak száma nem változik, ezért ezek az elemek kémiai viselkedésükben többé-kevésbé hasonlítanak egymáshoz, pl. valamennyien fémek.

Megyelejev a d és f elektronok beépülésével jellemezhető ún. *átmeneti fémeket* nem tudta ellentmondásmentesen besorolni a rendszer nyolc oszlopába, ezért az oszlopokban második elemként ún. mellékcsoportokba szervezve helyezte el őket. A mellékcsoportok egymás alatti elemei hasonlítanak egymáshoz, de alapvetően különböznek az oszlop főcsoportját alkotó elemektől.

Megjegyzés:

- Az elemek kémiai tulajdonságainak periodikusan ismétlődén alapuló táblázatos rendszernek többféle formája létezett. A napjainkban használt formája számos változás során alakult ki. A ma közismert ún. *hosszú periódusos* rendszer előnye, hogy sorrendjében követi az elektronállapotok betöltődésének sorrendjét, miközben továbbra is tükrözi megőrzi az oszlopokban egymás alatt lévő elemek elektronszerkezeti hasonlóságát és kémiai rokonságát. Az elemek táblázatos formájú periódusos rendszere jó lehetőséget kínál arra, hogy az elemek vegyjele mellett számos az elemekre vonatkozó tulajdonságot, illetve számszerű adatokat is közöljenek. A kiválasztott adatok vonatkozásában az egyes táblázatok gyakran különböznek egymástól. A táblázat jelzéseinak értelmezését, a számadatok azonosítását a táblázathoz mellékelik.

2

He

Hélium

4,0026

Hőmérséklet - +

0 °C 32 °F 273 K


	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1 H Hidrogén 1.008																	2 He Hélium 4.0026
2	3 Li Lítium 6.94	4 Be Bérium 9.0122																10 Ne Neon 20.180
3	11 Na Nátrium 22.990	12 Mg Mágnézium 24.305																18 Ar Argon 39.948
4	19 K Kálium 39.098	20 Ca Kalcium 40.078	21 Sc Scandium 44.956	22 Ti Títán 47.867	23 V Vanádium 50.942	24 Cr Krom 51.996	25 Mn Mangán 54.938	26 Fe Vas 55.845	27 Co Cobalt 58.933	28 Ni Nikkel 58.693	29 Cu Réz 63.546	30 Zn Cink 65.38	31 Ga Gallium 69.723	32 Ge Germánium 72.630	33 As Arsén 74.922	34 Se Szén 78.971	35 Br Brom 79.904	36 Kr Kripton 83.796
5	37 Rb Rubídium 85.468	38 Sr Stroncium 87.62	39 Y Ittrium 88.906	40 Zr Cirkónium 91.224	41 Nb Niobium 92.906	42 Mo Molibdén 95.95	43 Tc Technécium (98)	44 Ru Rutenium 101.07	45 Rh Ródium 102.91	46 Pd Palládium 106.42	47 Ag Ezüst 107.87	48 Cd Kadmium 112.41	49 In Indium 114.82	50 Sn Ólajvas 118.710	51 Sb Antimon 121.757	52 Te Télló 127.603	53 I Jód 126.905	54 Xe Xenon 131.29
6	55 Cs Cézium 132.91	56 Ba Bárium 137.33	57-71 Lantanoidok	72 Hf Hafnium 178.49	73 Ta Tantál 180.95	74 W Volfrám 183.84	75 Re Rénium 186.21	76 Os Ozmium 190.23	77 Ir Írídium 192.22	78 Pt Platina 195.08	79 Au Arany 196.97	80 Hg Hégyez 200.59	81 Tl Tallium 204.38	82 Pb Ólajvas 207.2	83 Bi Bismut 208.98	84 Po Polónium (209)	85 At Aztórium (210)	86 Rn Radon (222)
7	87 Fr Francium (223)	88 Ra Rádium (226)	88-103 Aktinoidok	104 Rf Ráfórium (261)	105 Db Dubnium (268)	106 Sg Szögörüm (269)	107 Bh Bohrrium (270)	108 Hs Háaszium (277)	109 Mt Meitnérium (278)	110 Ds Darmstadtium (281)	111 Rg Roentgenium (282)	112 Cn Copernícium (285)	113 Nh Nihónium (286)	114 Fl Fleróvium (289)	115 Mc Moscovium (290)	116 Lv Livermórium (293)	117 Ts Tenessium (294)	118 Og Ogánesson (294)

Szilárd **Fémek** **Nemfémek**

Hg Folyadék **Lantanoidok** **Aktinoidok** **Alkálifémek** **Alkáliföldfémek** **Átmenetfémek** **Másodfajú fémek** **Földfémek** **Egyéb nemfémek** **Nemfémek**

H Gáz **Rf Ismeretlen**

A stabil izotóp nélküli elemeknél a leghosszabb felezési idejű izotóp tömege van zárójelben



[Vissza >>>](#)

KV19. A hidrogénmolekula-ion kötési energiájának becslése (kiegészítő anyag)

A H-molekulaion kötési energiáját egyszerű számítással megbecsülhetjük. Modellezzük a két mag vonzásterében elhelyezkedő elektron-állóhullámot húr mentén kialakuló állóhullámmal! Az elektron alapállapotban jórészt a két proton között helyezkedik el, így a húr hosszát a két proton R távolságánál kissé nagyobbra becslve $1,2R$ -nek vehetjük. Ez a hosszúság alapállapotban éppen egy fél hullámnak felel meg, tehát az elektron impulzusa ebben az esetben: $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2,4R}$

A molekulaion protonjainak *egyensúlyi távolságát* az energiaminimum-elvből határozhatjuk meg. A molekulaion $E(R)$ energiája a protonok közötti taszításból adódó $\frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ elektrosztatikus energiának, a protonok és az elektron vonzásából származó ugyancsak elektrosztatikus energiának, valamint az elektron $\frac{p^2}{2m}$ mozgási energiájának összege. Mivel az elektron legnagyobb valószínűséggel pontosan a két proton között helyezkedik el, a proton-elektron rendszer Coulomb-energiáját közelítőleg úgy számíthatjuk ki, mintha az elektron mindkét protontól $R/2$ távolságban helyezkedne el. Így erre az energiájárulékra a $-2 \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 (R/2)}$ eredmény adódik. A molekulaion teljes energiája ennek megfelelően (felhasználva a $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ összefüggést):

$$E(R) = 3,4 \frac{\hbar^2}{mR^2} - \frac{3q_e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Ez a kifejezés (ahogy azt a $\frac{dE}{dR} = 0$ egyenletből megkaphatjuk,

az

$$R = \frac{6,8}{3} \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{mq_e^2}$$

helyen veszi fel minimumát. Az ennek megfelelő energia:

$$E = -1,32 \frac{mq_e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \approx -2,9 \cdot 10^{-18} J$$

Ez az energia alacsonyabb, mint a hidrogénatom $-2,2 \cdot 10^{-18} J$ kötési energiája, így a hidrogénmolekula-ion stabilabb, mint a magányos H-atomok.

Megjegyzés:

- A fenti közelítő számítás során fontos szerepe van az elektron hullámhosszának, amit a szemléletre alapozva (és a tényleges kísérleti adat ismertetében választottunk meg. Ez esetünkben ez nem a diák becsapása, hiszen komolyabb számításra nincs módunk, és így a szemléletre kell támaszkodnunk.

Bár a hidrogénmolekula-ion kötési energiája mintegy $0,7 \cdot 10^{-18} \text{J}$ -al alacsonyabb az alapállapotú hidrogénatom energiájánál, a természetben a hidrogénmolekula-ion nem fordul elő, kísérleti kimutatása csak igen speciális körülmények között lehetséges. Ennek az az oka, hogy a H_2^+ -ion egy elektron felvételével még alacsonyabb energiájú állapotba kerülhet, H_2 molekulává alakulhat.

A H_2^+ -ion létezését hidrogénnel töltött gázkisülési csövekben spektroszkópikus módszerekkel mutatták ki. A H_2^+ -ion szikrakisülés hatására keletkezik, élettartama azonban igen rövid, mert újabb elektron felvételével hamarosan H_2 molekulává alakul.

[Vissza >>>](#)

KV20. Molekulapályák értelmezése (fakultatív kiegészítő anyag)

Az elektronok állapotfüggvénye molekulák esetén is meghatározható a Schrödinger egyenletből. A megoldás azonban jóval bonyolultabb, mint az atomok esetén, hiszen ekkor az elektronok már egyszerre több vonzócentrum potenciálterében mozognak. A Schrödinger-egyenlet több magot, illetve több elektront tartalmazó rendszerekre – H_2^+ -iont kivéve – nem oldható meg egzakt módon. A közelítő eljárások lényege az, hogy megfelelő egyszerűsítések és elhanyagolások útján olyan állapotfüggvényt keresünk, amely az adott rendszerre vonatkozó kísérleti tapasztalatokat többé-kevésbé jól tükrözi. (Sok vegyület molekulájának szerkezetét kémiai és fizikai kísérletek eredményéből biztosan ismerjük. Ezek a molekulák hasznos segítséget jelentenek a jó kvantummechanikai közelítő eljárások megtalálásához.) A következőkben a legegyszerűbb közelítő módszer lényegét ismertetjük.

A molekulapályák közelítő meghatározása

A több mag terében megvalósuló molekulapályákat a molekulát alkotó atomok atomi elektronpályáinak *szuperpozíciójával* közelíthetjük. A szuperpozíció matematikailag az állapotfüggvények lineáris kombinációjával adható meg. Az eljárás azon a feltételezésen alapul, hogy a két közeli atom atomi elektronpályái változás nélkül egyszerűen átfedésbe kerülnek. Ezzel az elektronok taszító kölcsönhatásától eltekintünk, valamint figyelmen kívül hagyjuk azt, hogy a közeli magok kölcsönösen módosíthatják egymás elektronpályáit.

A molekulapályákon természetesen ugyanannyi elektron számára kell helyet biztosítani, mint az eredeti atompályákon. Így pl. az A és B hidrogénatom ψ_A és ψ_B elektronpályáiból olyan molekulapályákat kell „kikeverni”, amelyeken négy elektron helyezkedhet el. A matematikailag legegyszerűbb

$$\Psi = C(\psi_A + \psi_B)$$

állapotfüggvénnyel jellemezhető pályán a Pauli-elvnek megfelelően két ellentétes spinű elektron tartózkodhat.

A Ψ állapotfüggvénnyel jellemzett molekulapályán az elektron megtalálási valószínűsége:

$$|\Psi|^2 = C^2 |\psi_A + \psi_B|^2 = C^2 [|\psi_A|^2 + |\psi_B|^2 + 2|\psi_A + \psi_B|]$$

A kifejezésből látható, hogy a két mag közti tartományban az elektron megtalálási valószínűség-sűrűsége $C^2 \cdot 2\psi_A\psi_B$ -vel nagyobb, mint ami a két eredeti atom elektronsűrűségének egyszerű összegzése esetén adódna. Ez a többlet elektronsűrűség leárnyékolja a magok taszítását, és döntően hozzájárul a kötés kialakulásához. Az ilyen molekulapályát *kötőpályának* nevezik. Mint említettük, a molekulapályán a Pauli-elv értelmében két ellentétes spinű elektron tartózkodhat. A fenti molekulapálya így akkor alakulhat ki, ha a két kapcsolódó hidrogénatom elektronjának spinje ellentétes.

A C arányossági tényezőre azért van szükség, mert a hullámállapotok szuperpozíciója következtében nem változhat az összes töltésmennyiség. A magok közötti térrészben jelentkező

„többlettöltés” tehát nem tényleges töltésnövekedést jelent, csupán a töltéseloszlás változását. A lokális töltésnövekedésnek az az ára, hogy a külső tartományok elektronsűrűsége lecsökken.

A hidrogénmolekula kötő és lazító molekulapályái

Mivel az eredeti H-atombeli atompályákon összesen négy elektron helyezkedhet el, ezért a ψ_A és ψ_B hullámfüggvényekből további molekulapályát is fel kell építeni. Ez fizikailag a H-molekula gerjesztett állapotának felel meg. Ezt a pályát az eredeti ψ_A és ψ_B állapotfüggvényekből pl. a

$$\Psi = C(\psi_A - \psi_B)$$

összefüggéssel képezhetjük. Az így meghatározott molekulapályán az elektron megtalálási valószínűsége a két mag között a négyzetre emelés során adódó $-2|\psi_A\psi_B|$ tag miatt csökken. Ennek a molekulapályának a két proton közt csomósíkja van. Ez az elektroneloszlás vonzó hatásával nem ellensúlyozza a protonok erős taszítását, ezért az elektronok energiája ebben az állapotban nagyobb, mint a hidrogénatomban. Az ilyen elektronpályát *lazítópályának* nevezik.

A hidrogénmolekula esetén a *lazító elektronpályák* nem töltődnek be, ha az elektronokat ezekre a pályákra gerjesztjük, a molekula felbomlik.

Pályák a többelektronos atomokból létrejövő molekulákban

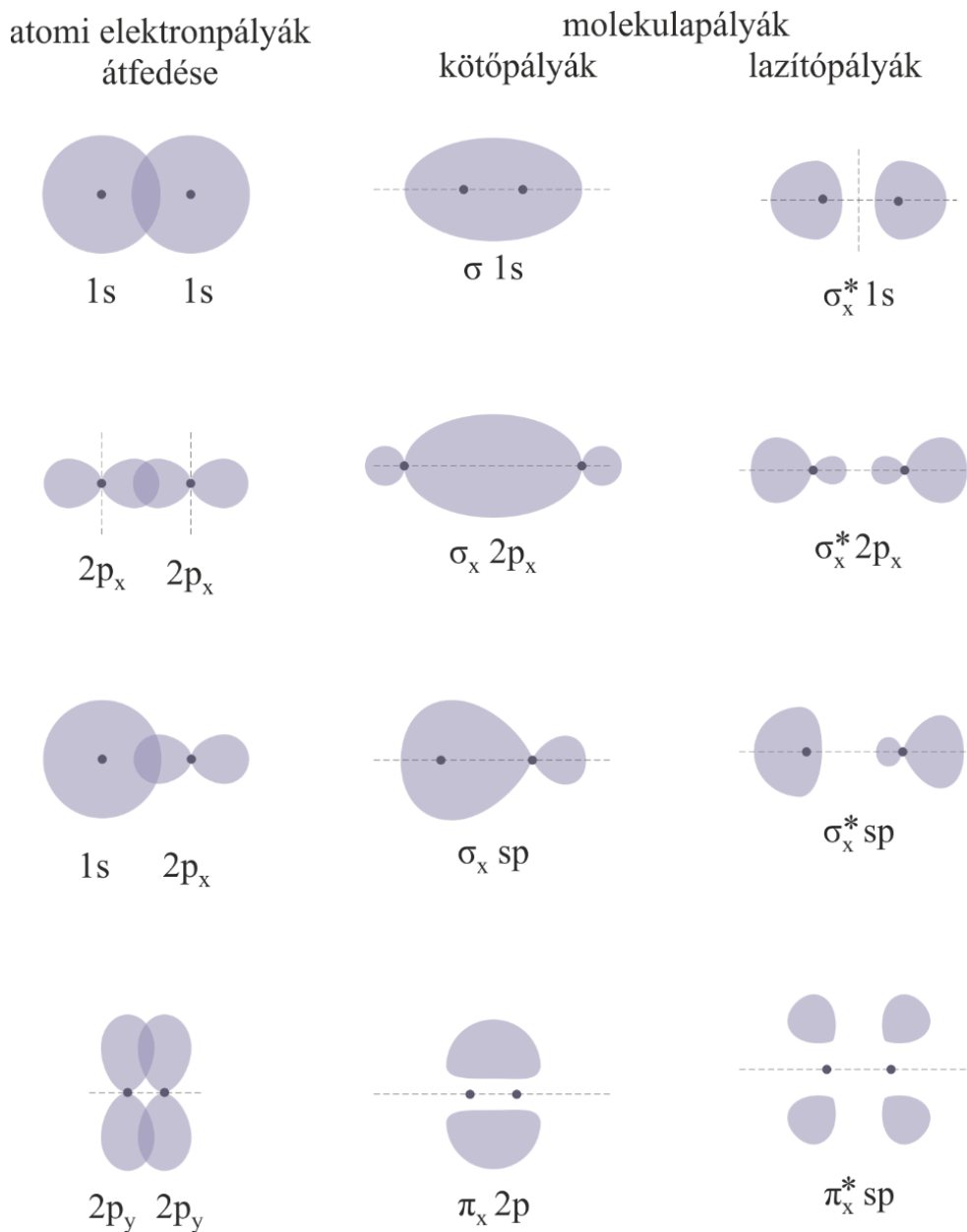
Ha a többelektronos atomok kapcsolódásakor létrejövő molekulák külső pályáit az atompályák szuperpozíciójával közelítjük, akkor mindig egyenlő számú kötő- és lazítópálya keletkezik. Általában, ha a kötőpályák energiája ΔE vel kisebb, akkor a lazítópályáké ugyanennyivel nagyobb, mint az eredeti atompályák energiája. Az azonos atomokból álló kétatomos molekulák létrejöttét úgy képzelhetjük, hogy az elektronok először mindig az alacsony energiájú kötőpályákat töltik be, s csak akkor lépnek lazítópályára, ha a kötőállapotok már mind foglaltak.

Két atom akkor kapcsolódik össze molekulává, ha a kötőállapotok száma nagyobb, mint a betöltött lazítópályák száma. A telítődött kötő- és lazítópályák számának különbsége megadja, hogy a kapcsolódó atomok hány „vegyértékkel” kötődnek egymáshoz. (Az oxigénmolekulában a kötő- és a betöltött lazítópályák különbsége kettő, a nitrogénmolekulában három, ami megfelel annak, hogy az oxigénatomok két vegyértékkel kapcsolódnak össze, míg a nitrogénmolekulában három vegyértékű a kötés.)

Ha a kötő- és lazítópályák száma azonos, nem jön létre molekula, hiszen ennek az állapotnak az energiája nem alacsonyabb a különböző atomokbeli állapotok energiájánál. (A héliumatomok nem kapcsolódnak He₂-molekulává, mert a képzeletbeli héliummolekulában a kötő- és a lazítópályák száma megegyezik.)

Szigma- és pi-kötés

Az elektronok megtalálási valószínűsége a mag körüli térben a különböző elektronállapotok esetén más és más. Az s -elektronok eloszlása gömbszimmetrikus, a p -elektronoké az x , y , z koordinátatengelyek szerint irányított súlyzókhöz hasonló stb. A molekulapályákat az elektronok térbeli megtalálási valószínűség eloszlása szerint két különböző típusba soroljuk, és ezeket σ és π betűkkel jelöljük. A kötő- és lazító molekulapályák σ és π kötés típusait, feltüntetve molekulapályát létrehozó atompályák átfedését az ábra mutatja



σ - és π -kötésekkel kialakult kötő- és lazító molekulapályák

σ -kötésről (σ -pályáról) beszélünk, ha a molekulapálya elektronjainak megtalálási valószínűsége a két kapcsolódó atom magját összekötő tengelyre nézve forgásszimmetrikus. Két s állapotú atompálya átfedéséből (pl. hidrogénmolekulában) mindig σ -molekulapálya jön létre, de σ -pálya keletkezhet két azonos orientációjú p -pálya vagy egy s - és egy p -pálya

szuperpozíciójával is. A σ -kötés a szuperponálódó hullámfüggvények előjele szerint lehet kötő és lazító jellegű is, ez utóbbit rendszerint σ^* -gal jelöljük. (lásd a fenti *a*, *b*, *c* ábrásor)

A kovalens kötés másik típusát a π -kötés (π -pálya) jelenti. A két különböző atomhoz tartozó *p* pályából létrejövő, tükrörszimmetriával jellemezhető molekulapályákat π -pályáknak nevezzük. A π -pályák a σ -pályákhoz hasonlóan lehetnek kötő- vagy lazítópályák, az utóbbit π^* -gal szokás jelölni.

A σ - és π -pályák energetikailag nem egyenértékűek. A kötő σ -pályákon a magok közti térrészben sűrűsödő elektron kompenzálja a magok tasztítását, és ezzel döntően csökkenti a rendszer energiáját. A kötő π -pályák esetén az elektron megtalálási valószínűsége a magokat összekötő egyenes mentén zérus, így a molekulapálya elektronjai nem árnyékolják a magok tasztítását. Ezért a π -pálya energiája jóval nagyobb, mint a megfelelő σ -pályáé. Két atom összekapcsolódásakor először mindig σ -kötés alakul ki, és π -pályák csak ezután keletkeznek. π -kötés tehát mindig csak akkor alakul ki, ha két atom több vegyértékkel kapcsolódik össze. (A két vegyértékkel összekapcsolt oxigénmolekulában pl. az egyik kötés σ -, a másik π -típusú, a hármas kötéssel összekapcsolódó nitrogénmolekula esetén egy σ - és két π -kötés található.) A σ - és π -kötés között további lényeges különbség is van, amely a molekulák térszerkezetének kialakításakor válik meghatározóvá. Ha egy molekula két atomját σ -kötés kapcsolja össze, akkor a molekula két része az atommagokat összekötő egyenes, mint tengely körül szabadon elfordulhat. Ha σ -kötés mellett egy π -kötés is összekapcsolja a két atomot, a szabad forgás lehetősége megszűnik, a két molekularész egymáshoz viszonyított helyzete állandó marad.

A hibridizáció

A kovalens kötésű vegyületek számos tulajdonsága csak a molekulák térszerkezetének ismeretében érthető meg. A molekulák térszerkezetét, a kapcsolódó atomok távolságát és egymáshoz viszonyított térbeli irányítottságát kísérleti vizsgálatokból számos anyag esetén ismerjük. A molekulák kvantummechanikai leírása ezekkel a tapasztalatokkal egyezésben kell, hogy legyen. Ezt azért hangsúlyozzuk, mert a Schrödinger-egyenlet egzakt megoldása nem lehetséges, és a különböző közelítő megoldásokból származó eredmények lényegesen eltérőek lehetnek.

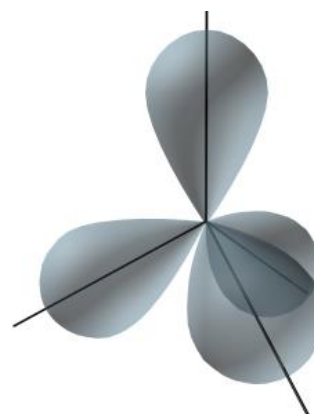
Az eddigiekben a két azonos atomból álló molekulák kialakulását tárgyaltuk. A Schrödinger-egyenlet közelítő megoldásaként jónak bizonyult az az eljárás, hogy az elektronok molekulapályáit a két atom elektronállapotait jellemző hullámfüggvények lineáris kombinációjával írtuk le. Számos esetben azonban ez a módszer nem vezet célhoz. Atomos állapotban pl. a szén külső elektronhéja 2 db *s* elektronnal és 2 db *p* elektronnal rendelkezik. Az eddig mondottak alapján nehezen érthető az a közismert tény, hogy a szén a vegyületeiben négy vegyértékű, és a kötési irányok leggyakrabban tetraéderes irányítottságúak (pl. metán (CH_4), gyémánt stb.). A szén és sok más atom esetében is célszerűbb a molekulapályákat olyan elektronpályákra visszavezetnünk, amelyek az eddig használt *hidrogénszerű* pályák megfelelő kombinációjából adódnak.

A Schrödinger-egyenlet lineáris differenciálegyenlet, ezért, ha Ψ_A és Ψ_B az egyenlet két megoldása, akkor $(\alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2)$ is megoldás. Ezzel a módszerrel a megoldásfüggvények szinte korlátlan módon sokszorozhatók. Természetesen felmerül az a kérdés, hogy az így előállítható állapotfüggvények mennyiben azonosak vagy különbözőek. Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy lényegesen különbözők azok az állapotok, amelyekhez tartozó megtalálási valószínűségek térben erősen elkülönülnek. Matematikailag pontosabban fogalmazva ez azt jelenti, hogy a két állapotfüggvény szorzatának átlaga a teljes tér döntő részében zérust ad (röviden szólva a hullámfüggvények nem, vagy csak kevéssé fedik át egymást). Ennek alapján a hidrogénszerű pályák helyett használhatók az azokból szuperpozícióval előállítható más ún. hibridpálya-rendszerek is. Az ezeken elhelyezkedő elektronok száma természetesen azonos az eredeti pályákon elhelyezkedő elektronok számával.

A szén hibridizációja

Szerveskémiából tudjuk, hogy a szén négy egyenrangú, egymáshoz tetraédesen irányított molekulapályával rendelkezik (lásd pl. metánmolekula (CH_4)). A szén tetraédes molekulapályáit az szénatom s és p atompályáinak megfelelő szuperpozíciójaként értelmezzük. Matematikailag ez a $2s$, $2p_x$, $2p_y$ és a $2p_z$ állapotfüggvények alkalmas szorzófaktorokkal vett lineáris kombinációinak felel meg. Az így előállított elektronállapotokat *hibridállapotoknak* nevezik.

A szén esetén a négy egyenrangú „hibridpálya” egy s - és három p -pályából adódik, ezért ezt az állapotot *sp^3 hibridállapotnak* nevezzük. A négy, tetraédesen elhelyezkedő hibridpályát a szénatom egy-egy elektronja foglalja el. Az egyes hibridpályák más elektronpályákkal való átfedésekor alakulnak ki a molekulapályák. A metán (CH_4) molekulapályái egy-egy tetraédes hibridpálya és egy-egy hidrogénatom gömbszimmetrikus s állapotú elektronpályájának szuperpozíciójával jönnek létre az ábrán bemutatott módon.



sp^3 hibridpálya

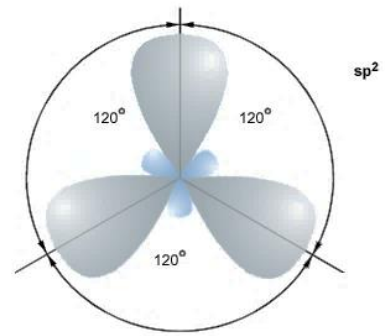
A gyémántkristályban szén a szénhez kapcsolódik, a molekulapályák a szomszédos atomok hibridpályáinak átfedésével alakulnak ki.

A hibridpályák energiájának összege nagyobb, mint a hidrogénszerű elektronpályák energiaösszege. Ebből arra következtethetünk, hogy az alapállapotú magányos szénatom elektronszerkezete a hidrogénszerű elektronállapotokkal írható le. A szén elektronpályáinak átrendeződése – a *hibridizáció* – energia befektetést igényel, és így csak a kémiai reakció során, annak mintegy részfolyamataként következik be. Ezt bizonyítja az a tény is, hogy a szén vegyületeiben nem kizárólag sp^3 hibridállapotú, hanem gyakran olyan hibridpályákkal jellemezhető, amelyek egy s - és két p -pályából alakulnak ki. Ezeket sp^2 hibridpályáknak nevezzük.

Az sp^2 hibridpályák egy síkban, egymással 120° -os szöget bezárva helyezkednek el (a grafitkristályban a szén sp^2 hibridállapotú)

A vegyületképzéshez szükséges energia befektetés azonban „megtérül”. A kialakuló molekula (vagy kristály) energiája akkor minimális, ha a szénatom hibridpályáiból alakulnak ki a molekulapályák.

A szén példájával illusztrált hibridizáció a molekulák térszerkezetének értelmezéséhez igen gyakran használt, jól bevált kvantummechanikai közelítő módszer.



sp^2 hibridpálya

[Vissza >>>](#)

KV21. Sokrészecske-rendszerek kvantummechanikai leírása (emelt szintű fakultatív kiegészítő anyag)

A hidrogénatom esetén a szemléletesen talált hullámfüggvények jól tükrözik az elméletileg kaphatókat, a több elektront tartalmazó atomok esetén azonban elméletileg is csak közelítő megoldások lehetségesek. A periódusos rendszer viszonylag jó magyarázatát kaptuk meg úgy, hogy a magasabb rendszámú atomok esetén a lehetséges energiaállapotokat „hidrogénszerű” sajátállapotokkal közelítettük. Eszerint az elektronokat a $(+Zq_e)$ töltésű mag körül keringő egyetlen elektron számára lehetséges gerjesztett állapotokban helyeztük el.

Ebben a közelítésben két fontos hatást hanyagoltunk el. Egyrészt figyelmen kívül hagytuk az elektronok közötti Coulomb-taszítást, másrészt nem törődünk az elektronok megkülönböztethetlenségével, s az egyes állapotokat egy-egy elektronnal töltöttük be.

Megjegyzés:

- Az elektronok megkülönböztethetlensége lényegében a határozatlansági reláció következménye. Képzeljük el például, hogy adott pillanatban adott térrészbe korlátozott két elektron helyét pontosan ismerjük! Impulzusuk ekkor teljesen határozatlan. Ebből következik, hogy mozgásuk nem követhető, és a kezdetben egy pontba lokalizált állapotfüggvény gyorsan szétfolyik, kitöltve a teljes térfogatot. Így, ha egy későbbi pillanatban a tartomány valamely helyén elektront észlelünk, nem dönthető el, hogy amelyiket regisztráltuk.

A Coulomb-kölcsönhatás és a megkülönböztethetlenség figyelembevétele már a két elektronos rendszer (pl. egy He-atom) esetén is a lehetséges energiák megváltozását eredményezi. Jelöljük $E_{1,2}$ -vel a héliumatom elektronjainak a hidrogénszerű sajátállapotok alapján számított energiáját. Az 1, 2 index azt jelenti, hogy az egyik elektron az n_1 , a másik az n_2 főkvantumszámmal jellemzett pályán tartózkodik.

A kicserélődési energia

A pontos számítások szerint a héliumatom elektronjainak energiája az elektronok spinjének ellentétes (e) beállása esetén

$$E_{1,2}^e = E_{1,2} + C + A$$

az elektron spinnek egyirányú ($p = \text{paralel}$) állása esetén pedig

$$E_{1,2}^p = E_{1,2} + C - A$$

itt C az elektronok Coulomb-kölcsönhatásából származó energia, így mindig pozitív. Az A energiának klasszikus fizikai megfelelője nincs, annak a jellegzetesen kvantummechanikai hatásnak a következménye, hogy az azonos részecskéket nem lehet „szétosztani” az egyes állapotok között. Az elektronok mindig „kicserélődnek” az állapotok között. Ezért ezt az energiát *kicserélődési energiának* nevezzük.

A héliumatom esetén az elektron spinek egyirányú beállásakor a negatív kicserélődési energia miatt energianyereség csak az elektronok gerjesztett állapotában léphet fel. Alapállapotban ugyanis a két elektron n , l és m kvantumszáma azonos, így a Pauli-elv miatt az elektronok spinje csak ellentétes lehet. A kicserélődési kölcsönhatásból származó energiacsökkenés csak a magasabb kvantumszámú pályák betöltésében okoz jelentős változást. Ennek következtében az n főkvantumszámmal jellemzett pálya, amelyen $2n^2$ elektron helyezkedhet el, különböző energiájú szintekre hasad. Mivel A értéke adott főkvantumszámú pályán elhelyezkedő elektronok esetén pozitív, az egyirányú spin beállású állapotok energiája általában alacsonyabb.

Amíg a Pauli-elv engedi, az elektronok azonos irányú spinekkel helyezkednek el az adott pályán. Ez a magyarázata a kémiában *Hund-szabályként* ismert törvénynek, amely szerint az azonos energiájú degenerált állapotokat az elektronok először párhuzamos spin beállással töltik be!

A C Coulomb-energia és az A kicserélődési energia kiszámításához ismerni kell a rendszer állapotfüggvényét. Minthogy a Schrödinger egyenletet ilyen esetben egzakt módon nem lehet megoldani, az állapotfüggvényt C és A kiszámításakor többnyire a „hidrogénszerű” sajátfüggvények segítségével közelítik. Így természetesen az $E_{1,2}^p$ és $E_{1,2}^e$ energiaértékek is csak közelítések.

A sokrészeske rendszer állapotfüggvénye

Általában az N elektronból álló rendszer állapotfüggvénye egyetlen $3N$ -változós függvény. Az elektronok közötti kölcsönhatásokat is figyelembe véve az állapotfüggvény pontos alakja nem határozható meg. A leggyakrabban használt ún. egyelektron közelítés szerint az N elektronból álló rendszer állapotfüggvényét egymástól függetlennek tekintett elektronok állapotfüggvényeiből képzett N -elemű szorzatok összegeként állítják elő. Az így nyert sajátfüggvényekhez tartozó energiaszinteket a kölcsönhatást figyelembe véve utólag kissé módosítják.

Általánosan igaz azonban az, hogy az N elektronból álló rendszer energiaszintjei $4N$ kvantumszámtól függenek (a spinekkel együtt). Így adott rendszer állapota lényegében ezen kvantumszámok megadásával ismertnek tekinthető.

[Vissza >>>](#)

MAGFIZIKA

14. Az atommag jellemzői

15. Magreakciók

16. Elemi részecskék

Bevezetés

A magyarországi fizika tantervek kiemelt jelentőséget tulajdonítanak a magfizika tanításának. Ez természetesen következik a témakör gyakorlati jelentőségéből és abból, hogy a magfizika rendszerezett tanítása lényegében előzmények nélküli az iskolában.

A magfizikán alapuló nukleáris energia-ipar alapvető szerepet játszik az emberiség növekvő energiaigényeinek kielégítésében. Ez Magyarország vonatkozásában fokozottan igaz. Országunk energiahordozókban szegény, a napi életvitelünkhöz, az ipari és a mezőgazdaság működéséhez szükséges elektromos energiaigá 53,6%-a (2014) nukleáris energiából származik. A növekvő igényeket is figyelembe véve a paksi atomreaktor működtetésének (bővítésének) nem látszik reális alternatívája.

A magfizikai ismereteken alapuló alkalmazások az energia biztosításán túl is ott vannak mindennapi életünkben. Az orvosi diagnosztikában az MRI (Magnetic Resonance Imaging, azaz mágneses magrezonancia képalkotás), az izotópos vizsgálatok. Az élelmiszer-iparban is fontos sugárterápia, (pl. a sugár-fertőtlenítés), de fontos az anyagtechnológiában is. A magfizika fontos a természettudományos kutatásokban, de érdekes a alkalmazási területek vannak a művészettörténeti vizsgálatokban, régészetben is.

A magfizika, a gyakorlati vonatkozásai mellett, elvi jelentőségű is. A magfizikai ismeretek alapvetőek abból a szempontból is, hogy az emberiség megismerje a világ működését, és átlássa, lehetőségeit és feladatait. Érdekes például elgondolkozni azon, hogy földi életünk alapja, a Nap folytonos energiasugárzása magfúziós folyamatok eredménye, a testünket felépítő atom-magok egyidősek a Földet és a Naprendszer alkotó valamennyi atommaggal, a tudomány mai állása szerint együtt, egyetlen szupernova-robbanás nukleáris folyamatában keletkeztek.

Az elmondottak bizonyítják, hogy a magfizika része mindennapi életünknek, ebből következik, hogy az alapvető magfizikai ismereteknek be kell épülnie a 21. századi ember általános műveltségébe is. Világszemléletünk és mindennapi életvitelünk szempontjából egyaránt fontos, hogy ismerjük a magfizikai folyamatok jelentőségét az alkalmazásukkal járó pozitívumokat és a kockázatokat is. Az utóbbiak megismerése és reális értékelése együtt jár. Aki tudatlan, az könnyen manipulálható. A magfizikához kapcsolható pozitív eredményekről és problémákról (köztük katasztrófákról is) folyamatosan kapunk információkat a médiákból. Ezek közt, az igazság mellett bőven található félreértésen alapuló tévhit, és tudatos félrevezetés is.

A magfizika tanítása, tantervi beillesztése

Általános iskolában a diákok a kémia tantárgy keretében tanulnak az anyag atomos szerkezetéről, ahol az atom részeként megemlítesre kerül az atommag. A fizika tananyagban atom és magfizikai ismeretek nem szerepelnek.

A magfizika a középiskolai tanításban olyan új témakör, amelynek nincs általános iskolai előzménye. A klasszikus felépítésű fizika tantervekben a magfizika a tanulmányok végén szerepel. A diákok ekkorra számos mozaik-ismerettel rendelkeznek, részben a mindennapi

sajtóból, részben a médiából és magánbeszélgetésekből. Ezek gyakran negatív vonatkozású ismeretek. Nincs olyan diák, aki ne hallott volna a második világháború végén Japánra ledobott atombombákról, vagy a Csernobilban, Fukusimában történő atomreaktor-katasztrófákról, és ne látott volna képeket a nukleáris technológia alkalmazása elleni tüntetésekről. Jóval kevésbé közismert, hogy hány rákos beteg életét mentette meg a mágneses magrezonancia képalkotás felhasználásával működő MRI-vizsgálat, vagy a sugárkezelés, hogyan és mire alkalmazzák a magfizikát a korszerű ipari eljárásokban, az élelmiszerek tartósításában és a legkülönbözőbb tudományterületeken.

A középiskolai természettudományos tantárgyak mindegyike kapcsolódik valahogyan a magfizikához. A földrajzban szó esik a nukleáris energiatermelésről, tanulnak geotermikus energiát tápláló radioaktivitásról, a Nap energiatermeléséről. A biológia foglalkozik az ionizáló sugárzások élettani hatásaival. Legtöbb magfizikai ismeretet a kémia tartalmaz. Az atom szerkezetének bemutatása kapcsán beszél az atommagról, az atommagot felépítő protonokról és neutronokról. a periódusos rendszer tárgyalásakor értelmezi a különböző atommagokat jellemző rendszám, tömegszám és az izotópok fogalmát. A fizika tantárgy feladata a hétköznapi ismeretek és az iskolai tananyagban mozaikszerűen felbukkanó magfizikai ismeretek kiegészítése és összefoglaló, szemléletalakító rendszerezése.

A magfizika, éppen a már említett mozaikszerű részismeretek, a kapcsolódó félelmek és a témát körülvevő „titokzatosság” miatt érdekli a diákokat. Ez megkönnyíti a tanár munkáját. Nehezíti viszont az, hogy a témakörben kevés közvetlen tapasztalatszerzésre, jelenségbemutató kísérletezésre van mód, a feldolgozás lényegében az ismeretek közlésére korlátozódik. Tapasztalat, hogy a jelenségbemutató, a szemléltetés motiváló hatású és segíti az ismeretek „bevésését” is. Hasonlóan motiváló és a tanultak megjegyzését is támogatja, ha a tényanyag száraz közlését történetekkel, sztorikkal élénkítjük. A magfizikában, ahol kevés az élő kísérlet a tananyag színesíthető a megismerés történeti folyamatának bemutatásával, és a hozzá kapcsolódó érdekességekkel. Az élő demonstrációt fotó-dokumentumok, videók vetítésével számítógépes szimulációs kísérletekkel pótoljuk. A fizikai alapismeretek mellett kiemelt hangsúlyt kell adnunk az alkalmazások bemutatásának is. A gyakorlati példák közé természetesen integrálhatjuk a más tantárgyakban tanultakat is. Az iskolai magfizikában a számítások szerepe is korlátozott, hiszen nincsenek meg a hozzájuk szükséges alapismeretek. Mindössze néhány levezetéssel, illetve számítással érzékeltethetjük diákjainkkal, hogy az iskolában döntően kvalitatív ismeretközlés ellenére itt is fontos szerepe van a matematikai módszereknek. Az alábbiakban a magfizika egy lehetséges feldolgozási sorrendjét mutatjuk be amiben átlagos érdeklődésű osztályt feltételezve próbáljuk megtalálni a legkülönbözőbb szempontok közt a lehetséges kompromisszumokat. Összefoglaljuk a középszintű magfizika hangsúlyos kérdéseit. Ezekhez kapcsolódva felhívjuk a figyelmet a fogalmi nehézségekre és ajánlásokat teszünk a tananyagot érdekesebbé, szívesebbé tévő kiegészítő témákra, alkalmazható módszerekre.

A magfizika jó lehetőséget kínál a törzsanyagot kiegészítő fakultatív projektmunkák szervezésére is. Ilyen projekt-témát jelenthet például a magfizikai módszerek alkalmazásainak összegyűjtése a gyógyászatban, aminek keretében a diákok irodalmi (internetes) forrásokra támaszkodva bemutatják a különböző alkalmazásokat társaiknak. Kísérleti projekt lehet a környezeti radioaktivitás kísérleti vizsgálata. Ennek során GM-csővel, esetleg a szilárdtest-

nyomdetektorral vizsgálható a levegő radon-tartalma, kutak, forrásvizek, gyógyvizek radioaktív sugárzása, különböző kőzetek sugárzásának összehasonlítása stb.

Megjegyezzük, hogy a magfizika részletes, emelt szintű tárgyalása megtalálható Marx György: *Atommagközelben* című munkájában. A szerző a szakmai pontosság mellett a magyarázatok stílusát nagy gonddal illeszti a középiskolai szinthez.

14. AZ ATOMMAG JELLEMZŐI

Amikor fizikából a magfizika tárgyalásához jutunk, tényanyagként már nem tudunk sok újdonságot mondani diákjainknak az atommagról, mert kémiában már megismerték a legfontosabb tényeket. Kémiában azonban, a tények magyarázatával, háttérével nemigen foglalkoztak. A fizikában tehát a korábbi ismeretek ismétlődő összefoglalásához kapcsolódva a hangsúlyt a nagyságrendekre, háttérmagyarázatokra, a megismerés történelmi útjának szemléletformáló bemutatására érdemes irányítani. Természetesen minden részletbe belemenni nem lehet, de egy-két kiválasztott téma alaposabb megismerése is nagyon hasznos.

Az atommag létének felfedezése – Rutherford szórás kísérlete

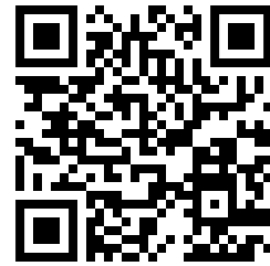
Az atommag felfedezését kémiaórán tanulták diákjaink, de jegyzetünk jelen kötetének korai atommodelleket ismertető [7.2.](#) fejezetében is foglalkoztunk röviden a témával. Rutherford szórás kísérletének fizikatörténeti jelentőségének értékelésében az atommag felfedezésén és az ezen alapuló atommodell kidolgozásán túl az is fontos, hogy ez tekinthető a mikrofizikai objektumok széleskörű tanulmányozására alkalmas módszernek. A mikrorészecskék tulajdonságaira ütköztetési kísérletekből lehet következtetni. Rutherford szórás kísérlete alapján nem csak az atommag kis térfogatában koncentrálódó pozitív töltésre, nagy tömegre, de a mag méretére is számszerű következtetésekre jutott. A kísérlet abban is példaértékű, hogy a kutatómunka során a kísérleti megfigyelések és az azokat értelmező számítások folyamatosan szinkronban voltak.



MF1. Érdekességek a Rutherford-kísérlettel kapcsolatban

[Részletek >>>](#)

Rutherford történelmi jelentőségű kísérlete iskolai körülmények közt nem mutatható be, és hozzá kapcsolódó számítások is meghaladják a középiskola lehetőségeit. Ezek helyettesítésére egyszerűsített tankönyvi ábrák, illetve az interneten egyre nagyobb számban megtalálható animált illusztrációkat, illetve szimulációs kísérletet ajánlunk. Ez utóbbiak lehetőséget kínálnak a kísérleti paraméterek interaktív változtatására (virtuális kísérletezésre) és rendszerint kitérnek a jelenségekhez kapcsolódó számításokra is.



Rutherford szórás kísérlete megkérdőjelezhetetlen tapasztalati tényként utalt a kisméretű atommag létezésére. A jelenség elfogadása azonban nem jelentette azt, hogy a maggal kapcsolatban minden alapvető kérdés megválaszolhatóvá vált. A különböző elemek atomtömegeiről már a mag felfedezése előtt ismert volt, hogy úgy aránylanak egymáshoz, mint az egész számok. Mivel az elektronok kicsiny tömege miatt az atomtömeg gyakorlatilag megegyezik a mag tömegével, az atomokra vonatkozó arányosság átvihető a magokra is. Így az atommagok tömegei is jó közelítéssel úgy aránylanak egymáshoz, mint az egész számok, ezért feltételezhető, hogy minden atom azonos tömegű és tulajdonságú részecskéből áll. De mi ez a részecske? Mivel a legkülönbözőbb atomok tömegéről elmondható, hogy egész számú többszöröse a legkönnyebb elem, a hidrogén atomtömegének, feltételezték, hogy a hidrogén atommagja lehet minden mag építőeleme. Ezzel a hipotézissel azonban már a hidrogén után következő legkönnyebb elem, a hélium atommagját sem sikerült egyszerűen értelmezni. A hélium magja négyszer akkora tömegű, mint a hidrogéné, de töltése csak kétszerese annak. A problémát maga Rutherford is úgy próbálta megoldani, hogy feltételezte, hogy az összetettebb atomok magjában elektronok is vannak. Mivel az elektronok saját tömege kétezred része egy proton tömegének, az elektronok lényegében nem befolyásolják a magok tömegét, de a protonok egy részének a töltését semlegesítik. E feltételezés szerint a hélium atommagját 4 proton és két elektron építené fel, így magyarázható, hogy tömegszáma 4, töltésszáma (rendszáma) 2. Az elektronok létét az atommagban a radioaktív β -bomlás ténye is igazolni látszott. Nem lehetett azonban megmagyarázni energetikailag az atommagok stabilitását. Mitől marad kötött a rendszer a nagyon kis térfogatban összezsúfolt protonok taszító Coulomb-energiája és a nagy töltésű elektron a kvantummechanikai számításokból adódó hatalmas kinetikus energiája ellenére?

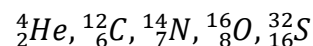
Az atommag mérete

Az atommag létezését igazoló kísérlet általános ismertetésének lezárásaként tanári közlésként érdemes elmondani, hogy az atommagok tipikus mérettartománya a femtométer ($1\text{ fm} = 10^{-15}\text{ m}$), ami az atomok mérettartományánál (10^{-10} m) öt nagyságrenddel kisebb. Ez nyilvánvalóvá teszi, hogy a magot akkor is tömegpontként kezelhetjük, amikor az atomi elektronállapotokat hullámfüggvénnyel írjuk le.

14.1. Az atommagot protonok és neutronok alkotják

Az atommag stabilitásának megértésére a megoldást a neutron felfedezése (1932) jelentette. James Chadwick és munkatársai olyan elemi részecskét fedeztek fel, amelynek tömege közel egyenlő a proton tömegével, de elektromosan semleges. A kísérleti tapasztalatok és elméleti megfontolások alapján elfogadottá vált, hogy az atommag pozitív töltésű protonokból és semleges neutronokból épül fel. Az atommagokat két szám jellemzi, a benne lévő protonok Z száma, (a periódusos rendszerbeli rendszám) és az A tömegszám, ami a magban lévő nukleonok száma (a protonok és a neutronok számának összege). Ezzel az értelmezéssel magyarázatot nyert az izotóp atomok mibenléte is. Az izotóp atommagok rendszáma megegyezik, de tömegszámuk különböző, mert neutronjaik száma eltérő. Egyezményes megállapodás szerint az izotópok jellemzésére a kémiai vegyjel mellé a bal felső indexként megadják az izotóp tömegszámát, a bal alsó indexként pedig a rendszámot.

Ha a különböző kémiai elemek atomtömegét és rendszámát összehasonlítjuk, akkor azt találjuk, hogy a periódusos rendszer elején álló elemek fő izotópjaiban a protonok és neutronok száma, néhány kivételtől eltekintve megegyezik, (a tömegszám kétszerese a rendszám értékének). A legismertebb anyagok közül ilyenek például:



A nukleonoknak ez az aránya azonban körülbelül a $Z = 20$ rendszámú elemtől kezdve megbomlik; az atommagokban lévő neutronok száma gyorsabban növekszik, mint a protonok száma. Az utolsó természetes elem az urán leggyakoribb izotópjában a 92-es proton mellett már 146 neutron van.

Minthogy a protonok erősen taszítják egymást, ezért olyan atommagok, melyek csak protonokból állnak, nem jöhetnek létre. A protonok közé „cementként” neutronokra van szükség. Ezek összetartják a protonokat és így stabil magok jönnek létre. Kis protonszámnál, mint azt a periódusos rendszer kezdetén lévő elemek példáján láttuk, az összeragasztáshoz a protonok számával megegyező számú neutron is elegendő. Magasabb protonszámoknál azonban mind több és több neutronra van szükség a protonok taszításának ellensúlyozására.

Megjegyzés (csak tanároknak):

- Az atommagoknak impulzusmomentuma is van, ami a nukleonok mozgásából származó pályá impulzusmomentumból és a nukleonok spinjéből adódik össze. Ezt az összeget nem túlságosan szerencsés módon szokás magspinnek is nevezni, ami alkalmas a pályá impulzusmomentum és a spin összemérésére. Mind a proton mind a neutron spinje $\frac{\hbar}{2}$. A spin szokás \hbar egységekben mérni, és emiatt a protont és a neutron feles spinű részecskéként kategorizáljuk. A magban ellentétes spinű proton és neutronpárok alakulnak ki, de proton és neutron nem áll össze ellentétes spinű párrá, mivel nem azonos részecskék. Az ellentétes spinű nukleonok ellentétes mágneses momentummal is rendelkeznek, ezért vonzóerő alakul ki közöttük. A kvantummechanika törvényei szerint a pályá impulzusmomentum csak egész szám lehet, így a mag impulzusmomentumára vonatkozó egyszerű szabályként adódik, hogy a páros tömegszámú magoké mindig egészszám, a páratlanoké pedig félegész.

14.2. Magerők – erős kölcsönhatás

A neutronok „ragasztó” szerepét úgy lehet megmagyarázni, ha elfogadjuk, hogy az atommagban a nukleonok közt igen erős, de nagyon rövid (10^{-15} m hatótávolságú) vonzó kölcsönhatás működik. Az eddig nem ismert új kölcsönhatást nevezzük *magerőnek*, vagy *erős kölcsönhatásnak*. A magerőkre vonatkozó részletekről a középiskolában keveset lehet elmondani, emelt szintű osztályokban azonban érdemes kissé jobban részletezni tulajdonságaikat



MF2. Magerők (emelt szintű kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)

A magerők vizsgálati módszeréről azonban mindenképpen kell szólni. A módszer a korábbi mechanikai ismeretekre alapozható: az erő két test közötti kölcsönhatás, ami két test ütközése esetén megváltoztatja a testek impulzusát. A mikrorészecskék világában ható erőkre ütközési kísérletekből következtethetünk, ha meg tudjuk határozni a kölcsönható objektumok ütközés előtti és ütközés utáni impulzusát. Rutherford szórás kísérlete is ezen alapul. Mivel a magerők tanulmányozásához nukleonokat kell ütköztetni akkora energiával, hogy azok 10^{-15} m-re megközelítsék egymást a kísérletek nagyon drága gyorsító berendezéseket igényelnek. A világon csak néhány ilyen nagyenergiás gyorsító működik nemzetközi összefogásban. A hozzánk legközelebb eső ilyen kutatóközpont a Svájcban és Franciaországban működő Nukleáris Kutatások Európai Központja, a francia elnevezés szavainak első betűiből összerakott közismert betűszóval CERN. Az óriás laboratóriumban magyar kutatók is dolgoznak.

2006 óta van lehetőség arra is, hogy fizikatanárok szervezett, magyar nyelvű tanulmányúton vegyenek részt a CERN-ben.



Magyar fizikatanárok évente ismétlődő szervezett továbbképzése és tanulmányútja a CERN-ben:

<https://teacher-programmes.web.cern.ch/international-teacher-programmes>



14.3. Az atommag tömege és energiája

A tömegdefektus

A korai kísérleti eredmények azt mutatták, hogy az atommagok tömege a proton tömegének egész számú többszöröse. Ez a megállapítás összhangban állt a későbbi felismeréssel is, miszerint az atommagot közel azonos tömegű nukleonok, protonok és neutronok együtt építik fel. Meglepő tehát, hogy a *pontos mérések szerint az atommagok tömege kicsit kisebbnek adódik, mint a magot felépítő nukleonok tömegének összege*. Ezt a jelenséget tömeghiánynak vagy tömegdefektusnak nevezzük.

A tömegdefektus fontos tényét úgy tudatosíthatjuk a diákokban, hogy a fogalmi meghatározáson kívül konkrét esetekre értelmezzük.

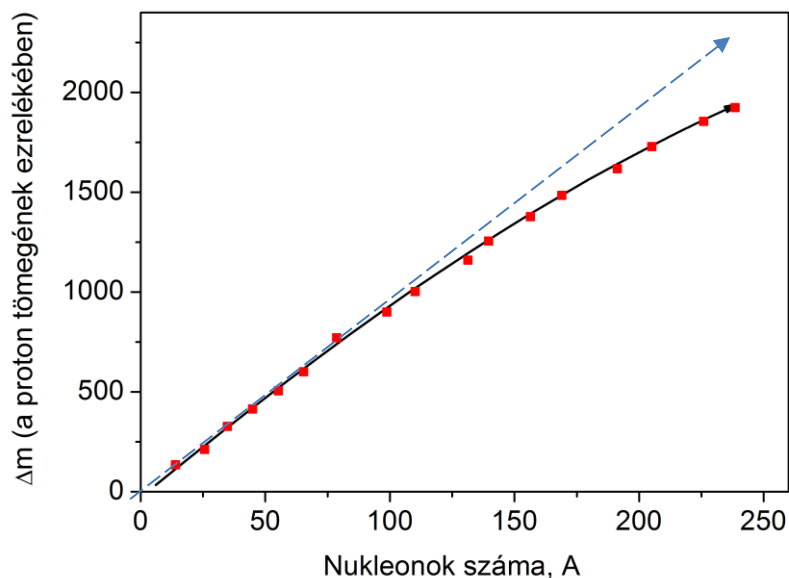
A legegyszerűbb összetett atommag a hidrogén 2-es tömegszámú izotópjának a *deuteronnak* (${}^2_1\text{H} \equiv D$) a magja, amit egy proton és egy neutron alkot. A mérések szerint a deuteron tömege kisebb, mint a proton és neutron tömegének összege:

$$m_D < m_p + m_n$$

A deuteron tömegdefektusa tehát:

$$\Delta m = (m_p + m_n) - m_D$$

Két deuteron együtt hélium atommagot (α -részecske) alkot. Ennek ellenére az α -részecske tömege kisebb, mint két deuteron tömegének összege. A négy nukleonból felépülő atommagnál a tömegdefektus növekszik. Ez a mérések szerint a továbbiakban is így folytatódik. A továbbiakban, minél jobban nő a magban lévő nukleonok száma, annál nagyobb a tömeghiány mértéke. A grafikon a különböző atommagok tömegdefektusát (Δm) mutatja a nukleonok számának (A) függvényében.



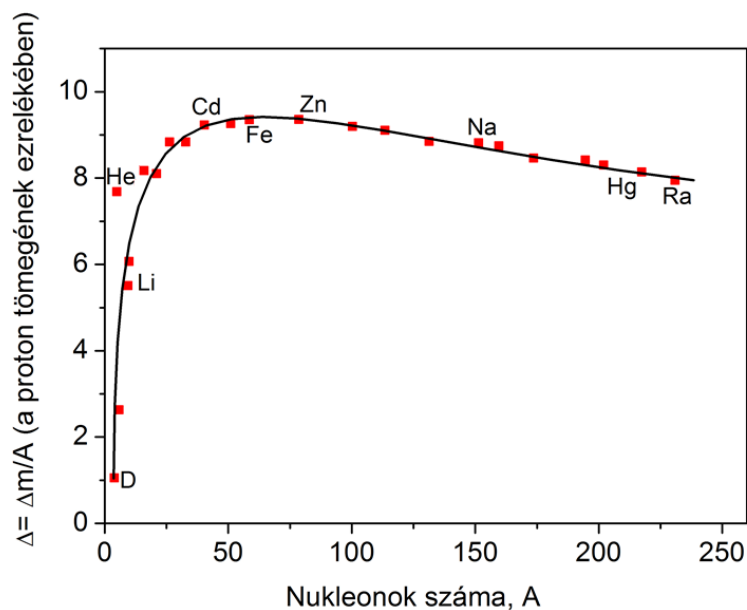
14.1. ábra: Tömegdefektus (Δm) a nukleonok számának függvényében

A grafikonról a tömegdefektus nagysága a proton tömegének ezrelékében olvasható le. A grafikon szerint az $A = 120$ tömegszámnál nagyobb atommagok esetén a tömegdefektus mértéke már meghaladja egy proton tömegét. Ez azt jelenti, hogy ha a tömegszámból akarunk következtetni a magot alkotó nukleonok számára, egy nukleonnyit tévedünk.

Még érdekesebb eredményre jutunk, ha azt vizsgáljuk, hogy mekkora a tömegdefektus egy nukleonra eső része, azaz mekkora a

$$\Delta = \frac{\Delta m}{A}$$

mennyiség. A következő diagram Δ értékét A függvényében mutatja. A grafikonról leolvasható, hogy az egy nukleonra jutó tömegdefektus a közepes atomtömegű magoknál a legnagyobb, a könnyű és a nehéz elemek atomjai esetén kisebb.



14.2. ábra: Tömegdefektus egy nukleonra eső hányada (Δ) a nukleonok számának függvényében.

A tömegdefektus magyarázata – az atommag kötési energiája

Einstein relativitáselméletében mennyiségi összefüggést állapít meg a tömeg és az energia között. Az

$$E = mc^2$$

egyenlet azt fejezi ki, hogy a természetben az energia és a tömeg mindig együttesen értelmezhető. Eszerint az m tömegnek mindig mc^2 energia feleltethető még és fordítva, az E energia

$$m = \frac{E}{c^2}$$

tömeggel ekvivalens. Az atommagoknál fellépő tömegdefektus jelensége a tömeg–energia ekvivalenciaelv alapján értelmezhető. A tanítás során nem csupán az ismeretek közlése a célunk, hanem az is fontos, hogy a diákok világosan megértsék hogyan is kell értelmezni a tényszerű megállapításokat. A tömegdefektus energetikai értelmezését a legegyszerűbb konkrét példák kifejtésével érdemes tudatosítani.

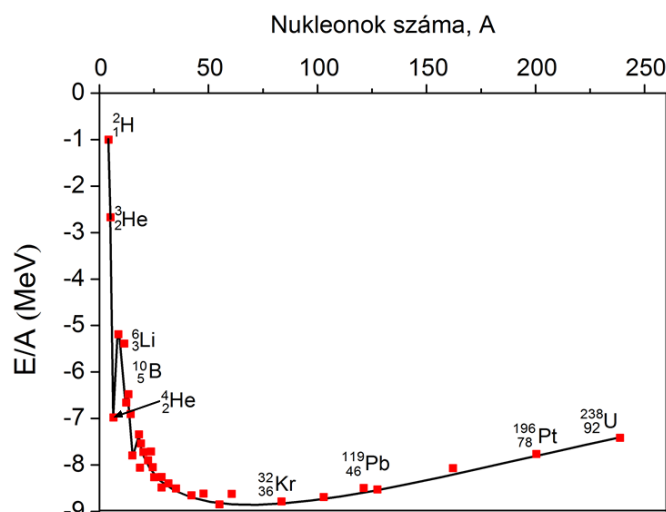
Ha egy proton és egy neutron egyesül, deutron mag képződik. A deutron tömeghiánnyal rendelkezik, és így az ekvivalencia-elv szerint az energiája kisebb kell, hogy legyen, mint az egy szabad protonból és egy szabad neutronból álló rendszeré. Korábbi fizikai ismereteink alapján belátható, hogy ennek így kell lennie. A deutron képződése során a nukleonok közt ható vonzóerő munkát végez, a két részecske felgyorsulva ütközik össze. Az ütközés rugalmatlan, hiszen a két nukleon összekapcsolódva együtt marad. A rugalmatlan ütközéssel energiavesztés jár, az energia szétsugárzódik a környezetbe. A szétsugárzott energiának megfelelő tömeg mintegy „elfolyik” a rendszerből. A kísérleti megfigyelések szerint a deutron képződésekor γ -sugárzás lép fel, és a deutron éppen a γ -sugárzás $E = hf$ energiájának megfelelő

$$\Delta m = \frac{hf}{c^2}$$

tömegdefektust mutat.

A Δm mennyiségű tömeg azonban nem semmisül meg, hiszen az E energiamennyiségű sugárzás $\Delta m = E/c^2$ mennyiségű tömeggel rendelkezik. Nagy különbséget jelent azonban, hogy a magból hiányzó tömeg az anyag nyugalmi tömegéből „vész el”, a kisugárzott energia azonban nyugalmi tömeg nélküli fotonokként jelenik meg. Tehát a deutron kialakulása során a Δm mennyiségű tömeg csupán megjelenési formáját változtatja meg: részecsketömegből sugárzási tömeggé változik.

Az egy nukleonra jutó tömegdefektus a 14.2. ábra szerint változik a nukleonok számának függvényében. A tömegdefektus energia-egyenértékét kiszámítva szemléletes diagramot készíthetünk, amiről leolvasható, hogy a különböző nukleonszámú atommagok esetén mekkora a nukleonokból álló kötött rendszer (atommag) egy nukleonra vonatkoztatott fajlagos potenciális energiája. Mivel a nukleonok a magban kötöttek potenciális energiájuk negatív. A potenciális energiaskála zérus-szintjét a nukleonok kölcsönhatás mentes állapotához rendeljük. Az atommagok negatív, egy nukleonra vonatkoztatott fajlagos potenciális energiáit a tömegszám függvényében a 14.3. ábrán látható grafikon mutatja. A grafikon alakja természetesen hasonló a fajlagos tömegdefektus grafikonjához, amiből kiszámoltuk a nukleonok kapcsolódásakor felszabaduló energiát. A kötések kialakulásával felszabaduló és a rendszerből távozó energia a magot alkotó nukleonok potenciális energiájának csökkenéseként tekinthető, ezért negatív érték.



14.3. ábra: Egy nukleonra jutó fajlagos potenciális energia a tömegszám függvényében.

A bemutatott görbe jól szemlélteti, hogy melyik magok nukleon-kombinációja jelent mélyebb potenciális energiaszintet, melyik magasabbat. A grafikonról leolvasható, hogy az egy protont és egy neutronot tartalmazó hidrogén-izotóp, a deuteron magjának egy nukleonra jutó potenciális energiája csak -1 MeV. A négy nukleonból felépülő α -részecske (^4_2He) már sokkal kisebb (-7 MeV) energiaállapotot képvisel. A potenciálgödör minimumához közelítve egyre több elem magját találjuk és a köztük lévő különbségek nem nagyok. Az energia-grafikon minimumában a vas atommagja található. A tömegszám emelkedésével az egy nukleonra jutó energia ismét növekszik. A periódusos rendszerben található atomok döntő többségére igaz azonban, hogy magjukban egy nukleonra vonatkoztatott potenciális energia a (-7 MeV) és (-9 MeV) energia-tartományba esik. Ezeket a magokat tekinthetjük optimális felépítésű, stabil magoknak. A periódusos rendszer végén található nagy tömegszámú elemek közül sok radioaktív. Ezek bomlásuk során egyre kedvezőbb energia állapotú magokká alakulnak át. Jól mutatja ezt az urántól induló bomlási sor, ami az ólommal végződik.

14.4. Atommagmodellek

Az atommagok sajátosságainak részletekbe menő értelmezésére különböző elképzelések, leírási módszerek vannak. Ezek rendszerbeépített összefoglalását adják a különböző atommagmodellek. A mag-modelleknek két alapvető változata van: az ún. *csepp-modell* és *héjmodell*. A magmodellek tanítása a középiskolában rendelkezésre álló szűk időkeretben szinte lehetetlen feladat. A cseppmodell megértéséhez szükség lenne a folyadékok szerkezeti ismeretére (Van der Waals-erők, felületi feszültség stb.), a héj-modell megértése kvantummechanikai szemléletet igényel.

A magmodellek témaköre emelt óraszámú fizikát tanuló, speciálisan érdeklődő osztályokban, vagy szakköri keretek közt történhet, amihez segítséget jelenthet Marx György: Atommagközelben c. könyve. Az atommagok energetikai tulajdonságairól a két magmodell kombinációjából megalkotott félempirikus formula ad jó leírást. A formulát, ami a magok

energiaeloszlásának mennyiségi leírást adta meg Karl F. von Weizsäcker német fizikus írta fel. A Weizsäcker-formulához kapcsolódva középiskolai szinten is bemutatathatók a különböző magmodellek is.



MF3. A Weizsäcker-formula (tanári háttéranyag)

[Részletek >>>](#)

15. MAGREAKCIÓK

A régi idők alkímistái azon fáradoztak, hogy értéktelen anyagokból aranyt állítsanak elő. Az alkímisták igyekezete nem hozta a várt sikert, de munkájuk révén az emberiség sok kémiai ismeret, törvény birtokába jutott. Többek között kiderült, hogy az anyagok elemekből állnak, és hogy az elemek nem változtathatók meg. Legalábbis kémiai reakciók által nem változnak meg. Ma már tudjuk, hogy az elemek lényegi tulajdonságait az atommagjuk határozza meg. A kémiai reakciók során csak az atomok elektronburkában történnek változások – ilyen változások révén kapcsolódhatnak az atomok molekulákká, alkothatnak vegyületeket – de az atommagok változatlanok maradnak. Az újra aktuális kérdés az, meg lehet-e változtatni az atommagokat. A 20. század fizikája egyértelmű választ adott a kérdésre: – Igen!

Az anyagok spontán átalakulását Rutherford fedezte fel a radioaktív bomlások tanulmányozása során, bár akkor még nem volt tisztában, hogy a változások oka az atommagok átalakulása. Az atommagok felfedezése és az atommagban külső beavatkozással mesterségesen előidézett szerkezeti változás, az első mesterséges magátalakítás szintén Rutherford nevéhez kapcsolódik.

Rutherford radioaktív forrásból származó nagy sebességű α -részecskékkel nitrogéngázt sugárzott be, és Wilson-kamrás felvételeket készítve tanulmányozta az ionizáló sugárzás részecskéinek nyomvonalát. Az α -részecskék egyenes nyomvonalának megtöréséből, a részecske és a gázatomok ütközésére tudott következtetni. Az ütközések között ritkán, de előfordult, hogy az α -részecske nyomvonala nem csak irányt váltott, de kettéágazott és vastagsága is megváltozott. Ebből Rutherford a nitrogén atommagjának megváltozására következtetett. A jelenséget a klasszikus kémiai reakciókhoz lehet hasonlítani, amikor bizonyos kiindulási anyagok kölcsönhatása során új anyagok keletkeznek. A nagy energiával ütköző atommagok átalakulását magreakciónak nevezzük.

Magreakciónak az atommagok összetételének megváltozásával járó folyamatokat nevezzük. A magreakciók és a kémiai reakciók közt sok a hasonlóság, amire a magfizika tanításakor érdemes támaszkodnunk. A hasonlóságok tudatosításával fejlesztjük a természettudományokra jellemző analógiás gondolkodást, segítjük az ismeret rögzítését. A hasonlóságok hangsúlyozása, mellett automatikusan kiemelt figyelem jut a különbözőségekre is.

A kémiai reakciók és magreakciók hasonlósága

A kémiai reakciók a molekulák szerkezeti változásait írják le. Beszélünk kiindulási anyagokról és reakciótermékekről. A molekulászerkezeti változások mindig energetikai változásokat is jelentenek.

Vannak külső emberi beavatkozás nélkül (a termikus energiafluktuációk hatására) végbemenő kémiai reakciók (ilyen például a szénsav bomlása széndioxidra és vízre, vagy az ózon bomlása.) Ezekre a spontán folyamatokra jellemző, hogy a végtermékek elektronszerkezete alacsonyabb energiájú, mint a kiindulási anyagoké. Bomlási folyamatok során hő formájában energia szabadul fel (exoterm reakciók). Ehhez hasonló magfizikai folyamat a radioaktív magok bomlása, illetve a spontán maghasadás.

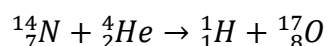
A kémiai reakciók másik alaptípusa az egyesülés. Ha például klór-gázba kis nátrium darabkát juttatunk, azonnal heves reakció indul meg, amit hőfelszabadulás sziporkázó fényjelenség kísér, miközben a klór és a nátrium, nátriumklorid vegyületté egyesül. Az egyesülésnek megfelelő magreakció a *magfúzió*, aminek során két atommag összeépül.

A kémiában számos olyan reakció van, ami emberi beavatkozásra megy végbe. Ezek során energia befektetéssel szétbontjuk a kiindulási anyagok kémiai kötéseit és lehetővé tesszük, hogy az atomok új formában kapcsolódjanak. Tipikusan ilyen, amikor egy vegyület tulajdonságait célirányosan meg akarjuk változtatni és ezért a molekula kötéseit felszakítva új, általunk kívánt atomcsoportokat kapcsolunk a molekulához. A magfizikában ehhez nagyon hasonló, a laboratóriumban előidézett mesterséges magátalakítás, pl. a természetben nem létező transzurán elemek atommagjainak előállítására. (Ez úgy lehetséges, hogy nagy rendszámú atommagokat nukleonokkal bombáznak, és amikor a nukleonok ideig-óraig beépülnek az atommagba. Így sikerült a periódusos rendszert néhány (nem stabil) „mesterséges” elemmel bővíteni.) Hasonló eljárással készülnek a kutatásban és az iparban széles körben alkalmazott mesterséges radioaktív izotópok is. Ezek átlagos méretű atommagok bombázásával előállított izotópok, amik általában kis felezési idővel bomlanak. Gyakran nevezik őket radioaktív nyomjelzőknek. Felhasználásuk azon alapul, hogy bejuttatva őket a vizsgálandó anyagba, hasonlóan viselkednek (épülnek be, vándorolnak stb.), mint az adott elem nem radioaktív izotópjai, sugárzásuk alapján azonban az aktív atommagok kívülről sugárzásméréssel követhetők.

A kémiaórákon diákjaink megszokják, hogy a kémiai reakciókat speciális jelölésekkel, vegyjelekkel és arányszámokkal felírt ún. kémiai reakcióegyenletekkel írják le. A reakcióegyenletből kiolvasható a kiindulási anyagok és a keletkezett molekulák elemösszetétele, továbbá a reakcióban résztvevő anyagok mennyiségi viszonyai. A reakcióegyenletnek összhangban kell állnia az anyag- és töltésmegmaradás törvényével.

A kémiai reakciók és a magreakció a reakcióegyenletek felírásában is sok hasonlóságot mutatnak.

Rutherford által végzett első mesterséges magreakciót leíró „reakcióegyenlet” a következő:

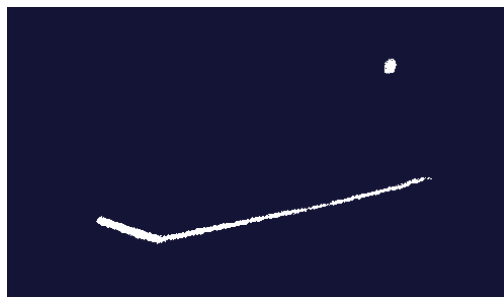
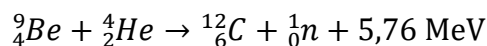


A reakcióegyenletből kiolvasható, hogy az $A = 14$ tömegszámú és $Z = 7$ rendszámú nitrogén mag és az $A = 4$ tömegszámú és $Z = 2$ rendszámú hélium mag (α -részecske) ütközésekor bekövetkező magreakció során egy proton és egy $A = 17$ tömegszámú és $Z = 8$ rendszámú oxigén-izotóp mag keletkezett. A magreakció során az érvényes az elektromos töltésmegmaradás (a kiindulási anyagok összesített protonszáma, megegyezik a keletkezett magokban lévő protonok számával). Érvényes továbbá a tömegszámok állandósága is. Ez a tömegdefektus figyelembevételével együtt jelenti a tömegmegmaradást és az energiamegmaradást.

Megjegyezzük, hogy a magreakciók során még további megmaradási törvényeknek is teljesülniük kell (pl. impulzus-megmaradás, impulzusmomentum-megmaradás leptontöltés-megmaradás), ezekkel azonban a középiskolában nem foglalkozunk.

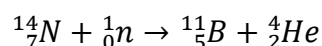
Mag átalakítási kísérlet vezetett a neutron felfedezéséhez is. Rutherford és Chadwick is gyanította, hogy kell lennie a magban a protonhoz hasonló tömegű és töltés nélküli részecskének, de bizonyítékuk nem volt rá. 1932-ben James Chadwick berilliumot (${}^9_4\text{Be}$) bombázott α -részecskékkel (${}^4_2\text{He}$). A magreakció során a berillium széné (${}^{12}_6\text{C}$) alakult át. A reakcióban teljesült a töltés megmaradása, a tömegszámában azonban a keletkezett anyagok oldalán 1 nukleon hiány mutatkozott. A magreakciót rögzítő ködkamrás felvétel is szokatlan volt. Az α -részecske jól látható jellegzetes nyomvonala egy ponttól megtörve és megvastagodva folytatódott, de a töréspontból kiinduló másik nyomvonalat nem lehetett látni.

A kísérleti tapasztalatokat a korábban már feltételezett, de kísérletileg még nem bizonyított részecskével jól lehetett értelmezni. A neutronnak elnevezett, elektromosan semleges, de protonnyi tömeggel (1_0n) rendelkező új részecskével kiegészített reakció-egyenlet már helyesen írta le a magreakciót:



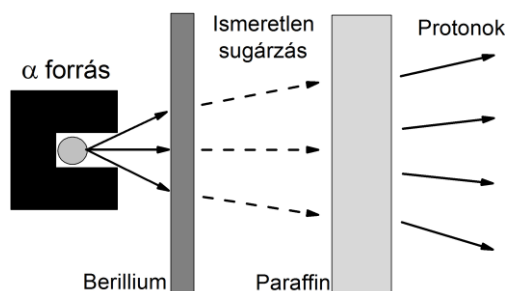
15.1. ábra: Történelmi Wilson-kamrás felvételen megörökített magreakció Chadwick laboratóriumából

Neutron (nyomvonala nincs) ütközik nitrogén atommal (${}^{14}_7\text{N}$), a nitrogén bór atommaggá alakul és α -részecske keletkezik (a fotón ez utóbbiak nyomvonala látható)



Érdeemes megjegyezni, hogy nem véletlen, hogy a neutron felfedezése nem történt meg már sokkal korábban. A neutron, mivel nincs töltése és nem ionizálja az útjába kerülő molekulákat, nem lehet közvetlenül kimutatni. Kimutatása közvetve, újabb magreakciók segítségével történhet. Chadwick például felfedezésének egyértelmű megerősítésére a Be bombázáskor keletkezett neutronok útjába parafinréteget helyezett el. A nagy hidrogéntartalmú parafinból a

neutronok protonokat szakítottak ki. A réteg túlsó oldalán a töltéssel rendelkező protonokat már jól lehetett detektálni.



15.2. ábra: A Chadwick-kísérlet összeállítása

A Rutherford-féle első mag-átalakítási kísérlet óta sokfajta magreakciót figyeltek meg. Ezekben a folyamatokban atommagok ütköznek egymással és neutronokkal, és az ütközés közben az atommagok megváltozhatnak, más atomok magjai keletkezhetnek belőlük.

Magreakcióval sikerült előállítani a periódusos rendszerben az urán után következő elemeket, amik azonban mind radioaktívak és gyorsan elbomlanak. Magreakciókkal a legkülönbözőbb kémiai elemeknek előállíthatók radioaktív izotópjai, amik igen széles körben használhatók fel a kutatástól az gyógyászaton át az ipari alkalmazásokig.

Érdekességként megemlíthető, hogy az egykori alkimisták álmát. A mesterséges arany előállítását is megvalósították, de ennek nincs igazi jelentősége, előállítási költsége jóval nagyobb, mint a természetes arany ára.

A következőkben néhány gyakorlati szempontból fontos magreakcióval és alkalmazásaival foglalkozunk.

15.1. Radioaktivitás

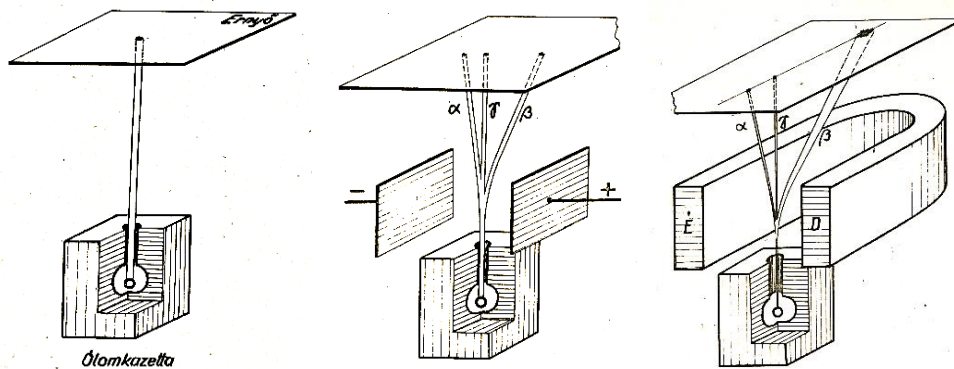
Az atommagfizika a radioaktivitás jelenségének felfedezésével és vizsgálatával indult, néhány évvel megelőzve magának az atommagnak a felfedezését is. Henri Becquerel francia tudós a fluoreszcenciát vizsgálva (1896) tapasztalta, hogy az uránvegyületek – minden külső beavatkozás nélkül – különös sugárzást bocsátanak ki, ami a fényképező lemezre esve, azon feketedést okoz. A sugárzásban az volt a különös, hogy nem lehetett tudni honnan származik az energiája, hiszen az eddigiekben tapasztalt sugárzások mindig külső gerjesztés, energia befektetés eredményeként jelentkeztek. Az uránvegyületek sugárzása nem igényelt semmilyen külső beavatkozást, az anyag „magától”, az intenzitás csökkenése nélkül sugárzott.

H. Becquerel által felfedezett sugárzási jelenségről később kiderült, hogy csupán kis része egy bonyolult jelenségcsoportnak. Ma közel félszáz olyan természetes körülmények között előforduló kémiai elemet ismerünk, amelyek az uránhoz hasonlóan spontán sugárzást bocsátanak ki. Ezeket az elemeket természetes radioaktív elemeknek, sugárzásukat radioaktív sugárzásnak nevezzük.

A radioaktív sugárzások fajtái

Már a legelső vizsgálatok kimutatták, hogy a radioaktív anyagokból háromfajta sugárzás ered, amelyek áthatoló képessége döntően különbözik. A három sugárzást a növekedő áthatoló képességük sorrendjében a görög ábécé betűivel (α , β , γ) jelölték meg. Ez az elnevezés máig használatos. Az α -sugarak már 0,05 mm vastag alumínium fólián sem tudnak áthatolni, a β -sugarak elnyeléséhez kb. 5 mm vastag alumínium-lap szükséges, a γ -sugarak abszorpciójához pedig kb. 6 cm vastag alumínium-réteg kell. Hamarosan kiderült, hogy a három sugárzás nem csak áthatolóképeségben, hanem egy sor más tulajdonságban is különbözik. Egyszerű kísérletekkel és összetett mérésekkel sikerült meghatározni a sugárzások lényegi mibenlétét.

Középiskolai szinten ezt a sugárzások elektromos és mágneses tér hatására történő különböző mértékű eltéríthetőségével érzékeltetjük.



15.3. ábra: Az ólomkazettába zárt radioaktív anyag sugárzása egyenes irányban terjed, de az α - és β -sugárzás elektromos és mágneses tér hatására eltérül

Az α -sugárzásról kiderült, hogy kétszeres pozitív töltésű hélium atommagok alkotják, amelyek sebessége Rutherford mérései szerint 20 000 km/s. A β -sugárzás közel fénysebességű elektronokból áll, a γ -sugarak nagy energiájú elektromágneses hullámok. Rutherford első kutatási sikere, amiért Nobel-díjat kapott (1908) a radioaktív sugárzások vizsgálata kapcsán tett felfedezése volt. Tóriummal kísérletezett, és kimutatta, hogy a sugárzó tórium mennyisége csökken, miközben új sugárzó anyagok keletkeznek. Először a tórium-X-nek nevezett anyagot azonosította (erről később igazolták, hogy a rádium egyik izotópja), majd kimutatta, hogy a tóriumtól elkülönített tórium-X mennyisége a sugárzás intenzitásának megfelelő ütemben fogy és közben újabb, gáz halmazállapotú, sugárzó anyag jelenik meg. Ezt a radioaktív gázt tórium-emanációnak nevezte el. Frederick Soddy vegyész-professzorral együttműködve igazolták, hogy a radioaktív sugárzás során a sugárzó anyag más kémiai elemekké alakul át. A tóriumból keletkezett tórium-X, illetve a belőle képződő tórium-emanáció kémiaiailag jól elkülöníthetően más elemek. Rutherford felfedezése forradalmi jelentőségű volt. Megdöntötte a kor általánosan elfogadott tudományos dogmáját, miszerint a kémiai elemek az anyag „örök” építőkövei, az elemek sohasem alakulhatnak át más elemmé (ellentétben a vegyületekkel, amik az atomok újfajta csoportosulásával (a kémiai reakció során) megváltoznak).

A későbbiekben Rutherford felismerése alapján négy különböző radioaktív bomlási sort (ún. „radioaktív családot” sikerült azonosítani a kutatóknak. Ezek mindegyike egy „őselemmel”

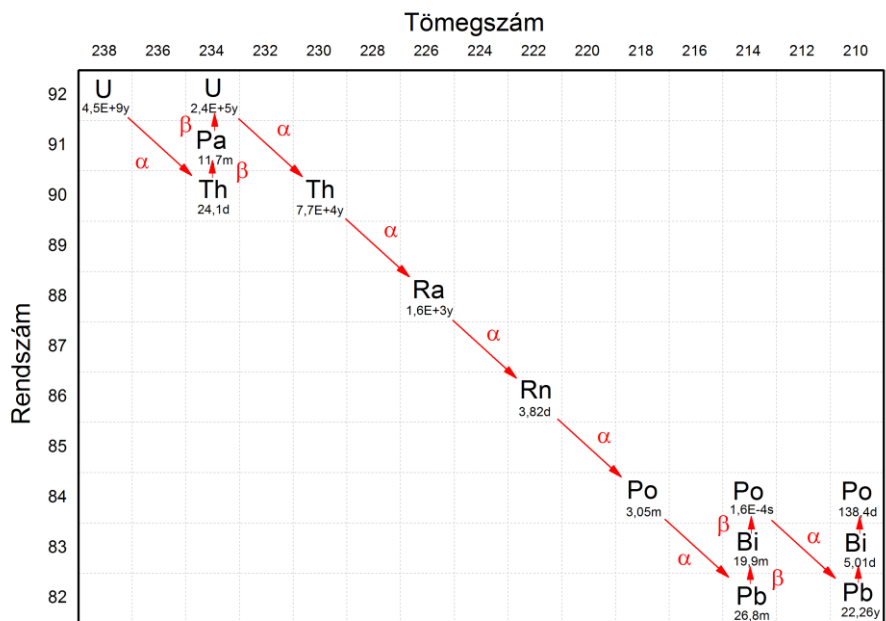
kezdődik. Az őselem radioaktív sugárzása során új anyag keletkezik. Az így keletkező elemet nevezik leány-elemnek. A leány-elem azonban szintén nem stabil, maga is sugároz és újabb leánymag „anyjává” válik, és így tovább, mindaddig, míg néhány generáció után az utolsó bomlás már stabil atommagot eredményez. Ha valamelyik családtag α -bomlást szenved akkor a keletkező leánymag rendszáma kettővel, tömegszáma négyvel kisebb lesz, mint az anyamagé. A β -bomlás esetén a leánymag rendszáma eggyel nő, tömegszáma viszont ugyanaz marad, mint az anyamagé.

A radioaktív családon belül jellemző, hogy az őselem mennyisége csökken, a sor végén lévő stabil atommaggal rendelkező elemé pedig növekszik, a közbülső lépcsőfokokat jelentő elemek egymáshoz viszonyított mennyiségi aránya nem változik. Ez azt jelzi, hogy minden elemből időegység alatt ugyanannyi bomlik el, mint amennyi keletkezik. Az egyes elemek radioaktív atomjainak számaránya megegyezik a felezési idő arányával.

$$N_B : N_C : N_D : \dots : N_{N-1} = T_{1/2B} : T_{1/2C} : T_{1/2D} : \dots : T_{1/2(N-1)}$$

Ezt a tapasztalatot használják ki a kutatók, hogy nagyon lassan bomló izotópok felezési idejét is meghatározzák, aminek direkt úton lehetetlen a kimérése.

Az egyik ismert radioaktív család az ${}^{238}_{92}\text{U}$ uránizotóptól származik. Ez az uránizotóp egy α -részecske leadásával két protont és két neutron veszít, és így a tórium egyik izotópjává válik. Ez utóbbi szintén instabil, és β -sugárzással tovább bomlik. Végül is egy tucat generáció után megáll a leszármazás folyamata. A bomlási sor utolsó tagjaként az ólom 206-os stabil izotópjára jön létre. Az 238-as uránizotópból induló bomlási sorozatot az ábra mutatja.



15.4. ábra: ${}^{238}_{92}\text{U}$ radioaktív család bomlási sora

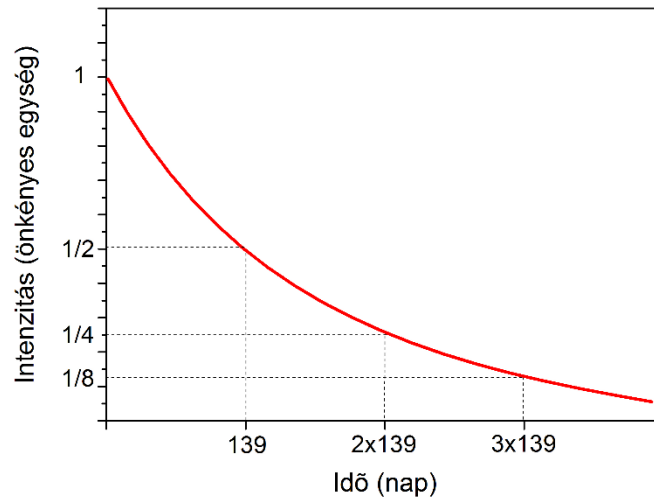
A radioaktív bomlás kinetikája

Rutherford részletesen vizsgálta az általa felfedezett tórium-emanáció sugárzását. Az jelenség különös érdekessége volt, hogy a sugárzás gyors ütemben csökkent, szemben a korábról ismert

sugárzó anyagokkal (tórium, urán), amiknek sugárzási intenzitása állandó. A tórium-emanáció sugárzási intenzitása Rutherford mérései szerint exponenciálisan csökkent az idő függvényében. A tórium-emanációra kapott exponenciális bomlásfüggvény általánosan igaz a többi radioaktív anyag bomlására is. A különbség csak a függvény paramétereiben van.

Az exponenciális bomlási folyamatot az időegységre eső bomlásesemények számának időbeli ábrázolásával szemléltetjük, közölve, hogy az ilyen típusú függvényekre jellemző az ún.

„felezési érték”. A radioaktív bomlási folyamat jellemzésére azt az időtartamot ($T_{1/2}$) használjuk, ami alatt az időegységre eső bomlások száma felére csökken. Ezt az időtartamot nevezzük felezési időnek. A felezési idő az exponenciális függvény bármely szakaszán azonos. A radioaktív bomlás exponenciális intenzitáscsökkenését a $T_{1/2} = 139$ nap felezési idejű, α -aktív polóniumra vonatkozó grafikonon szemléltetjük.



15.5. ábra: Polónium radioaktív bomlásának folyamata

A tórium-emanáció radioaktív bomlása gyors, felezési ideje $T_{1/2} = 54,5 \text{ sec}$. A rádium felezési ideje $T_{1/2, Ra} \approx 1600 \text{ év}$, az uráné még ennél is sokkal hosszabb, $T_{1/2, U} \approx 4,5 \cdot 10^9 \text{ év}$. Az adatokat látva érthető, hogy laboratóriumi mérések időtartamában sem rádium, sem az urán sugárzásának változása nem mérhető.

A tórium-emanáció lebomlása gyors folyamat ezért az egészségkárosító hatása elhanyagolható. Ez a magyarázata annak, hogy Rutherford történelmi mérése, a tórium-emanáció bomlásának vizsgálata, némi körtekintéssel, iskolai mérésenként is elvégezhető. A nagy nemzetközi tanszergyártók erre a célra speciális taneszköz-összeállítást forgalmaznak.



MF4. Tórium-emanáció radioaktív bomlásának vizsgálata ionizációs kamrával (szakköri, illetve emelt szintű mérőkísérletnek ajánlott)

[Részletek >>>](#)



MF5. A radioaktív bomlás-függvény elméleti értelmezése (kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)



MF6. Ionizáló sugárzás észlelésére szolgáló mérőeszközök (GM-cső, ionizációs-kamra, ködkamra, szilárdtest nyomdetektor) egyszerűsített iskolai változatai, és működésük

[Részletek >>>](#)

A radioaktivitás jelenségének korai kísérleti vizsgálatában úttörő szerepe volt Maria Sklodowska-Curie és férje Pierre Curie munkásságának. A radioaktivitás kutatásának kezdeti korszakát mutatja be hitelesen a National Geographic Channel ismeretterjesztő sorozatának „Hat kísérlet, ami megváltoztatta a világot” Madame Curie munkásságát bemutató ismeretterjesztő rövidfilmje, ami az iskolai fizikaórák kiegészítő anyagaként is jól felhasználható.

WWW

[„Hat kísérlet, ami megváltoztatta a világot”- Curie](#)

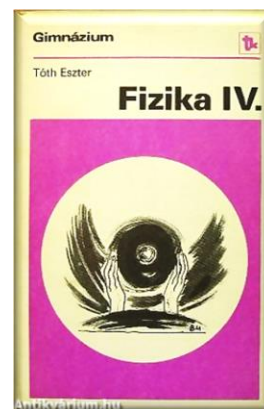


A radioaktív bomlás különböző fajtáinak értelmezése

A radioaktív bomlás az atommag belső szerkezeti átalakulásainak következménye. Részletes magyarázat az atommag szerkezetének mélyebb ismeretében adható. (Hasznos segítséget adhat ehhez például a magmodellek tárgyalása.)



Hangsúlyozzuk, hogy érdeklődő diákok számára, szakköri, önképzőköri szervezésben a magfizika, de konkrétan a radioaktivitás és a magreakciók vonatkozásában is ajánlott a részletesebb tárgyalás. Ehhez hasznos tanári segítség, a már korábban ajánlott Marx György: Atommagközelben című könyvén túl a néhány évtizede még kötelező tananyagot feldolgozó, és antikváriumokban még beszerezhető IV. osztályos gimnáziumi fizikatankönyv is.



Egy átlagos középiskolai osztályban, 11. évfolyamon heti két órában, a radioaktivitás részletes szerkezeti magyarázatára nem tudunk kitérni, rövid energetikai értelmezésre azonban itt is szükség van.

Az atommag α -bomlása

Az α -sugárzás a periódusos rendszer végén elhelyezkedő anyagokra jellemző. A válaszra váró kérdés az, hogy egyes nagy atommagokból miért lökődik ki spontán módon a két protonból és két neutronból álló He atommag? A magyarázat energetikailag a legegyszerűbb, jó segítséget ad hozzá a korábban bemutatott grafikon, ami az atommagok egy nukleonra eső átlagos energiáját mutatja a tömegszám függvényében (14.3. ábra). A grafikonról látható, hogy a legmélyebb energiatarományba (8-9 MeV) az $40 < A < 120$ tömegszámú atommagok tartoznak. Leolvasható továbbá, hogy a grafikon elején található könnyű atommagok közt az α -részecskék feltűnően alacsony energiájúak. Az $A > 120$ tömegszámú atomok esetén az egy nukleonra jutó kötésenergia növekszik a tömegszámmal. Ennek elsődleges oka a mag kis tartományába összeszoruló egyre több proton közötti egyre erősebb taszítás, a Coulomb-energia növekedése. (Megjegyezzük, hogy a Coulomb-taszítás szerepéről a korábbiakban már volt szó, amikor a neutronok „ragasztó” szerepét tárgyaltuk és magyaráztuk a neutronok számarányának növekedését a rendszám függvényében.) A radioaktív α -aktivitás azokra az anyagokra jellemző, melyek energiája csökken, ha egy α -részecske kilökésével tömegszámuk (és rendszámuk) csökken. Az egyes atommagok α -bomlásának intenzitását a konkrét magban a nukleonok belső kölcsönhatása szabja meg.

Atommag β -bomlása

A radioaktivitás felfedezését követően hamarosan felismerték, hogy a radioaktív β -sugárzás gyors elektronokat tartalmaz. Sokáig vitatott volt azonban, hogy hogyan honnan származhatnak ezek az elektronok. Az atommag felfedezése után Rutherford úgy gondolta, hogy az atommagok tömegszámának és magtöltésének eltérése azzal magyarázható, hogy a magot felépítő protonok egy részének töltését belső elektronok árnyékolják le. Ez az elképzelés magyarázat adott volna a β -bomlás jelenségére is, (hiszen az elektron távozásával egy protonnyi többlettöltés mutatkozik a magban, miközben a tömegszám nem változik), de alapvető ellentmondásban állt a kvantummechanikai törvényekkel. Az atommagnyi térfogatba lokalizált elektronnak ugyanis a határozatlansági reláció szerint olyan nagy kinetikus energiája lenne, hogy mag nem tudná megkötni. A kérdés tehát sokáig megoldatlan maradt.

Az atommag β -aktivitását úgy lehet magyarázni, hogy az atommag valamelyik neutronja kibocsát egy elektront és a folyamat közben protonná alakul. Végeredményben a mag rendszáma 1-gyel nő, tömegszáma változatlan marad. A jelenséget szabad neutronokon is megfigyelték. A szabad neutronok is mutatnak β -bomlást, aminek felezési ideje is mérhető.

Megjegyzés:

- Általában béta bomlásnak nevezünk minden olyan folyamatot, amelyben a bomló elem tömegszáma változatlan, rendszáma azonban változik. A tapasztalat szerint az elektron kibocsátással járó negatív béta bomlás mellett létezik, ún. *pozitív bétabomlás* is,

amelynek során az atomból pozitron távozik. Ekkor a mag protonjainak száma eggyel nő, tömegszáma azonban változatlan marad. A pozitív béta bomlás sajátos formája, amikor a mag a hozzá közel eső belső elektronhéj valamelyik elektronját befogja és emiatt egyik protonja neutronná alakul. Ezt a folyamatot *K-befogásnak*, vagy *kaptációnak* is nevezzük. Pozitív béta bomlással azok a magok alakulnak át, amelyekben a protonok száma sokkal nagyobb, mint a neutronoké.

A béta bomlás során az energia-, a töltés- és leptontöltés-megmaradás miatt általában neutrínók is keletkeznek. Emelt szintű osztályokban, ahol az elemi részecskék fizikája és a Weizsäcker formula is tárgyalásra kerül, a folyamatok pontosan értelmezhetők.

Ezután már csak az a kérdés maradt megválaszolatlan, miért csak bizonyos atommagok mutatnak β -bomlást, továbbá a felezési idők miért lehetnek nagyon különbözőek?

A válasz a következő: Az atommagban lévő neutronok nem szabad neutronok. A magban erős kölcsönhatásban állnak a többi nukleonnal, és ez a kölcsönhatás neutrononként és magról magra is változik. A kölcsönhatás folytán az egyes neutronok bomlását a többi nukleon elő is segítheti, de meg is akadályozhatja. A nukleonok közötti kölcsönhatások eredményeként β -emisszió csak akkor lép fel, ha ez az atommag számára „előnyös”, vagyis, ha az elektron kilökése révén az atommag energiája csökken (lásd az atommagok egy nukleonra jutó energiáját mutató grafikont, a 14.3. ábrán). Minél nagyobb az elektron kilökésével elérhető energiacsökkenés annál hamarabb fog a folyamat végbemenni (a β -bomlás felezési ideje kisebb). Ha az atommag energiáját a β -bomlás növelné, akkor a folyamat nem megy végbe, az anyag nem mutat β -aktivitást.

Radioaktív γ -sugárzás értelmezése

A radioaktív anyagok egy része az α - és β -sugárzáson túl γ -sugárzást is kibocsát. A γ -sugárzás nagy energiájú elektromágneses hullám, és a folyamat az atomok fénykibocsátásához hasonlóan értelmezhető.

Ha valamilyen külső hatásra az atommag belső szerkezete átrendeződik és magasabb (gerjesztett) energiaállapotba jut, a gerjesztett állapot több-kevesebb idő után visszarendeződik az alapállapotba. A gerjesztett energiaállapot energiátöbbletét a mag γ -kibocsátással adja le. A γ -sugárzás gyakran az α - és β -sugárzást kíséri. Ez azzal magyarázható, hogy egy részecske kibocsátása jelentősen megzavarja a mag belső egyensúlyát, a mag átmenetileg gerjesztett állapotba kerül, ami azután a γ -sugárzás kibocsátásával kerül az új egyensúlyi állapotba.

15.1.1. Mesterséges radioaktivitás

Számos elem atommagja mesterséges külső behatásra is radioaktívvá válhat. Mesterséges magátalakítás általában úgy kelthető, hogy az átalakítandó atommagokat sugárzás hatásának teszik ki. Ha a sugárzásban lévő nagy energiával száguldó részecske eltalál egy atommagot és abba beépül, akkor az atommag szerkezete megváltozik.

Az ilyen folyamatokban gyakran előfordul, hogy radioaktív izotópok képződnek, amelyek rövid felezési idővel bomlanak. Ilyen izotópok a természetben nem találhatók meg, mert ha képződtek is valamikor, rövid felezési idejük miatt, mára már elbomlottak. A gyorsan lebomló mesterséges izotópokat igen széles körben alkalmazzák a tudományos kutatásban, az iparban, vagy akár az orvosi gyakorlatban is.



MF7. A természetes és mesterséges radioaktivitás gyakorlati alkalmazásai (geológiai kormeghatározás; szerves anyag-maradványok régészeti kormeghatározása C_{14} izotóp bomlását felhasználva; radioaktív nyomjelzés alkalmazása az orvosi gyakorlatban; az alkímisták álma, az „aranycsinálás”, megvalósítása magfizikai módszerekkel)

[Részletek >>>](#)

15.2. Maghasadás

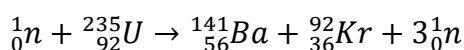
A neutron-bombázással kiváltott magreakciók sorozatban végzett vizsgálatainak részeként izgalmas vállalkozásnak tűnt, hogy a periódusos rendszer utolsó természetes elemének atommagjába újabb nukleonokat „lőjenek” és így új mesterséges elemekkel bővítsék a periódusos rendszert. A kísérletek során előfordult, hogy az uránmag két vagy több kisebb magra hasadt szét, miközben több neutron is keletkezett.

Az urán atommagjának hasadása azzal magyarázható, hogy a rendszámnak megfelelő protonok közti Coulomb-taszítás már jelentős, így a mag stabilitása csökken. A mag újabb részecske befogadására már nem képes, az ütközés hatására szét hull. Egyszerű mechanikai analógiával élve, képzeljük el, hogy egy vékony fakeret léceit összenyomott rugó feszíti. Ha a rendszert valami külső behatás, például ütés, éri, a kettős igénybevételnek a keret már nem tud ellenállni és széttörik. Az atommag hasadásához szükséges külső hatás szerencsére nem kicsi, így például sem ütés, sem termikus fluktuációk nem képesek kiváltani a hasadást. Ráadásul nem minden nehéz atommagnak van egyforma hajlama a maghasadásra. Technikai alkalmazásra az urán 235-ös izotópja a legalkalmasabb.

Az urán-mag hasadása

Az urán hasadásának az elindításához az szükséges, hogy a magnak ütköző neutron befogódjon az atommagba és drámaian megzavarja a mag belső energiaállapotát. Ezt a megrázkódtatást a magok közti Coulomb-taszítástól feszülő mag már nem bírja ki és két közel egyenlő atommagra szakad szét, közben pedig neutronok szabadulnak fel.

Az egyik gyakori hasadás reakció egyenlete:



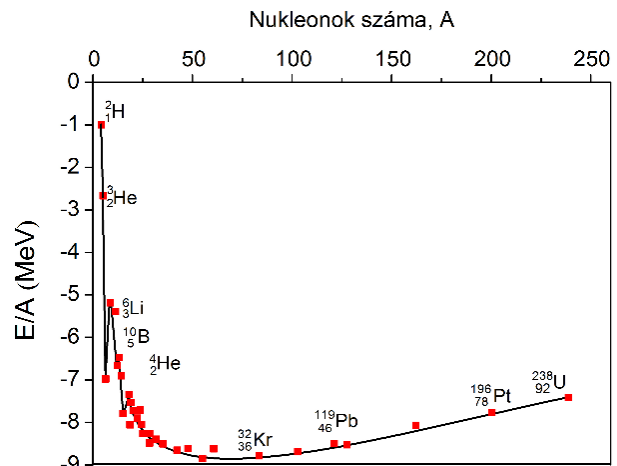
A korábbiakban már használt, a mag egy nukleonjára jutó átlagos energiát a tömegszámok függvényében ábrázoló grafikon alapján, becsülhető, hogy mekkora energia szabadul fel az uránmag felhasadása során!

Egy nukleonra eső energiák közelítő értéke a grafikonról leolvasható:

$$\text{Urán: } E/A_U \approx -7,4 \text{ MeV}$$

$$\text{Bárium: } E/A_{Ba} \approx -8,4 \text{ MeV}$$

$$\text{Krypton: } E/A_{Kr} \approx -8,7 \text{ MeV}$$



Az uránmag energiája a hasadás előtt: $E_U \approx 235 \cdot (-7,5) \approx -1762 \text{ MeV}$

A bárium mag energiája: $E_{Ba} \approx 141 \cdot (-8,4) \approx -1184 \text{ MeV}$

A krypton mag energiája: $E_{Kr} \approx 92 \cdot (-8,7) \approx -800 \text{ MeV}$

Egyetlen uránmag széthasadásakor felszabaduló energia közelítő értéke:

$$\Delta E = (E_{Ba} + E_{Kr}) - E_U \approx 222 \text{ MeV}$$

Az energia egyrészt a hasadási termékek kinetikus energiájaként, másrészt γ -sugárzás formájában szabadul fel.

Láncreakció

Ha egy urántömb egyik atomja neutron hatására széthasad, és közben több mint egy neutron válik szabaddá, akkor a folyamat könnyen folytatódhat. A szétrobbanó uránmagtól kibocsátott neutronok ugyanis további uránmagokat találhatnak el, azok felhasadásával tovább nő a neutronok száma és ezzel a további hasadások valószínűsége is. Az urántömbben így *láncreakció* indulhat meg. A természetben előforduló uránércekben igen csekély mennyiségű a bomlékony 235-ös uránizotóp atomjainak aránya. Ha egy mag elhasad, a felszabaduló neutronok nagyon kis valószínűséggel találhatnak el újabb hasadásra képes atommagot, így a láncreakció nem indulhat el.

Ha a hasadásakor szabaddá váló neutronok mindegyike újra uránmagra talál, a hasadások száma mértani sor szerint növekszik, s az urántömb egyetlen atomjának hasadásával meginduló folyamatban a tömb atomjainak nagy része pillanatok alatt széthasad. Ezt a széthasadási folyamatot nevezzük *lavinafolyamatnak*. (Az elnevezés a havas lejtőn leguruló lavinára utal, ami annál több havat vesz fel, minél nagyobb. Az uránhasadási folyamat is ehhez hasonlóan gyorsul a neutronok számának szaporodásával.)

Az atombomba

Történelmi tény, hogy az urán hasadási energiájának a felhasználása a második világháború éveiben, mint pusztító „csodafegyver” merült fel először a német, majd az amerikai oldalon. A megvalósítás Amerikában sikerült.

Az urántömbben beinduló hasadási láncreakció, ha neutronveszteség nélkül zajlik le, rendkívül rövid idő alatt óriási energiatartalékot szabadít fel. A folyamat ezért *robbanásjellegű* és hő és lökéshullámot indítva hatalmas pusztítást képes végezni. Ez az atombomba.

Az atombomba bevetése annak ellenére világtörténelmi jelentőségűvé vált, (demonstrálva a pusztítás mértékét) hogy a második világháború szempontjából már nem volt meghatározó szerepe. Az azóta eltelt évtizedekre súlyos árnyként nehezedik a nukleáris fegyverarzenál létezése. Az atombomba kifejlesztésének története, a bevetésének körülményei és a hatásainak bemutatása, továbbá a nukleáris fegyverkezés mai állásának és a vele kapcsolatos veszélyeknek a bemutatása fakultatív projektfeladatként ajánlható.

Az atomenergia békés felhasználása – kontrolált láncreakció az atomreaktorban

Az atomenergia felhasználása az emberiség egyre növekvő energiaigényének kielégítésére korunk egyik kulcskérdése. Előnyeit és veszélyeit széles körben vitatják szakemberek, politikusok és átlag-polgárok. Érvek és ellenérvek sokasága ömlik ránk. Magyarországon a paksi atomerőmű fejlesztésével kapcsolatban a viták még élesebbek. Nagyon fontos, hogy a vitákban résztvevők, vagy az azokat figyelők tisztában legyenek az atomreaktor működésének lényegével, ismerjék az előnyöket és a kockázatokat is. A középiskolai magfizika tanításának az egyik legfontosabb területe az atomreaktorok tárgyalása.

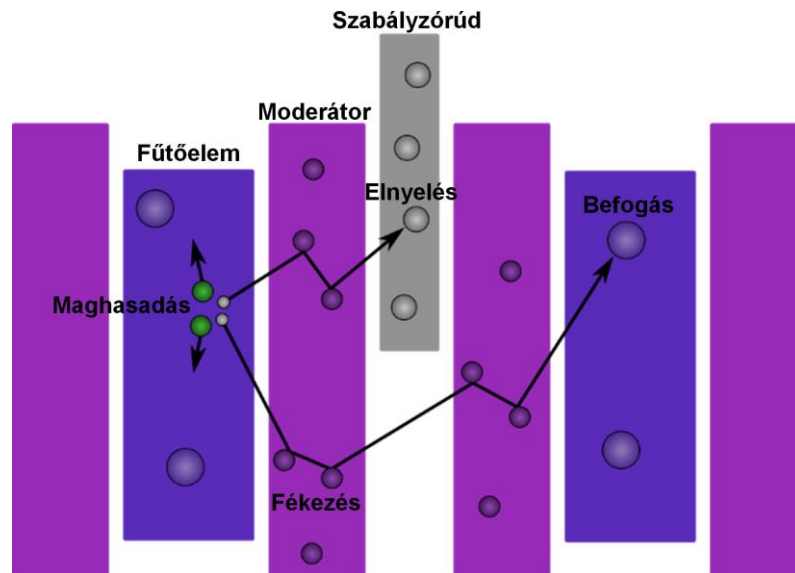
Ahhoz, hogy az atomenergiát békés célokra lehessen felhasználni, biztosítani kell, hogy a láncreakció önfenntartó módon folyamatos maradjon, de ne szaladjon meg. Ez a neutronok számának szabályozásával érhető el. A szabályozás két problémát vet fel. Egyrészt biztosítani kell a neutron-urán ütközések hatékonyságát, másrészt szabályozni kell az ütközések számát.

Az első feladat abból adódik, hogy a maghasadás során képződő neutronok kinetikus energiája nagy, és az ilyen gyors elektront bizonytalanul fogja be az eltalált uránmag. Az ütközés sokkal biztosabban vezet új hasadásra, ha a neutronok lassúbbak, energiájuk nem haladja meg a reaktor hőmérsékletének megfelelő termikus energiát. A neutronokat tehát lassítani kell. A lassításra olyan, ún. *moderátor-anyagokat* használnak, amelyek atomjaival ütközve a neutronok energiát adnak le. Természetesen a különböző moderátorok alkalmazása eltérő technikai megoldásokat kívánnak, ezért a reaktor fontos jellemzője. A régebbi reaktorok általában grafitot használtak moderátorként, az újabbakban (pl. Pakson is) víz a moderátor. (Vannak moderátor nélküli reaktorok is, ezeket *gyors reaktornak* vagy *tenyésztő reaktornak* nevezik. Sajátosságuk, hogy működésük során újabb, hasadásra képes anyagok előállítására (pl. plutónium) alkalmasak, amelyek azután nukleáris fegyverekben felhasználhatók.)

A láncreakció szabályozásának másik fontos része a termikus neutron-fluxus szabályozása. Ezt neutronelnyelő anyagok alkalmazásával oldják meg. A neutron elnyelő anyagot a hasadóanyagba süllyeszthető rudak tartalmazzák. Ha a rudakat teljesen leengedik, a neutronok

elnyelődnek, a láncreakció megszakad, és a reaktor leáll. A szabályozás lényege, hogy indításkor a rudakat kihúzzák, majd miután kialakult az önfenntartó láncreakció, fokozatosan beljebb tolják mindaddig, amíg a láncreakció intenzitása a kívánt szintet eléri. A láncreakciót mérésekkel folyamatosan ellenőrzik. Ha a láncreakció növekvő tendenciát mutat, a szabályzó rudakat az automatika lejjebb engedi, ellenkező esetben megemeli. Komoly üzemzavar, baleset esetén a szabályzó rudak beesnek a reakciótérbe és a láncreakció automatikusan leáll.

A láncreakció szabályzását biztosító rendszer működését az 15.6. ábra szemlélteti.



15.6. ábra: A kék hasábok a csövekben elhelyezett urán hasadóanyagot, a lila elemek a neutronokat fékező moderátort, a szürke a reakciótérben mozgatható, neutron elnyelő szabályzó elemeket jelöli.

A láncreakció során felszabaduló energia hőként távozik, ezért a reaktort hűteni kell. Az energiatermelő reaktorban a hűtőközeg víz. (A tenyésztőreaktorokban, mivel a víz moderátorként működik, hűtésre folyékony nátriumot használnak.) A felforrósodott víz energiája hasonlóan használható fel elektromos energia termelésére, mint a hőerőművekben a fűtőanyag elégetésével melegített víz.



Minden, ami a [Paksi Atomerőműről](#) publikus



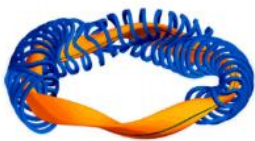
15.3. Magfúzió

A korábbiakban láttuk, hogy az atommag egy nukleonra eső energiája a közepes magok esetén a legkisebb, könnyű és nehéz magok esetén viszont magasabb. A nehéz magok magasabb energiájának egy része szabadul fel a maghasadás során. A kis magok esetén az energia csökkenésére akkor nyílik lehetőség, ha nagyobb magokká egyesülnek, fuzionálnak. Az ilyen folyamatot fúziós magreakciónak nevezzük.

A fúziós magreakció nagyon hasonlít az endoterm kémiai reakciókhoz. Ha például szénből és oxigénből széndioxid keletkezik, energia szabadul fel. Ezt úgy is értelmezhető, hogy a CO₂ molekula kötéskében az egy atomra jutó energia kisebb, mint egy C-atom és az O₂ molekula energiájának összege. Az így adódó energiakülönbség az égéshő. Hasonló módon minden magreakció, amelyben könnyű magok nehezebb magokká kapcsolódnak össze, és eközben energiát adnak le, egyfajta „égésnek” tekinthető. Ilyen értelemben gyakran beszélünk például arról, hogy a Nap energiasugárzása „a hidrogén héliummá történő égéséből” származik.

Hidrogénből hélium

Amikor ezt könnyedén kimondjuk nem is gondolunk arra, hogy ez az energetikailag előnyös átalakulás milyen bonyolult módon mehet csak végbe. Problémát jelent azonnal, hogy két proton (a Coulomb-taszítás miatt) neutron nélkül, nem tud fuzionálni. Először az egyik protonnak neutronná kell alakulnia, első lépésben ezért deutron képződik. Két deutron mag egyesítésével összeállhatna az α -részecske, de ez az elképzelt egyszerű reakció nem mehet végbe, mert nem felel meg egyszerre az energia és az impulzus-megmaradásnak. Marad tehát ismét a kerülő út, ami azt jelenti, hogy a deutron egy proton befogadásával hélium-3-as izotóppá alakul, majd két hélium-3-as izotóp egyesülésekor képződik egy stabil α -részecske és marad még két proton. Az α -részecske képződését eredményező magreakció-sorozat energiamérlege szerint összességében igen tetemes, kb. 26 MeV energia szabadul fel. Ahhoz azonban, hogy ez az energia felszabaduljon 20 millió fokos „gyújtási hőmérsékletre” van szükség. Ezt földi viszonylatban (nagyobb méretekben) eddig csak a hidrogénbombában sikerült megvalósítani. De ilyen módon csak a fúziós energia robbanásszerű felszabadítása lehetséges. A fúziós energia békés célú fokozatos felszabadításán hosszú évtizedek óta dolgoznak, részeredmények, biztató hírek vannak, de az igazi megoldást még nem sikerült bejelenteni. Természetesen az eddigi eredmények, és a még meglévő megoldandó problémáknak a megismerése is érdekes.



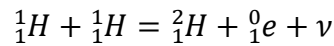
Zoletnik Sándor: [Útban a JET-től az ITER felé](#)



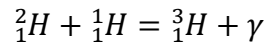
A csillagok energiaforrása

Régtől foglalkoztatta a tudósokat, hogy a csillagok, így például a mi Napunk, honnan veszi a kisugárzott energiát? Ma már tudjuk, hogy a csillagokban magfúziós folyamatok mennek végbe, és a Nap, illetve a csillagok kisugárzott energiája nem más, mint a fúzióban felszabaduló energia.

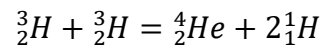
A Nap anyagát a hatalmas tömeg gravitációja tartja össze. A Nap belsejében óriási nyomás és nagyon magas hőmérséklet van. Ilyen körülmények esetén a fúziós folyamatok is beindulhatnak. A Napban a hidrogén atommagok több lépésben hélium maggá egyesülnek. A folyamat kezdeti lépése a legnehezebb, amikor két proton, a köztük lévő hatalmas taszítóerők ellenére deutériummá egyesül, az egyik proton neutronná alakul miközben egy pozitron és egy neutrínó (ν) válik szabaddá



A következő lépésben a deutérium mag egy protonnal 3-as hélium izotóppá alakul:



Végül két 3-as héliumizotóp stabil 4-es tömegszámú héliummá egyesül:



Így a csillagokat olyan óriási kazánoknak tekinthetjük, ahol hidrogénmagok és más könnyű elemek magjai nehezebb magokká „égnek el”.

A csillagok egyensúlyát a gravitáció összehúzó hatása és az energiefel szabadító magreakciók belső feszítése biztosítja.

16. ELEMI RÉSZECSKÉK

Az elemi részecskék kutatása a fizika egyik sikerterülete. Naponta hallunk híradásokat új elemi részecskék felfedezéséről, nemzetközi összefogással épülő méregdrága gyorsító berendezésekről, az elmúlt évtizedekben húsz Nobel-díjat osztottak ki részecskefizikával foglalkozó tudósoknak. Természetes, hogy diákjainkat is érdekli a terület. Kell is beszélni róla a gimnáziumban, de a legegyszerűbb ismeretközlésen túl többre nincs igazán lehetőségünk. Már az is eredmény, ha a tanulók tudják, miről is szól a részecskefizika, és megértik, hogy a részletes tárgyalás komoly elméleti felkészültséget kíván, így messze meghaladja a középiskola lehetőségeit.

A lényeg megértetése tudománytörténeti visszatekintéssel indulhat. Az embert az ókortól kezdve foglalkoztatja az anyag elemi, tovább már nem bontható összetevőinek kérdése. Démokritosz ősatomokról beszél. Később úgy gondolták, hogy minden különböző tulajdonságú kémiai anyagnak van saját elemi építőegysége (ezt ma molekulának nevezzük), azután hamar rájöttek, hogy a különböző vegyületek molekulái tovább már oszthatatlan atomok különböző kombinációiból épülnek fel. A 19. század végén J. J. Thomson felfedezte az elektront (amit ma is az elemi részecskék közé sorolunk), így világossá vált, hogy az atom nem oszthatatlan. Rutherford szórás kísérlete igazolta az atommag létezését és azt, hogy a mag pozitív töltésű nagy tömegű protonokat tartalmaz. Az atommagról alkotott képet Chadwick tette teljessé a neutron megtalálásával.

Az atomok felépítésének kutatásával párhuzamosan a kutatóknak újabb és újabb részecskéket sikerült találni, elsősorban ütköztetési kísérletekkel kiváltott magreakciók során. Mivel az ütközésekre és a magreakciókra is érvényesek megmaradási törvények, ezek látszólagos

sérülése utalt egy-egy addig ismeretlen részecskére. (A felfedezés módszerét a következő hasonlattal lehet elképzelni a diákokkal: Tegyük fel, hogy az elsötétített szobában különböző színnel villogó golyókkal biliárdozunk, de a szétlövendő golyócsoporthoz van egy nem világító golyó is. A golyóegyüttes szétlövését videóra vesszük és a felvételt utólag kielemezzük. A szétguruló golyók, egyet kivéve, fénypontokból álló nyomvonalat húznak. A nyom nélküli golyó jelenlétére, illetve tömegére és mozgására a többi nyomvonal irányából és a villogás révén meghatározható sebességekből következtethetünk.

Évtizedek alatt a fizikusok már több száz korábban ismeretlen részecskét azonosítottak, és csoportosítottak különböző szempontok alapján. Az 1970-es években született meg az anyag elemi építőköveinek tekinthető részecskéket és az építőkövek közti kölcsönhatásokat reprezentáló részecskéket egyetlen egységes elméletbe összefogó *részecskefizikai standard modell*. Azóta a kísérleti kutatások irányát az elmélet ellenőrzése, igazolása szabja meg.

Jelenlegi tudásunk szerint a bennünket körülvevő anyagi világban az ismert elemi részecskéknél csak egy szűk hányada vesz részt. Világunk négy elemi részecske épül föl, és e részecskék közt újabb elemi részecskék biztosítják az alapvető kölcsönhatásokat.

A stabil, köznapi anyagot felépítő négy elemi részecske (megtalálásuk időrendjében felsorolva) a standard modell szerint:

- elektron
- neutrínó
- U-(up)-kvark
- D-(down)-kvark

Az U- és D-kvark a protonokat és neutronokat alkotja, a neutronok építőeleme a kvarkokon túl a neutrínó is.

A természet négy alapvető kölcsönhatása, és az őket közvetítő elemi részecske:

- elektromágneses kölcsönhatás: *foton*
- erős kölcsönhatás: nyolc különböző *gluon*
- gyenge kölcsönhatás: semleges *Z-bozon* és két töltött *W-bozon*
- gravitációs kölcsönhatás: feltételezett, de még nem kimutatott részecskéje a *graviton*

A „kölcsönhatást közvetítő részecske” a középiskolában magyarázatra szorul. Egyszerű és szemléletes hasonlat, ha a Balatonban labdázó gyerekcsoportra gondolunk. A gyerekeket az tartja egy helyen, hogy labdáznak, azért nem szélednek szét, mert folyamatosan dobálják egymásnak a labdát. A csoportot összetartó kölcsönhatást reprezentáló részecske a labda.

A fizikában a kölcsönhatások és a részecskék kapcsolata kvantum-térelméleti megfontolások eredménye. A középiskolában részletesen tanult elektromágneses kölcsönhatást az elektromágneses mező energiaközvetítő hullámai a fotonok közvetítik. Ehhez hasonlóan a különböző fizikai mezők terjedő rezgéseikhez hullámot, a hullámhoz a kvantummechanika értelmében részecskét lehet rendelni.

Sok elemi részecskének nincs lényeges szerepe anyagi környezetünkben, annak ellenére, hogy létezésük tapasztalati tényként fogadható el. Legtöbbjük instabil. Vannak olyan részecskék, amelyek a természetben is megtalálhatók. Ilyenek például az 1930-as években a kozmikus

sugárzásban megtalált ún. *mezonok*. Az elsőnek megtalált μ -mezon töltése nagyságra megegyezik az elektron töltésével, de egyaránt lehet negatív vagy pozitív. Tömege az elektronokénál közel kétszázszor nagyobb, de a protonokénál tízszer kisebb. A μ -mezon a kozmikus sugárzás nagy energiájú részecskéinek atommagokkal történő ütközése során keletkezik, és nagyon gyorsan elektronra és két neutrínóra bomlik.

Sok instabil elemi részecske detektálható nagyenergiás gyorsítóknál atommagok ütköztetésekor.

Az elemi részecskék keletkezésével és megszűnésével kapcsolatos érdekes témák egyike a valódi atomi részecskék és a nekik megfelelő *antirészecskék*, illetve az *anyag – antianyag* viszonya.

A pozitron születése: a párkeltés

A pozitron az elektron ikertestvére: tömege akkora, mint az elektroné, töltése az elektronével ellentétes. Ezért a pozitront pozitív elektronnak is nevezik. A pozitron nem fordul elő természetes körülmények között stabilan. A pozitronok ritkán jönnek létre, és mindig az ikertestvéreikkel, az elektronokkal együtt. A folyamatot, amelyben a pozitron és elektron egyszerre létrejön párkeltésnek nevezzük. A párkeltés általában úgy történik, hogy egy γ -kvantum atommagba ütközik, és az ütközéskor a γ -kvantum eltűnik, és pozitron elektron-pár keletkezik. A párkeltés energiamérlegét így írhatjuk fel:

$$hf = 2m_0c^2 + U_+ + U_-$$

ahol hf a párkeltő γ -kvantum energiája, $2m_0c^2$ a keletkező pozitron és elektron nyugalmi energiájának összege, U_+ illetve U_- a pozitron, illetve az elektron mozgási energiája a párkeltés után. Minthogy az elektron nyugalmi energiája

$$m_0c^2 = 0,51\text{MeV}$$

azért ahhoz, hogy egy γ -kvantum elektron-pozitron párt hozzon létre a γ -kvantum energiája legalább

$$hf_0 = 2m_0c^2 = 1,02\text{ MeV}$$

kell legyen. Ennek megfelelően a γ -kvantum frekvenciájának bizonyos $\nu\nu_0$ -nál nagyobbnak kell lennie, tehát kell, hogy

$$f - f_0 = \frac{2m_0c^2}{h} = 2,45 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}$$

legyen. Ez a követelmény másként azt jelenti, hogy párkeltés csak olyan γ -kvantumokkal lehetséges, amelyeknek hullámhossza

$$\lambda < \lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 1,22 \cdot 10^{-10}$$

Látjuk tehát, hogy csak az igen rövid hullámhosszúságú γ -sugárzás tud párkeltést létrehozni. A párkeltés energiamérlegéből az is kiderül, hogy minél rövidebb a γ -kvantum hullámhossza, annál

több energia marad főlöslegben a párkeltés után, tehát annál nagyobb mozgási energiája lesz a létrehozott elektron-pozitron párnak.

A „megsemmisülési” sugárzás

Van a párkeltéssel ellentétes irányban végbemenő folyamat is: egy pozitron és egy elektron összeütközik, az ütköző pár eredeti formájában eltűnik és két γ -kvantum jelenik meg. A két γ -kvantum magával viszi az eltűnt részecskepár energiáját és impulzusát. Abban az esetben, ha a két (pozitív, illetve negatív) elektron ellentétes irányból jön, és úgy ütközik össze, akkor a két γ -kvantum is ellentétes irányba lép ki. Mindegyik γ -kvantum energiája

$$hf = m_0c^2 + U$$

ahol U a pozitív, illetve e negatív elektron mozgási irányát jelöli. A párképződéssel ellentétes folyamatot *megsemmisülésnek* (annihilációnak), a kibocsátott fotonokat *megsemmisülési sugárzásnak* szokták nevezni. Az elnevezés nem szerencsés, mert a két részecske anyaga nem semmisül meg! Csupán az történik, hogy az ütközés során az anyag egyik formájából egy másik formába alakul át. A pozitív és negatív elektronban koncentrált anyag az ütközés után két γ -foton formájában jelenik meg. A γ -fotonok éppen úgy, mint az őket keltő pozitív és negatív töltésű részecskék, anyagi tulajdonságokkal rendelkeznek.

Antirészecskék

Míthogy a pozitront az elektronnal ellentétes töltése miatt szokás antielektronnak is nevezni. Másként a pozitron az elektron *antirészecskéje*. A Dirac-elmélet – amely a pozitron létezését már jóval felfedezése előtt feltételezte – arra jutott, hogy majdnem minden elemi részecskének megvan az „anti-” megfelelője. A Dirac-elmélet következtetése ismételtlen beigazolódtott, amikor 1955-ben kísérletileg is kimutatták, hogy a protonnak is van antirészecskéje az *antiproton*. Az antiproton negatív elemi töltésű és a proton tömegével megegyező részecske.

A proton-antiproton ikerpár létrehozásához óriási energia szükséges. Ahhoz ugyanis, hogy egy részecske ilyen ikerpárt létesítsen, legalább az ikerpár nyugalmi energiájával azaz

$$E = m_0c^2 = 1,87 \cdot 10^{-3} \text{ MeV}$$

energiával kell rendelkeznie.

A neutron antirészecskéjét – az *antineutront* – is sikerült kísérletileg igazolni. A neutronnak nincs töltése, tehát az antineutronnak sincs. Az ellentét a neutron és antineutron között a mágneses viselkedésben nyilvánul meg. A neutronok – más elemi részecskékhez hasonlóan – saját impulzusmomentummal azaz spinnel rendelkeznek. A neutronok impulzusmomentuma $\frac{1}{2}$. A spinhez kapcsolódóan a neutron kis mágnesként is viselkedik, a neutronnak mágneses momentuma is van. Mind a mágneses momentum, mind az impulzusmomentum vektormennyiség. A neutron esetében a spin és a saját mágneses momentum ugyanabba az irányba mutat, az antineutron esetén azonban ezek a vektorok ellenkező irányúak.

Az antianyag

Az antianyag elnevezés félreértésre adhat okot, hiszen az *anti*- előtét szó azt a látszatot keltheti, mintha az anyaggal ellentétes valamiről lenne szó. Pedig az antianyag is anyagot jelöl, és pedig olyan anyagot, amelynek atomjai antirészecskékből épülnek fel.

Az antirészecskékből felépített atomot – ha tetszik – antiatomnak is nevezhetjük. Ha például egy (negatív töltésű) antiproton és az őt körülvevő (pozitív töltésű) pozitron alkot atomot, akkor antihidrogénatomról beszélünk.

Komplikáltabb atomokat úgy képzelhetünk el, hogy annak atommagjuk antiprotonokból és antineutronokból (tehát antinukleonokból) áll és ezt az antimagot pozitronfelhő veszi körül. Laboratóriumban, kismennyiségben már sikerült antiatomokat előállítani.

Az anyag és antianyag viszonya

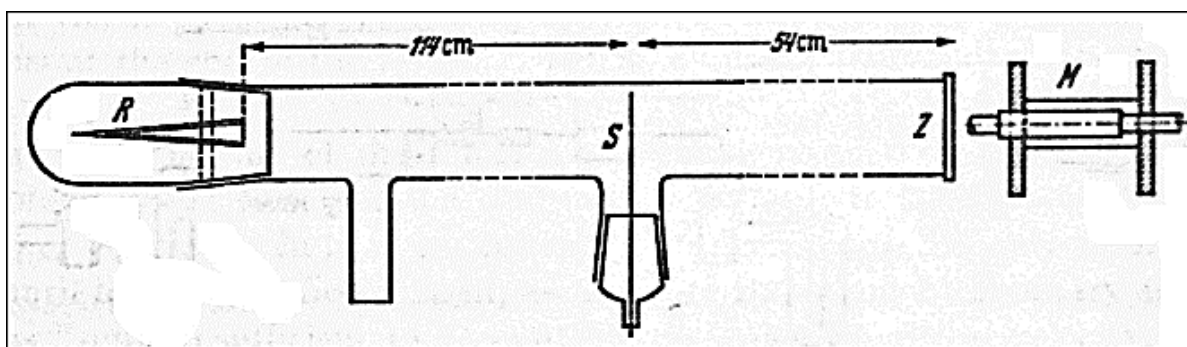
Ha elektronok pozitronokkal találkoznak, eredeti formájukban megsemmisülnek és a tömegükkel ekvivalens energia formájában szétsugárzódnak. Ilyen értelmű megsemmisülés jön létre akkor is, ha nukleon antinukleonnal találkozik. Ilyenkor a nukleonok és antinukleonok elpusztulnak. Tehát olyan keverékben, amely anyagot és antianyagot is tartalmazna, rendkívül intenzív fizikai folyamat indulna meg, amely végül is az egyik fajta győzelmével végződne. Ha ugyanis a feltételezett keverékben az egyik anyagfajta fölöslegben volna jelen, akkor az összes ikerpár szétsugárzása után ez a fölösleg megmaradna. A kétféle anyag tehát nem tűri egymást. Így például a Földön, vagy egy csillagban nem alakulhat ki tartósan olyan állapot, amelyben anyag és antianyag egyszerre létezik. Az esetleges véletlen keverékből is – pillanatokon belül – csak a többségben lévő anyagfajta maradna meg.

Elképzelhető azonban, hogy világegyetem tőlünk távol eső részeiben vannak olyan tartományok, ahol az anyag nem a nálunk ismert formában, hanem antianyagként létezik. Erről azonban biztonsággal semmit sem mondhatunk. Ennek oka az, hogy a távoli csillagok anyagának összetételére csak spektroszkópiai vizsgálat alapján következtethetünk. Az antianyagok spektruma azonban semmivel sem különbözik a szokásos atomok spektrumától. Az atomok és antiatomok által kibocsátott fény frekvenciája ugyanis elektron-, illetve pozitron héjainak energia változásától függ, ami az atomok és antiatomok esetében egyforma. A csillag spektrumából meg lehet állapítani, hogy milyen elemek fordulnak elő a csillagban, de azt, hogy az elemek atomjai a nálunk ismert állapotban vannak-e vagy pedig antiállapotban, a spektroszkóp nem tudja kimutatni.

A MAGFIZIKA MELLÉKLETEI

MF1. Érdekességek a Rutherford-kísérlettel kapcsolatban

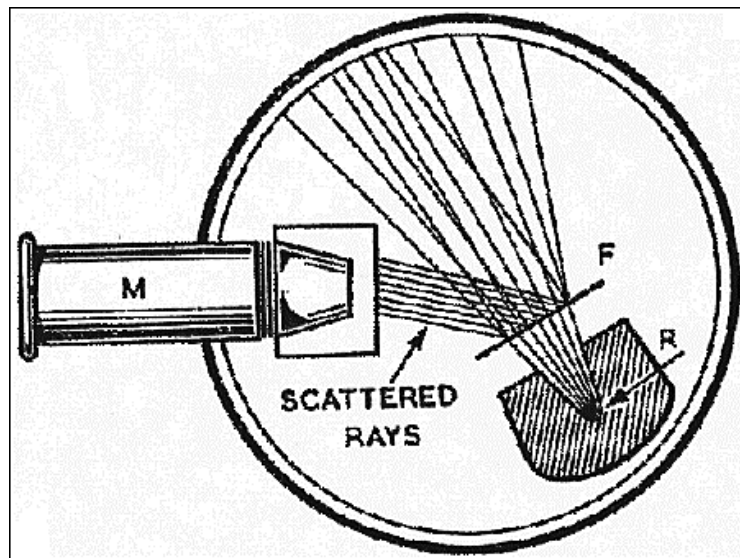
E. Rutherford 1906-ban a radioaktív sugárzások, köztük az α -sugárzás természetét kutatta. Ennek során igazolta, hogy a sugárzást pozitív töltésű részecskék mozgása jelenti. Megállapította továbbá, hogy a sugárzás jellemzői változnak, ha anyagokon halad keresztül, pl. a levegőrétegen keresztülhaladva a jól határolt sugárzás szóródik és intenzitása a légréteg vastagságával arányosan csökken. A sugárzás áthaladását az anyagon úgy mutatta ki, hogy a sugárzás feltételezett útjába fluoreszkáló anyaggal bevont ernyőt helyezett, ami felvillanással jelezte minden radioaktív részecske becsapódását. Egyik fiatal munkatársa Hans Geiger a különböző anyagokkal végzett vizsgálatokhoz – a levegő hatásának kiküszöbölésére – speciális zárt berendezést készített, amiben helyet kapott a sugárforrás, a vizsgált anyag és a sugárzás részecskéinek becsapódását jelző szcintillációs ernyő. A berendezésből a kísérletek előtt kiszivattyúzták a levegőt. Az eszköz vázlatos rajza Geiger cikkéből származik.



Rutherford és Geiger kezdeti kísérleti berendezése az eredeti közleményből

A csekély mennyiségű rádiumot tartalmazó *R* preparátumot a vákuumozható cső bal végéhez csatlakoztatott ólom kapszula tartalmazta, amiből a sugárzás egy vékony résen keresztül a lépett ki a cső tengelyében. A vákuumcső másik végét a cinszulfid réteggel bevont szcintillációs ernyő (*Z*) zárta le. A cső középső részén jól tömített üvegdugós csatlakozás tette lehetővé, hogy a cső hosszában terjedő sugárnyaláb útjába különböző vékony anyagmintákat *S* helyezzenek el. Különböző anyagokkal (pl. csillámlemez, alumíniumfólia, aranyfólia) kísérleteztek. Ezen vizsgálatok közül a mindössze néhány atomréteg vastagságú aranyfóliával végzett mérések hozták meg a nem várt igazi eredményt. A gyenge sugárforrásból nagy sebességgel kilépő α -részecskék keresztülhaladva a fólián elérték az ernyőt. A becsapódó részecskék mindegyikét egy-egy felvillanás jelezte az ernyőn, amit jól lesötétített laborban kívülről, az *M* mikroszkópon keresztül lehetett megfigyelni. A kísérlethez legalább két személyre volt szükség. Az egyik személy a lesötétített laborban figyelte a mikroszkópon keresztül az ernyőre érkező felvillanásokat és hangosan jelezte a kint elhelyezkedő társának a becsapódás pontos helyét. Ez a munka meglehetősen fárasztó volt, mert hosszú tartós figyelés kitartó koncentrációt kívánt, ami azzal kezdődött, hogy a megfigyelőnek már a mérés kezdete előtt egy órával a teljesen lesötétített laborban kellett szoktatnia a szemét a sötétséghez. A laboron kívül elhelyezkedő segítő szerepe az adatok rögzítése volt. Rutherford és két munkatársa, (asszisztense H. Geiger és a később hozzájuk csatlakozó Ernest Marsden) részben igazolták Rutherford előzetes

várakozását arra vonatkozóan, hogy a sugárzás részecskéi szinte akadálytalanul tudnak keresztülhatolni az anyagokon. (Rutherford JJ. Thomson atommodellje alapján végzett számításokból arra a következtetésre jutott, hogy a modellben feltételezett pontszerűnek tekinthető negatív töltésű kis tömegű elektronok és az azokat beágyazó viszonylag nagy kiterjedésű pozitív töltéssel nem befolyásolhatja számottevően a nagy tömegű és nagy sebességű α -részecskék mozgását.) A gondosan kísérletező munkatársak azonban észrevették, hogy a várakozással ellentétben elhanyagolható számban, de vannak részecskék, amelyek valamilyen ismeretlen hatásra lényegesen eltérnek eredeti mozgásirányuktól. Az első meglepő észleléseket több éves szisztematikus kutatómunka követte, ami igazolta a kezdeti tapasztalatokat, kimutatva, hogy ritka eseményként előfordul olyan is, hogy a részecskék „visszapattannak” a fóliáról. Ez utóbbi jelenség mennyiségi vizsgálatára az eredeti mérőberendezés már nem volt alkalmas, így új eszközt készítettek. Az új kísérleti berendezés eredeti rajzát az ábra mutatja. A lényeges újítást az jelentette, hogy a vákuumcsövet hengeres kamrára cserélték, ahol fix helyet kapott az R sugárforrás, és az F arany-fólia. Az észlelő mikroszkóp a tárgylencséje elé rögzített szcintillációs ernyővel benyúlt a vákuumtérbe és irányát széles szögtartományban lehetett változtatni. Érdeemes megjegyezni, hogy a fizika tankönyvekben általában ez utóbbi eszköz sematikus ábrája szerepel.



Az aranyfólián nagy szögben szóródó részecskék megfigyelésére szolgáló berendezés

A kezdeti eredmények után Rutherford és munkatársai közel 6 éven keresztül vizsgálták a jelenséget és csak a biztos kísérleti adatok és az azokat magyarázó számítások összhangjának megtalálása után publikálták eredményeiket, amely az atomról alkotott új elképzelésre (Rutherford-féle atommodell) tett történelmi javaslatot.

[Vissza >>>](#)

MF2. Magerők (emelt szintű kiegészítő anyag)

Amellett, hogy a magerők alapvető tulajdonsága a rövid hatótávolság, és a nagyon erős vonzó hatás, érdemes néhány további tulajdonságukat is megemlíteni, mert az atommagok tulajdonságainak megértésében fontosak lehetnek.

Röviden összefoglalva, a magerő:

- rövid hatótávolságú (1-2 fm, nagyjából 2,5 fm után exponenciálisan csökken)
- nagyon erős és csak a nukleonok között hat, az elektronok nem érzik. (a protonok közötti elektrosztatikus kölcsönhatásnál két nagyságrenddel nagyobb, ebből következik, hogy nagyjából száz protonból álló magok létezhetnek)
- töltésfüggetlen (neutron-neutron, illetve proton-proton és proton-neutron kölcsönhatásban ugyanolyan erősségű)
- telítésbe menő (A mag nukleonszámának növekedésével egy ideig növekszik, azután azonban már állandó marad az egy nukleonra ható erő. Ez lényegében a rövid hatótávolság következménye, a magban lévő nukleon nem érzi minden más magbéli nukleon hatását.)
- nagyon kis távolságoknál erősen taszító. (nagyjából 0,4-0,5 fm alatt)
- a magerőtér nem centrális jellegű, átlagtérrel és potenciáldobozzal vehető figyelembe
- a magerők spinfüggőek (ezt mutatja, hogy csak az azonos spinbeállású deutron mag létezik, ellentétes nem)

Végül érdemes megemlíteni, hogy korábban (1970-előtt) a magerőket az erős kölcsönhatás közvetlen megnyilvánulásának tekintették, ami az atommagban a protonokat és a neutronokat együtt tartja. Amikor kiderült, hogy a protonok és a neutronok is részekből (kvarkokból) állnak, akkor az erős kölcsönhatást a kvarkokat összetartó erőként értelmezték. A kvarkokat összetartó erő hozza létre a stabil protont és neutront. A stabil kvark csoportok az erős kölcsönhatást kifelé árnyékolják, ilyen hatás alig mutatnak. A magerőt az erős kölcsönhatásnak ez a kicsiny maradéka alkotja. A kémiából származó hasonlattal a magerők az erős kölcsönhatásnak olyan maradványai, mint amilyenek a semleges atomok között fellépő Van der Waals-erők a töltött részecskék közötti elektrosztatikus erőkhöz képest.

A magerőt, bár kétségtelen, hogy az erős kölcsönhatás következtében jön létre, nem azonosíthatjuk magával a kölcsönhatással.

[Vissza >>>](#)

MF3. A Weizsäcker-formula (tanári háttéranyag)

Az atommagok energiájának becslésére jól használható a Weizsäcker-féle félempirikus formula:

$$E(A, Z) = -\varepsilon_o A + \varepsilon_F A^{\frac{2}{3}} + \varepsilon_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \varepsilon_P \frac{(A - 2Z)^2}{A} - \varepsilon_{PP} \delta A^{-\frac{3}{4}}$$

A formula tömegszám és rendszám függő tagjainak hatványkitevői, mint látni fogjuk, különböző magmodellekből adódó elméleti megfontolások alapján kaphatók meg. Az első három tag az un. cseppmodellre alapozható, ahol csak klasszikus fizikai analógiákat, illetve elektrosztatikai törvényeket veszünk figyelembe. A negyedik és ötödik tag megértéséhez a magot független részecskék rendszereként képzeljük el és a rá vonatkozó kvantumfizikai törvényeket vesszük figyelembe. A félempirikus jelző azt jelenti, hogy az összefüggés nem tisztán elméleti levezetés eredménye, mert az ε_o , ε_F , ε_C , ε_P , ε_{PP} tényezőket a kötési energiák mért értékéhez illesztve határozták meg. A kísérleti eredmények szerint:

$$\begin{aligned} \varepsilon_o &= 15,75 \text{ MeV} = 2,52 \text{ pJ}; \quad \varepsilon_F = 17,8 \text{ MeV} = 2,85 \text{ pJ}; \quad \varepsilon_C = 0,71 \text{ MeV} = 0,11 \text{ pJ}; \quad \varepsilon_P \\ &= 23,7 \text{ MeV} = 3,8 \text{ pJ}; \quad \varepsilon_{PP} = 34 \text{ MeV} = 5,44 \text{ pJ}; \end{aligned}$$

A δ tényező páros-páros magok esetén 1, páratlan-páratlan esetén -1, páratlan A esetén pedig 0.

A következőkben a formulát fokozatosan építjük fel, miközben utalunk az egyes tagok értelmezéséhez szükséges magmodellekre is.

Megjegyzés:

- A formula tárgyalása különböző részletességgel tehető meg. Legegyszerűbben az elméleti háttér ismertetése nélkül a képlet közlésével tárgyalható, ekkor az egyes tagok szorzóit az empirikus illesztésre hivatkozva adhatjuk meg. A formula alapján diszkutálhatjuk a magok energia-eloszlását a rendszám és a tömegszám függvényében. A képlet bevezetéséhez azonban hozzákapcsolhatjuk a magmodellek egyszerű ismertetését is.

A cseppmodell alapján értelmezhető tagok

Hofstädter elektronokkal bombázott atommagokat, és megállapította, hogy az atommagok sugara az $R = r_o A^{\frac{1}{3}}$ összefüggéssel adható meg, ahol $r_o \approx 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ fm}$. A Hofstädter által megállapított összefüggés egyben azt is jelenti, hogy a maganyag sűrűsége jó közelítéssel állandó, hiszen a mag térfogata arányos a tömegével. A sűrűség tehát független attól, hogy mekkora atommagról van szó. Ez a tulajdonság emlékeztet a vízcseppekre, amelyek sűrűsége szintén független a csepp nagyságától. A sűrűség mérettől való függetlensége a magerők telítési tulajdonságának következménye. Amennyiben ez nem így lenne, akkor a mag minden nukleonja kapcsolatban lenne az összes másikkal, így a mag teljes energiája nem a nukleonok számával, hanem a lehetséges párkölcsönhatások $\frac{A(A-1)}{2}$ számával lenne arányos.

A folyadékcseppek (vízcseppek) belsejében a molekulák környezete azonos és egy molekula kiszakításához a csepp méretétől függetlenül ugyanakkora energia szükséges (a víz forráshője független attól, hogy mekkora vízmennyiséget forralunk). Ennek analógiájára úgy képzelhetjük, hogy a magban a nukleonok valamilyen átlagos potenciáltérben vannak. Emiatt a mag energiája első közelítésben az:

$$E(A) = -\varepsilon_0 A$$

összefüggéssel adható meg. A közelítő gondolatmenet csak az energia és a tömegszám közötti kapcsolat jellegének meghatározására ad útmutatást, az ε_0 tényező értékét csak a kísérleti eredményekkel való összevetés alapján határozhatjuk meg. Érdekes azonban előbb a közelítést pontosítani. A folyadékcsepp analógia figyelmeztet bennünket a felület hatására. Tudjuk, hogy a folyadék felszínén az atomok energiája nagyobb, mint a folyadék belsejében, emiatt a folyadék felszíni sűrűsége kisebb, mint a folyadéktömegé. Hasonló hatás érvényes a maganyagra is. A határhoz közeli nukleonok energiája nagyobb a mag belsejében lévőkénél és a mag határán is fokozatosan és nem élesen csökken a sűrűség zérusra.

A magenergia kifejezésében ezt a hatást a felületi atomok többlet energiájának hozzáadásával vehetjük figyelembe. A felületi nukleonok száma arányos a mag felületével, azaz a magsugár négyzetével, tehát $A^{\frac{2}{3}}$ -nal. Következésképpen a magenergia felületi energiával korrigált alakja:

$$E(A) = -\varepsilon_0 A + \varepsilon_F A^{\frac{2}{3}}$$

Az ε_F tényező most sem határozható meg további ismeretek felhasználása nélkül.

A magenergia közelítésének következő lépésében azt kell figyelembe venni, hogy a magban Z számú töltött részecske, proton, is van. A mag össztöltése $Q = Zq$, ahol $q = 1,6 \cdot 10^{-19} C$, a proton töltése. Az energiát a térfogatában egyenletesen feltöltött gömb elektrosztatikus energiájával becsülhetjük:

$$E_C = 0,6k \frac{Q^2}{R} = 0,6k \frac{(Zq)^2}{R}$$

Az eredmény mutatja, hogy a mag elektrosztatikus energiája arányos $\frac{(Zq)^2}{R} \approx \frac{(Zq)^2}{A^{\frac{1}{3}}}$ -val, pontos értéke azonban eltér a töltött gömb energiájától. Eddigi gondolatmenetünknek megfelelően a magenergia közelítő formuláját a következőre módosíthatjuk.

$$E(A, Z) = -\varepsilon_0 A + \varepsilon_F A^{\frac{2}{3}} + \varepsilon_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}$$

Ebben a tagban a tömegszám mellett a rendszám is megjelenik.

Megjegyzés:

- A Coulomb-energiát gyakran interpretálják úgy, hogy a protonok többletenergiáját a protonok közötti $Z(Z-1)$ párkölcsönhatás $E_C = Z(Z-1)k \frac{q^2}{R}$ összenergiájával közelítik. Majd a protonok átlagos távolságára $R \approx A^{\frac{1}{3}}$ közelítéssel élnek és a $Z(Z-1)$ szorzat második tényezőjében a -1 tagot elhanyagolják. Természetesen ez a módszer is

használható, de véleményünk szerint sokkal több magyarázatot igényel, mint a gömb alakú mag potenciális energiájának közlése, illetve alábbi kiszámítása.

- Az egyenletesen feltöltött gömb energiájának kiszámítása szép elektrosztatikai feladat, megfelelő előképzettségű osztályokban nagyon tanulságos lehet. Az energia kiszámításához a tér $\rho_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$ energiasűrűségét kell integrálni a teljes térre. A feladat elvégzéséhez a teret bontsuk két részre, a gömbön belüli és kívüli részre és írjuk fel a térerősséget. A térerősség mindkét térrészben gömbszimmetrikus és radiálisan kifelé mutat:

$$E(r) = \begin{cases} k \frac{Q}{R^3} r, & \text{ha } r \leq R \\ k \frac{Q}{r^2}, & \text{ha } r \geq R \end{cases}$$

Ennek megfelelően az energiasűrűség:

$$\rho_e(r) = \begin{cases} \frac{1}{32\pi^2 \varepsilon_0} \frac{Q^2}{R^6} r^2, & \text{ha } r \leq R \\ \frac{1}{32\pi^2 \varepsilon_0} \frac{Q^2}{r^4}, & \text{ha } r \geq R \end{cases}$$

A tér gömbszimmetriája miatt a térfogati integrál egyetlen változó, a középponttól vett távolság, szerinti integrálra vezethető vissza:

$$E_C = \int_0^\infty \rho_e 4r^2 \pi dr = \int_0^R \frac{1}{32\pi^2 \varepsilon_0} \frac{Q^2}{R^6} r^2 4r^2 \pi dr + \int_R^\infty \frac{1}{32\pi^2 \varepsilon_0} \frac{Q^2}{r^4} 4r^2 \pi dr$$

Rendezve és kiintegrálva

$$E_C = \int_0^R \frac{1}{8\pi \varepsilon_0} \frac{Q^2}{R^6} r^4 dr + \int_R^\infty \frac{1}{8\pi \varepsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} dr = k \frac{Q^2}{2R} \left(\frac{1}{5} + 1 \right) = 0,6k \frac{Q^2}{R}$$

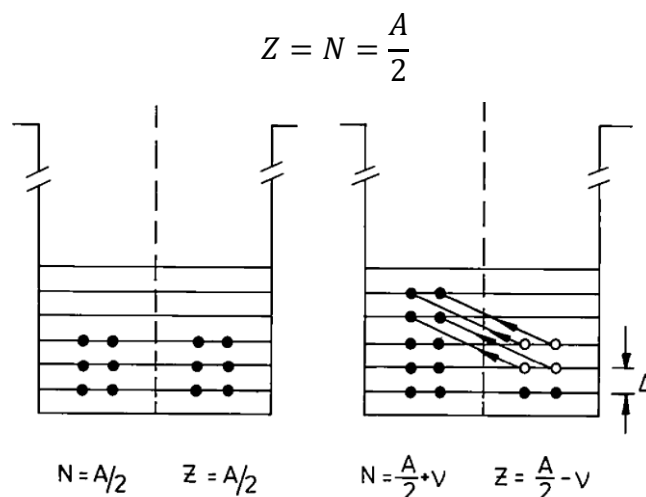
A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy ez az összefüggés sem illeszthető úgy, hogy minden atommag energiáját kellő pontossággal megadja.

A kvantumtulajdonságok hatása – az atommag héjmodellje

Az elektronburok tanulmányozása rámutatott arra, hogy az elektronok csak kvantált energiaszinteken helyezkedhetnek el az atommag körül. Az energia szintek kialakulása a bezártság következménye. A térben szabadon mozgó elektron energiája tetszőleges lehet. A mag átlagos potenciálterébe zárt protonok és neutronok esetén is érvényesül a „bezártság” hatása, mindkét nukleon típus csak meghatározott energiaszinteket foglalhat el a magban és mivel mind a protonok, mind a neutronok feles spinű részecskék, egy energiaszinten legfeljebb két részecske tartózkodhat². A különböző részecskék számára, tehát a protonok és neutronok számára is a betölthető energiaállapotok külön-külön alakulnak ki. Úgy képzelhetjük, mintha

² Létezhetnek ún. degenerált energiaszintek, amelyek esetén több állapothoz is ugyanakkora energia tartozik. Az ilyen energiaszinteken kettőnél több részecske is lehet. Ettől most eltekintünk, mert a gondolatmenet lényege könnyen módosítható a degenerált szintek figyelembevételével is.

az átlagtér alkotta potenciálgödörben a protonok és a neutronok számára elkülönítve állnának rendelkezésre az energiaszintek, amikre, bár nagyságuk ugyanakkorra, az egyik esetben csak protonok, a másikonban csak neutronok kerülhetnének. Ez azt jelenti, hogy az ugyanakkora tömegszám mellett megvalósuló különböző proton és neutrons számú magok ($A = Z + N$) energiája a proton és neutrons szám eltérése miatt jelentősen különbözhet. Az ábra baloldali része mutatja, hogy a protonok és neutronok akkor kerülhetnek a legmélyebb energiaszintekre, ha



A baloldali ábrán a magban ugyanannyi proton van, mint neutron, mindkét nukleon ugyanaddig a szintig tölti be az energiaállapotokat. Nézzük, mi történik, ha a nukleonok számának (az A tömegszám) változatlanul hagyása mellett a protonok számát ν -vel csökkentjük, a neutronokét pedig ugyanannyival növeljük. Így a magban $N = \frac{A}{2} + \nu$ neutron és $Z = \frac{A}{2} - \nu$ proton lesz. A jobboldali ábra mutatja, hogy a betöltött protonszintek kisebb energiájúak lesznek, a neutronok azonban csak az eddig betöltött szint fölé kerülhetnek, így az új neutronok jobban növelik a mag energiáját, mint amennyire az eltűnő protonok csökkentik. Legyenek a neutronok és a protonok energiaszintjei az ábrának megfelelően azonosak és változzanak egyenközűen. A protonok számának növekedése miatt az energia, ahogyan az ábra mutatja

$$\Delta E = \nu \left(\Delta \frac{\nu}{2} \right)$$

Mivel $\nu = \frac{N-Z}{2}$, az energianövekmény:

$$\Delta E = \nu \left(\Delta \frac{\nu}{2} \right) = \frac{1}{8} (N - Z)^2 \Delta = \frac{1}{8} (A - 2Z)^2 \Delta$$

A magerők telítettsége miatt az atomtömeg növekedésével az átlagtér, amelyben a nukleonok elhelyezkednek, alig változik, a potenciálgödör mélysége a könnyű és nehéz magok esetén gyakorlatilag ugyanannyi. A nehéz magok esetén azonban a mag méretének növekedésével a nukleonok állóhullámainak hossza megnövekedik, így az energiaszintek közötti különbség csökken. A tapasztalat azt mutatja, hogy a magasabb energiájú magokban az energiaszintek sűrűbbek, ezért a kvantumos hatásokat is figyelembe vevő tagot a

$$\Delta E = \varepsilon_p \frac{(N - Z)^2}{A} = \varepsilon_p \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

Az energianövekményt megadó tagban az ε_p együttható most is a mérési eredményekhez való illesztésből adódik. Az indexben szereplő P a kvantumos hatásokat döntően megszabó Pauli-elvre utal. Ezt a tagot emiatt *Pauli-tagnak* is nevezzük.

A módosítás nyomán a Weizsäcker-formula már majdnem teljes alakban jelenik meg:

$$E(A, Z) = -\varepsilon_0 A + \varepsilon_F A^{\frac{2}{3}} + \varepsilon_C \frac{Z^2}{A} + \varepsilon_P \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

A paritásfüggő tag

Ennek a tagnak a magyarázata nehéz, első közelítésben akár el is hagyhatjuk. Az energia kifejezés paritás függő tagjának megjelenése a Pauli taghoz hasonlóan kvantumfizikai hatás következménye. Azonos térbeli pályán a neutronok és a protonok is ellentétes spinnel tartózkodhatnak. Ilyen esetben az állapotfüggvények erősen átfedik egymást, amit úgy értelmezhetünk, hogy a nukleonok közel tartózkodnak egymáshoz, így a közöttük fellépő magerő nagy, ami nagyobb kötési energiát eredményez.

Ez a hatás a különböző paritású magok esetén a következőképpen érvényesül:

- páros neutron és páros protonszámú (páros-páros) mag: a hatás erős, nincsen egyedül maradó nukleon
- páratlan neutron és páratlan proton számú (páratlan-páratlan) mag: A legmagasabb energiaszinten egyedül maradó neutron, illetve proton esetén ilyen hatás nincsen.
- páros proton (vagy neutron) és páratlan neutron (vagy proton) számú (páros-páratlan) mag: a az egyik típusú nukleonok közötti erős kötést a másik típusúak közötti gyengébb kötés kompenzálja.

Ennek következtében a paritásfüggő tag:

$$\Delta E = \varepsilon_{pp} \delta A^{-\frac{1}{2}}$$

ahol $\delta = +1$, ha a mag páros-páros, 0 ha páros-páratlan és -1 ha páratlan-páratlan. Az $A^{-\frac{1}{2}}$ tényezőt mérési tapasztalatok indokolják. (Megjegyezzük, hogy a kitevőben $-1/2$ helyett gyakran $-2/3$ szerepel.)

[Vissza >>>](#)

MF4. Tórium-emanáció radioaktív bomlásának vizsgálata ionizációs kamrával (szakköri, illetve emelt szintű mérőkísérletnek ajánlott)

A radioaktív bomlástörvény iskolai tanulmányozásához rövid élettartamú, veszélytelen, könnyen kezelhető izotópra van szükség. Ilyen anyag a gáz halmazállapotú tórium-emanáció, vagy „toron”. A toron a tórium bomlási sorának egyik közbülső tagja, ami minden különösebb beavatkozás nélkül szabadul fel a tórium-oxid tartalmú anyagokból.

A tanszer-kereskedelemben iskolai kísérletezés céljaira kapható preparátum felhasználásra készen kerül forgalomba. A rugalmas falú plastik flakonba zárt anyag a radioaktív 232-es tórium-izotóp porított oxidja. A ^{232}Th -oxid radioaktív feleződési ideje $1,4 \cdot 10^{10}$ év. A folyamatos bomlás eredményeként a flakonban jelen van a tórium-család többi eleme is, köztük a gáz halmazállapotú tórium-emanáció, ami tulajdonképpen a radon 220-as izotópja (^{220}Rn). A flakontól szorítóbilincsel lezárt műanyagcső vezet ki. A bilincset megoldva és a rugalmas flakont párszor megnyomva a radioaktív gáz kipumpálható.



FIGYELEM!

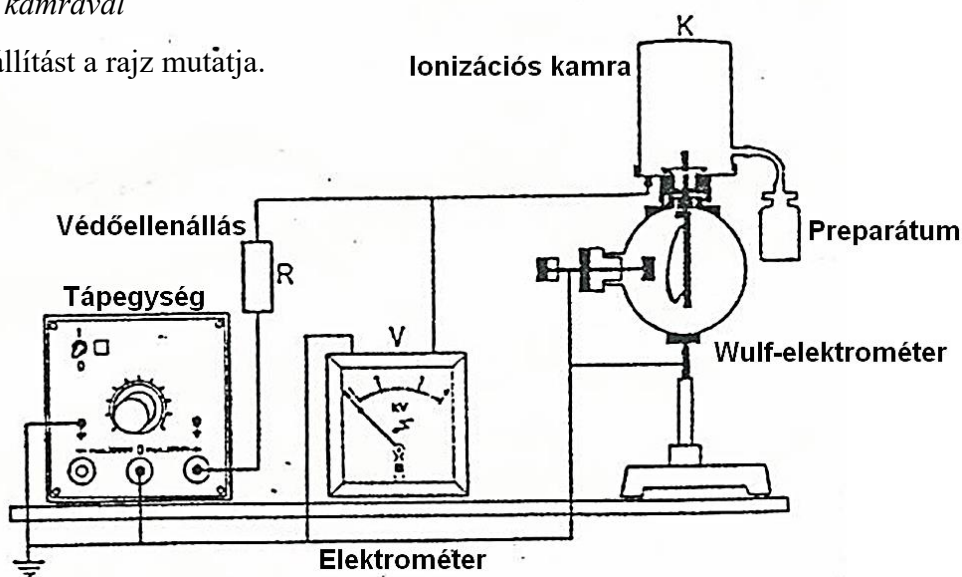
A radioaktív preparátummal óvatosan kell bánni! A műanyagflakont a toron kipumpálásának pillanatait kivéve mindig tartsuk légmentesen lezárva! A preparátumot tartalmazó flakont felbontani TILOS!

A flakon érintése után ne nyúljunk arcunkhoz, hajunkhoz, és a legrövidebb időn belül mossunk kezet!



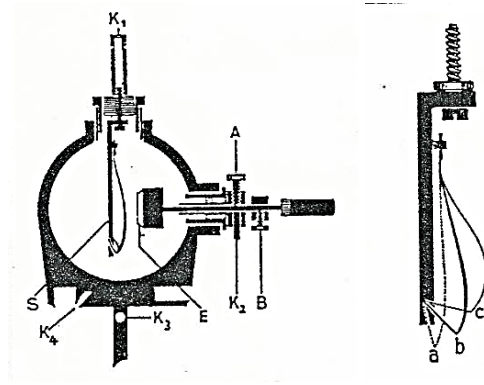
Mérés ionizációs kamrával

A kísérleti összeállítást a rajz mutatja.



Mérőeszközünk az érzékeny Wulf-féle elektrométer

Az elől üveglappal lezárt fémházba, a háztól elszigetelve, felülről nyúlik be egy vastagabb fémrúd, aminek felső vége az ionizációs kamrába belógó elektróda, alsó része pedig a speciális, érzékeny elektroszkóp egyik fegyverzete. A másik fegyverzet egy vékony, rugalmas fémszalag. Ez utóbbi felső pontja a rúdra van rögzítve, alsó pontját kvarc-szál köti lazán a rúdhoz. A fémszalaggal szemben a háztól elszigetelt földelt fémelektróda nyúlik be, aminek távolsága szabályozható. Ha a középső fémre és hozzá csatlakozó szalagra töltés kerül, a szalag a töltések taszítása miatt meggömbül, és egy adott töltésnél az elektródának ütközik és leadja a töltését, a kvarc-szál pedig visszarántja a kezdeti helyzetébe.



Ionizációs kamra

Az ionizációs kamra két részből álló hengeres fémdoboz. Alja egyszerű fémtányér, ami szigetelő műanyag gallérral támaszkodik az elektrométerre. A kamra másik része a tányérra illeszkedő, de arról könnyen leemelhető fémfazék. Oldalán rövid cső vezet ki, amire a preparátumot tartalmazó műanyagflakon kivezető csöve csatlakoztatható, így a radioaktív gáz közvetlenül a kamrába pumpálható. Az ionizációs kamra falát védőellenálláson keresztül nagyfeszültségű tápegységhez kapcsoljuk. A kamra fém fala így töltött elektródaaként működik. A másik elektróda a Wulf-elektrométer központi fémrúdjának a kamra közepébe belógó része (ami el van szigetelve a kamra falától)

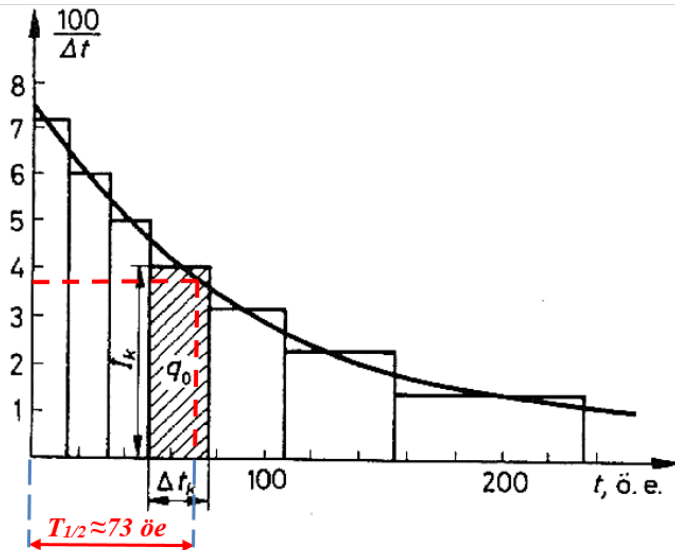
Nagyfeszültségű tápegység

Az ionizációs kamra feszültségellátását a nagyfeszültségű (3 kV) szabályozható tápegység biztosítja. A tápegység belső biztonsági ellenállása a kivehető maximális áramerősséget 2,5 mA-re korlátozza, így azt tanulók is biztonsággal használhatják. Az ionizációs kamra feszültségét sztatikus feszültségmérő műszer mutatja.

A mérőberendezés összeállítása után a Wulf-elektroszkóp elektródatávolságát állítsuk be 4-5 mm-re és adjunk kb. 2 kV feszültséget a kamrára! Az elektrométer fémházát, az oldalról benyúló elektródát földeljük. Pumpáljunk a kamrába, a flakon összenyomásával toront! A toron radioaktív sugárzása ionizálja a levegőt, és a képződő pozitív ionok az elektroszkópra taszítódnak, az elektroszkóp mérőszalagja ívesen egyre jobban kifeszül, majd hozzáérve az oldalról benyúló földelt elektródához, kisül. Egy pillanatra visszatér eredeti helyzetébe, de a radioaktív sugárzás által létrejött töltések hatására a folyamat kezdődik előlről. Mérjük és jegyezzük fel az elektroszkóp egymást követő kisülési közt eltelt $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots, \Delta t_n$

időtartamokat! Az időt nem szükséges stopperrel másodperc egységekben, sőt egyszerűbb a mérés, ha az időt metronóm-ütés egységekben mérjük (számoljuk a kiütések közti metronóm-ütések számát. Ez esetben a kísérlet végén stopperrel 10 metronóm-ütést lemérve meghatározzuk az ütések időtartamát és a mérés végeredményét már szabványos időegységben adhatjuk meg. Az elektroszkóp kisüléséhez mindig azonos q töltésnek kell összegyűlnie a központi elektródán. A mért Δt időtartamok reciproka az ionizációs árammal, az pedig az adott időintervallumba eső radioaktív bomlások számával arányos.

Ábrázoljuk grafikusan a mért időintervallumok reciprokát az idő függvényében! A kapott grafikon a preparátumban bomló magok számának időbeli csökkenését mutatja. Mivel a



bomlásesemények száma arányos a preparátumban lévő, még bomlás előtt álló atommagok számával, függvényünk a preparátum aktivitásának időbeli változását mutatja. A tórium-emanáció aktivitásának csökkenését tükröző mérési görbét az ábra mutatja. A metronómütés időegységek átszámításával a mérés jól visszaadja a toron felezési idejét ($T_{1/2} \approx 55 \text{ sec}$).

[Vissza >>>](#)

MF5. A radioaktív bomlás-függvény elméleti értelmezése (kiegészítő anyag)

A radioaktív bomlástörvény kísérleti tapasztalat, amit először Rutherford mért ki tórium-emanáció bomlására vonatkozóan, majd kis felezési idejű bomlások esetén mások is hasonló eredményekre jutottak. A kísérleti eredmények elméleti oldalról történő levezetése azonban szükséges volt ahhoz, hogy az exponenciális bomlás-törvényt a radioaktivitással kapcsolatban általános érvényűnek fogadjuk el.

Az elmélet abból a feltételezésből indul, hogy a radioaktív sugárzás atomi szinten véletlenszerűnek tekinthető. Sok hasonló radioaktív atommag esetén előre nem lehet megmondani melyik mag, mikor bomlik el. A bomlásesemények egymásra sincsenek hatással. Mivel N radioaktív magból álló mintában mindegyik magnak egyenlő esélye van a bomlásra, feltételezhetjük, hogy a dt időtartam alatt bekövetkező bomlásesemények dN száma arányos a bomlásra kész atomok N számának és a dt időintervallum szorzatával:

$$dN \sim Ndt$$

Az arányosságot az adott anyag bomlási folyamatára jellemző λ tényező (ún. bomlásállandó) bevezetésével egyenletté írhatjuk át:

$$dN = -\lambda Ndt$$

ahol a negatív előjel azt jelzi, hogy dN számú bomlásesemény következtében a még bomlásra váró magok száma csökken. A formula alapján a λ tényező is szemléletes értelmezést kap, megmondja, hogy dt idő alatt a radioaktív magok mekkora hányada bomlik el.

Középiskolás szinten a felírt egyenlőségből nem tudunk az egyszerű matematikai úton továbblépni, mert a differenciálegyenletek megoldása nem tananyaga a középiskolai matematikának.

Tehetséges diákokkal pl. szakkörön, differenciálegyenlet megoldása nélkül is eljuthatunk a radioaktív bomlás kinetikáját leíró exponenciális bomlástörvény felírásához. Vizsgáljuk meg a λ bomlásállandó és a kísérletileg mért $T_{1/2}$ felezési idő közötti kapcsolatot!

Ha a radioaktív sugárforrásban eredetileg N darab átalakulásra képes atom volt, akkor $T_{1/2}$ idő múlva (minthogy ez idő alatt az eredeti atomok egy része elbomlik) már csak

$$N(t) = \frac{N}{2^{t/T_{1/2}}}$$

elbomlatlan atom marad. A formula egyszerűen azt jelenti, hogy $t = T_{1/2}$ idő múlva az elbomlatlan atomok számának várható értéke $N(t) = N/2$ lesz, várható, hogy $t = 2T_{1/2}$ idő múlva az eredeti atomoknak már csak a negyede marad meg, és így tovább. A formula tetszőleges t időre megadja az elbomlatlan atomok várható számát.

Alakítsuk át a formulánkat! Az átalakításhoz a logaritmusfüggvény definíciójából adódó következő azonosságot használjuk fel:

$$\frac{1}{2} = a^{-\frac{\log 2}{\log a}}$$

ahol a tetszőleges pozitív szám. Ezzel a bomlási formulánkat $N(t) = Na^{-\lambda t}$ alakra írhatjuk át, ahol

$$\lambda = \frac{\frac{\log 2}{\log a}}{T_{1/2}}$$

Mivel a számértékére nincs megkötés, a gyakorlati számításoknál használt képletben válasszuk azt a természetes alapú logaritmus alapszámának: $a = e \approx 2,71$.

Ezzel a radioaktív bomlás időbeli folyamatát leíró formulánk:

$$N(t) = Ne^{-\lambda t}$$

ami megegyezik a fenti differenciálegyenlet megoldásával kapható függvénnyel.

A bomlásállandó és a felezési idő kapcsolatát pedig a

$$\lambda = \frac{\frac{\log 2}{\log 2,71}}{T_{1/2}} = \frac{0,7}{T_{1/2}}$$

összefüggés adja meg.

[Vissza >>>](#)

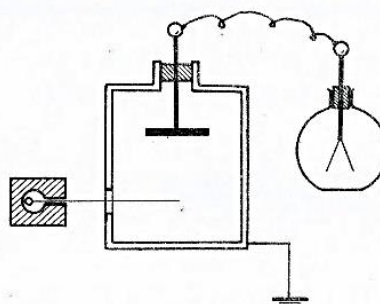
MF6. Ionizáló sugárzás észlelésére szolgáló mérőeszközök (GM-cső, ionizációs-kamra, ködkamra, szilárdtest nyomdetektor) egyszerűsített iskolai változatai, és működésük

Ionizációs kamra

Az ionizációs sugárzás intenzitását ún. *ionizációs kamra* segítségével lehet mérni. A kamra olyan földelt fém falú gáztartály, melyen vékony lemezből készült ablak van. A lemez vastagságát úgy választják meg, hogy azon a vizsgált ionizáló sugárzás át tudjon hatolni, és így a kamrában lévő levegő részecskéit ionizálja. A gáztartály belsejébe a faltól elszigetelt elektróda nyúlik be, ami érzékeny elektroszkóppal (elektrométerrel) van összekötve.

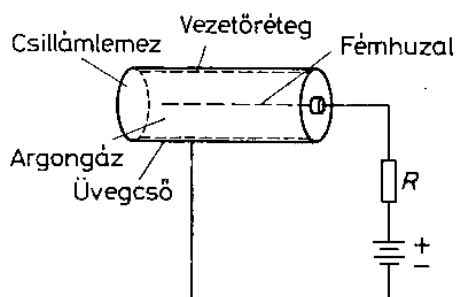
Ha az elektroszkópot feltöltjük, és a kamrában lévő gázban nincsenek töltött részecskék, az elektroszkóp állása nem változik, jelezve, hogy töltése állandó. Ha a tartályba ionizáló sugárzást vezetünk, akkora a keltett ionok az elektróda töltését fokozatosan semlegesítik. Az elektrométer csökkenést mutat. A csökkenés sebességét (például skálaosztás per szekundum egységben) meg lehet mérni, és ezzel a sugárzás intenzitása jellemezhető.

A tórium-emanáció bomlásának folyamata ionizációs kamrával jól mérhető (lásd [MF4.](#) mellékletet).



Geiger–Müller-féle számlálócső (GM-cső)

A GM-cső vékony falú fémhenger melynek tengelyében – a hengertől elszigetelten – vékony drót van kifeszítve. A csövet az egyik végét vékony muszkovit csillámlemezről készített „ablak” zárja le, ami a radioaktív sugárzás részecskéi számára könnyen átjárható. A csövet alkalmas gázkeverékkel töltik meg, a gáz döntő része általában argon.



A GM-cső működése a következő: A hengert földelik és a szádra 1000 V nagyságrendű feszültséget adnak úgy, hogy a kisülés magától még éppen ne következzen be, csak ionizáló sugárzás hatására. A csőbe jutó ionizáló részecske töltéslavinát indít meg az elektródák között. Hogy az eszközzel az egyes részecskéket is érzékeltetni tudjuk, az argonhoz olyan adalékokat adnak, amelyek a kisülést gyorsan, kb. 10^{-3} s alatt leállítják. így a GM-

csővel viszonylag kis sugárintenzitások ($10\text{-}10^2$ részecske/s) is mérhető. A GM-csövet rendszerint összekapcsolják elektronikus erősítővel is, ami számlálószervezetet vagy hangszórót működtet.

Megjegyzendő, hogy a kisülést a radioaktív részecske csupán elindítja, az áramlökés amplitúdójából a részecske energiájára nem lehet következtetni.

Iskolai körülmények között a GM-cső jól használható az általános háttérsugárzás, illetve gyenge radioaktív források sugárzásának kimutatására, A különböző radioaktív sugárzások áthatoló képességük alapján történő megkülönböztetésére.

WWW

Garamhegyi Gábor: [Safecast-projekt megvalósítása az isaszegi Gábor Dénes Gimnázium és Szakgimnáziumban](#), in. Fizikai Szemle, 2019/1, 30-36. oldal



Ködkamra

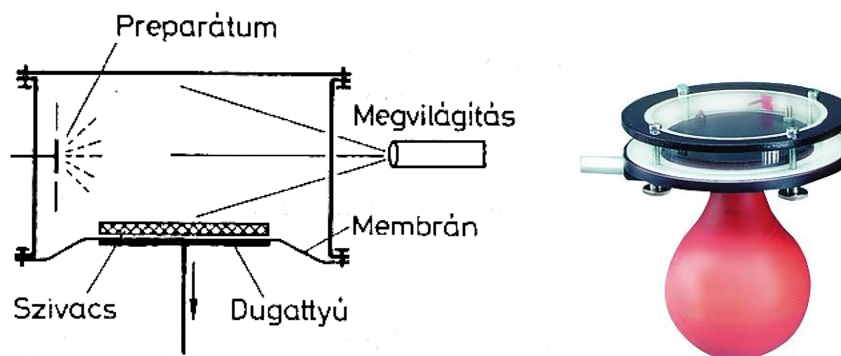
A ködkamra túltelített gőzt tartalmazó, üveglakkal rendelkező zárt edény, amiben a bejutó radioaktív részecskék pályáját vékony ködcsíkok rajzolják ki. A jelenség oka az, hogy a radioaktív részecskék ionizálják a kamrában lévő gázmolekulákat, Mivel az ionok kondenzációs magok, a túltelített gőz az ionokra apró folyadékcseppek formájában kicsapódik, így a radioaktív részecskék pályája megfigyelhetővé válik.

A ködkamrában a különböző radioaktív részecskék pályája megkülönböztethető. Az α -részecskék pályája összefüggő ködfonal, a β -részecskék nyoma halványabb és vékonyabb. A γ -kvantumok közvetve, a meglökött elektronok által ionizálnak, nyomvonaluk ennek megfelelően szétágazó.

A ködkamrának többféle változata létezik, aszerint, hogy a kamrában a gőz túltelítettségét milyen módszerrel valósítják meg.

Expanziós ködkamra (Wilson-kamra)

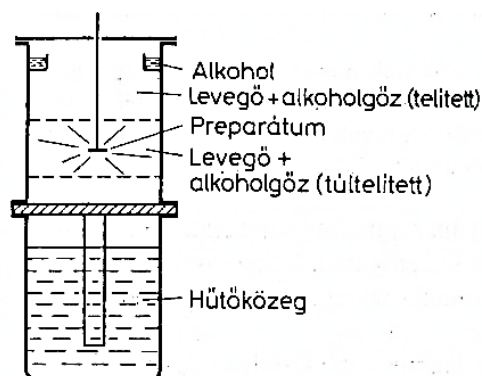
A kamra egyik végét dugattyú zárja le. Ha a gázt a dugattyú elmozdításával kitágítjuk, a gáz lehül és a benne lévő gőz túltelítetté válik. A felesleges gőz ködcseppek formájában lecsapódik. A túltelített gőz elsősorban az ún. *kondenzációs magokra* csapódik le. Ilyen kondenzációs magok a radioaktív sugárzás által keltett ionok is. A kicsapódó ködcseppek jelzik az ionizáló részecske pályáját. A Wilson-féle ködkamrának egyszerű iskolai változata is kapható. Itt a dugattyút egy csővel csatlakoztatott összenyomható gumilabda helyettesítheti. Először a gumilabdát összenyomjuk, várunk egy kicsit majd hirtelen elengedjük. A kamra oldalán elhelyezett preparátumból sugárzás nyomvonalai ilyenkor figyelhetők meg.



Diffúziós ködkamra

A diffúziós ködkamrában állandó erő hőmérsékletgradiens biztosítja tartósan a gőz túltelítettségét. A kamra így hosszabb ideig működő képes, a radioaktív bomlásból származó részecskék pályáját folyamatosan figyelhetjük. Az eszköz két részből áll. A felső rész a tulajdonképpeni ködkamra, az alsó a hűtőközeget – folyékony nitrogént, vagy alkoholos szárazjeget – tartalmazó termosz. A kamra aljáról jóhővezető fémtuskó nyúlik a hűtőközegbe.

A felül üveglakkal ellátott kamrában alkohol párolog. A gőz a kamra felső meleg részéből diffundál az alsó, kb. mínusz 20 °C-ra hűtött rész felé. Az erős hőmérséklet gradiens eredményeként bizonyos magasságban az alkohol gőz túltelítetté válik. Ebben a magasságban helyezik el a preparátumot. A kamra érzékeny részében folyamatosan megfigyelhetők a töltött részecskék pályáját jelző ködfonalak. A szét diffundáló ionokat a kamrába beépített tisztító elektródákra kapcsolt elektromos térrel távolíthatjuk el.



Szilárdtest nyomdetektorok

Egyes ásványi anyagokban pl. csillámokban és egyes műanyagokban a behatoló radioaktív sugárzás ionizáló részecskéi pályájuk mentén roncsolódást hoznak létre. Ezek a roncsolt tartományok megfelelő marószerekkel eltávolíthatók, így a nyomok mikroszkóp alatt láthatóvá válnak. Az ilyen anyagokat nevezzük nukleáris nyomdetektoroknak. A nyomdetektorok segítségével a nyomrögzítés automatikusan (elektromos berendezés nélkül) történik. Ezért a nyomképet autoradiogramnak hívják. Az autoradiogramokat kémiai kezeléssel elő kell hívni. Ez az ún. *nyomfeltárás*. A nyomok kiértékelése ezután bármikor, egyszerű eszközökkel elvégezhető. Mivel a középiskolában végezhető magfizikai kísérletek közül a nyomdetektoros technika szinte az egyetlen, amely nemcsak tanári kísérletezést enged meg, hanem önálló tanulói munkát is.



A nyomdetektoros technikával végezhető tanulói kísérletekről részletes leírás található a Fizikai Kísérletek Gyűjteménye III. kötet, 95-109. old (szerk. Juhász András, Arkhimédész Bt – Typotex Kiadó, Budapest, 1996.)



[Vissza >>>](#)

MF7. A természetes és mesterséges radioaktivitás gyakorlati alkalmazásai

Kormeghatározás természetes radioaktív izotópok vizsgálatával

(Lehetőség a földrajzban tanultak és a fizikai ismeretek összekapcsolására)

Geológiaiormeghatározás

A Föld anyagának radioaktív sugárzása alapján elég megbízhatóan meg lehet határozni a Föld életkorát. Aormeghatározás az urán bomlási sorának ismertén alapul, és a régi kőzetek urán–ólom arányának vizsgálatával történik.

Egy urán tartalmú kőzetben (amely feltehetően a Föld szilárd kérgének kialakulása során képződött) nemcsak az urán, hanem az uráncsalád bomlási sorának minden tagja is jelen van. A család tagjai az ércben ún. radioaktív egyensúlyban vannak egymással. Ezen azt értjük, hogy minden elemből időegység alatt ugyanannyi bomlik el, mint amennyi keletkezik. Ez természetesen nem vonatkozik az őselemnek tekintett uránra és a sor végén álló ólomra. Az ólom mennyisége a kőzetben folyamatosan nő, hiszen már nem bomlik tovább, míg az urán fogy, mert nem kap utánpótlást. A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy a kőzetben időegység alatt annnyival nő az ólom mennyisége, mint amennyivel csökken az uráné. Kiszámítható, hogy 1 g tiszta uránból az első évben $3,9 \cdot 10^{11}$ atom bomlik el, és természetesen ugyanennyi ólom-atom keletkezik az érc urántartalmának minden grammjából. Ha tehát egy kibányászott őskőzetben meghatározzuk az urán- ólom arányt, azaz 1 g urántartalomra jutó ólom mennyiségét, kiszámolható, hogy a mért ólom képződéséhez mennyi időre volt szükség. Ez az időtartam tekinthető az kőzet korának.

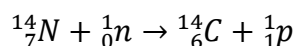
Természetes uránérccek urán – ólom arányából megállapították, hogy ezek az érccek kb. 3-4 milliárd évesek. Feltételezve, hogy a kőzetek a Föld felületi rétegének megszilárdulásakor képződtek és ólmot nem tartalmaztak, a szilárd Föld életkora a kőzetek korával egyezik meg.

Szén tartalmú szerves fossziliák korának meghatározása

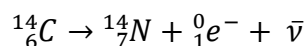
(Lehetőség a földrajzban tanultak és a fizikai ismeretek összekapcsolására)

Az élő szervezeteket alkotó molekulák egyik legfontosabb építő eleme a szén. A fotoszintetizáló növények a légköri széndioxidból kiválasztott szénatomokból építik fel a molekuláikat. A növényi anyagokból kerül a szén az állatok szervezetébe.

A szénnek három izotópja ismert. A szén-12 ($^{12}_6C$) és a szén-13 ($^{13}_6C$) stabil atommagok, míg a szén-14 ($^{14}_6C$) radioaktív izotóp, felezési ideje $T_{1/2} = 5735$ év. A tapasztalatok szerint a viszonylag rövid felezési ideje ellenére a légkörben lévő radioaktív szén koncentrációja nem változik. Ennek az a magyarázata, hogy a magasabb légkörben a kozmikus sugárzásban lévő neutronok és a nitrogén atomok ütközése során folyamatos képződik radioaktív szén.




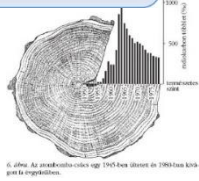
A radioaktív szén kémiai szempontból nem különbözik a stabil széntől, így a magas légkörben keletkező radioaktív szénből is képződik CO₂, ami a légkörben szétoszlik, és légköri arányának megfelelően beépül a növényekbe, állati szervezetekbe. Az élő szervezetekben a ${}^{14}_6\text{C} : {}^{12}_6\text{C}$ arány lényegében állandónak tekinthető. (10¹² db ${}^{12}_6\text{C}$ atommagra jut átlagosan 1 db radioaktív ${}^{14}_6\text{C}$ atommag). Az életfunkciók megszűnésével a szervezet nem kap a környezetből ${}^{14}_6\text{C}$ utánpótlást, így az izotóp mennyisége a radioaktív bomlás következtében folyamatosan csökken. A radioaktív ${}^{14}_6\text{C}$ β -bomlással visszaalakul nitrogénné:




A radioaktív szén bomlása miatt a ${}^{14}_6\text{C} : {}^{12}_6\text{C}$ arány csökken, így ennek mérésével és a radioaktív bomlástörvény ismeretében a meghatározható, mennyi idő telt el az életfunkciók megszűnése óta. A módszer pontosságát a radioaktív mérés pontossága határozza meg. (A pontosság függ a mért bomlások számától, azok négyzetgyökének reciprokával arányos. Kb. 10000 bomlás észlelése esetén a fosszília kora ± 80 év pontossággal mondható meg.) Természetesen a módszer alkalmazásakor mindig azt feltételezzük, hogy a ${}^{14}_6\text{C} : {}^{12}_6\text{C}$ arány a minta életében is a maihoz hasonló volt és elhalála során sem történt olyan esemény (pl. erős neutron-sugárzás, ami megnövelhette a minta ${}^{14}_6\text{C}$ tartalmát).

Mivel a ${}^{14}_6\text{C}$ felezési ideje nem túl hosszú, nagyon régi leletek (amikben a bomlás már nagyon lassú) csak nagy bizonytalansággal becsülhetők. A módszer legfeljebb 50 000 évre visszamenően alkalmazható.



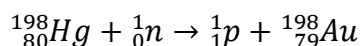


Molnár Mihály: [Szén és az idő: radiokarbon kormeghatározás](#), in.: Fizikai Szemle 2006/6. 181.o



Az alkimisták álma: az „aranycsinálás” sikerül magfizikai módszerekkel

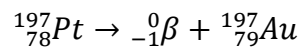
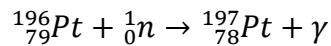
Rutherford az első sikeres mag átalakítási kísérletei után kis népszerűsítő kiadványban ismertette az új magfizika eredményeit, aminek „Új alkímia” beszédes címet adta. Ebben leírja, hogy az egykori alkimisták aranycsinálási álma valóság lett. Ha ugyanis higanyatomokat neutronokkal bombáznak, akkor magreakció eredményeként proton és arany-atommag keletkezik.



Két alapvető probléma azonban van: az így előállított arany drága, ráadásul nem stabil izotóp, β -sugárzás kibocsátása mellett visszaalakul higannyá.

Mesterséges magátalakítással azonban stabil aranyat is elő lehetett állítani. Ehhez 196-os platina izotópot kell neutronnal besugározni. A stabil aranyizotópra vezető reakció úgy indul,

hogy a neutron behatol és átmenetileg beépül a platinamagba, majd az így keletkezett 197-es Pt-izotóp β -bomlással stabil 197-es Au-aranyizotóppá válik.



Természetesen az aranycsinálásnak ez a módja sem gazdaságos, de tudománytörténeti érdekessége van, és jó alkalmat ad, hogy diákjainkat segítsük a magreakciók szabályainak gyakorlásában.

A radioaktív sugárzások gyógyászati felhasználása

A radioaktív sugárzások orvosi felhasználása kettős, egyrészt diagnosztikai vizsgálatok végezhetőek radioaktív izotópok segítségével, másrészt terápiás céllal alkalmaznak a radioaktív izotópokat, hogy sugárzásukkal különböző rákos szövetek szétroncsolására.

A diagnosztikai vizsgálatok Hevesy György Nobel-díjas magyar tudós által eredetileg kémiai reakciók kutatására kidolgozott „*radioaktív nyomjelzés*” módszerén alapulnak. Ennek a lényege az, hogy a mesterségesen előállított sugárzó izotópok kémiai szempontból megkülönböztethetetlenek a nem sugárzó atomoktól, és azokat helyettesítik a vegyületekben. Sugárzásuk azonban pontosan elárulja, hogy hol vannak.

Az orvosi radioizotópos diagnosztika ugyanezt használja fel. Általában a páciens érrendszerébe injekciónak be kis mennyiségű gyorsan bomló izotópot, amit azután a vérárammal együtt eljut, a test minden részébe. A sugárzásérzékelő műszerekkel ezután átvizsgálják a kérdésese testrészt. A sugárzást mérve érzékeli a vérkeringéssel kapcsolatos esetleges anomáliákat, amiből következtetnek a betegségekre. Ilyen célra leggyakrabban a technécium-97-es izotópját (${}^{97}_{43}\text{Tc}$) használják. A technécium mesterséges elem, a természetben nem fordul elő, ezért az emberi szervezetben sem kötődik meg, tökéletesen kiürül. Az izotóp β - és γ -sugárzó, felezési ideje 6 óra, így egy nap alatt radioaktív magok 94%-a lebomlik. A diagnosztikai műszerekkel a 140 KeV energiájú γ -sugárzást jól tudják detektálni. A technécium-izotópot használják szív és érrendszeri vizsgálatokra, de máj, tüdő, epe, vese, tumorok vizsgálataira is.

Végeznek szelektív radioaktív vizsgálatokat is. Ekkor egy-egy szerv működéséhez kapcsolódó elem radioaktív izotópját adják be a betegnek. A radioaktív izotóp kémiai szempontból megegyezik a nem sugárzó természetes anyaggal, a szervezet így hasonlóan érzékeli. Így vizsgálják például, radioaktív jód-izotópok segítségével a pajzsmirigy működését.

A sugárzások terápiás alkalmazása a rákos daganatok gyógyításában az egyik legfontosabb módszer. Erre a célra legelterjedtebben a kobalt-60 izotóp γ -sugárzását használják fel. Az ún. *kobalt-ágyút* a daganatot tartalmazó testrészt irányítják, testbe behatoló neutronok roncsolják a szöveteket, különösen a vízben gazdag burjánzó sejteket. A kobalt-besugárzás évtizedes módszer, aminek kétségtelen sikerei mellett hátránya, hogy azokat az egészséges szöveteket is roncsolja, amiken áthalad. A technika fejlődésével már léteznek olyan besugárzási módszerek, amik neutronokkal történnek és pontosan szabályozható, hogy a testben mekkora mélységben fejtsse ki a hatását. Az új módszer elterjedésének az akadálya az, hogy komoly neutronfizikai felszereléseket igényel, ezért nagyon drága.

Az orvosi alkalmazások mellett a radioaktív sugárzást a kutatásban és az ipari termelésben is használják. Például helyben hegesztett hatalmas csővezetékek hegesztési varratainak ellenőrzésére radioaktív γ -sugarakkal működő „átvilágító” berendezést használnak. A varratra helyezik a sugárzót és az anyag másik oldalára az érzékelő filmet. A film bevonata a sugárzás intenzitásától függően feketedik meg. A képen hasonlóan látszanak a zárványok, repedések, légbuborékok, mit akár egy röntgenképen. A radioaktív sugárzással működő eszköz előnye, hogy kicsi, könnyen hordozható. Nagy, nehéz röntgen-gépekkel a helyszínen nagyon nehéz és költséges lenne a vizsgálatokat elvégezni.

A radioaktív sugárzást rendszeresen kiterjedten alkalmazzák fertőtlenítésre, csírátlanításra. Az alkalmazások azonban néha egészen egyediek is lehetnek. Nem is régen Észak-Afrikában nagyon elszaporodott egy légy-faj, ami a szarvasmarhák közt terjesztett végzetes betegséget. A szarvasmarhák tömeges pusztulása a lakosság életfeltételeit veszélyeztette. A megoldást a legyek kipusztítására a radioaktív sugárzás tette lehetővé. Nagy mennyiségben mesterségesen zárt körülmények közt elszaporították a legyeket, amiket azután sugárkezeléssel sterilizáltak, majd szabadon engedtek. A sok sterilizált egyed miatt a természetben élő termékeny legyek sem találtak megfelelő partnerre a sikeres szaporodáshoz, így a populáció létszámát sikerült radikálisan lecsökkenteni.

[Vissza >>>](#)

KONDENZÁLT ANYAGOK (HALMAZOK) SZERKEZETI TULAJDONSÁGAI

17. Kristályos szerkezetű szilárd anyagok

18. A kristályos anyagok fizikai tulajdonságainak értelmezése az kristályszerkezet alapján

19. Eltérések az ideális kristályszerkezettől. A kristályhibák

20. A folyadékok szerkezete

21. Az óriásmolekulájú anyagok (műanyagok) tulajdonságai

Bevezetés

Környezetünk érzékelhető anyagait atomok, molekulák sokasága - halmaza - alkotja. A halmazt alkotó részecskék kölcsönhatásban vannak egymással. Ez a kölcsönhatás többé-kevésbé módosítja az egyedi atomok, molekulák szerkezetét, ezért a halmazok tulajdonságai lényegesen különböznek az egyes részecskék sajátosságaitól. Az atomok, molekulák kölcsönhatása meghatározza a részecskék egymáshoz viszonyított elhelyezkedését, mozgási szabadságát. A részecskék elrendeződésétől és mozgási szabadságától, azaz a halmaz állapotától, függenek az anyagok makroszkopikus fizikai sajátságai. Az anyagok ezek alapján csoportokba, ún. *halmazállapotokba* sorolhatók.

Szilárd halmazállapotban a részecskék közti, viszonylag erős kölcsönhatás minden egyes atom helyét rögzíti. A leggyakrabban az atomok helyhez kötöttsége olyan szabályos geometriai elrendeződést eredményez, ami mindhárom térirányban szakaszosan ismétlődik. Az ilyen anyagokat nevezzük kristályoknak vagy *szilárdtesteknek*. A kristályokban az atomok a hőmérséklet miatt egyensúlyi helyzetük körül rezgő mozgást végezhetnek. A kristályos anyagok alapvető tulajdonságai értelmezhetők az atomi részecskék szabályos elrendeződésével. Ha a kristály szabályos szerkezete valami ok miatt eltér az ideális rendtől, *kristályhibákról* beszélünk. A kristályhibáknak néhány speciális fizikai tulajdonság értelmezésében van meghatározó szerepe.

Folyadék állapotban a részecskék szigorú helyhez kötöttsége megszűnik, bár az atomok továbbra is számottevő kölcsönhatásban vannak. A kölcsönhatás következtében a folyadékban is rendeződnek a részecskék. A közvetlen szomszédok elhelyezkedése hasonló, mint a kristályos állapotban. Az így kialakult csoportok azonban nem hosszú életűek, az erős hőmozgás miatt minduntalan felbomlanak, majd kicsit másként újraalakulnak. A folyadék annál "hígabb", annál kisebb viszkozitású, minél erősebb a hőmozgás, azaz minél bojlékonyabbak a kis kiterjedésű rendezett tartományok. Azokat a nagy viszkozitású folyadékokat, amelyek mechanikai értelemben már szilárdnak tekinthetők, *üvegeknek* nevezzük.

Gáz halmazállapotban az atomok, molekulák hőmozgása erős, a részecskék közti átlagos távolságok olyan nagyok, hogy számottevő kölcsönhatás nem lép fel köztük.

Az atomok, molekulák szerkezete a kvantumfizika módszereivel írható le. A kvantumfizika elvileg egzakt módon alkalmas a halmazok szerkezeti tulajdonságainak leírására is. Az ilyen leírásmód azonban gyakorlati nehézségekbe ütközik. Beláthatjuk ui., hogy 10^{23} nagyságrendű, egymással bonyolult kölcsönhatásban álló részecske leírását adó *Schrödinger-egyenlet* megoldása csak jelentős egyszerűsítő feltevésekkel lehetséges. Az elvégezhető számítások végeredménye a legtöbb esetben lényegesen pontatlanabb, mint ami megengedhető. Ha pl. egy mólnyi kristályos réz vagy magnézium Schrödinger-egyenletét megoldva kellene megmondanunk, hogy melyik fém kristályosodik felületen középpontos kockarácsban, illetve hatszöges kristályszerkezetben, ez biztosan lehetetlen lenne. A két kristályszerkezet energiája ugyanis mindössze 4,18 kJ/mol értékben különbözik egymástól, és ez biztosan kisebb, mint a közelítő számítások várható hibája. A kvantumos tárgyalás helyett ezért célszerűbb a kristályok, folyadékok legtöbb szerkezeti tulajdonságát egyszerű fenomenologikus módszerekkel leírni, és

kvantumos megfontolásokat csak ott alkalmazni, ahol az észlelt kísérleti tapasztalatok értelmezéséhez azok feltétlenül szükségesek.

A kondenzált anyagok szerkezetének és fizikai tulajdonságainak tanítása

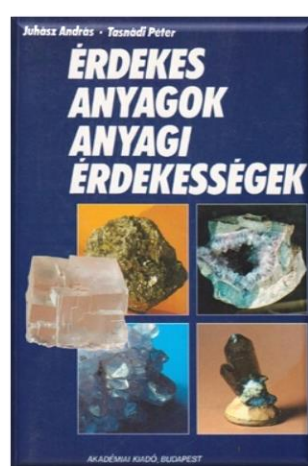
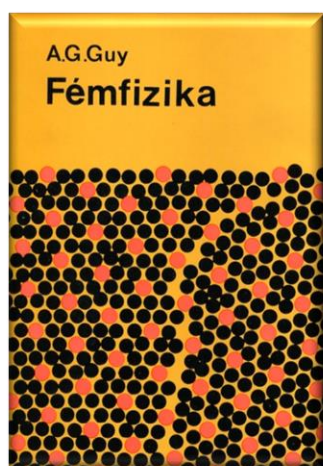
Az anyagok halmazállapotáról és a halmazállapot változásokról kémia és fizika órákon már az általános iskolában tanulnak a diákok. A téma a gimnázium hőtan témakörén belül folytatódik. Amíg az általános iskolában meghatározó a kvalitatív tárgyalás és az anyagszerkezet szemléletes „képi” tanítása, addig a gimnáziumban már sor kerül a halmazállapot változások fenomenologikus energetikai tárgyalására is. A legegyszerűbb „részecskehalmaz” az ideális gáz makroszkopikus tulajdonságainak tárgyalása mellett megjelenik a részecskesokaság leírása a kinetikus gázelmélet segítségével. A felsoroltak szinte párhuzamosan- és sajnos egymástól függetlenül – szerepelnek kémiában és fizikában. A kondenzált részecskehalmazok (kristályos anyagok, folyadékok, makromolekulájú anyagok fizikai tulajdonságaival és szerkezeti értelmezésével külön tantervi témakörben nem foglalkozik a fizika. Megjegyezzük, hogy az 1980-as években a gimnáziumok III. és IV. évfolyamán folyó emeltszintű fizikaoktatás keretében választható tantervi anyagként szerepelt az anyagfizika több területe is. A tananyag feldolgozásának segítésére különálló tematikus füzetekből álló „modultankönyv” szolgált. E szakanyagok az iskolai könyvtárakban még valószínűleg megtalálhatók, illetve alkalmanként antikváriumokban beszerezhetők. Bár a füzet-kiadványok nyomdai megjelenése messze elmarad a mai tankönyvek látványos külsejétől, tartalmukat tekintve a füzetek döntő többsége ma is korszerű és színvonalas. A tanítási munkát segítő tanári szakanyagként ajánljuk a fizikatanárok figyelmébe.



Fakultatív gimnáziumi tankönyv néhány modulfüzete az 1980-as évekből

Az iskolai tananyag környezetünk jelenségeit, a fizika törvényeivel magyarázza. A fizika törvényeit leíró formulákba az anyagi tulajdonságokat ún. „anyagállandók” viszik be. Ilyen anyagállandók a mechanikában például a sűrűség, a súrlódási tényező, a rugalmas állandók (Young-modulusz, kompresszibilitás) a hang terjedési sebessége, a képlékeny alakváltozás megindításához szükséges folyásfeszültség, szakítószilárdság, A hőtanban a hőtágulási tényezők, fajhő, olvadáshő, párolgáshő (forráshő) hővezetési együttható. Az elektromosságban, a vezetőképesség/fajlagos ellenállás, az elektromos és mágneses permeabilitás, Az optikában a fény terjedési sebessége anyagban, a törésmutató. Ha szükségünk

van az anyagállandók számértékére pl. egyszerű számítások elvégzéséhez, megtanítjuk, hogy táblázatos adatbázisokból miként keressük ki őket, de az adatok mögött lévő szerkezeti magyarázatokra általában már nem jut idő. Mivel az anyagfizika önálló tanegységként történő tanítására nincs esély, csak arra törekedhetünk, hogy – ahol erre lehetőség nyílik – röviden kitérjünk az anyagállandók kvalitatív szintű értelmezésére és anyagfizikai hátterére is. Fizikatanároknak és tanárjelölteknek szóló jelen módszertani könyvünkben igyekszünk rövid áttekintést adni a kondenzált anyagok szerkezetéről és ehhez kapcsolódva a legfontosabb fizikai tulajdonságok értelmezéséről. A szaktanár fontos feladata, hogy a rendelkezésre álló órakeretek és a tanulócsoporthoz érdeklődésének ismeretében a tananyag klasszikus fejezeteinek feldolgozását egészítse ki anyagszerkezeti ismeretekkel. Mivel jegyzetünk terjedelme korlátos, nem tudunk kitérni minden tanulságos és érdekes kérdésre sem. Kiegészítő háttéranyagként ajánljuk a tanárok figyelmébe az anyagfizika témájával foglalkozó szakkönyveket és a témát tudományos ismeretterjesztő szinten feldolgozó irodalmat.



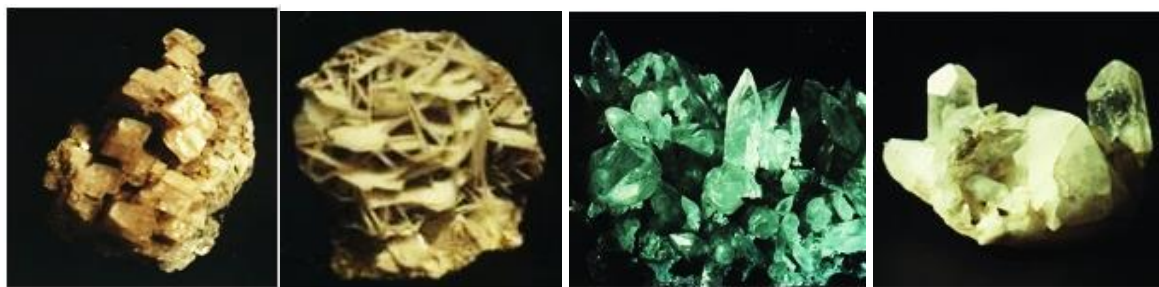
A.G. Guy: *Fémfizika*, Műszaki Kiadó, Bp. (1978); Juhász András-Tasnádi Péter: *Érdekes anyagok, anyagi érdekességek*, Akadémiai Kiadó, Bp. (1992)

17. KRISTÁLYOS SZERKEZETŰ SZILÁRD ANYAGOK

Az ideális kristály szerkezete

A környezetünkben található szilárd anyagok döntő többsége kristályos szerkezetű, (ásványok, kőzetek, fémek stb.).

A kristályos anyagok egy csoportját alkotó ásványokra jellemző, hogy látványosan szabályos geometriai alakkal rendelkeznek. A kristályok fogalmi megközelítésének ideális útja az, ha először a természetismeret tárgy keretében az iskolai ásványgyűjteményből mutatunk be az osztálynak néhány, síklapokkal határolt szép kristályt, vagy sok hasonló kristályból álló kristálytelepet, majd a diákok maguk is növesztenek szabályos geometriai formájú kristályokat és tanulmányozzák a különböző formákat. (Jól kiegészíti ezt a fakultatív látogatás valamely múzeum ásványgyűjteményében.)



17.1. ábra: Kristályok az ELTE TTK Ásványtárából

A gyűjtemények különböző anyagú kristályainak mérete, formája, színe különböző, de alakjukra jellemző a hasonlóság. Az azonos anyagból, azonos körülmények közt képződő kristályok esetén, az alakjukat meghatározó lapok által bezárt szögek minden hasonló kristály esetén azonosak (lapszög-állandóság törvénye.) Ennek felismerése vezetett a kristályok rendszerezéséhez, majd annak feltételezéséhez, hogy a szabályos formák mögött a belső szerkezet rendezettsége ének hipotéziséig a 19. század végére, amit a 20. század első éveiben egzakt röntgen-szerkezetvizsgálatok igazoltak.

A kristályok síklapokkal határolt szabályos formája a kristályok kialakulása, növekedése során alakul ki. Sók telített vizes oldatából némi türelemmel és kitartással nem nehéz nagyméretű, szabályos formájú kristályokat növeszteni. A középiskola alsóbb évfolyamain otthoni projektfeladatként ajánljuk, hogy a diákok megpróbálkoznak szabályos alakú nagyméretű kristályok növesztésével és a növesztett kristályok formájának tanulmányozásával. A munka vezetéséhez kísérletgyűjteményekben találhatunk segítséget.



Nagyméretű egykristályok növesztése és a kristályformák vizsgálata, in: Fizikai kísérletek gyűjteménye 3., szerk. Juhász András, Arkhimédész Bt., Typotex Kft, Bp. 1996, 121-124.old.

A nagyméretű kristályok szabályos formája a növekedés során alakul úgy, hogy a kristályok, ha nem is teljesen azonos formájúak (a kristályosodás során számos körülménynek van szerepe abban, hogy az egyes kristálypéldányok hasonló lapjai például méretükben eltérnek. Fontos azonban, hogy a megfelelő kristálylapok találkozási szöge a kristály anyagi minőségre jellemző állandó érték. Ez a 18. században felismert törvény kristálytan alaptörvénye. Ez felismerése tette lehetővé a sok különböző kristály idealizált alakjának megkonstruálását és a kristályok szimmetriatulajdonságain alapuló rendszerbe foglalását. Az rendszer ma is helytálló, ami annak tulajdonítható, hogy a külső forma a belső, szerkezeti szimmetriák következménye.

A belső szerkezet szabályosságára utal a kristályosodás folyamata is. A kristályok növekedése mikroszkóp alatt vizsgálható. (Erre azért van szükség, mert a formás kristályok növekedése lassú folyamat, ezért a méretváltozás csak mikroszkopikus mérettartományban figyelhető meg. A kristálynövekedés osztálykeretben történő mikroszkópos tanulmányozásához előre elkészített videók nyújtanak segítséget. A bemutatás úgy hasznosul igazán, ha a videó levetítése után a látottakat tanári vezetéssel (kiegészítéssel) megbeszéljük a diákokkal.



ANY1. Az kristályok növekedése – a jellegzetes kristályforma kialakulása

[Részletek >>>](#)



17.2. ábra: Kristálynövekedés megfigyelése mikroszkóppal

A kristályok számos fizikai tulajdonsága irányfüggő. Ezek között a legismertebb a kristály bizonyos irányú síklapok menti széthasítása. A hasadás általában az ionvegyületek kristályaira jellemző, a hasadási síkok iránya a kristály anyagától függ. Egyes kristályokra jellemző, hogy bizonyos kristálylapok mentén könnyen hasíthatók, a kősó például egymásra merőleges kockalapok bármelyikével párhuzamosan könnyen hasad, a kalcit romboéder lapok mentén, a gipsz azonban csak egy irányban hasítható párhuzamos rétegekre. Érdekes, hogy a hasíthatóság némely kristályra annyira jellemző, hogy az erős mechanikai behatásra széttörő kristály is e síkokkal határolt darabokra hullik szét, miközben sok kristály egyáltalán nem hasítható. A hasítás jelenségét iskolai kísérletként is érdekes megfigyelni (már azért is, mert ilyen kísérletek alapozták meg a 18. században a kristályok belső rácsszerkezetének elképzelését. Ezt csak jóval később az 1900-as években sikerült közvetlen kísérlettel igazolni.) Mivel a hasítási kísérletekhez nagyméretű kősó vagy kalcit kristályok szükségesek, ezért a történelmi kísérletet videón célszerű bemutatni.



ANY2. Kristályok hasadása

[Részletek >>>](#)



17.3. ábra: Kősókristály hasítása kockalapok mentén

A kristály rácsszerkezetének bizonyítása röntgen diffrakcióval

A kristályok jellegzetes tulajdonságai (a kristály növekedési anizotrópiája, a szabályos kristályforma, egyes ionkristályok hasadása, a kristályt alkotó atomi részecskék szigorú térbeli elrendeződésének következménye.

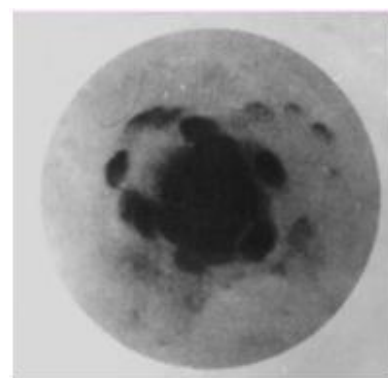
Az atomi részecskék alkotta térbeli rácsszerkezet egyértelmű kísérleti bizonyítékát a 20. század elején *Max von Laue* és munkatársai röntgen diffrakciós kísérlete adta meg. Laue a történelmi kísérlet során vékony röntgensugár útjába rézgálic-kristály helyezett és a kristály mögötti fotó lemezen megfigyelte a kristályon áthaladó sugárzás nyomait. Már az első felvétel pozitív eredményt hozott, a fotó lemezen jól elkülönülő diffrakciós maximumokat lehetett megfigyelni.

A röntgensugárzás és a kristály szabályos rácspan elhelyezett részecskéi közti kölcsönhatást Laue értelmezte. Azóta a röntgen diffrakciós eljárásoknak több változatát használják.

Az elhajlási képen megfigyelt diffrakciós maximumok

egymáshoz viszonyított elrendezése alapján meghatározható a kristály rácsszerkezete. Kezdetben a kristályszerkezet vizsgálatára kizárólag a röntgendiffrakciós vizsgálatok szolgáltak. A tudomány és a technika fejlődése azonban egyre újabb szerkezetvizsgálati módszerek kidolgozását tette

lehetővé. Ilyenek pl. az *elektron-* és a *neutrodiffrakciós* eljárás.



17.4. ábra: Laue történelmi jelentőségű röntgendiffrakciós felvétele

A diffrakciós módszerek mindegyik fajtája két alapvető információt szolgáltat a szerkezetről. A diszkrét foltokból álló interferenciakép intenzitásmaximumainak egymáshoz viszonyított rendezett helyzete a kristály rendezett belső rácsszerkezetére utal. Az interferenciamaximumok intenzitásarányaiból a kristály rácspontjaiban lévő atomok, atomcsoportok anyagi minőségére lehet következtetni. A diffrakciós szerkezetvizsgálat lényegét optikai síkrácsokkal végzett modellkísérlettel mutathatjuk be az iskolában.



ANY3. A diffrakciós szerkezetvizsgálat modellkísérlete: síkbeli optikai rácsok diffrakciós képének vizsgálata

[Részletek >>>](#)

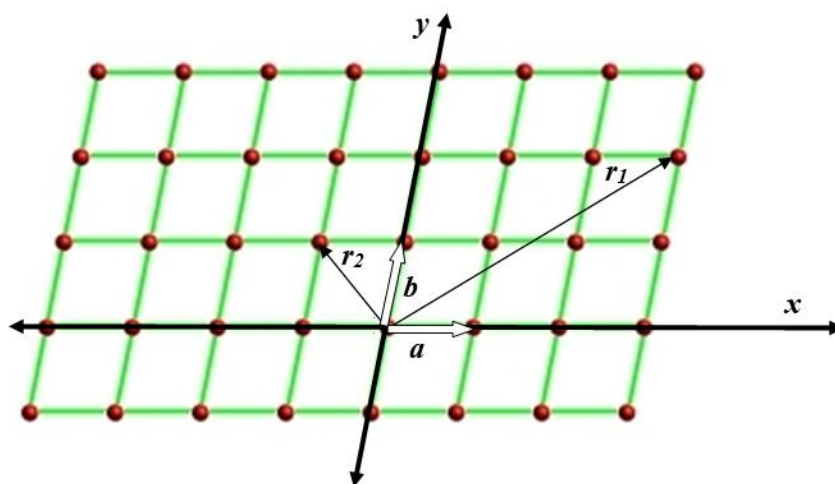
A kristály rácsszerkezetének jellemzése

A fentebb bemutatott, egykristályokon végzett makroszkopikus megfigyelésekből levont következtetések és a röntgendiffrakciós szerkezetvizsgálati eredmények egybecsengése alapján megfogalmazhatók a kristályos anyagok szerkezeti jellemzői.

Kristályos szerkezetről akkor beszélünk, ha az anyagot felépítő atomok (ionok, molekulák) a tér mindhárom irányában szigorú rendben ismétlődve kapcsolódnak egymáshoz.

A kristályos anyag részecskéinek szabályos térbeli elrendezését a *kristályrács* fogalmával írjuk le. A kristály fizikai tulajdonságai általában irányfüggőek, ezért a szerkezethez kötött irányok megadása fontos. Az irányok azonosítására a kristályrács valamely kiválasztott pontjához koordináta-rendszert illesztünk úgy, hogy a koordinátatengelyek a legközelebbi térbeli szomszédok irányába álljanak. Az így definiált tengelyek mentén a rácspontok rendre a , b , c távolságokban követik egymást. A hozzájuk tartozó tengelyirányú vektorokat nevezzük *elemi rácsvektoroknak* (illetve *rácsállandóknak*). Az elemi rácsvektorok hosszát tekintjük a tengelyek menti hosszúságegységeknek. A kristály geometriai rendezettségét jelzi, hogy bármelyik elemi rácsvektor egész számú többszöröse szintén rácspontba mutat, sőt a három elemi rácsvektor bármely egész számú többszörösének vektori eredője is rácspontot határoz meg. A koordináta-rendszer origójából a kristály rácspontjaiba húzott vektorok a kristály rendjéhez illeszkedő irányokat jelölnék. A kristály minden rácspontja ekvivalens, azaz azonos atomot, vagy atomokból álló csoport tartalmaz és közvetlen környezete is ugyanolyan. Ha a rács kiterjedését végtelennek tekintjük és a kristályt bármely rácspontjánál megfogva egy másik rácspontba áttoljuk, változatlan marad, egyetlen atom helyzete sem változik szomszédjaihoz képest. A kristályoknak ezt az alapvető szimmetriatulajdonságát *eltolási szimmetriának* nevezzük. A kristályszerkezet az eltolási szimmetria mellett többféle, forgás- és tükröszimmetriával is rendelkezhet, ha a rács tükrözéskor, illetve meghatározott szögű elforgatáskor önmagával kerül fedésbe. A kristályszerkezeteket szimmetriáinak összessége jellemzi.

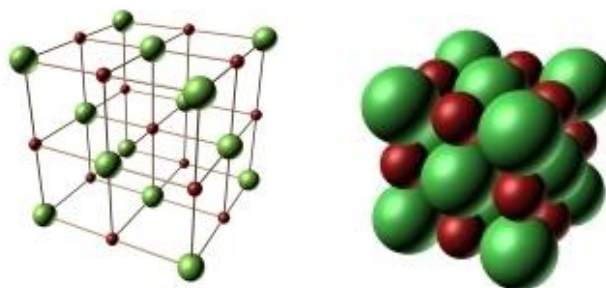
A kristályszerkezet jellemzésére használjuk az elemi cella fogalmát is. A három elemi rácsvektor által meghatározott három egyenes szakasz úgy is tekinthető, mint egy paralelepipedon egy sarokba összefutó három éle. Az így meghatározott paralelepipedont a kristály *elemi cellájának* nevezzük. Az elemi cella minden sarka rácspont. A rács a szorosan egymás mellé helyezett elemi cellákból, mint „téglákból” építhető fel. A kristály (térbeli) rácsszerkezetének leírt geometriai jellemzőit, egyszerűsítve síkban ábrázoltuk.



17.5. ábra: Kétdimenziós kristályszerkezetet jellemző pontrács, a szerkezethez illesztett koordináta-rendszerben értelmezett rácsvektorokkal

A térbeli kristályrácsokkal a diákok kémiaórán találkozik először. A kémiában alkalmazott klasszikus kristálymodellek az atomi részecskék térbeli szabályos elrendeződését mutatják be. Az atomokat golyók (illetve golyók csoportja) jelzi, a golyóatomok rendezett elrendeződését a

térben megfelelő irányba beállított tartó rudak biztosítják. Ez a térbeli szerkezet jól tükrözi az atomok elrendeződését, de gyakran azt a tévhitet kelti a diákban, hogy a kristály lényegében üres, ami igazán fontos a rács tartószerkezete. A fizikában a térbeli kristályok bemutatására a valóságot jobban tükröző szorosan egymáshoz illeszkedő golyókból álló modelleket használunk. A két gyakori térbeli kristálymodellt az ábra mutatja



17.6. ábra: A kőskristály rácsszerkezetének kétféle térbeli modellje

Egykristály és polikristályos szerkezet

Másfél évszázada még csak a kristálygyűjteményekben megcsodálható szabályos kristályformákat mutató anyagokat tekintették kristályoknak. Ma ezeket „egykristályoknak” nevezzük, megkülönböztetve a kristályos anyagok nagyobb részét adó ún. „polikristályoktól”. Röntgen diffrakciós vizsgálatok egyértelműen igazolták, hogy Földünk szilárd köpenyét adó kőzetek, az ember által előállított fémek, az egyre szélesebb körben felhasznált kerámiák hasonló rendezett kristályráccsal rendelkeznek, mint a látványos egykristályok. A polikristályos anyagok külső formája azért nem tükrözi a belső atomi rendet, mert nagyon sok és apró, szorosan egymáshoz nőtt kristályszemcséből állnak, Hogy valamely anyag megszilárdulás során látványos formájú egykristályt képez, vagy nagyon sok kicsi, szorosan egymáshoz tapadt kristályból áll össze, a kristályosodás körülményeitől függ. A polikristályos szerkezet kialakulására a kristályosodás folyamata ad magyarázatot. A kőzetek, fémek, kerámiák polikristályos szerkezete mikroszkóppal tanulmányozható.



ANY4. Polikristályok

[Részletek >>>](#)

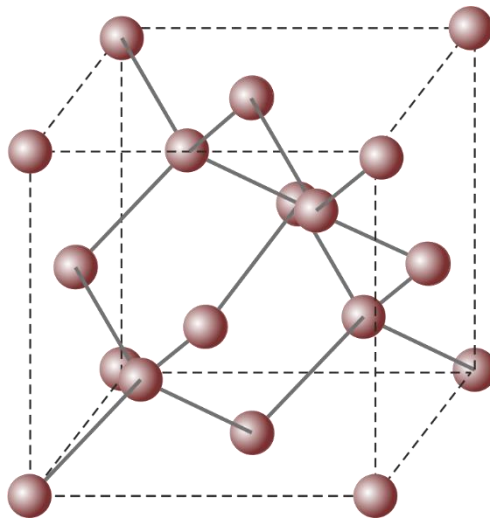
17.1. A kristályszerkezetek jellemzése a kémiai kötés típusa alapján

A kristály geometriai rendjét az atomok (ionok, molekulák) közötti kölcsönhatás határozza meg. A továbbiakban a kristályt felépítő részecskék közötti kémiai kötések közül kiindulva megmutatjuk, hogy a kötés természete miként határozza meg a rács geometriáját, illetve a kristály jellemző fizikai tulajdonságait.

A rácsot összetartó kémiai kötések szerint a kristályok négy csoportba sorolhatók: *atomrácsok, ionrácsok, fémek rácsok és molekularácsok.*

17.1.1. Atomrácok

Atomrácstról beszélünk akkor, ha a kristály rácspontjaiban atomok helyezkednek el, és az atomokat *kovalens kémiai kötések* kapcsolják össze (lásd a [13.3.1.](#) pontot). A kovalens kötések térben irányított molekulapályák kialakulásával jönnek létre. A molekulapályák, azaz a kötések irányítottsága meghatározza a kristály belső geometriáját. A kovalens kötés erőssége miatt az atomrácú kristályok nagy keménységűek és magas olvadáspontúak. Az atomrác tipikus képviselője a *gyémánt* (17.7. ábra).



17.7. ábra: A gyémánt kristályrácát tetraéderez kovalens kötések kapcsolják össze

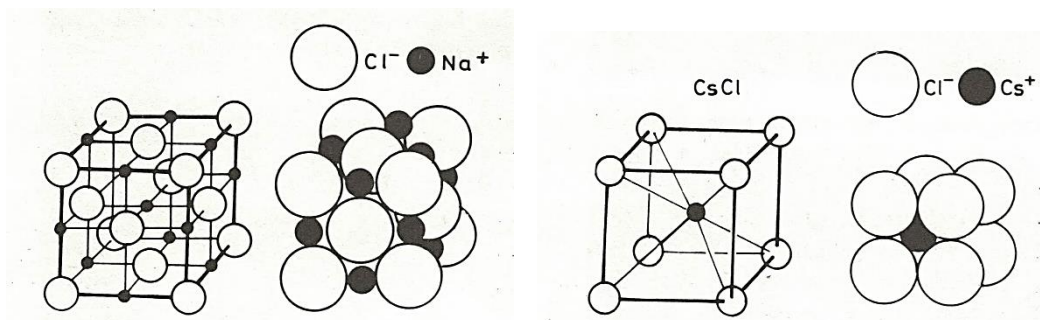
A gyémánt a szén egyik kristályos módosulata (a másik a grafit). A gyémántkristály minden szénatomja négy másik szénatommal létesít kovalens kötést. A négy kötés egyenértékű, a térben tetraéderez irányított. A szénatomok ilyen összekapcsolódása csak magas hőmérsékleten és különlegesen nagy nyomáson valósulhat meg. (Közönséges körülmények között a szén grafitként kristályosodik.) A gyémánthoz hasonló szerkezetű a szilícium- és a germániumkristály is. Ez utóbbi két kristály a félvezetőgyártás legfontosabb alapanyaga.

17.1.2. Ionrácok

Ionrácstról (ionkristályról) akkor beszélünk, ha a kristályban *váltakozva pozitív és negatív ionok* foglalnak helyet. Az ionkristályok rácsszerkezete igen változatos. A kristályok belső geometriáját három döntő tényező szabja meg.

a) Az ionrácot az ellentétes töltésű ionok közti *Coulomb-vonzás* tartja össze. Az elektrosztatikus vonzóerő a tér minden irányában egyformán hat. Az ionkristályokban tehát nincsenek kitüntetett kötési irányok, az ionok a rácspan úgy rendeződnek, hogy az ellentétes töltésű ionok minden irányból, minél közelebb és minél nagyobb számban vehessék körbe egymást.

b) A különböző ionok mérete eltérő. Ez jelentősen befolyásolja azt, hogy a különböző ionok hogyan helyezkednek el a legtömörebben egymás körül. Az ionok méretének a kristályszerkezetet meghatározó szerepe két hasonló ionvegyület, a NaCl (nátrium-klorid) és a CsCl (cézium-klorid) eltérő rácsszerkezetével (17.8. ábra) illusztrálható.



17.8. ábra: A NaCl és CsCl rácsszerkezete eltérő, mert a kation mérete eltérő

A kősó kristályrácsában a nagyméretű kloridionok közötti térrészben foglalnak helyet a kicsi nátriumionok. Minden kloridionnak 6 nátriumion és minden nátriumionnak 6 kloridion a közvetlen szomszédja. A céziumklorid kristályrácsát kloridionok és a nátriumionnál jóval nagyobb céziumionok építik fel. A céziumionok nem férnek el a kloridionok között a kősóhoz hasonló szerkezetben. A cézium-klorid kristályrácsában minden kloridiont 8 céziumion, illetve minden céziumiont 8 kloridion vesz körbe.

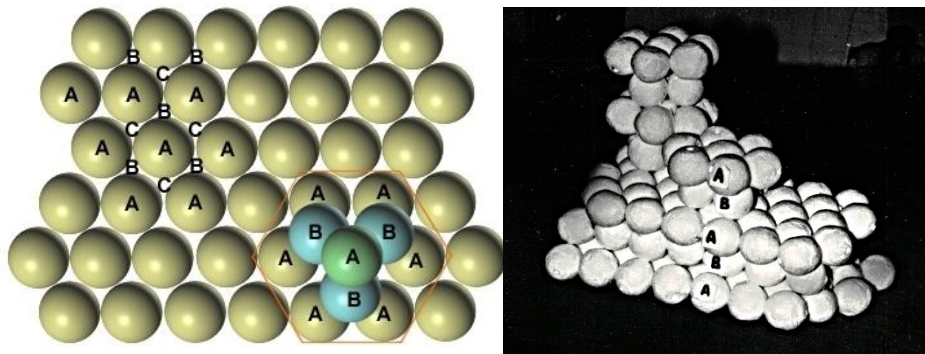
c) Az ionkristályok elektromosan semlegesek. Ez megköveteli, hogy a kristály ismétlődő alapegységét, az elemi cellát felépítő pozitív és negatív ionok össztöltése nulla legyen.

17.1.3. A fémek kristályszerkezete

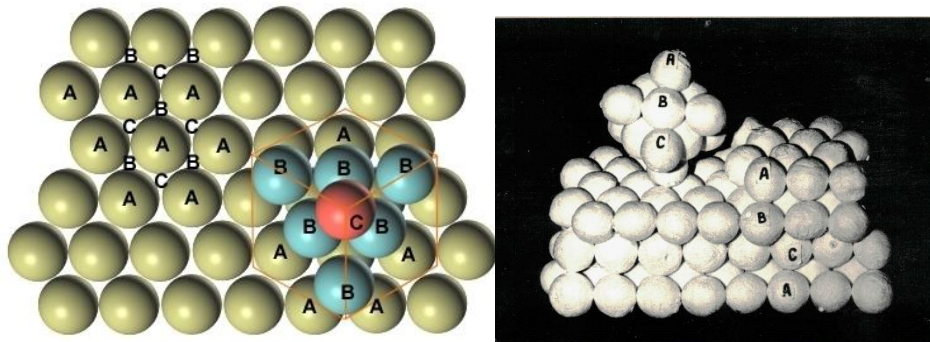
A fématomokat kristályrácsba rendező *fémek kötés* (lásd a [13.3.3.](#) pontot) lényege, hogy az atomok legkülső elektronhéján levő elektronok kiterjednek (*delokalizálódnak*) az egész kristályban, miközben a pozitív töltésű fémionok szorosan egymásmellé kristályrácsba rendeződnek. A kötés kialakulása csak a kvantummechanika segítségével értelmezhető. Bár az egymáshoz közel elhelyezkedő pozitív fémionok taszítása növeli az energiát, a rendszer teljes energiája mégis lecsökken, mert a delokalizálódó elektronok kinetikus energiájának csökkenése az előbbinél jelentősebb. A fémek kötés nem tüntet ki egyetlen térirányt sem, így a kristályrácsban a legtöbb fém ionjai szorosan rendeződnek egymás mellé.

Ha a fématomokat jó közelítéssel golyóknak tekintjük, könnyen megállapíthatjuk, milyen elrendezés valósítja meg a legjobb térkitöltést. Síkban a legtöbb golyót úgy tudjuk elhelyezni, ha szorosan egymás mellé illesztjük őket. Így minden golyónak 6 közvetlen szomszédja van. A legsűrűbb térkitöltésben az ilyen, ún. *szoros illeszkedésű* síkokat kell a legtömörebben egymásra rétegezni. Ezt elérhetjük, ha a két réteget úgy illesztjük össze, hogy a felső réteg minden golyója az alsó réteg három érintkező golyója közötti mélyedésbe kerüljön. Ha két ilyen réteget már elhelyeztünk (*A*, illetve *B* helyzet), akkor a harmadik réteg atomjait, vagy a legalsó réteg atomjai fölé (azaz ismét *A* helyzetbe), vagy egy harmadik fajta (*C*) helyzetbe illeszthetjük. A szoros illeszkedésű síkok egymásra rétegezésével tehát kétféleképpen is megvalósíthatjuk a tömör térkitöltést. Az első esetben a rétegek atomjai rendre *ABAB...* sorrendben illeszkednek egymás fölé. Ilyen sorrendben kristályosodik pl. a Zn és a Cd. Az elrendezést *hatszöges (hexagonális) szoros illeszkedésnek* nevezzük. A hatszöges szoros illeszkedésű fémrács rétegeit az alábbi 17.9. *a*) ábra mutatja.

Az előbbtől eltérő kristályszerkezethez jutunk, ha az egymásra helyezett rétegekben minden harmadiknak az atomjai az alsó réteg C pozícióit foglalják el, azaz a rétegződés térbeli sorrendje az ABCABCABC. Ebben az elrendezésben kristályosodnak a *felületen centrált köbös (lapközéppontos kockarácsú)* fémek, pl. az Al, a Cu, a Ni, az Ag, az Au stb. A szerkezetet a 17.9. b) ábra mutatja, az atomok a csúcsokon és a kockalapok közepén helyezkednek el. Mivel a lapok átlója mentén a gömbszerű fémionok érintkeznek egymással, a kristály a rácsállandója az atomok R sugarával az $a = \frac{4R}{\sqrt{2}}$ formulával fejezhető ki.



a) Hatszöges szoros illeszkedésű szerkezet

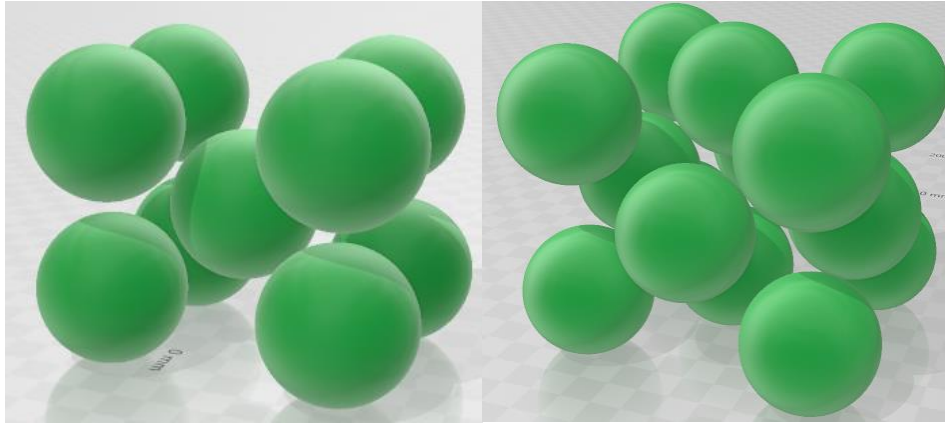


b) Lapcentrált köbös szoros rétegződésű szerkezet

17.9. ábra: Fémionok kétféle szoros elrendezésű szerkezete

A fémek többsége a szoros térkitöltésű kristályszerkezetek valamelyikében kristályosodik, vannak azonban kivételek, amelyeknek a rácsszerkezete a fentiekől eltérő. A legfontosabbak ezek közül a tércentrált köbös (térben középpontos kocka) rácsú fémek. Tércentrált köbös kristályszerkezetűek az alkálifémek (K, Na stb.), a magas olvadáspontú fémek (W, V, Cr stb.) és leggyakrabban a vas is.

A vas normál hőmérsékleten tércentrált köbös szerkezetű (a vas-atomok a kocka alakú elemi cella csúcsain és a kocka közepén található). A szerkezetet a hőmérséklet befolyásolja, 911-fokos hőmérséklet fölött a vas szoros illeszkedésű lapcentrált kockarácsban kristályosodik. A vas két jellegzetesen különböző kristályszerkezetét az ábra mutatja.



17.10. ábra: A vas kétféle kristály módosulatának elemi cellája: tércentrált köbös kockarács (911 °C alatt stabil) és lapcentrált köbös kockarács (911 °C fölött stabil)

A kétféle módosulat számos fizikai tulajdonsága, pl. az atomok térkitöltése (az anyag sűrűsége) is eltérő. A kristály szerkezete a hőmérséklet változásának hatására átalakul, amit az anyag térfogatváltozása is jelez

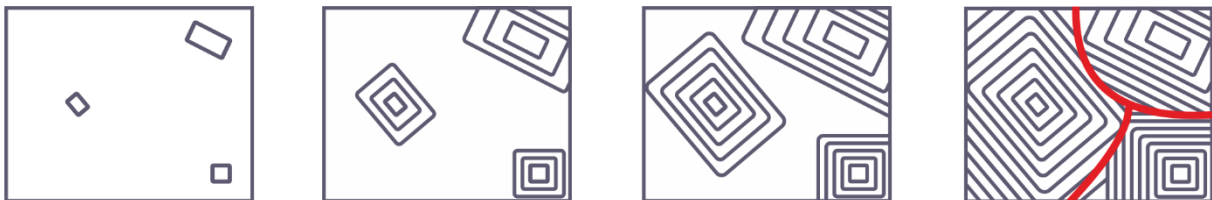


ANY5. A vas kristályszerkezeti átalakulása hőmérsékletváltozás hatására

[Részletek >>>](#)

A fémek polikristályos szerkezete

A fémek, bár kristályos szerkezetűek, mégsem mutatnak síklapokkal határolt szabályos kristályformát. A fémolvadék lehűlésekor az anyag megőrzi az öntőforma alakját. A fémtárgyak ui. nagyon sok, egymással szorosan összenőtt apró kristályból, ún. *kristály szemcséből*, más néven *kristallitból* állnak. A sorozatra a polikristályos szerkezet kialakulását szemlélteti.



17.11. ábra: A fémkristályok összenőve elvesztik kristályalakjukat

A dermedő fémolvadékban egymástól függetlenül kialakulnak kristálycsírák, amelyek azután a növekedés törvényeinek megfelelően síklapok által határolva növekednek egészen addig, míg össze nem érnek. A szomszédos szemcsék találkozási pontján a növekedés megszűnik, de a kristallitok közötti, még olvadékkal töltött tartományokban a kristálynövekedés tovább folytatódik egészen addig, amíg a kristályok egészen összeérnek. A szomszédos kristallitok

rendszerint szabálytalan felület mentén illeszkednek egymáshoz. Sem a fémtárgy egésze, sem az egyes kristályok alakja nem tükrözi a belső szerkezet szabályosságát.

A polikristályos fémszerkezet kialakulását szemlélteti a videón (lásd [ANY4.](#)) a bizmut fém kristályosítása.

Azokat a fémeket, amelyek nem polikristályos szerkezetűek, hanem egyetlen kristallitnak tekinthetők, *fémegykristálynak* nevezik. A fémegykristályok előállítása különleges tisztaságú anyagokat és nagyon lassú, szabályozott kristályosodást biztosító speciális berendezéseket igényel.

17.1.4. Molekularácsok

Molekularácsról (molekulakristályról) akkor beszélünk, ha a kristály *semleges molekulák* szabályos egymás mellé rendeződésével alakul ki. A molekulák maguk is összetettek, atomokból épülnek fel, amelyeket erős kovalens kötés tart össze. A zárt elektronszerkezetű, alacsony energiájú molekulák közt erős kémiai kötés már nem jöhet létre, a molekulák ún. *másodlagos kötések* következtében rendeződnek kristályrácsba. A másodlagos kötések közül a *van der Waals-kötés* és a *hidrogénhid kötés* (H-híd) a legfontosabb.

Van der Waals-kötésű kristályok

A legtöbb vegyület molekulájában az elektronok térbeli elrendeződése nem egyenletes, az atommagok pozitív, és az elektronok negatív töltésközéppontja nem esik egybe. Az ilyen molekulák ellentétes töltéspárjaikkal egymás felé fordult *elektromos dipólusokként vonzzák egymást*. A dipólusok között kialakuló kötés gyenge, ezért a molekularácsos anyagok *puhák, alacsony olvadáspontúak*, gyakran *illékonyak*. Tipikus molekularácsos vegyület a szilárd széndioxid („szárazjég”). Molekularácsban kristályosodik a legtöbb szerves vegyület.

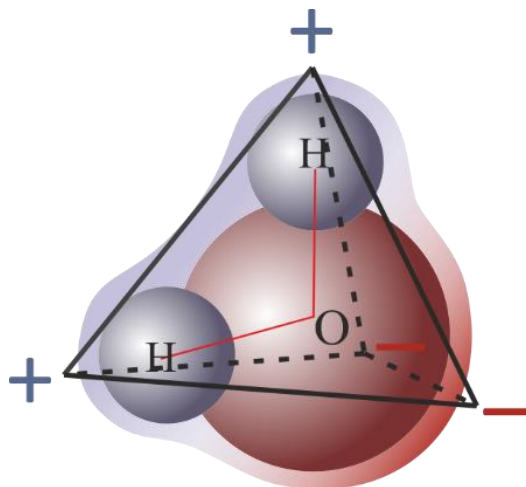
Nagyon alacsony hőmérsékleteken a nemesgázok is kristályos állapotúak. Ezek a kristályok szintén a molekularácsok közé sorolhatók. A nemesgázok atomjai egyenletes töltéseloszlásúak, ezért a közöttük ébredő dipólus kölcsönhatás első pillanatban nehezen érthető. A nemesgázok atommagját gömbszimmetrikus elektronfelhő veszi körül. Ez a gömbszimmetria azonban csak hosszabb idő átlagában jellemzi az elektronok eloszlását, és nem zárja ki azt, hogy egy-egy időpillanatban az elektronfelhő alakja a gömbtől eltérő legyen. Az atom ezért pillanatszerűen rendelkezhet elektromos dipólusmomentummal. A pillanatról pillanatra változó dipólusmomentum hosszabb időtartamra vett átlaga zérus. A kristályrácsba rendeződött nemesgázatomok pillanatnyi dipólus jellegük miatt kötődnek egymáshoz. A szomszédos atomok dipólusmomentumának iránya pillanatról pillanatra összehangoltan változik, így az atomok közti vonzóerő állandó marad.

A van der Waals-kötéssel összekapcsolódó atomok a lehető legszorosabb térkitöltéssel kondenzálódnak. A kristályos nemesgázok rendszerint lapcentrált köbös szerkezetűek. A molekularács geometriai szerkezetét a molekulák mérete, alakja döntően befolyásolja.

Hidrogénhíd kötésű kristály – a jég szerkezete

A jégkristályban minden vízmolekula négy másik vízmolekulához kapcsolódik. A molekulákat H-híd kötések tartják össze. A H-híd kötés kialakulását a víz molekulaszervezetéből kiindulva magyarázhatjuk.

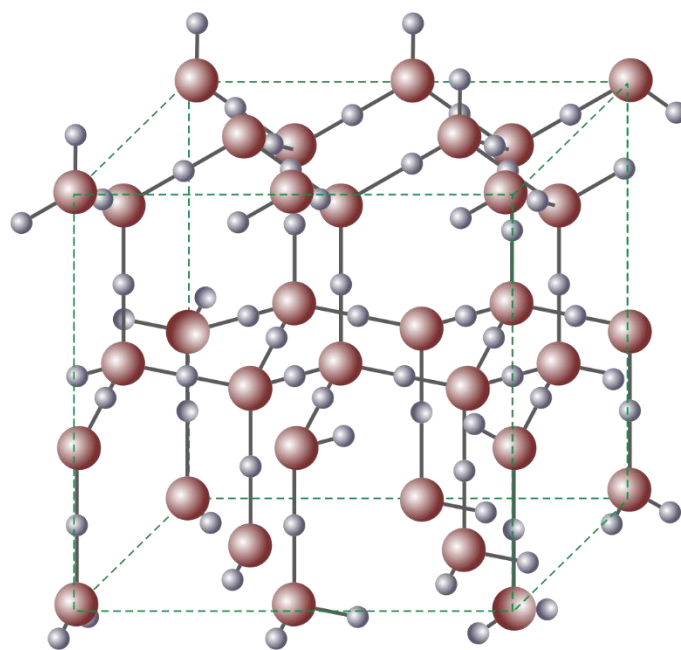
A vízmolekula egy oxigén- és két hidrogénatom összekapcsolódásával képződik. A hidrogénatomok 105° -os szöget bezáró irányokból kovalens kötéssel kapcsolódnak az oxigénatomhoz. Az oxigén erősen elektronvonzó tulajdonságú, ezért a kovalens kötés elektronjai a hidrogénatomok magját csak kevéssé árnyékolják le, így a molekulának ezen részei lokálisan pozitív töltést mutatnak. A vízmolekulának van két, elektronban különösen „gazdag” és ezért lokálisan negatív töltésű pólusa is. A pozitív és negatív pólusok tetraédes irányokban a 17.12. ábrán bemutatott módon helyezkednek el.



17.12. ábra: A víz poláros molekulája

Az egyenetlen töltéseloszlás miatt a vízmolekulák között kötések jönnek létre. A molekulák ellentétes pólusaikkal fordulnak egymás felé, majd a kevéssé árnyékolt hidrogénatommag a szomszéd molekula elektronfelhőjét is többé-kevésbé magára húzza. A két szomszédos molekula a hidrogénatommag hatására az egyszerű dipólus-kölcsönhatásnál jóval erősebb kötéssel kapcsolódik össze. A hidrogén „közvetítésével” kialakult kötést nevezzük *hidrogénhíd* kötésnek. A hidrogénhíd kötések tetraédes irányokban kapcsolják össze a szomszédos molekulákat. A jégkristály rácsszerkezetét a hidrogénhíd kötések tetraédes irányítottsága határozza meg.

A jégben a vízmolekulák a tetraédes kötéseknek megfelelően meglehetősen rossz térkitöltéssel kapcsolódnak össze. A szerkezet egymásfelé rendeződött hattagú gyűrűkből áll. A gyűrűkben minden H_2O molekula H-híd kötéssel három szomszédhoz kapcsolódik. Az egyes molekulák a tetraédes kötésirányokból adódóan felváltva a gyűrű síkja alatt és felett helyezkednek el. Ezek a hattagú gyűrűk a kristályban szabályosan egymás fölé rendeződnek. Az egymás fölé rendeződött gyűrűk összekapcsolódását molekulákként egy H-híd kötés biztosítja. Az egymás fölé rendeződő gyűrűk viszonylag nagyméretű csatornaszerű üregeket képeznek a jégkristályban. A jégkristály hatszöges rétegszerkezete eredményezi a hópehelyek jellegzetes kristályformáit is. A jég kristályszerkezetét a 17.13. ábra mutatja.



17.13. ábra: A jég kristályszerkezete

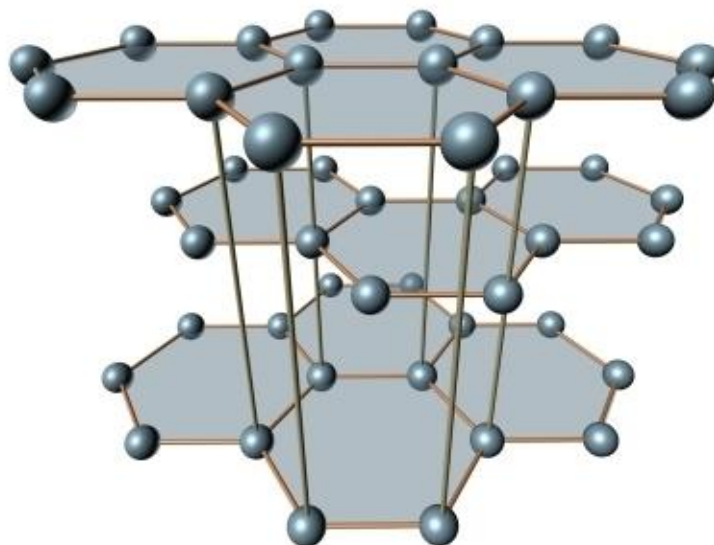
17.1.5. A polimorfia jelensége

Gyakori a természetben, hogy kémiai szempontból azonos anyagok különböző rácyszerkezetű kristálmódosulatokban is megtalálhatók. A jelenséget *többalakúságnak* vagy *polimorfianak* nevezik.

Valamely anyag többféle kristálmódosulata közül mindig csak egy az adott körülmények között stabil szerkezet, a többi módosulat *metastabil*. A metastabil módosulat atomjai szempontjából kedvező lenne az átalakulás a stabil szerkezetbe, de az atomok átrendeződésének feltételei nem adottak. Az energia felszabadulással járó átrendeződéshez megindításához ugyanis olyan nagy kezdeti energia befektetésre lenne szükség, ami az adott körülmények között nem biztosított. A metastabil állapot mintegy „befagyottnak” tekinthető. Ez azt eredményezi, hogy a stabil szerkezet mellett a metastabil kristálmódosulat is hosszú időn át megmarad. A szén két, természetben is megtalálható kristályos módosulata a gyémánt és a grafit. Normál légköri nyomáson és hőmérsékleten a grafit a stabil, a gyémánt a metastabil módosulat.

A gyémánt és grafit példáján szemléletesen illusztrálhatjuk, hogy az eltérő kristályszerkezet milyen lényeges különbségeket okoz a fizikai tulajdonságokban. A rendkívül kemény, átlátszó, magas olvadáspontú, elektromosan szigetelő tulajdonságú gyémánt kristályszerkezetét az atomrácscok jellemzése során ismertettük. A gyémántrács magas hőmérsékleten és nagy nyomáson alakul ki és ilyen körülmények között stabil. Közöséges körülmények között a szén grafitként kristályosodik. A grafit a gyémánthoz hasonlóan magas olvadáspontú, de nem rendelkezik a gyémánt keménységével. A grafit könnyen rétegekre hasítható, egyszerű dörzsöléssel elkoptatható, ezért használható ceruzabélként. A grafit fémesen csillogó, szürkés

színű, az elektromosságot a fémekhez hasonlóan jól vezeti. A grafit tulajdonságait a rácsszerkezet segítségével értelmezhetjük.



17.14. ábra: A grafit hatszöges rétegekből felépülő rácsszerkezete

A grafitrácásban minden szénatom három másik szénatomhoz kapcsolódik, kovalens kötéssel. Az atomok közti kötést kialakító molekulapályák egy síkban fekszenek, és páronként 120° -os szöget zárnak be. Ily módon hatszöges szimmetriájú rétegek alakulnak ki. Egy-egy ilyen réteg egy óriásmolekulának tekinthető, amelynek különös sajátossága, hogy szénatomonként egy-egy elektron az egész rétegre kiterjed. A réteg mentén delokalizálódott elektronfelhő könnyen gerjeszthető, ezzel magyarázható a grafit fényes szürke színe és jó elektromos vezetőképessége. A grafitkristály a hatszöges óriásmolekula-rétegek egymásra épülésével alakul ki. A rétegek viszonylag távol, egymáshoz képest kicsit eltolva helyezkednek el. A rétegeket gyenge másodlagos kötések tartják össze. A rétegek közötti gyenge kötőerő magyarázza a grafit „puhaságát” koptathatóságát. A rétegeken belül az atomokat összekapcsoló erős kovalens kötések biztosítják a grafit magas olvadáspontját.

A polimorfia nemcsak a „befagyott”, metastabil kristálmódosulatok esetén fontos, hanem pl. akkor is, ha a szerkezet átalakulása hőmérsékletváltozás hatására következik be. Egyszerű példa erre a közönséges körülmények között tércentrált köbös szerkezetű vas. A tiszta vas légköri nyomáson egészen 911°C -ig tércentrált köbös szerkezetű, ha azonban e kritikus hőmérséklet fölé hevítjük, kristályszerkezete átalakul szoros térkitöltésű, lapközéppontos kockarácscsá. A kristályszerkezet-változást jellegzetes térfogatcsökkenés kíséri és teszi megfigyelhetővé. A polimorfia jelensége nem csupán tudományos érdekesség, de gyakorlati alkalmazások lehetőségét is kínálja. Ezzel kapcsolatosan érdekes jelenségekre hívhatjuk fel érdeklő diákjaink figyelmét.



ANY6. Polimorfia

[Részletek >>>](#)

18. A KRISTÁLYOS ANYAGOK FIZIKAI TULAJDONSÁGAINAK ÉRTELMEZÉSE AZ KRISTÁLYSZERKEZET ALAPJÁN

A kristályos anyagok fizikai tulajdonságainak nagyobb része pl. – rugalmas tulajdonságok, fajhő, kötési energia, elektromos és mágneses viselkedés az atomok szabályos elrendeződése, azaz a rácsszerkezet alapján értelmezhető. A következőkben ezek közül a kristályos anyagok elektromos tulajdonságaival foglalkozunk részletesebben, mert ezek megértésében a modern fizikának döntő jelentősége van.

A kristályos anyagoknak az említetteken túl olyan tulajdonságai is vannak, amelyek nem magyarázhatóak az ideális kristály szerkezete alapján. Ilyenek pl. a kristályok képlékeny tulajdonságai, vagy a kristályok atomjainak helyváltoztató mozgásával kapcsolatos diffúziós folyamatok, de ilyenek a szennyezett félvezetők vezetési tulajdonságai is. E jelenségek értelmezésében az ideális kristályszerkezettől való lokális eltéréseknek. a *kristályhibáknak* van döntő szerepe.

18.1. A szilárdtestek elektromos tulajdonságai. A sáv szerkezet

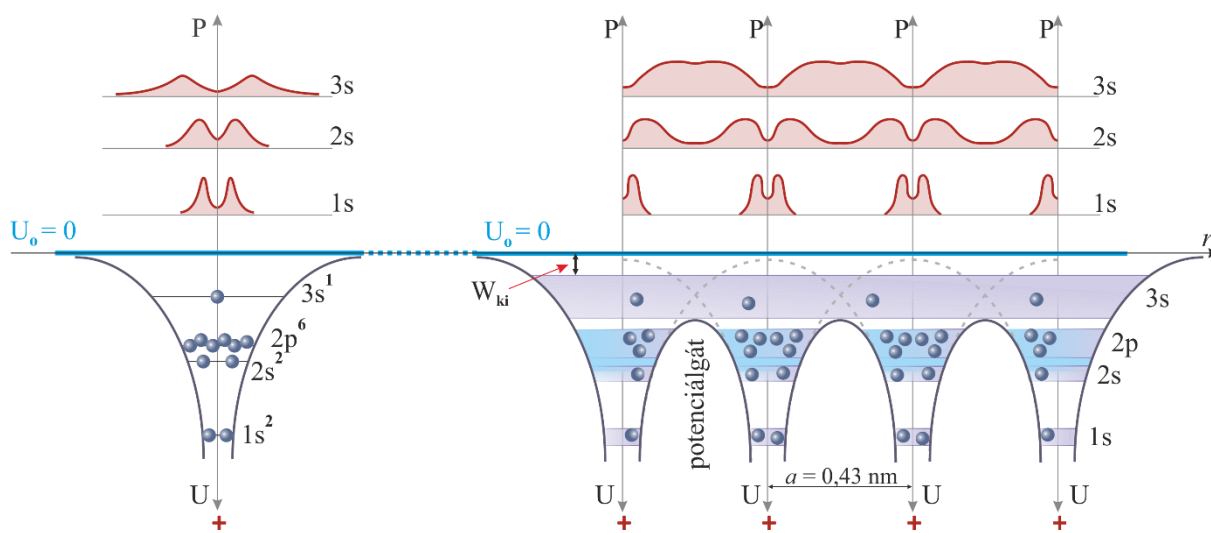
A kristályok elektronszerkezete

Jegyzetünk második kötetében részletesen foglalkoztunk az áramvezetéssel. A kristályos anyagok (fémek, félvezetők, szigetelők) vezetési tulajdonságainak értelmezéséhez a kristályok elektronszerkezetének ismerete szükséges. A kristályban levő atomok elektronállapotai különböznek a magányos atom energiaállapotaitól. A különbségek értelmezéséhez és szemléltetéséhez egy egyszerű konkrét példán, - a nátrium atomok és a nátrium kristály elektron-állapotainak összehasonlításán - keresztül juthatunk el. Itt vezethetjük be alapszinten a kristályok sáv szerkezetét, amelynek fogalomrendszere és alkalmazási példái az érdeklődő diákok számára bővíthetők.

Az atomok elektronszerkezetét a [13.2.](#) pontban tárgyaltuk. A nátriumatom a periódusos rendszer 11. eleme. Az atommagban 11 proton található, amelyek elektromos terében 11 elektron helyezkedik el. A 11 elektron mindegyike jól meghatározott atompályákon van. Az atompályákat energiájuk, a magtól számított távolságuk és az elektronok térbeli megtalálási valószínűsége jellemzi. Az elektronszerkezet jellemző adatai a kvantumfizikai Schrödinger egyenlet megoldásával kiszámíthatók, és a számítások eredményei a kísérletek tapasztalataival megegyeznek. A nátrium atom elektronszerkezete, a korábbiakban tárgyaltak (kémiai) jelölésrendszere szerint, $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^1$ elektronállapotokat tartalmaz. Egymástól független (távoli) atomok elektronszerkezete azonos, egymást nem befolyásolják. A 18.1. ábra alsó része szematikusan ábrázolja a nátrium atom kötött elektron állapotainak energiaszintjeit a mag potenciálterében (a potenciál zérus értékét az atommagtól független szabad elektron potenciális energiája jelenti).

Az ábra felső része a különböző főkvantumszámú pályákat betöltő elektronok megtalálási valószínűségét mutatja az atommagtól mért távolság függvényében. A megtalálási valószínűség görbék maximumai jól megadják a pályák Bohr-sugarát.

A nátrium fém kristályrácsában a rendeződött atomok egymás közvetlen közelében helyezkednek el, így bármely atom elektronjaira nemcsak saját atommagjának a tere hat, hanem a szomszédoké is. Ez a változás a legmagasabb atomi energiaszintekhez tartozó elektronok esetén meghatározó jelentőségű és fontos az fém elektromos vezetésének értelmezésében. A kristály elektronszerkezetének sajátosságait, az egyes atomok elektronszerkezetéhez viszonyítva, a 18.2. ábra mutatja. A Na-kristály elektronszerkezetét illusztráló rajz erősen egyszerűsített. A térbeli kristályszerkezet sokezer atomját az ábrán egyetlen egyenes mentén egymástól a rácsállandónyi távolságban elhelyezett, mindössze négy nátrium atom jeleníti meg, de a két ábrát együtt nézve az atomi elektronszerkezet és a kristály elektronszerkezetének hasonlósága és különbsége egyaránt jól megfigyelhető. A két ábra egymásmellé rajzolásával is a hasonlóságot és a fennálló különbségeket kívánjuk hangsúlyozni.



18.1. ábra: A Na-atom magjának potenciáltere, energiaszintjei és az „s” elektronok megtalálási valószínűsége

18.2. ábra: A kristályba rendeződött négy Na-atom magjának sematikus potenciáltere, energiaszintjei és az „s” elektronok megtalálási valószínűsége

A Na-kristályban a szomszédos magok távolsága mindössze $0,43 \text{ nm}$, az eredeti atomi potenciálfüggvények (szaggatott vonal) ezért átfedik egymást. A Na-kristály belsejére jellemző potenciálviszonyokat és az elektronok megtalálási valószínűségét a kristályban, az előbbihez hasonlóan szerkesztett sematikus 18.2. ábra szemlélteti.

A rajzon megfigyelhető, hogy az atomi potenciálfüggvények (szaggatott vonallal rajzolva) átfedése miatt az atomok közötti potenciálgát szélessége és magassága csökken. A kristály szélső atomjainak potenciál-görbéje aszimmetrikus, a külső oldalon magasabb, a belsőn az átfedések miatt alacsonyabb. (A szélső potenciálfalak magasságát tekintjük továbbra is a potenciál zérus szintjének) A Na-kristály egésze így egyfajta negatív potenciálteknőnek tekinthető, aminek alján szabályosan elrendezett mély potenciál-kutak helyezkednek el. Az elektronok ebben az összetett potenciáltérben a magányos atom energia-szintjeitől lényegesen

eltérően helyezkednek el. A Na-kristály elektronjainak lehetséges új energiaszintjei az atomi energiaszintek felhasadásával jönnek létre. Mivel a kristály egyetlen összetett kvantumfizikai rendszert alkot, a Pauli-elv értelmében az egyes elektronok állapotainak különbözőnek kell lennie. Ez azáltal teljesül, hogy a különálló atomok eredeti energiaszintjei egymástól kicsit különböző energiaszintekre hasadnak fel. N atomból álló kristály esetén minden egyes atomi energiaszint N egymáshoz közeli, de mégis különböző energiaszintből álló energiasávvá sokszorozódik. Ilyen körülmények közt nem sok értelme van diszkrét energiaértékekről beszélni, sokkal inkább az energiasávok átlagos energiájáról és a sávok szélességéről. A rajzon a kristályban az egyes atomi nívók felhasadásából adódó energiasávokat színezett tartományok jelzik. A nátrium $1s$, $2s$, $2p$ elektronállapotaiból felhasadással kialakult energiasávok a magok közvetlen közelében lokalizálva, a magokat szétválasztó potenciálgát magassága alatt található. Ezzel összhangban a sávokon belüli elektronok megtalálási valószínűsége csak az egyes atommagok környezetében számottevő. A nátrium kristályban ezen sávok energiaszintjeit az elektronok teljesen betöltik – a sávok „telítettek”. (A rajzon a sávok betöltöttségét úgy jelöltük, hogy a berajzolt négy atomhoz tartozó elektronokat a megfelelő sávba kis golyóként berajzoltuk. Az ábrán jól látszik, hogy a $3s$ atomi pálya felhasadásából adódó energiasáv az egész kristályra kiterjedő potenciálmédcében az atommagokat elválasztó, csökkent magasságú potenciálgátak feletti energiatartományba esik. (A kristály e felső energiasávjában $N \times 2$ elektron számára lenne hely, de csak feleannyi elektron van, így a legfelső energiasáv csak félig betöltött. (Ezt a kémiai vegyértékelektronokat tartalmazó energiasávot gyakran vegyérték-sávnak nevezik.) Fontos hangsúlyoznunk azt is, hogy vegyértéksávban lévő elektronok a fémek esetén – mivel az atommagokat elválasztó potenciálgát felett vannak – már nemcsak egy-egy atommag közelében található meg, hanem a kristály egészében delokalizálódnak. Az ábra felső tartományába rajzoltuk fel a különböző elektronsávokat betöltő elektronok megtalálási valószínűségét. Az alsó betöltött energiasávok elektronjai az egyes atommagok környezetében lokalizáltak, a vegyértéksáv elektronjainak megtalálási valószínűsége a kristály egész térfogatára kiterjed. Ezeket az elektronokat nevezzük a fémekben *szabad elektronoknak* vagy a fémeket kitöltő *elektrongáznak*.

A kvantumfizikai kép szerint a fém egész tartományára kiterjedt elektronállapotokat úgy tekintjük, mint a fém teljes térfogatára kiterjedő állóhullámokat. Mivel az ilyen állóhullámok hullámhossza jóval nagyobb, mint az atomhoz kötött állapotok hullámhossza, a delokalizált elektron kinetikus energiája kicsi (ez magyarázza a fémek kötést). Fontos kiemelni, hogy a fémekben delokalizált elektronok potenciális energiája negatív érték, így a fém „szabad” elektronjai is kötöttek. A delokalizált elektronok energiasávjának felső széle és a potenciál zérus szintjének különbsége a fémre jellemző W_{ki} *kilépési munkát* mutatja, amit akkor kell befektetnünk, ha egy elektront kiszakítunk a fémből.

Megjegyzés:

- A fizikát alapszinten tanulók számára a magányos fématomok és a kristályos fémek elektronszerkezetének grafikus összehasonlítása, bár tartalmában alig megy túl a kémiában tanultakon, szemléltetés képet ad a fémek elektromos viselkedésének megértéséhez. Emelt szinten tanulók számára ez a szemléletes kép adhatja az alapot a kristályok sáv szerkezetének további, de még mindig csak kvalitatív szintű tárgyalásához.

- Sáv szerkezet alapszintű tanítása során célszerű kiemelni, hogy az atomi energiaszintek felhasadásával kialakuló sávok belső energiaszintjei közt nagyon kicsi az energiakülönbség, míg a szomszédos sávok szélső energiaértékei közt általában nagy. Az ide eső köztes energiaértékekkel elektronok nem létezhetnek a kristályban. Ezt az energiatartományt *tiltott sávnak* nevezzük.



ANY7. A kristály elektronjainak sáv szerkezete és energiaspektruma (kiegészítő anyag)

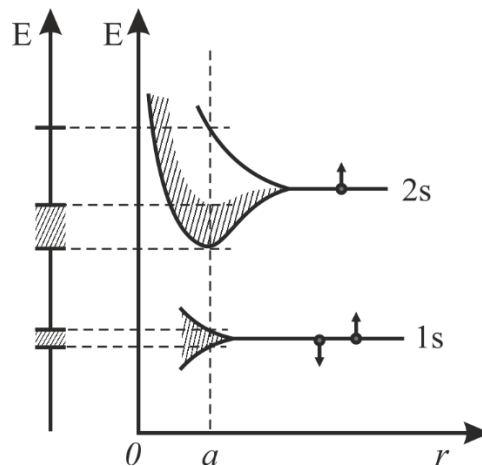
[Részletek >>>](#)

18.1.1. A fémek sáv szerkezete

A kristályok sáv szerkezetét a nátrium fém példáján vezettük be. Az ott mondottakhoz közvetlenül kapcsolódik a fémek sáv szerkezetének általános tárgyalása. A fémek legfontosabb makroszkopikus elektromos tulajdonsága, hogy jó elektromos vezetők. Külső elektromos tér hatására a kristály elektronjainak egy része mozgásba jön és a fémbe áram folyik. (Az elektronok, mint töltéshordozók, valamint a vezetésben résztvevő elektronok térfogategységre jutó száma Hall-méréssel vizsgálható.) Amikor a vezetési elektronok mozgásba jönnek energiát vesznek fel az elektromos térből, így az elektronok energiája megnő. Vizsgáljuk meg, milyen kvantumfizikai feltételek esetén nőhet meg egy elektron energiája a kristályban, azaz mikor vehet részt a vezetésben!

Az elektron csak meghatározott energiaértékekkel rendelkezhet a fémrácsban és a Pauli-elv (lásd a [13.2.](#) pontot) szerint a kristályban több azonos állapotú elektron nem lehet. E két feltétel együttes figyelembevételével arra a következtetésre juthatunk, hogy csak azok az elektronok vehetnek részt a vezetésben (vehetnek fel energiát a térből), amelyekhez közel megengedett, de még betöltetlen energiaszint található.

A fémek legtöbbször a periódusos rendszer első két oszlopában található, egy vagy két vegyértékelektronnal rendelkeznek. Az egy, illetve két vegyértékű fémek jellemző sáv szerkezetét a lítium (Li egy vegyértékű) és a berillium (Be két vegyértékű) példáján a 18.3. és a 18.4. ábrákon mutatjuk be. Az ábrák az atomi energianívók felhasadását az atomok távolságának függvényében mutatják. A felsorolt energiaszintek közül a legalacsonyabbat és a legmagasabbat rajzoltuk be, a szintek betöltöttségét a sáv vonalkázása jelzi. A kristály sáv szerkezete a grafikonról az a rácsállandó távolság vonalában olvasható le.



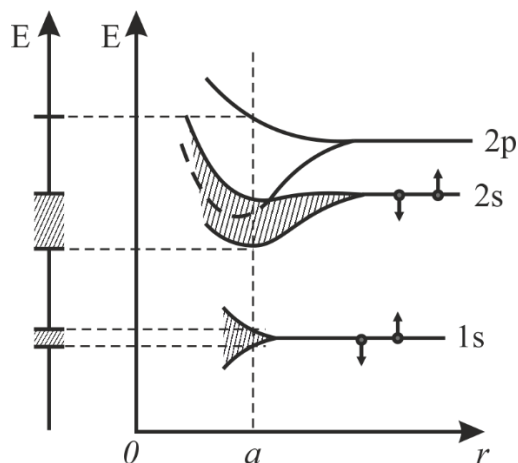
18.3. ábra: A Li atomi elektronnívóinak felhasadása egymást átfedő energiasávokká

A magányos Li-atomnak két $1s$ állapotú és egy $2s$ állapotú elektronja van (vegyértéke 1). Az N atomot tartalmazó lítium kristályban az $1s$ atomi energiaszint N nívóra hasad fel, amelyek keskeny energiasávot alkotnak. A kristálynak ez az alsó energiasávja, $2N$ elektront tartalmaz, és teljesen betöltött. A $2s$ energiaszint ismét N nívóra hasad fel. Ez a második energiasáv azonban csak félig van betöltve, hiszen az N nívón $2N$ elektron számára van hely, míg a kristályban csak N darab ilyen ($2s$) elektron található. A lítium fém elektromos vezetését a betöltetlen energiasáv segítségével értelmezhetjük. A sávon belül sűrűn, szinte folytonosan helyezkednek el a megengedett energianívók. A sáv legmagasabb energiaszintjein levő elektronok tehát felvehetnek energiát a telep elektromos teréből és magasabb energianívóra átlépve részt vehetnek az áramvezetésben.

Megjegyzés:

- A sáv szerkezet bevezetése során tárgyalt nátrium sáv szerkezete nagyon hasonló a lítium szerkezetéhez. A különbség annyi, hogy az elemek periódusos rendszerében a nátrium a lítium alatt helyezkedik el, így a nátrium esetén két teljesen betöltött alsóbb sáv fölötti $3s$ atomi energiaszint felhasadásából származó energiasáv marad elektronokkal félig betöltetlen. A vezetésben e részlegesen betöltött sáv elektronjai vesznek részt.

A berillium a periódusos rendszerben közvetlen szomszédja a lítiumnak. Atommagjában eggyel több a proton és az elektronok száma is, atomjai két $1s$ és két $2s$ állapotú elektronnal rendelkeznek. A kristályban az atomi energiaszintek felhasadnak. A lítiumhoz hasonló felhasadás esetén a második sáv is teljesen betöltött, így a kristály – a tapasztalatokkal ellentétben – nem vezethetne. A vezetés magyarázata a berillium esetén az, hogy a $2s$ és $2p$ energiaszintek felhasadása a rácsállandó távolságában átfedésbe kerül. A két egymást átfedő sávban összesen $(N+3N)$ közeli energianívó található, amelyen $(2N+6N)$ elektron számára van hely. A sáv ezért csak részben betöltött a $2s$ atomi szintekről származó $2N$ elektronnal. Az elektromos vezetést a sáv üresen maradt energiaszintjei magyarázzák. Hasonlóan értelmezhető más kétvegyértékű fémek vezetése is.



18.4. ábra: A Be atomi elektronnívóinak felhasadása egymást átfedő energiasávokká

Érdeemes felhívni a diákok figyelmét arra, hogy a kvantumfizika szempontjából sem az egyes atomokban, sem az atomokból álló kristályszerkezetben nemcsak azoknak a kiszámítható energiaszinteknek van realitása, amelyek elektront tartalmaznak, hanem azoknak az ún. *gerjesztett nívóknak* is, amelyeket megfelelő esetekben elfoglalhat elektron. Atomok esetén a gerjesztett energiaszintek jól számíthatók és kísérletileg is igazolhatók. Kristályok esetében a gerjesztett elektronok befogadására az atomi gerjesztési energiaszintek felhasadásából származtatható *gerjesztési sávok* energianívói alkalmasak. Ennek jó példáját adja a berillium-fém vezetése.



ANY8. A fémek fajlagos ellenállásának értelmezése (fakultatív kiegészítő anyag)

[Részletek >>>](#)

18.1.2. Szigetelő és félvezető kristályos anyagok sávszerkezete

Az elektromosan szigetelő, illetve félvezető tulajdonságú kristályos anyagok sávszerkezete nagyon hasonló, ezért célszerű e két kategóriát együtt, a periódusos rendszer negyedik oszlopában egymás alatt található szén (C), szilícium (Si), és germánium (Ge) példáján tárgyalni. Mindhárom elem atomjának elektronszerkezete hasonló. Az atommaghoz közeli energiaszintek elektronokkal betöltöttek, a vegyérték-héj pedig mindegyik elem esetén $2s$ és $2p$ elektront tartalmaz, miközben a vegyérték-héj két p -pályája üres. A szén tetraéderesen irányított (sp^3 hibrid) molekulapályáit a [KV20.](#) mellékletben tárgyaltuk. A gyémánt – mint a szén egyik kristályos módosulata ezen tetraéderes molekulapályákon kialakuló kovalens kötésekkel kapcsolódik szabályos térbeli rácsszerkezetbe (lásd 17.7. ábra). A gyémánthoz hasonlóan a szilícium és a germánium is hasonló kristályszerkezetű atomrácsos anyag. Az alapvető szerkezeti hasonlóság mellett a három kristályos anyag fizikai tulajdonságai közt eltérések vannak. A gyémánt nagy fénytörésű, víztiszta átlátszó kristály, elektromosan szigetelő, az áramot nem vezeti. A szilícium és a germánium szürkés színű, fémesen csillogó, elektromosan

félvezető anyag. A félvezető tulajdonságú szilícium és a germánium jelentősége a modern elektronika alapanyagént kiemelt jelentőségű. A félvezetők alapvető fizikai sajátásaival és az ezeken alapuló gyakorlati alkalmazásaival jegyzetünk második kötetében (lásd [Fizika tanítása a középiskolában II.](#) 5.2.4. pontot) foglalkoztunk. Itt a korábbi tárgyalást egészítjük ki a szigetelők és félvezetők alapvető sáv szerkezeti ismeretivel.

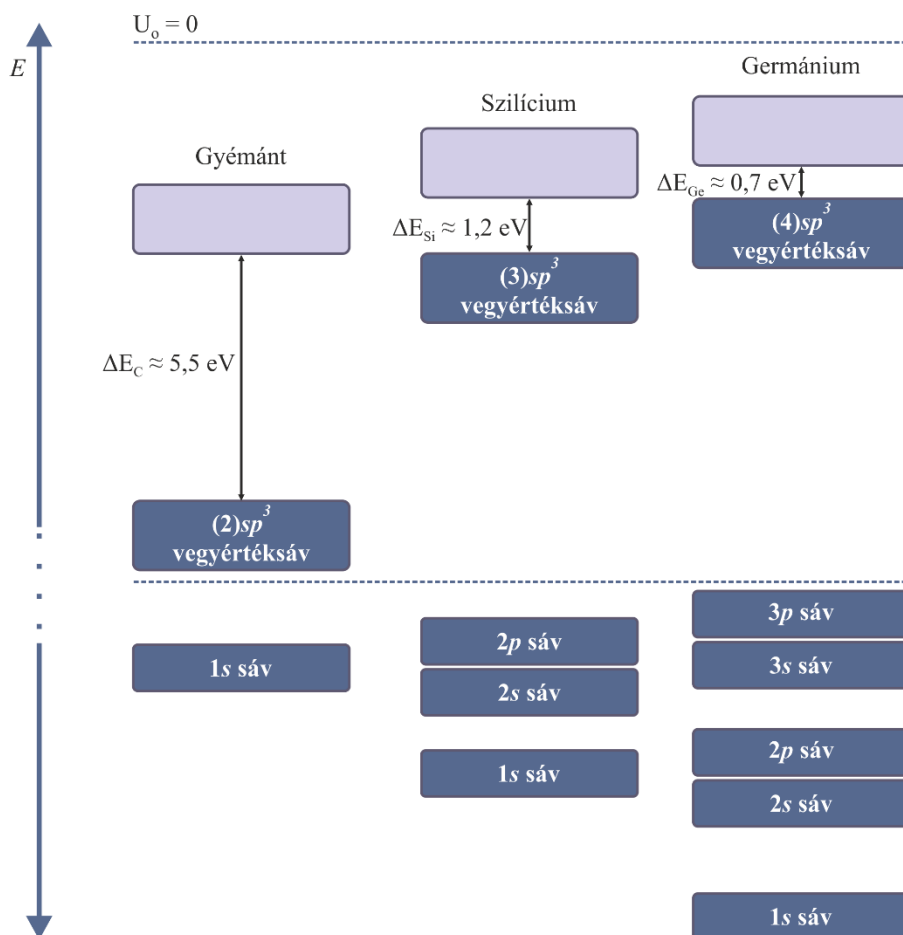
A gyémánt

Az elektromosan szigetelő kristályok egyik tipikus képviselője a gyémánt. A gyémántban az $1s$ energiaszint felhasadásából keletkezik a legalsó, teljesen betöltött energiasáv. A szénatom $n = 2$ főkvantumszámú szintjén két $2s$ és két $2p$ elektron található. A kristályban a szén négy egyenrangú kötést létesít, az eredetileg $2s$ és $2p$ elektronok négy egyenrangú *molekulapályát* (l. a [KV20.](#) mellékletben) képeznek. A kristályban a $2s$ és a $2p$ állapotok *hibridizációjából* négy, egymást részben átfedő (átlapoló) energiasáv alakul ki. Ezek a sávok 0 K -en teljesen betöltöttek. Az átlapolódással létrejött, betöltött sáv után széles tiltott zóna következik, amely felett ismét megengedett állapotok vannak. Az alsó, teljesen telített sáv, az ún. *vegyértéksáv*, a felső sáv, amelyben nincs elektron, a *vezetési sáv*. A vegyértéksáv felső határa és a vezetési sávalja közti tiltott energiasáv szélessége $\Delta E \approx 5,5\text{ eV}$. Ez energiaérték nagyságát akkor érzékelhetjük, ha figyelembe vesszük, hogy szobahőmérsékleten ($T = 300\text{ K}$) egy részecskére (pl. elektron) jutó átlagos termikus energia értéke $0,025\text{ eV}$. A két energiaérték nagy különbsége miatt nagyon kicsi annak az esélye, hogy egy vegyértéksávban lévő elektron véletlenszerű termikus energiafluktuáció révén akkora energiára tegyen szert, hogy a vegyértéksávból a vezetési sávba kerüljön. Így a gyémánt normál körülmények közt ideális szigetelőnek tekinthető. A gyémánton túl a szigetelőanyagokra általánosságban is kimondható, hogy a betöltött vegyértéksáv és vezetési sávot széles tiltott tartomány választja el, így az alsóbb sávokból gyakorlatilag nem kerülhet elektron a vezetési sávba.

A szigetelő gyémánt és a félvezető szilícium és germánium sáv szerkezetének összehasonlítása

A gyémánt, anszilícium és a germánium kristályszerkezete hasonló, tetraéderesen irányított kovalens kötésekkel összekapcsolt atomrác. A gyémánt, a szilícium- és a germánium-kristály elektronjainak sáv szerkezete is hasonló. Az elektromos vezetés szempontjából lényeges eltérés oka a vegyértéksáv és a vezetési sáv közötti tiltott zónák sáv szélességének különböző értéke. A gyémánt esetén a tilos sáv szélessége 300 K -on $\Delta E_{Gy} \approx 5,5\text{ eV}$, a szilícium-kristályé $\Delta E_{Si} \approx 1,25\text{ eV}$, a germániumé $\Delta E_{Ge} \approx 0,7\text{ eV}$. A három anyag sáv szerkezetét a sematikus ábra szemlélteti. Az ábra rajzolásakor a potenciális energia zérus szintjének a kristályból kiszabadult elektronok energiáját tekintettük (a három anyag esetén az elektronok kilépési munkája kb. 5 eV , egymástól alig különbözik).

Az ábrán a berajzolt elektronsávok szélessége csak jelzés értékű, de a vegyértéksáv és a vezetési sáv közti tilos sáv méretarányai hitelesek. Az ábra alsó tartományában a gyémánt a szilícium és a germánium alsóbb, telített elektronsávjait jeleztük.



18.5. ábra: A gyémánt, a szilícium és a germánium sematikus sáv szerkezete

A félvezetők és a szigetelők sáv szerkezetének hasonlóságát alacsony hőmérsékleten (0 K) az ábra mutatja. Az alsóbb sávok és a vegyértéksáv mindhárom anyagban telített. Az elektromos vezetés feltétele az, hogy a vegyérték sáv feletti üres vezetési sávba elektronok jussanak. Mivel a vegyértéksávot és a vezetési sávot elválasztó tilos tartomány szélessége a gyémánt esetében igen jelentős, a vegyértéksáv elektronjai esetén a termikus gerjesztés szinte lehetetlen, a gyémánt szigetelő. A szilícium- és a germániumkristályban a tiltott sáv szélessége lényegesen kisebb, mint a gyémántban, de alacsony hőmérsékleten még ez is túl nagy ahhoz, hogy a vegyértéksávból elektronok jussanak a vezetési sávba. $T = 0\text{ K}$ környezetében a szilícium és a germánium a gyémánthoz hasonlóan elektromos szigetelő.

Tiszta félvezetők áramvezetése

A félvezetők és a gyémánt közti különbség a hőmérséklet növekedésével válik jelentőssé. Magasabb hőmérsékleten termikus aktiválás hatására több-kevesebb elektron a legfelső, a vegyértéksávból – a tilos sávot átlépve – az eredetileg üres vezetési sávba kerülhet. Mivel a vezetési sávban nagyon sok szabad energiaszint betöltetlen, a vezetési sávba gerjesztett elektronok szabadon mozoghatnak. Az elektronok a külső telep elektromos teréből energiát vehetnek fel (mozgási energia) és irányított sebességük révén részt vesznek az áramvezetésben. Ez az áramvezetési mechanizmus nagyon hasonló a fémekéhez, ahol mozgó elektronok vezetnek

az áramot. A félvezetők esetében azonban az áram nemcsak a vezetési sávban mozgó elektronokhoz köthető, töltésmozgás lép fel a vegyértéksávban is. A vegyértéksáv lokalizált elektronállapotainak egy része megürül, amikor egyes elektronok a vezetési sávba gerjesztődnek. A hiányzó elektronok helyén képződő lyukak a vegyértéksávban is lehetővé teszik töltésmozgást. A kristályban lokalizált üres elektronállapotokat a szomszédos elektronok a külső elektromos tér irányával ellentétes irányból átlépve betöltik, miközben a lyuk az elektromos térerősség irányában mozdul el. A lyukak maguk elektronhiányos helyként relatív pozitív töltést képviselnek, így a lyukak tér által irányított mozgása hozzájárul a kristály áramvezetéséhez. A tiszta félvezető kristályokban az elektromos vezetés tehát kettős mechanizmussal valósul meg. A vezetési sávban szabad elektronok adnak áramjárulékot, míg a vegyértéksávban a pozitív töltésű lyukak ellentétes mozgása eredményez áramot. A két ellentétes töltés ellentétes irányú mozgása miatt a két különböző mechanizmusú áramjárulék összeadódik. Mivel a hőmérséklet emelkedésével az elektronok termikus gerjesztése fokozódik, az áramvezetésben résztvevő szabad elektronok és a lyukak száma együtt és gyorsan növekszik. A félvezetők vezetőképessége a hőmérséklettel exponenciálisan növekszik, a fajlagos ellenállás exponenciálisan csökken.

A tiszta félvezetők vezetőképessége nem csupán melegítés hatására változhat, de akár elektromágneses sugárzás hatására is. Ilyenkor a vegyértéksáv elektronjait az elektromágneses sugárzás gerjeszti a vezetési sávba, miközben a vegyértéksávban lyuk-állapotok maradnak vissza. Az elektronokgerjesztésének feltétele az, hogy az elektromágneses sugárzás fotonjainak energiája meghaladja a vegyérték-és vezetési sáv közti tilos sáv ΔE szélességét, azaz

$$\Delta E \geq hf$$

Megjegyzés:

- Az érdeklődő tanulók számára érdemes megjegyezni, hogy az atomrácsos kristályban az atomi energiaszintek felhasadásával kialakuló sávokat elválasztó tiltott sávok arra vezethetők vissza, hogy a kovalens hibrid-molekulapályák létrejöttkor a kötő- és lazítópályák jönnek létre, amelyek energiája eltérő. A kötő- és lazítópályák közti nagy energiakülönbség eredményezi a sávszerkezetben megjelenő tilos sávot. Alapállapotban (0 K-en) a kristály elektronjai a kötőpályákból kialakult vegyértéksáv szintjeit töltik fel. A gyémánt-típusú kristályok magasabb energiájú vezetési sávja ezért alapállapotban betöltetlen.

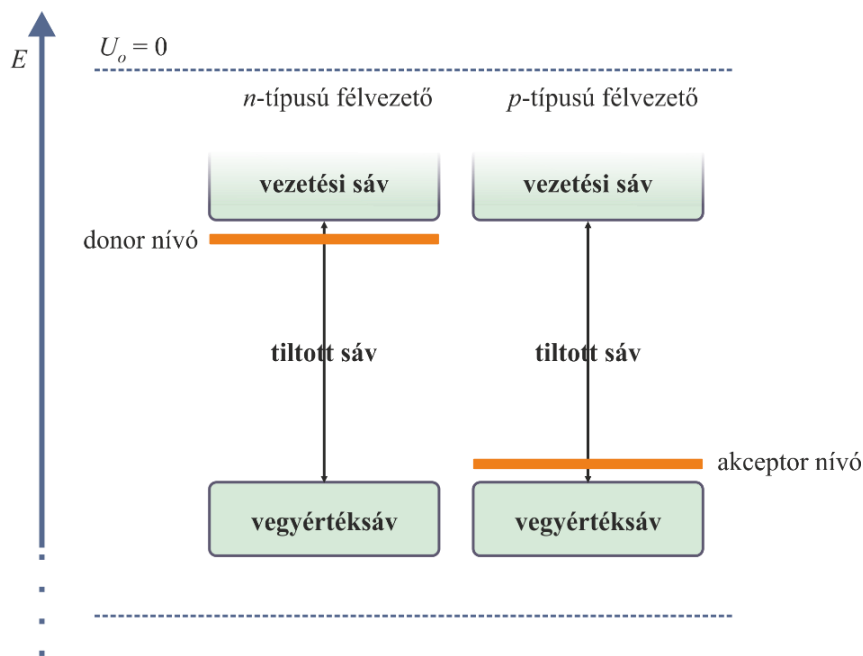
Szennyezett félvezetők sávszerkezete

A két legfontosabb félvezető elem a germánium (Ge) és a szilícium (Si). Gyakorlati felhasználhatóságát egyéb tulajdonságaik mellett a szennyezések hatására megjelenő új elektronállapotok – a sávszerkezet változásai – teszik lehetővé.

A leggyakrabban alkalmazott szennyezők a három, illetve öt vegyértékelektronnal rendelkező elemek. Három vegyértékelektronnal rendelkezik pl. a bór (B), az indium (In) és a gallium (Ga), ötten pedig az arzén (As), az antimon (Sb) és a foszfor (P). Ezek az elemek könnyen beépülnek a germánium-, illetve szilícium kristályrácsába, és módosítják az alapkristály sávszerkezetét.

Az *n*-típusú szennyezett félvezetők sáv szerkezete

Öt vegyértékű szennyező esetén az alapkristályhoz képest többletelektronok kerülnek a rácsba. Ezért az öt vegyértékű szennyezőket *donor* (adományozó) atomoknak nevezzük. A többletelektronok könnyen leszakadnak a szennyező atomról, azaz a kristályban könnyen delokalizálttá válnak. A szennyezőkön levő többletelektronok a tiszta félvezető tiltott sávjában a vezetési sáv közelében fekvő, ezért könnyen gerjeszthető energiaállapotokat hoznak létre.



18.6. ábra: *n*- és *p*-típusú szennyezett félvezetők sematikus sáv szerkezete

A donor nívóról az elektronok már kis termikus aktiválásra is, szinte maradéktalanul átjutnak a kristály vezetési energiasávjába. (Ez szemléletesen azt jelenti, hogy az ötödik elektron leszakad a kristályrácsba beépült szennyező atomról és delokalizálódik a kristályban.) A külső elektromos tér hatására ezek az elektronok vesznek részt a vezetésben. Az öt vegyértékű szennyezőket tartalmazó félvezetőket, a töltéshordozók (elektronok) negatív töltésére utalva *n-típusú* (negatív típusú) félvezetőknek nevezzük.

A *p*-típusú szennyezett félvezetők sáv szerkezete

A három vegyértékű szennyező atomok úgy tudnak jól beépülni a tetraédes kötésű Si vagy Ge kristályrácsába, ha elektronhiányukat pótolják. Mivel ezek az atomok az alaprács egyes elektronjainak befogására képesek, *akceptor* (befogadó) atomoknak nevezzük őket. Az akceptor szennyezők a tiszta félvezetők sáv szerkezetét úgy módosítják, hogy a tiltott sáv alsó részén, a vegyértéksáv közelében hoznak létre üres energianívókat (akceptor nívó). A vegyértéksáv elektronjai könnyen gerjesztődnek az akceptor nívóra, hiszen ehhez jóval kisebb energia kell, mint tiszta félvezetők esetén a tiltott sáv átlépéséhez (ábra). Külső elektromos tér hatására ezekben az anyagokban is áram indul meg. A töltésmozgás során a vegyértéksáv elektronjai gerjesztődnek a vegyértéksávban megüresedett olyan elektronállapotokba, amelyekből az elektronok a szennyezőkhöz kerültek. Egyszerűsödik a magyarázatunk, ha az

elektronok helyett az üres elektronállapotok, az ún. *lyukak*, mint pozitív töltéshordozók nyomom követésével írjuk le a vezetési folyamatot. Az elektron-hiányt jelentő lyukak olyan *pozitív töltéshordozóknak* tekinthetők, amelyek az elektronokkal ellenkező irányban mozognak. A pozitív töltéshordozókra utalva ezeket a félvezetőket *p-típusú* (pozitív típusú) félvezetőknek nevezzük. (A lyukak értelmezésével a [Fizika tanítása a középiskolában II.](#) EÁ7. mellékletben részletesebben foglalkoztunk.)

Természetesen a szennyezett félvezetők is elektromosan semleges anyagok. A szennyező atomok elektrontöbblete, illetve elektronhiánya csak annyit jelent, hogy ezek az atomok az alaprács atomjaihoz képest több vagy kevesebb könnyen leszakítható elektronnal rendelkeznek.

19. ELTÉRÉSEK AZ IDEÁLIS KRISTÁLYSZERKEZETTŐL. A KRISTÁLYHIBÁK

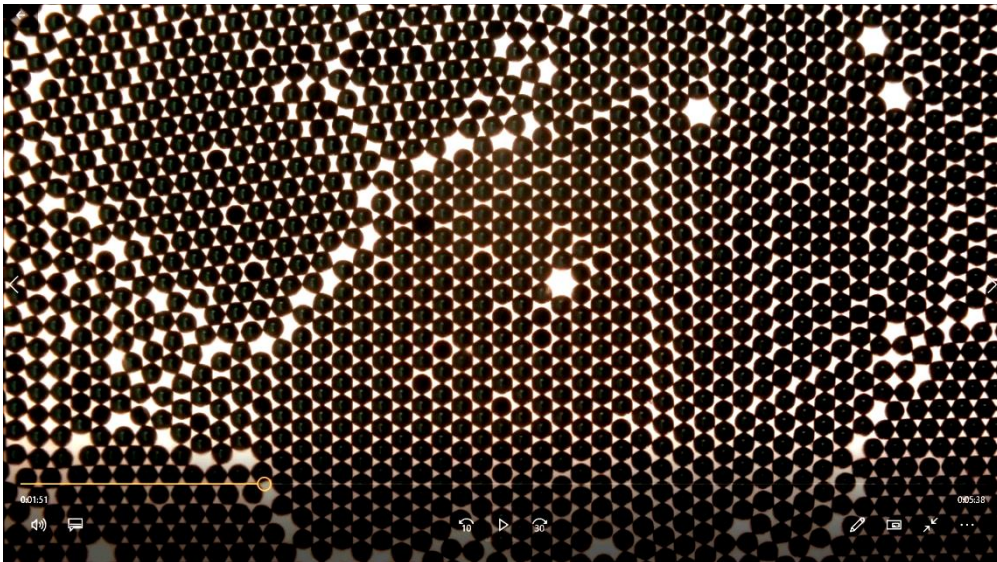
A kristályt ideálisnak vagy tökéletesnek nevezünk, ha minden atomja vagy ionja az adott szerkezet (kristályrács) által meghatározott helyen (rácspontban) helyezkedik el. A valóságban a kristályok atomi rendje sohasem teljesen tökéletes. A tökéletes kristály ideális rendjétől való eltéréseket *kristályhibáknak* vagy *rácshibáknak* nevezzük. A rácshibák egy része már a kristályosodás folyamán kialakul, például idegen atomok épülnek be a rácsba akár egyesével elszórtan (ilyenkor ponthibákról beszélünk) vagy csoportosan az alakristálytól eltérő szerkezetű zárványokat, úgynevezett fáziskiválásokat okozva. Lényegében speciális kristályhibáknak tekinthetők a polikristályos szerkezet belső kristályhatárai, ahol az atomok többsége a szomszédos tartományok egyikének rendjéhez sem illeszkednek jól.

Rácshibák a már kialakult kristályt érő külső hatásokra is képződnek. Tipikusan ilyenek hibák pl. a hőmérséklettől függő számban képződő rácslukak (vakanciák). Az atomok termikus mozgása ugyanis véletlenszerűen változó intenzitású, így időről időre előfordul, hogy egy-egy atom energiája eléri azt a kritikus értéket, ami már elegendő ahhoz, hogy a szomszédos részecskék vonzását legyőzve elhagyja helyét a rácsban, ami így üresen marad. A rácslukak száma exponenciálisan függ a hőmérséklettől. A rácslukaknak meghatározó szerepe van kristályokban az egyes atomok helyválttatásában. Az üres rácshely szomszédságában lévő atomok ugyanis viszonylag könnyen átléphetnek a szomszédos lyukba, így az eredeti helyén a rácsluk megszűnik, de a szomszédban megjelenik. Helycserés mozgás eredményeként a rácslukak egyenletesen eloszlásban véletlenszerűen „bolyonganak a kristályban. A folyamat akkor válik érdekessé, ha a kristályban lokális inhomogenitások vannak, ilyenkor ugyanis a rácscsoporthoz véletlenszerű bolyongása az inhomogenitás atomjaira is kiterjed, és az inhomogenitás lassan megszűnik, a benne csoportosult idegen atomok például egyenletesen szétoszlanak a kristályban (ez a folyamat a diffúzió). A diffúzióknak kiemelt szerepe van a fémötvözetek előállításánál, vagy a félvezetőgyártásban, ahol meghatározott vastagságú különbözően szennyezőket tartalmazott rétegek előállításánál a feladat.

A fémek jellemző tulajdonsága, hogy képlékenyen jól alakíthatók. Fontos, hogy a kristályok képlékeny alakítását speciális kristályhibák ún. *diszlokációk* mozgása eredményezi. A

diszlokációk a külső deformáló feszültség hatására nagy számban keletkeznek és mozdulnak el a kristály szomszédos rétegeinek elcsúszását eredményezve.

A kristályhibák egyszerű modell segítségével szemléltethetők. A modell két üveglap között elhelyezett több ezer apró acélgolyóból áll. Az üveglapokat kissé megdöntve golyók jól modellezik a fémkristályok spontán rendeződő atomjainak hatszöges szoros illeszkedését, a polikristályos szerkezet kialakulását, a tipikus kristályhibákat. A kristálymodell mechanikus rezgetésével a termikus mozgás is szemléltethető.



19.1. ábra: Polikristályos szoros illeszkedésű rácsszerkezet és kristályhibák szemléltetése kétdimenziós golyómodellel



ANY9. Merev golyókból álló kétdimenziós kristálymodell (kristály hibák szemléltetésére)

[Részletek >>>](#)



ANY10. Rézdrót alakítási keményedése

[Részletek >>>](#)



ANY11. Az acél edzése és megeresztése hőkezeléssel

[Részletek >>>](#)

Megjegyzés:

- A kristályhibák és a hozzájuk köthető jelenségek vizsgálata érdekes, de a középiskolában (főleg időhiány miatt) alig tehetünk többet, mint, hogy felhívjuk az érdeklődő diákok figyelmét a témakörre. E figyelemfelkeltés praktikus módja, ha néhány érdekes „élő” szakköri kísérletet, vagy azok video-felvételét mutatjuk be, és a látottakat az érdeklődőkkel megbeszéljük.

20. A FOLYADÉKOK SZERKEZETE

A folyadék állapot átmenetet képez az anyag szilárd és gáz halmazállapota között. Makroszkopikus fizikai tulajdonságai részben a gázok, részben a kristályos anyagok sajátosságaira emlékeztetnek. A folyadéknak nincs meghatározott alakja, mindig az edény alakját veszi fel (ebben a gázokhoz hasonlít); térfogata viszont állandó, megváltoztatásához nagy erőkre van szükség (ebben a kristályos anyaghoz hasonlít). A folyadékok sűrűsége gyakorlatilag megegyezik a kristályos állapotú anyag sűrűségével (általában annál 5...20% kal kisebb). A folyadékokban a diffúzió sebessége lényegesen nagyobb, mint a kristályokban, de kisebb, mint gázállapotban. A kristályok megolvasztásához szükséges energia (olvadáshő) sokkal kisebb, mint a folyadék elpárologtatásához szükséges energia (forráshő). Az olvadáshő és forráshő különbsége alapján (leszámítva a forrásnál jelentős térfogati munkát) következtethetünk az anyag belső energiájának változásaira. Eszerint a folyadékok energetikai szempontból közelebb állnak a kristályos anyagokhoz, mint a gázokhoz.

Ezen általános érvényű megállapításokon túl, a különböző folyadékok tulajdonságaiban lényeges különbségek is mutatkoznak. A fizikai tulajdonságokban jelentkező különbségek szerkezeti okokra vezethetők vissza. A folyadékokat szerkezeti szempontból öt nagy csoportra oszthatjuk:

- *egyszerű folyadékok* (olvadt fémek, cseppfolyós nemesgázok);
- *poláros folyadékok* (ionvegyületek olvadékai);
- *molekuláris folyadékok* (a molekulák dipólus tulajdonságúak);
- *asszociált folyadékok* (víz, glicerin);
- *óriásmolekulájú anyagok* (olajok, műanyagok stb.).

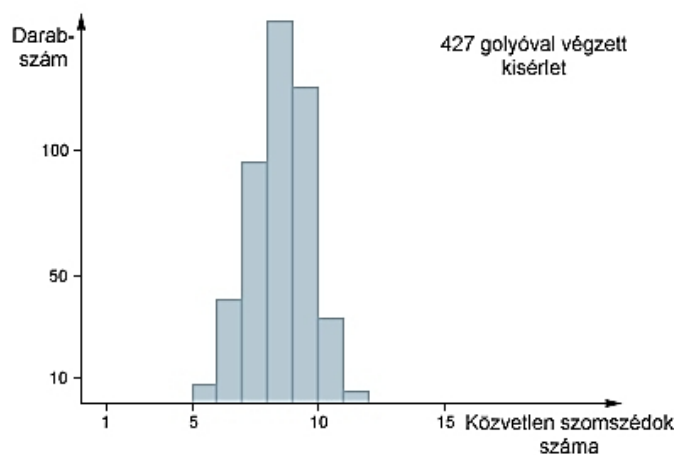
A következőkben az egyszerű folyadékok és a víz (asszociált folyadék) szerkezetével foglalkozunk részletesebben.

20.1. Az egyszerű folyadékok Bernal-féle golyómodellje

A tiszta fémek szerkezeti szempontból a legegyszerűbb anyagok közé tartoznak. Az olvadásponthoz közeli hőmérsékleten a fémolvadékok sűrűsége, összenyomhatósága a kristályállapotú fémekével közel azonos. A fémek azonos atomokból felépülő

kristályszerkezete a legtöbb esetben maximális sűrűséggel egymásra helyezett golyókkal modellezhető. E tényből indulva *Bernal* a 20. század harmincas éveiben a fémolvadékok szerkezetét is golyósokasággal modellezte. Bernal egy rugalmas hálót sok (kb. 400) egyforma acél csapágygolyóval töltött meg. A golyókat nem rendezte el, csak egyszerűen egymásra dobálta, végül a hálót szorosra húzta. Azt tapasztalta, hogy az így egymásra dobált golyósokaság térfogata mindössze 15-20%-kal nagyobb annál a térfogatnál, amelyet ugyanennyi golyó a szoros, kristályos rendbe rakva töltene ki. Ez a térfogatváltozás jól egyezik a fémek olvadásakor mérhető térfogat-növekedéssel.

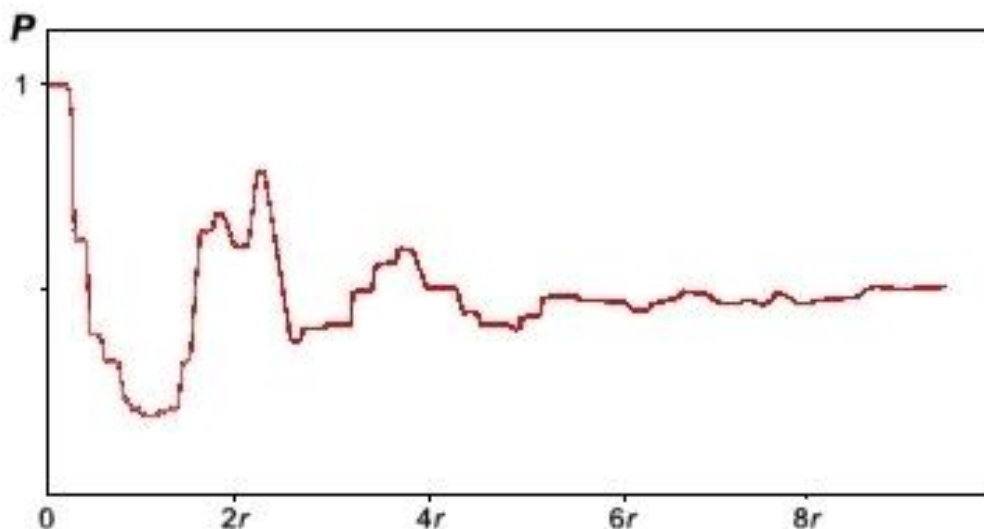
Bernal kimutatta, hogy a rendezetlenül egymásra dobált golyók egymáshoz illeszkedésében statisztikus törvények jelentkeznek. A hálóban összehúzott golyósokaságot festékbe mártotta, majd miután a festék megszáradt, szétszedte a golyókat. Ahol a golyók egymáshoz nyomódtak, ott nem lettek festékesek, és így utólag megállapítható volt, hogy egy-egy golyó hány másikkal érintkezett. A vizsgálat eredményét Bernal gyakorisággörbén ábrázolta:



20.1. ábra: 427 golyóval végzett modellkísérlet eredménye: a közvetlen szomszédos golyók számának gyakoriságát mutatja

A diagramról leolvasható, hogy a felhasznált 427 golyóból hánynak volt 5, 6, . . . , 12 szomszédja. (Bernal tapasztalatai szerint minden golyónak legalább 5, de legfeljebb 12 közvetlen szomszédja volt.) A gyakorisággörbe azt mutatja, hogy egy golyó legnagyobb valószínűséggel 9-10 szomszédal érintkezett. A szoros térkitöltésű kristályszerkezetben minden atomot 12 másik vesz körül. A kristályos szerkezetekben és a folyadékszerkezeti modellben tehát a közvetlen szomszédos részecskék száma nem nagyon tér el egymástól. Ebből az sejthető, hogy folyadékállapotban az atomok többségének közvetlen környezete – a szomszédos atomok számát tekintve – nem sokban különbözik a kristályszerkezetre jellemző elrendeződéstől. A modell további vizsgálata azonban egyértelműen megmutatja, hogy ez a hasonlóság csak néhány atomátmérőnyi távolságig figyelhető meg. Bernal meghatározta a golyók távolabbi szomszédjainak (másod-, harmad- stb. rendű szomszédok) számát és elrendeződését is, és azt tapasztalta, hogy ezek számában egyre nagyobb a véletlenszerű ingadozás.

A folyadékszerkezetet modellező golyók egymáshoz viszonyított elhelyezkedése a $P(r)\Delta v$ valószínűségfüggvénnyel jellemezhető. Ez a függvény azt adja meg, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott golyótól sugárirányban távolodva mekkora valószínűséggel található újabb golyó. A függvényt – mivel a különböző távolságokra levő golyópárok előfordulásának valószínűségét adja meg – *párkorrelációs függvénynek* nevezik. A 20.2. ábra 1000 golyóval végzett kísérlet eredményét mutatja.



20.2. ábra: 1000 golyóval végzett számítógépes modellkísérlet a szerkezet párkorrelációs függvényét mutatja

A grafikon origója a kiválasztott atomhoz van rögzítve, a vízszintes tengelyen ettől a központi atomtól mért távolságot skáláztuk be az atomsugárral, a függőleges tengelyen pedig annak valószínűségét mértük fel, hogy az adott távolságban található-e atom. A bemutatott görbén – az origótól távolodva – a maximum- és minimumhelyek szabályosan követik egymást, a szomszédos szélsőértékek különbsége azonban gyorsan csökken. A központi atomtól 4-5 atomátmérőnyi távolságban a grafikon kisimul.

A párkorrelációs függvény segítségével megadható az önkényesen választott (központi) részecskétől r távolságban elhelyezkedő Δr vastagságú gömbhéj térfogatban levő atomok ΔN száma:

$$\Delta N = 4\pi N_o P(r)r^2 \cdot \Delta r$$

ahol N_o a térfogategységre jutó részecskeszám.

Bernal egyszerű golyómodellje a fémolvadékok szerkezetéről jó képet ad. A modell mellett, hogy tükrözi a kristályos fém és az olvadék sűrűségviszonyait, a folyadékokon végzett diffrakciós kísérletek eredményeivel is egyezésben van.

Fel kell azonban hívnunk a figyelmet a golyómodell és a folyadékok valódi szerkezete közti lényeges különbségre! A Bernal-modellben a golyók mozdulatlanok, míg a folyadékokban az atomok állandó mozgásban vannak. A golyósokaság elrendeződését a folyadék szerkezetét jellemző „kimerevített” pillanatfelvételnak kell tekintenünk. Közöséges körülmények között a folyadékban a hőmozgás pillanatról pillanatra (másodpercenként kb. 10^4 -szer) felbomlasztja, majd kis változtatással újra létrehozza a modellben megfigyelt jellegzetes

atomcsoportosulásokat. Az atomok illeszkedése tehát egy-egy tartományon belül folyamatosan változik, de a folyadék egészét tekintve a kép változatlan. Bernal sztatikus modellje ezt az átlagos szerkezetet érzékelteti.

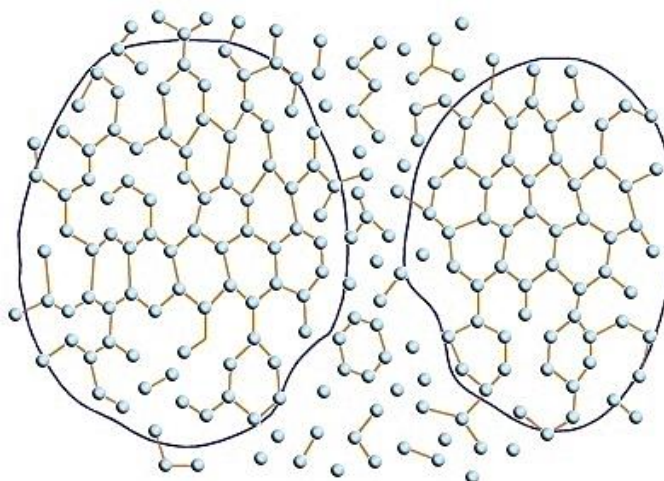
A víz, mint asszociált folyadék

A víz tulajdonságai közül a természettudományos tantárgyakban sok-sok ismeretet adnak, de a víz szerkezeti tulajdonságairól nemigen esik szó. Ennek az az oka, hogy a víz szerkezete nem olyan egyszerű, mint a fémolvadékoké, amit egyszerűen egymásra dobált golyósokasággal modellezhetünk. A folyadékállapotú víz szerkezeti alapegységét molekulákból összeállt (asszociált) molekulacsoportok alkotják. Ezért a víz az „asszociált folyadékok csoportjába tartozik.

A víz szerkezeti modellje

A víz szerkezetéről, molekuláinak elrendeződéséről diffrakciós szerkezetvizsgálatok adnak közvetlen információt. Ezek a vizsgálatok azt mutatják, hogy a cseppfolyós vízben egy-egy molekulát átlagosan alig több mint négy másik molekula fog közre. A közvetlen szomszédok száma a hőmérséklet növekedésével ugyan kissé nő, de ez a szám még 80 °C-on is átlagban csak 4,9. A diffrakciós vizsgálatok tehát egyértelműen mutatják, hogy a víz szerkezetét nem lehet a Bernal-féle golyómodell szerint elképzelni, hiszen a Bernal-modellben egy-egy golyó közvetlen szomszédjainak átlagos száma kb. 10.

A víz – szerkezeti szempontból – a *jégkristállyal* (lásd a [17.1.4.](#) pontot) mutat erős hasonlóságot. A víz molekulacsoportjaiban a vízmolekulák, a jégbelihez hasonlóan, *H-híd* kötésekkel kapcsolódnak egymáshoz. A vízben a H₂O-molekulák viszonylag nagyméretű csoportokba szerveződnek. Ilyen csoportokhoz tartozik a molekulák mintegy 70%-a. A csoportok 20 °C-on átlagosan 80-90 molekulából állnak. A csoportokban a molekulák H-híd kötéssel kapcsolódnak össze. Az összekapcsolódó molekulák többsége a jég szerkezetéhez hasonlóan tetraédres irányokban kötődik, de a kiszemelt molekula négy lehetséges szomszédjából gyakran hiányzik egy-kettő. A nagyméretű molekulacsoportok közötti tartományokat magányos, illetve kettesével, hármassával összeálló, esetleg hatos gyűrűkbe kapcsolódó molekulák töltik ki, véletlenszerű elrendeződésben. Feltehetően az sem ritka, hogy a laza, jég szerkezetű rajok belső üregeiben, csatornáiban magányos vízmolekulák helyezkednek el. A víz szerkezetét a 20.3. ábra segít elképzelni.



20.3. ábra: A víz szerkezete H-híd kötésekkel összekapcsolt kisebb-nagyobb molekula csoportokból áll

A víz szerkezetét azonban nem szabad statikusnak képzelnünk. A H-híd kötés ugyanis 0 °C fölött – a molekulák hőmozgása miatt – csak igen rövid élettartamú. Egy-egy kötés másodpercenként átlagosan 10^{10} -szer felbomlik, majd újjáalakul. A molekulacsoportok ennek megfelelően állandó változásban vannak, részlegesen vagy teljesen felbomlanak, átszerveződnek. (A csoportok felbomlásában szerepet játszanak a rendezett tartományok között levő magányos molekulák is. Ezek ugyanis kis tömegük következtében gyorsan mozogva szüntelenül „bombázzák” a csoportokat.) A víz szerkezete tehát folytonos átalakulásban lévő dinamikus egyensúlyi szerkezet. A víz sajátos fizikai tulajdonságai a víz asszociált molekula csoportokból álló mikroszerkezetével értelmezhetőek.

WWW

[Tasnádi Péter, Illy Judit: Víz a légkörben és a talajban](#)



WWW

[Tasnádi Péter, Weidinger Tamás: A víz különleges tulajdonságai](#)



WWW

[Weidinger Tamás, Tasnádi Péter: Víz a légkörben](#)



Megjegyzés:

- Alsóbb évfolyamokon a tanítás során elterjedt, hogy a víz molekuláris szerkezetét a pohárba öntött acélgolyókkal, vagy borsószemekkel modellezzük. Valóban számos hasonlóságot találunk a golyósokaság tulajdonságai és a vízzel végzett kísérletek között. A golyósokaság felveszi a tartóedény alakját, szabad felszíne (is kocogtatás után) közel vízszintes. Ha a poharat megdöntjük, a golyók elgurulnak egymáson és kiömlenek az edényből, mint a pohárból a víz. Az érdeklődő osztályokban gyakran bemutatott kísérlet a víz és az alkohol térfogatcsökkenéssel történő elegyedése, amiből

az a fontos következtetés vonható le, hogy a részecskék nem töltik ki teljesen a folyadék makroszkopikus térfogatát, és az üres tartományokat alkalmas másik folyadék részecskéi elfoglalhatják. (A víz esetén az alkalmas folyadék az alkohol.) A tanulságos kísérletet gyakran modellezve is bemutatjuk, a vizet nagyobb, az alkoholt kisebb golyókból álló sokaság képviseli. Ha a nagyobb golyók tetejére öntjük a kicsiket és a keveréket kicsit rázogatójuk, a nagyobb golyók közti hézagokat a kisebb golyók kitöltik és a keverék térfogat a kisebb lesz, mint a két kezdeti golyósokaság térfogatának összege. A két kísérlet kétségtelenül érdekes és látványos, de az önállóan gondolkodó diák számára könnyen félreérthető. A víz ugyanis jóval kisebb molekulákból áll, mint az alkohol. A modellkísérletben a nagyobb golyók nem a vízmolekulákat jelenti, hanem az asszociált molekulákból összeálló átlagos méretű csoportokat, míg a kis modellgolyók az alkohol molekulát, amelyek a H₂O-molekulacsoportok közti hézagokat töltik ki. Természetesen az értelmes diáknak meg lehet magyarázni a modellkísérletet, de ezzel a kísérlet már elveszíti szemléletes egyszerűségét.

- A vízzel kapcsolatos ismeretek az összes természettudományos tantárgyban szerepelnek. A természettudományok kapcsolódásának bemutatására az iskolában szükség van. A vízhez kapcsolódó témák körbejárása integrált projekt-program keretében jó lehetőséget kínál a középiskola alsóbb és felső évfolyamai számára. A fizika tantárgy részéről több téma alkalmas a komplex tárgyalásra. Ilyen pl. a víz szerkezete és a fizikai tulajdonságok kapcsolata, ami a kémia részéről jól bővíthető például az oldódás, a vízszennyezés, illetve víztisztítás problémakörével, biológiából a víz élettani szerepével stb. Földrajz már önmagában is számos olyan vízzel kapcsolatos témával foglalkozik, amelyhez a társtantárgyak is érdemben kapcsolódni tudnak. Ilyen pl. a víz szerepe a légkörben, mindennapi környezetünkben, klímaváltozásban stb. Hasonlóan gazdag témát jelent a vízienergia kérdésköre is. E projekt témák különösen akkor lehetnek értékesek, ha az elméleti kérdések tárgyalása mellett sok gyakorlati tevékenységet, terepi programot tartalmaz.

20.2. Az üvegek szerkezete

A szilárd állapotú anyagok alakja, térfogata állandó, illetve csak nagy erők hatására változik meg. A kristályos szerkezetei anyagaink mellett, ilyenek anyagok az üvegek is. Köznapi életben az „üveg” szó anyagfajtát jelent, amit szakszerűen szilikát-üveggé kellene megneveznünk, (pl. ablaküveg, poharak, palackok).

Anyagfizikai szempontból az *üveg* az anyag sajátos állapotát jelenti. Az üvegek bár mechanikai szempontból szilárd anyagok, mikroszerkezetüket tekintve tulajdonképpen nagy viszkozitású folyadékok, amelyek megőrizték a korábbi olvadékalapokra jellemző rövidtávú atomi rendeződést mutató szerkezetüket. A lényegi különbség a folyadék és az üvegállapot közt az, hogy amíg a folyadékokban az erős hőmozgás aktuális kapcsolódási mintázata folytonosan változik, felbomlik és kissé másként újra kialakul, addig az üvegekben a hőmozgás hiányzik („befagyott”) és az üveg atomi szerkezete hosszú ideig változatlan.

Az üveg-állapot termodinamikai értelemben nem stabil, de kristályosodása normál földi viszonyok között nem, vagy csak nagyon hosszú idő alatt következik be. Üveg-állapot anyagok közül a már említett szilikátüvegek a legismertebbek, de vannak polimer üvegek, sőt fémüvegek

is. Az üvegállapot a legtöbb olvadék megfelelően gyors lehűtésével megvalósítható. Ehhez az olvadékot olyan gyorsan kell lehűteni, hogy az atomi alkotórészek kristályrácsba rendeződése ne történjen meg. Szilikátüveg-olvadék esetén szobahőmérsékleti környezetben ez jelenti a természetes megszilárdulást. Magyarázata az, hogy a nagy szilikácionok mozgása nagyon gyorsan csökken a hűlés során, miközben a kristályos szilikátszerkezet bonyolultsága miatt a kristálygócok kialakulása sok időt kívánna. Óriásmolekulájú polimer anyagok esetén a molekulák alakja nehezíti, illetve teszi eredménytelenné a kristályosodást. Különleges csoportot képeznek az üvegfémek. A fémolvadékok természetes hűlés során jól kristályosodnak, az üvegállapot előállításához az olvadék nagyon gyors lehűtésére van szükség (hűtési sebesség $10^5 \dots 10^6 \text{ }^\circ\text{C/s}$). Az első üvegfémeket tudományos érdekességgként állították elő az 1960-as években. Az üvegfémek külső megjelenése a kristályos fémekéhez hasonló. Fémcsillogásuk, jó elektromos vezetőképességük bizonyítja, hogy atomjaikat fémes kötés kapcsolja össze. Az üvegállapotú fémek azonban egy sor lényeges tulajdonságban eltérnek a kristályos fémektől. Szerkezetük instabilitását mutatja, hogy egyes fémüvegek, ha meggyújtják őket, lángolva égnek. Mechanikai tulajdonságaik (kopásállóság, nagy rugalmasság, nagy szakítószilárdság) és mágneses tulajdonságaik miatt a fémüvegek az elkövetkező évtizedekben várhatóan fontos ipari alapanyagokká válnak.

20.3. A folyadékkristályok

A folyadékkristályok olyan anyagok, amelyek mind szerkezetüket, mind fizikai tulajdonságaikat tekintve átmenetet mutatnak a kristályos szilárd anyagok és a folyadékok között.

Folyadékkristályok nagy, hosszúkas, a hossz tengelyük irányában poláros molekulák részleges rendeződésével keletkezhetnek. A molekulák tengelye az anyag viszonylag nagy tartományában rendeződik, egymással többé-kevésbé párhuzamosan áll be -ez a hosszútávú rend kristályos sajátosság. A molekulák tömegközéppontjai azonban a folyadékokhoz hasonlóan véletlenszerűen oszlanak el, elhelyezkedésük a folyadékokra jellemző rövidtávú rendet mutatja. Ez a molekulák elhelyezkedésében tapasztalható rendezetlenség, illetve a tengelyállás irány szerinti rendezettsége határozza meg a folyadékkristályok tulajdonságait. A rendezetlenséggel magyarázható a folyadékkristályok széles tartományban változó, a folyadékokhoz hasonló viszkozitása. A molekulák irányítódása következtében a folyadékkristályok a valódi kristályokhoz hasonló optikai anizotrópiát, kettőtörést (lásd [F40.](#)) mutatnak. A folyadékkristályokat leggyakrabban optikai kijelzők és érzékeny, felületi hőmérők készítésére használják. A folyadékkristályos óraszámplapok, műszerkijelzők vagy tv-képernyők működése azon alapul, hogy a folyadékkristályok optikai tulajdonságai elektromos térben megváltoznak. $0,5 \dots 10 \text{ V}/\mu\text{m}$ – elektromos tér hatására már vékony ($10 \dots 50 \mu\text{m}$ vastagságú) folyadékkristály filmek is megváltoztatják a rajtuk áthaladó fény erősségét, irányát, illetve polarizációs állapotát.

Egyes folyadékkristályokban az elektromos feszültség hatására ugyanis a folyadékkristály poláros molekulái az elektródák felé mozognak, s az eredetileg lényegében nyugvó anyagban örvényes áramlás keletkezik, amely megszünteti a réteg átlátszóságát. Más esetekben a kettősen törő kristály az elektromos tér hatására eltérő mértékben forgatja el a poláros fény síkját. Így ha

átlátszó és tükröző elektróda közé fogott folyadékkristály-rétegre feszültséget kapcsolunk, akkor a visszavert fényt ennek segítségével módosíthatjuk. Ha az elektródákat négyzetekre osztjuk, s az egyes négyzetekre különböző feszültséget kapcsolunk, akkor akár 200 vonal/cm felbontóképességű kijelzőt is készíthetünk.

Egyes folyadékkristályok színe kicsiny, helyi hőmérsékletkülönbségek hatására megváltozik. Ennek segítségével felületek mentén „hőmérsékleti térképek” készíthetők. (Korai stádiumában kimutatható pl. egy daganat, mert környezetében a hőmérséklet kissé magasabb.)

21. AZ ÓRIÁSMOLEKULÁJÚ ANYAGOK (MŰANYAGOK) TULAJDONSÁGAI

A korábbiakban tárgyalt kristályos anyagok és folyadékok szerkezeti alapegységeit atomok, vagy néhány atom összekapcsolódásával kialakult molekulák képezik. Az ilyen szerkezetű anyagoktól lényegesen eltérő fizikai tulajdonságokkal rendelkeznek az ún. *óriásmolekulájú* (*makromolekulájú*) anyagok. Ezek szerkezeti felépítésével a szerves kémia foglalkozik. Az óriásmolekulák több tízezer atom összekapcsolódásával jönnek létre. Vannak köztük természetes anyag (pl. a *természetes gumi*, a növényi rostok anyagát adó *cellulóz*, a *gyapjú* és a *hernyóselyem* anyaga, az élő szervezetekben a fehérjék stb.) és szinte megszámlálhatatlanul sok mesterségesen előállított óriásmolekula.

Valamennyi óriásmolekula közös sajátossága, hogy egyszerűbb szerkezeti egységek, ún. *monomermolekulák* összekapcsolódásával – *polimerizációjával* – jönnek létre. A makromolekulák kialakulására utalva nevezik az ilyen anyagokat gyakran *polimeranyagoknak*. A polimerek, elsősorban a mesterségesen előállított anyagok, ipari jelentősége rohamosan növekszik. Széles körű felhasználhatóságuk döntően sajátos mechanikai tulajdonságaiknak köszönhető. Érdekes sajátosságuk, hogy mechanikai tulajdonságaikat (de a többi fizikai tulajdonságukat is) nem annyira a kémiai összetétel, mint inkább a molekulák geometriai alakja és összekapcsolódásának módja határozza meg. Gyakran kémiailag igen különböző anyagok mutatnak azonos fizikai tulajdonságokat, így például a természetes gumi és a szilikongumi, a selyem és a különböző műselymek stb.

Mivel a mesterséges polimerek a fizikai tulajdonságaik alapján a mindennapi gyakorlatban számos természetese óriásmolekulájú anyagot helyettesíthetnek, gyakran nevezzük *műanyagoknak*.

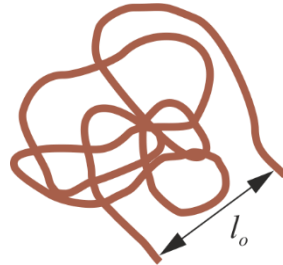
Az óriásmolekulák morfológiai szempontból két nagy csoportba sorolhatók. Megkülönböztethetünk *láncmolekulájú anyagokat* és *térhálós szerkezetű polimereket*.

A láncmolekulájú anyagok hosszú, sorban – láncszerűen – összekapcsolódó monomer egységekből épülnek fel. (A hosszú láncok gyakran leágazásokat is tartalmaznak.) Az ilyen anyagok melegítés hatására fokozatosan lágyulnak (hőre lágyuló műanyagok vagy elasztomerek), oldószerekkel oldhatóak. Ebbe a csoportba tartozik például a *polietilén*, *polipropilén*.

A térhálós szerkezetű anyagok a tér minden irányába erős kovalens kötéssel összekapcsolódó egységekből épülnek fel. Az ilyen műanyag melegítéssel nem lágyítható, oldószerek hatására legfeljebb megduzzad (oldószert fogad magába), de nem oldódik fel. Térhálós szerkezetűek a különböző műgyanták. A következőkben a láncmolekulájú polimerek egyes jellemző tulajdonságainak tárgyalására szorítkozunk.

A molekulalánc tulajdonságai

A hosszú molekulalánc összeilleszkedő egységei közt nincs merev kapcsolat. A monomerek, a valódi láncok szeméihez hasonlóan, többé-kevésbé szabadon elfordulhatnak egymáshoz képest. Az elforduláshoz szükséges energiát a termikus fluktuációk biztosítják, így egy-egy molekulán belül hol egyik, hol másik „láncszemnél” következik be véletlenszerű elfordulás. A molekula tehát gyakorlatilag sohasem egyenes lánc, hanem pillanatról pillanatra változó alakú láncgombolyag. A molekulagombolyagot azzal a l_0 távolsággal jellemezhetjük, ami két szabad vége között a leggyakrabban mérhető (lásd 21.1. ábra)



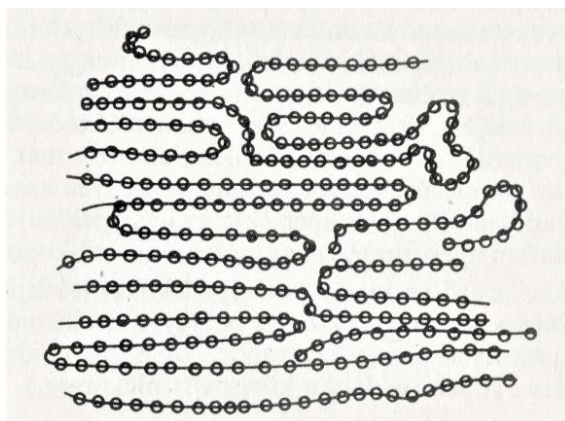
21.1. ábra: A láncmolekula hőmozgás miatt folytonosan változó alakja gömbszerűnek képzelhető

A láncmolekulák véletlenszerű felgombolyodása alapvető a polimerek fizikai tulajdonságainak kialakításában. Egyetlen óriásmolekula tulajdonságainak ismerete azonban kevés a makroszkopikus anyag viselkedésének megértéséhez. Ehhez ismernünk kell, hogy a láncmolekulák hogyan szerveződnek anyaggá, vagyis a szomszédos molekulák közt milyen a kapcsolat.

A láncmolekulák szerveződése

„Kristályos” polimerek

A hosszú molekulaláncok közt fellépő kötés általában gyenge van der Waals-kötés. Ha a láncot alkotó atomcsoportok mérete olyan (általában kicsi), hogy sok atom kerülhet egymás közelébe, akkor az egyenként gyenge másodlagos kötések megsokszorozódó hatása szilárd kapcsolatot hoz létre a molekulaszakaszok között. Ekkor a molekulaláncok szorosan egymás mellé illeszkedve rendeződnek. A rendeződés általában egy-egy lánc fölhajtogatódásával indul meg, majd más láncok csatlakozásával gyakorlatilag az egész anyagra kiterjedhet. A láncmolekulák ilyen rendeződését, amelyet a kristályosodás sajátos típusának tekinthetünk, a 21.2. ábra szemlélteti.



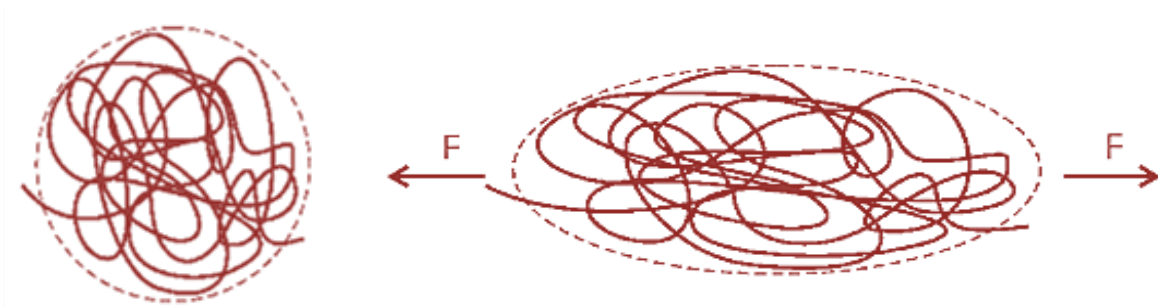
21.2. ábra: Részlegesen rendezett láncmolekulák

A „kristályos” szerkezetű műanyagokban a molekulaláncok rendezettsége azonban sohasem tökéletes, ahogyan ez az ábrán is megfigyelhető. A rendezett láncok közt viszonylag nagy tartományokat kuszált molekulaláncok töltenek ki. A molekulák rendezettsége következtében az ilyen anyagok fizikai tulajdonságai irányfüggést mutatnak. (Az anyag nyújthatósága például eltérő a hajtogatott láncokkal párhuzamos és az arra merőleges irányban; egyes átlátszó anyagok optikailag kettőtörők stb.) Az anyag tulajdonságait azonban a rendezetlen tartományok is befolyásolják. Ezeknek tulajdonítható például, hogy az ilyen műanyagokból készült tárgyak (pl. polietilénből, polipropilénből készült edények, játékok) „törhetetlenek”. Az anyagot érő hirtelen ütésre ugyanis a rendezetlen molekulaláncok szinte akadálytalanul mozdulnak el, és ezzel felemésztik az ütés energiáját.

Gumiszerűen rugalmas anyagok

A gumiszerűen rugalmas polimerek a makromolekulájú folyadékokhoz hasonlóan felgombolyodott és egymásba kuszálódott láncmolekulákból épülnek fel. A láncmolekulák azonban egy-egy ponton erős kémiai kötéssel kapcsolódnak egymáshoz. Ezek a kötések nem befolyásolják a köztük eső láncszakaszok szabad hőmozgását, a molekulák egymástól való elszakadását azonban meggátolják. Az ilyen anyagok tehát nem folynak szét, állandó határozott alakkal rendelkeznek. Erő hatására a gumiszerű anyagok rugalmasan deformálódnak. Ez az alakváltozás rendszerint nagymértékű, és nem követi a kristályos anyagok rugalmas deformációját leíró Hooke-törvényt.

A mikroszerkezeti kép alapján könnyen megérthető a gumi rugalmas viselkedése. Egyszerű befőttesgumi nyújtásával is tapasztalhatjuk, hogy a gumi szál aránylag könnyen, eredeti hosszának többszörösére nyújtható. Ezután azonban a további nyújtáshoz szükséges erő ugrásszerűen megnő, és a szál hamarosan elszakad. A kezdeti (kis feszültség hatására bekövetkező) nagy relatív alakváltozásnak az az oka, hogy a hőmozgás miatt felgombolyodott molekulák a húzás hatására könnyen kiegyenesednek. Az erőhatás megszűntével a hőmozgás újra összekuszálja a láncokat.



21.3. ábra: A hőmozgás hatására felgombolyodott láncmolekula alakja húzóerő hatására megváltozik, a láncok részlegesen kiegyenesednek, és az erő megszűnésével ismét összegubancolódnak.

Ha a molekulaláncok már kiegyenesedtek, további alakváltozás már csak akkor lehetséges, ha az atomok közötti távolság változik. Innentől kezdve a gumi nyúlására érvényes a Hooke törvény.

Megjegyzés:

- A gumi gyakorlati alkalmazásai mellett a statisztikus fizika elemi tárgyalásában jól használható modell-anyag is.



[A gumi rugalmas és termikus tulajdonságai](#)

(fakultatív szakköri anyag)



Óriásmolekulájú „folyadékok”

A láncmolekulájú anyagok kristályosodásának feltétele az, hogy a molekulákat alkotó atomcsoportok mérete és alakja lehetővé tegye a láncok szoros egymás mellé simulását. Amennyiben a molekulaláncokhoz oldalcsoportok is kapcsolódnak, a láncok rendeződési készsége csökken. Az oldalcsoportok miatt csak néhány pontban érintkeznek a molekulák, ezért a közöttük kialakuló kötés gyenge. Míg a rendezett polimerláncok kötéseinek felszakításához szobahőmérsékleten a termikus energia nem elég (az anyagot ehhez fel kell melegíteni), addig az oldalcsoportokat is tartalmazó láncok közti kötések felszakítására gyakran már a szobahőmérsékletre jellemző hőmozgás is elegendő. Az ilyen anyag a szabad molekulához hasonlóan láncgombolyagokból áll, a különböző láncok azonban többszörösen is egymásba gubancolódnak. Mivel a molekulaláncok már kis nyíróerők hatására is elcsúszhatnak egymáson, az ilyen anyagok viszkózus folyadékok. (Szobahőmérsékleten ilyen például a szurok, a vulkanizálatlan nyersgumi, a nagymolekulájú szilikonolajok stb.)

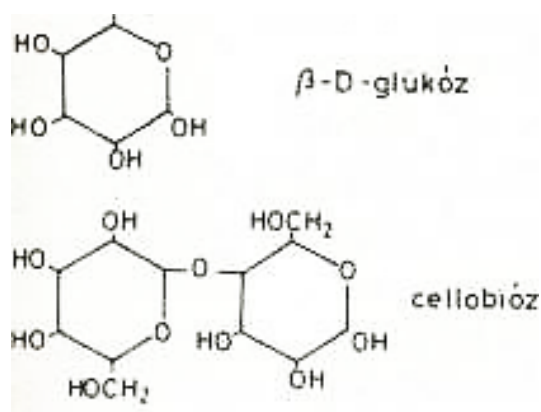
Ha ezeket az erősen viszkózus folyadékokat lehűtjük, az összekuszálódott láncok hőmozgása befagy, a molekulák alakja állandósul – polimer-üveget kapunk. Az anyag az üveghez hasonlóan rideg, törékeny, ilyen például a közismert *plexiüveg*.

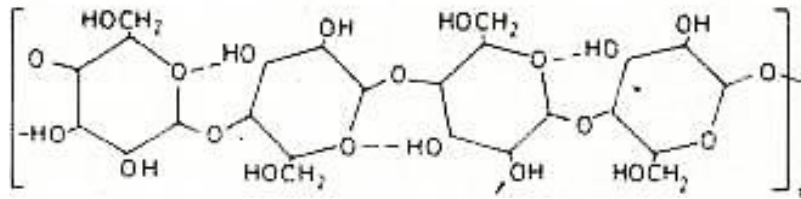
Rögzített térszerkezetű óriásmolekulák, biopolimerek

Az óriásmolekulák a természetben meghatározó jelentőségűek. Az élő szervezetek vázanyagát adják (a növényvilágban ilyen a cukor-molekulákból felépülő láncmolekula a cellulóz, az állati szervezetekben a fehérjék szinte minden területen a meghatározók. Az óriásmolekulájú anyagok élettani szerepével a biológia tantárgy foglalkozik. A fizika szempontjából a biopolimereket az teszi kiemelten érdekessé, hogy az anyag legmagasabb szinten szerveződő formáit jelentik. Az óriásmolekulák sok százezer molekuláris egység összekapcsolódásával jönnek létre. A polimermolekulák élettani funkciója szempontjából elsődleges fontosságú kovalens kötéssel összekapcsolódó monomer egységek kémiai összetétele, de nem kevésbé meghatározó az óriásmolekula alaki tulajdonsága is. A biopolimer molekulák térbeli alakja rögzített, a térszerkezetet az óriásmolekula egyes molekuláris részei közötti másodlagos kémiai kötések rögzítik. A belső kötések révén állandó térszerkezetű molekulák általában nem magányosak, de szabályos rendszerben egymáshoz is kapcsolódnak. A biopolimerek kémiai és fizikai tulajdonságait a szerkezet e hármas szerveződése biztosítja.

A növények tartószerkezete – a cellulóz

A növények szárát alkotó szövetekben a sejtek fala szilárd. A sejtfaalak párhuzamosan rendeződött hosszú rostokból állnak. A rostok anyaga láncmolekulájú cellulóz. A cellulóz-láncmolekulák szabályosan ismétlődő szőlőcukor-molekulákból (β -D-glükóz) állnak. Minden szőlőcukor-molekulákból hat szénatomot tartalmaz. Ezek közül öt egy oxigénatom közvetítésével gyűrűvé kapcsolódik össze, a hatodik oldalról tapad a gyűrűre. A szénatomokhoz hidrogénatomok és poláros OH-csoportok kapcsolódnak. A szőlőcukor-molekulák ún. polikondenzációval kapcsolódnak lánccá. (A polikondenzáció során minden újabb β -D-glükóz-egység csatlakozásakor egy H_2O -molekula válik szabaddá.) A két kapcsolódó molekula között a kötés azáltal jön létre, hogy a két szomszédos egységhez tartozó egy-egy -OH-csoportból, egy önálló vízmolekula kilépésekor egyetlen oxigén marad vissza, amelyik egyik vegyértékével az egyik, másikkal a másik glükózegységhez kapcsolódik. A 21.4. ábra kémiai képletekkel illusztrálja a cellulózmolekula felépülését a β -D-glükóz-egységekből. Az óriásmolekula oxigénatomoktól összekapcsolt „láncszemei” a térben nem véletlen diktálta rendezetlenséggel helyezkednek el egymáshoz képest (mint ahogy ez a polietilén vagy a gumi esetén volt), hanem szabályosan egyenes sorban követik egymást, ahogy azt a 21.4. ábra utolsó képlete mutatja.



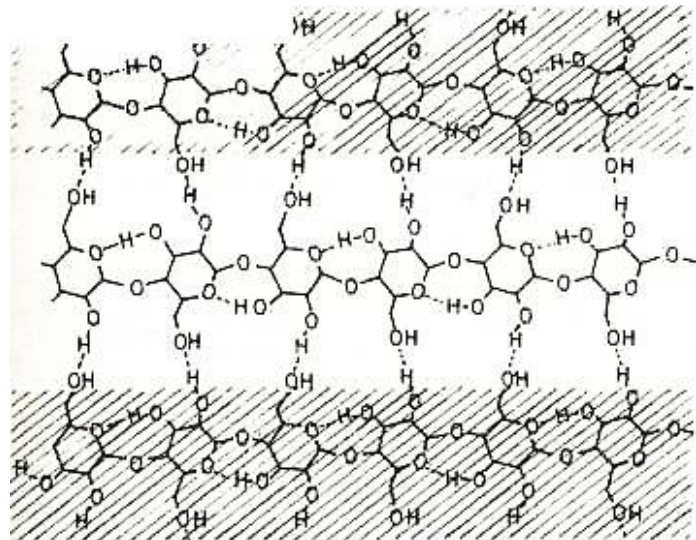


21.4. ábra: A cellulóz láncmolekula fokozatos felépülése szőlőcukor (szőlőcukor-molekulákból (β -D- glükóz) molekulákból)

A korábbiakban tárgyalt láncmolekulák alakja flexibilisen változott, a cellulóz molekula azonban egyenes lánc. Mi lehet az oka a molekulalánc eddigiekben sohasem tapasztalt merevségének?

A kérdésre a magyarázatot a molekulagyűrűkhöz oldalról kapcsolódó -OH-csoportok adják. Az erősen poláros -OH-csoportok közt, mint ahogy ezt a víz, illetve a jég szerkezetének esetében láttuk, H-hídkötések alakulhatnak ki. A cellulózlánc egyenes alakját a szomszédos láncszemek közt kialakuló H-hídkötések rögzítik. (A 21.4. ábrán a H-hídkötéseket szaggatott vonallal jelezzük.) A növényi cellulózrostok

sok-sok szorosan egymás mellé simuló láncmolekulából állnak. A szomszédos molekulák közt szintén H-hídkötések révén alakul ki erős kötés. Az egymáshoz H-hidakkal kapcsolódó molekulaláncokat a 21.5. ábra szemlélteti.



21.5. ábra: Az egymás mellé rendeződő cellulóz láncmolekulákat H-híd kötések kapcsolják össze rostokká

A párhuzamos molekulaláncokat satírozással emeljük ki, külön kihangsúlyozva az azonos molekulához tartozó egységek közt kialakult H-hídkötéseket, amelyek a molekulaszálakat merevítik. A kötések kialakulásával a molekulaláncok energiája lényegesen lecsökken.

A H-híd kötésekkel összekapcsolt merev cellulóz-láncok azonban önmagukban nem biztosítanál a növényi szárak mindenki által megtapasztalt hajlékony rugalmasságát. Ezt a merev cellulózrostok közé beépült hajlékony amorf láncmolekulák (ún. „hemicellulóz molekulák) biztosítják. Külső mechanikai hatásokra e molekulák alakja a flexibilisen megváltozik (ezzel energiát emészt fel) majd a hatás elmúltával visszanyeri eredeti alakját. Az olyan anyagokat, amelyeket különböző szerkezetű és tulajdonságú anyagok együttese alkot kompozit anyagoknak nevezzük. Ilyen természetes kompozit anyagunk a fa, aminek felhasználása évezredekig nyúlik vissza, de ma is nélkülözhetetlen szerkezeti alapanyag.

A fa változatos felhasználását kedvező tulajdonságai indokolják. Szilárd, rugalmassága nagy, ütésálló, könnyű, sűrűsége kisebb a víznél ($0,2-0,8 \text{ g/cm}^3$), könnyen megmunkálható; tartós, jól

ellenáll a környezet roncsoló hatásainak stb. E kedvező tulajdonságok titka az, hogy a fa kémiai-fizikai értelemben a nem egységes anyag. Különböző kémiai összetételű, eltérő mikroszerkezetű anyagokra választható szét. A fa előnyös tulajdonságai nem tulajdoníthatók kizárólag egyik vagy másik komponensnek, hanem azok sajátos együttesének. Az élő fa szöveteiben a sejtek fala szilárd. A kivágott és elhalt fában a sejtfaalak szilárd rendszere tartósan megmarad, ez határozza meg a fának, mint szerkezeti anyagnak a tulajdonságait. A sejtfaalak párhuzamosan rendeződött hosszú rostokból állnak. A rostok anyaga a már tárgyalt láncmolekulájú cellulóz. A cellulózzrostok eltérő szerkezetű más óriásmolekulájú anyagba, ún. lignin és a kémiailag nem egészen egységes hemicellulózfélek amorf állapotú óriásmolekulái közé ágyazódnak be. A fa kedvező tulajdonságait szerkezetének épp ez az összetettsége adja. A fa hosszú évekre óta egyik legfontosabb anyaga az emberiségnek. Sokféle felhasználását kedvező tulajdonságai indokolják. A fa szilárd, de könnyű, rugalmas és ütésálló, könnyen megmunkálható; tartós, jól ellenáll a környezet roncsoló hatásainak stb.

A fa nagy szilárdsága a rendeződött cellulózzrostok következménye. Mivel a rostok irányítottak a fa mechanikai tulajdonságai is irányfüggőek. A fa terhelhetősége a rostok irányára merőlegesen a legnagyobb, ugyanakkor a rostokkal párhuzamosan könnyen hasítható. Felhasználás szempontjából lényeges a fa rugalmassága, szívóssága is. Ezek a tulajdonságok a cellulózzrostok közti tartományokat kitöltő amorf anyagnak köszönhetőek. Ennek döntő része lignin. A lignin molekulaszervezete jóval bonyolultabb, mint a cellulózé. Óriásmolekulái a tér mindhárom irányába többszörösen elágazó láncok, amelyek sok nagy térigényű benzolgyűrűt tartalmaznak. A molekula bonyolult térszerkezete miatt lehetetlen bármilyen rendeződés. Erő hatására a molekulaszálak elmozdulnak, a molekula alakja változik, ami felemészti az deformáció energiáját, így a cellulózzrostok rendezett szervezete nem roncsolódik.

A fát nemcsak szervezetei anyagként használjuk, de ipari nyersanyagként is. A cellulózzrostokat minden kémiai változtatás nélkül használják fel a papírgyártásban. A papír vékony rétegben kiterített, összekuszált cellulózzrostokból áll, amelyeket összeragasztanak, miközben a rostok közti hézagokat különböző adalék- és festékanyagokkal töltik ki.

A műanyagiparban a fából kinyert cellulózmolekulák szervezeteit kémiailag többé-kevésbé átalakítják. Az átalakítás célja az, hogy a vízben és más oldószerben oldhatatlan óriásmolekulát átmenetileg oldhatóvá tegyék. Az így nyert anyagból műszálakat, fóliákat készítenek oly módon, hogy a sűrű oldatot lyukakon vagy résen préselik át, majd vegyi kezeléssel azonnal visszaalakítják oldhatatlan szilárd anyaggá. Így készülnek pl. a különböző műselymek (acetátselyem, rézselyem, viszkózselyem) az acetátfilm, a cellofán.

A cellulóz mellett a lignin is hasznosítható része a fának. Az úgynevezett száraz lepárlás során a fát levegőtől elzárva hevítik. Ilyen körülmények közt a lignin molekulái részlegesen elbomlanak, miközben számos, a vegyipar számára igen fontos anyagot szolgáltatnak.

Fehérjék

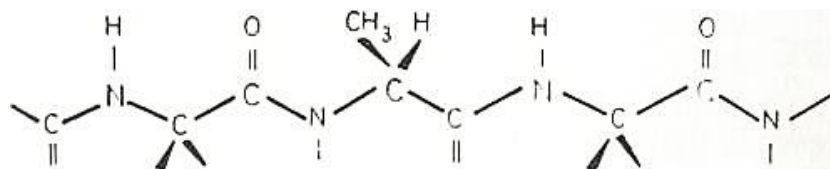
Az élő anyag legfontosabb anyagai a fehérjék. A fehérje elnevezés gyűjtőfogalom, igen sokféle molekulaszervezetű fehérjét ismerünk. A tojásfehérje több különböző molekulájú, de rokon szerkezetű vegyület keveréke, a *keratin* nevű *fehérje* a haj és a gyapjú, a kollagén a bőr és a

csontok alkotórésze. Fehérjék alkotják az izmok anyagát (miozin, aktin) fehérje a vér hemoglobinja, az inzulin, a különböző enzimek stb. Ezekben a vegyületekben az a közös, hogy valamennyi többé-kevésbé hasonló tulajdonságú kisebb molekulák, aminosavak összekapcsolódásával épül fel. A különböző fehérjék húszféle aminosavat tartalmazhatnak. Ezek közül az egyes fehérjékben több-kevesebb fordul elő egyszerre. Az óriásmolekulákat az aminosavak periodikusan ismétlődve építik fel. Egy-egy óriásmolekula kb. száz aminosav-egységet tartalmaz. Az egyes fehérjék tulajdonságait a felépítő aminosavak minősége és kapcsolódási sorrendje határozza meg.

A kapcsolódó aminosavak milyensége és sorrendje meghatározza az óriásmolekula energetikailag legkedvezőbb térbeli szerkezetét. Könyvünkben nem foglalkozunk részletesen a fehérjék kémiai felépítésével, hanem csak a molekulák térszerkezete és az anyag fizikai tulajdonságai közt mutatkozó kapcsolatot vizsgáljuk.

Az 1950-es években alapos kísérleti vizsgálatok eredményeként kiderült, hogy a fehérjék láncmolekula-alakja nem véletlenszerű gubanc, amint ezt pl. a gumi esetén láttuk. Az egyes fehérjéknek szigorúan állandó térbeli szerkezete van, a molekula alakja a geometria fogalmaival egzakt módon leírható. A korábbiakban tárgyalt láncmolekulák (polietilén gumi) esetén a molekulák közötti, illetve egy azonos lánchoz tartozó atomcsoportok között a kölcsönhatás elhanyagolhatóan kicsi. A fehérjék esetén ez a kölcsönhatás döntővé válik és szigorúan meghatározza a molekula térszerkezetét. Vizsgáljuk meg egy konkrét egyszerű példán, hogyan is történhet ez!

A legegyszerűbb fehérje is többféle aminosavegységből épül fel. Az egyszerűség kedvéért mi egyetlen fajta aminosavból (a legegyszerűbb szerkezetű alaninból felépülő láncmolekulát, a polialanint vizsgáljuk). A polialanin jó modellanyag a fehérjék térszerkezetének megértéséhez. A polialanin láncmolekula kémiai szerkezeti képletét a 21.6. ábra mutatja. A láncban lévő N-H-atomcsoport erősen polarizált

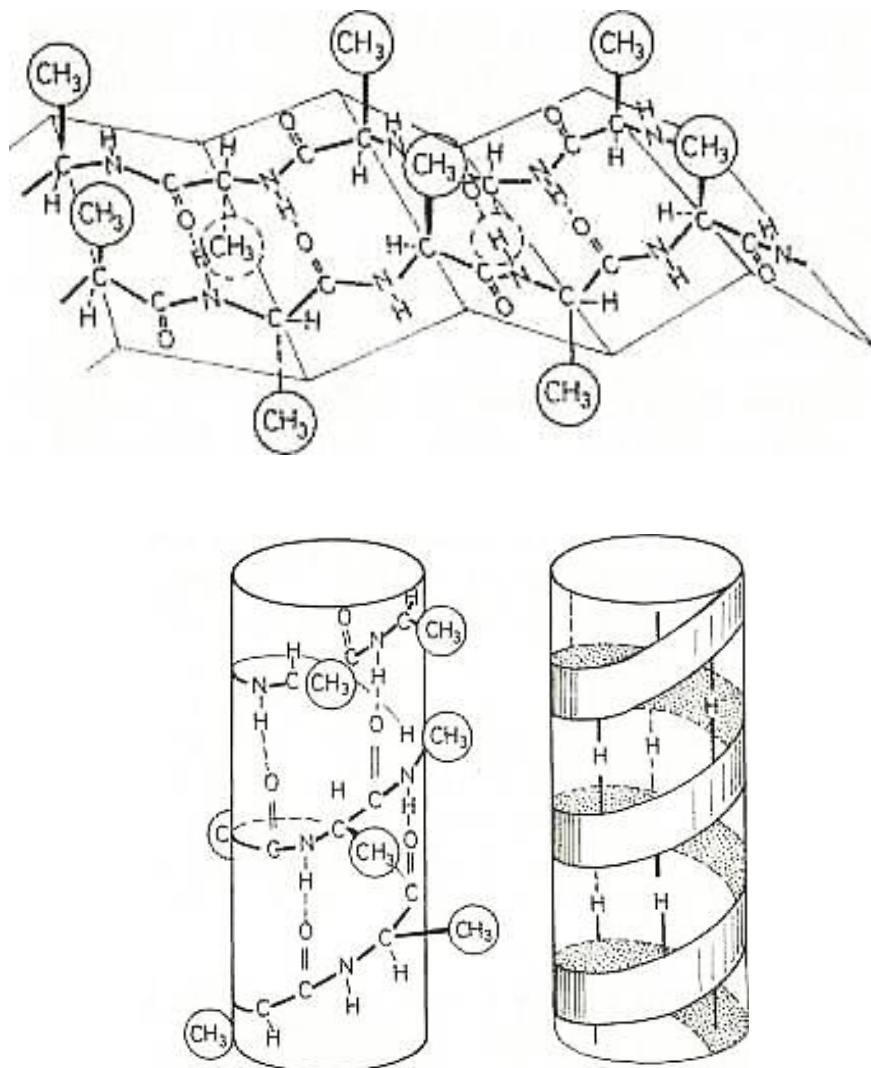


21.6. ábra: A polialanin szerkezete

A nitrogént és a hidrogént összekapcsoló elektronpár nem azonos mértékben tartozik a két atomhoz. Az elektronok inkább a N-t részesítik előnyben, így a hidrogénmag pozitív töltése nincs kellő mértékben árnyékolva. Az erős pozitív töltés miatt a H kölcsönhatásba léphet olyan atomokkal, amelyek elektronfölséggel rendelkeznek. A vizsgált polialanin, illetve a többi fehérje esetén az óriásmolekula lokális elektron többlettel rendelkező oxigénatomokat tartalmaz. Az molekulák kedvezőbb energiaállapotba kerülnek, ha az N-H-csoportok hidrogénje és a C=O-csoportok oxigénje közt kötés alakul ki. A kialakuló kötetést, amely a H-atom segítségével teremt kapcsolatot két különböző láncszakasz közt, tehát hidrogénhid-kötésről beszélünk. A H-híd nem olyan erős, mint a kovalens kötés, de mégis jelentős. A láncmolekulákból álló rendszer energiája akkor válik a legalacsonyabbá, ha valamennyi N-H-,

illetve C=O-csoport hidrogénkötést létesített. Minden újabb H-híd létrejöttével a rendszer energiája kb. $7 \cdot 10^{-20}$ J-lal csökken. A kötés kétféle módon valósulhat meg:

1. Kinyúlt molekulaláncok rendeződnek egymás mellé úgy, hogy a szomszédos molekulák N-H- és C=O-csoportjai közt kialakuljon a kötés. Az így egymás mellé rendeződött láncok kétdimenziós rétegeket képeznek. A molekulaláncok atomjai azonban nincsenek egy síkban. A rétegek egymáshoz képest dőlt síkობól illeszthetők össze. Ezt a térszerkezetet a szakirodalomban β -rétegnek nevezik.
2. A molekulalánc spirállá tekeredik úgy, hogy a lánc minden C=O-csoportja fölé egy távolabbi láncszakasz N-H-csoportja kerüljön. Ilyen esetben a H-hídkötések egyetlen molekulán belül alakulnak ki, rögzítve a lánc spirális alakját. A spirális alakú molekulát α -hélixnek nevezük.



21.7. ábra: A polialanin molekula β -réteg és α -hélix térszerkezete

A polialanin molekula híg oldatokban α -hélix szerkezetű. Ez érthető, hiszen az egyes molekulák az erős hígítás miatt messze vannak egymástól és a H-hídkötések egyetlen molekulán belül alakulhatnak ki. Tömény oldatban, ahol a szomszédos láncok közvetlen egymás mellett vannak, β -rétegek képződnek.

A polialanin modell-lánc kétféle térszerkezetét a 21.7. ábra szemlélteti. A rajzon jól megfigyelhető, hogy a β -réteg szerkezet esetén a molekula nagy térigényű $-\text{CH}_3$ oldal csoportjai a síkok törésvonalában váltakozva le-, illetve felfelé irányítódva helyezkednek el. Az α -hélix mentén ezek az oldalcsoportok a hélix tengelyére merőlegesen, sugár irányban kifelé állnak.

A fehérjemolekulák térszerkezete a polialaninhoz hasonlóan β -réteg vagy α -hélix lehet. Hogy a két lehetőség közül melyik valósul meg, azt részben a láncot fel építő aminosavak atomcsoportjai, részben a külső körülmények határozzák meg. A következőkben néhány ismert anyag fehérjemolekuláinak térszerkezetét ismertetve megmagyarázunk az anyag néhány jellemző fizikai tulajdonságot.

A következőkben néhány közismert fehérje szerkezetével és jellemző tulajdonságainak kapcsolatával foglalkozunk.

A gyapjú és a haj építőanyaga: a keratin

Az emberi haj és az állatok gyapja közel azonos szerkezetű. A szálak a keratin nevű fehérjemolekulákból épülnek fel. A molekula közel húszféle aminosavat tartalmaz. A molekula α -hélix szerkezetű. A spirál alakú molekulák sajátosan rendeződnek egymás mellé. Először a molekulák hármassával épülnek össze úgy, hogy a három spirális molekula egymásba tekeredik, hasonlóan egy háromerű sodrott kábelhez (21.8. ábra). Az így kialakult szálak kötegekbe rendeződnek. Egyetlen vékony hajsálunk sokszok ilyen kötegből áll. Az összetekeredett hélixeket, illetve ezeket szálakká, majd kötegekké H-hídkötések, illetve ún. kénhidak rögzítik.



21.8. ábra: A keratin három összesodort láncmolekula alkotta szálak térszerkezete

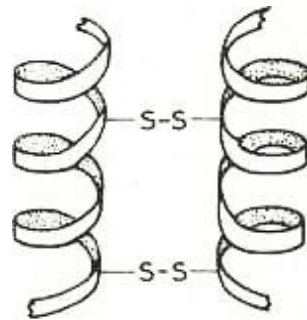
A gyapjúszál az egyik legértékesebb alapanyaga a textiliparnak. A gyapjúholmik melegek, rugalmasak és nem gyűrődnek. Ezek az értékes tulajdonságok a szálak molekulahélixekből álló szerkezetének köszönhetőek. A gyapjúnak van azonban egy kellemetlen tulajdonsága is, a mosásban. Ha a mosószer túl „erős”, vagy ha a víz túl meleg, a gyapjúholmi könnyen összemegy. Mi történik ilyenkor? A szál bonyolult szerkezetét rögzítő kötések a meleg, illetve az erős mosószerek kémiai hatására tömegesen felszakadnak. A hélixeket alkotó molekulaláncok szabályos nyújtott spirálszerkezete megszűnik, és a láncok összegubancolódnak. A lehűléskor, öblítéskor ismét kialakuló kötések ezt a szabálytalan molekulaszervezetet rögzítik, ezért az anyag többé már nem nyeri vissza eredeti szerkezetét és az ezzel járó előnyös tulajdonságokat.

Az emberek, különösen a hölgyek megjelenését döntően meghatározza hajviseletük is. A frizurának egyik leglényegesebb része a haj megfelelő esését biztosító hullámosság. A hajsálak természetes hullámossága a molekulahélix-kötegek összekapcsolódásától függ. Ezt azonban könnyen meg lehet változtatni. A legegyszerűbb módja ennek a haj „besütése”. Ilyenkor felmelegített sütővassal a kívánt alakú hullámokat belenyomják a hajba. A meleg hatására a

fehérjemolekulákat egymáshoz rendező kötések egy része felszakad és a hélixkötegek a deformáló erő hatására elcsúsznak egymáshoz képest.

A hajszál hasonló szerkezetváltozása – durva mechanikai hatásra – melegítés nélkül is bekövetkezhet. Ujjunkra tekerve rögzítsünk egy hosszú hajszálat, majd húzzuk végig a hajszál szabad végét két körmünk közt! A deformált hajszál rugószerűen karikába göndörödik. A jelenség magyarázata az, hogy a két körmünkkel meghúzott hajszál egyenetlenül deformálódik. Amelyik oldalon a deformáció nagyobb, a molekulakötegek közti kötések felszakadnak, és a kötegek maradandóan elcsúsznak egymáshoz képest. Az egyik oldalán megnyúlt szál jellegzetesen meggömbül.

A frizurát „daueroló” fodrász a kémia segítségét veszi igénybe a hajszálak alakjának megváltoztatásához. A keratinmolekula hélicei közt jellegzetes kötés alakul ki két kénatom közvetítésével (21.9. ábra). A dauervíz kémiai változást okoz, felszakítja a kénhidakat. Ezzel a két hélix közti kapcsolat gyengül, és a becsavarás során a molekulák elmozdulnak egymáshoz képest. A szárítás, illetve öblítés során a kénhidak újból kialakulnak, és ezzel a hajszál új alakját rögzítik.



21.9. ábra: A haj dauerolásakor a keratinmolekulákat egymáshoz kapcsoló kénhidak jönnek létre.

A kötőszövetek fontos alkotórésze: a kollagén

A bőr, a csontok, az inak, a porcok fontos alkotórésze a kollagén nevű fehérje (kissé módosult formája a közismert zselatin). A kocsonyafőzéskor a porcos, bőrös részekből kioldódik a kollagén, ez teszi rugalmas-szilárdá a kihűlt kocsonyát.

Természetes állapotban a kollagénmolekulák spirális szerkezetű héliceket alkotnak. A hélixek hármásával összetekeredve, a keratinhoz hasonlóan szálakat képeznek. A H-hídkötések nem egyetlen molekulán belül alakulnak ki, hanem a három összetekeredő lánc összekapcsolásával a hármass hélix alakját rögzítik. Ennek a szerkezetnek a következménye, hogy ha felbontjuk a molekulák közti kötések, a szabadabbá váló láncok elvesztik hélix alakjukat és a gumimolekulához hasonlóan gubancsá ugranak össze.

A KONDENZÁLT ANYAGOK MELLÉKLETEI

ANY1. Az kristályok növekedése – a jellegzetes kristályforma kialakulása



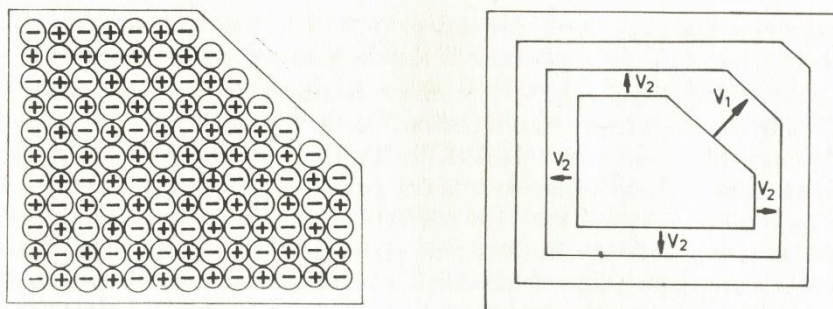
[Az kristályok növekedése – a jellegzetes kristályforma kialakulása](#)



A film mikroszkópi felvételeken mutatja be, hogy egyensúlyi körülmények közt a geometriai szabályosságú kristályok síklapjaik lassú párhuzamos kitolódásával növekszenek. Nem egyensúlyi gyors folyamatok esetén a kristályok nem mutatják jellegzetes formájukat. A kősókristály példáján mutatjuk be, hogy a kristály geometriai alakja nemcsak az anyagi minőségtől függ, a forma változik, ha pl. szennyezések hatására a kristály növekedési sebessége bizonyos irányokban megváltozik. A jelenségekre a kristályosodás összetett folyamata ad magyarázatot.

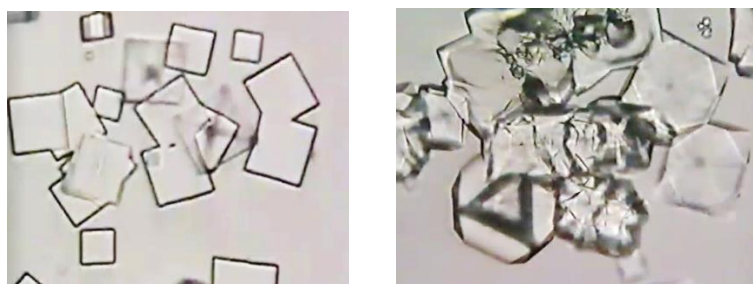
A kristályok folyadékfázisból, olvadékból vagy oldatból alakulnak ki. A videón bemutatott kísérletekben ionvegyületek vizes oldatából történő kristályosodását vizsgáljuk. A kristályosodás első lépéseként a korábban homogén folyadékban szubmikroszkopikus méretű *csírák* vagy *gócok* jelennek meg véletlenszerűen. Ennek termodinamikai feltétele, hogy az az oldat túltelített legyen. Az oldat a víz lassú párolgása miatt válik túltelítetté. A telített oldatokban a részecskék folytonosan változó csoportokat képeznek. Ha az oldott ionok mennyisége az oldatban növekszik, megnő annak esélye, hogy az ionok közti vonzás következtében az oldatban itt-ott kristályszerkezetű tartományok alakuljanak ki, amelyek eleinte gyorsan felbomlanak, de átlagos méretük és élettartamuk az oldat túltelítettségének növekedésével növekszik. Kristálycsíráról beszélünk, ha a rendezett szubmikroszkopikus tartományok mérete és élettartama egy kritikus értéket meghalad. Innen számítjuk a kristályosodás második szakaszát, amit a kialakult kristálycsírák növekedése jellemez. A mikroszkópon keresztül a kristályosodásnak ezt a második szakaszát tudjuk megfigyelni. A videón kősó, káliumbikromát, és fixírsó kristályosodását vizsgáljuk különböző körülmények közt. Kősó és káliumbikromát kristályok lassú növekedésén megfigyelhető, hogy a szabályos síklapokkal határolt forma az oldallapok kitolódásával nő. A kristályformát a rácsszerkezet és a kristályosodás külső körülményei határozzák meg. Ezt jól példázza a NaCl videón bemutatott kristályosítása. Megfigyelhető, hogy a tiszta sóoldatból növekvő kristályokat merőleges kockalapok határolják. kristályszerkezet és a szabályos forma megértésére kövessük gondolatban az ábrán bemutatott kristálycsíra növekedését! A csíra úgy növekszik, hogy a környező oldatból pozitív és negatív ionok ütköznek véletlenszerűen a kristály felületébe. Ha

az ütköző ionok kedvező helyeken (a rácsszerkezet ellentétes töltésű ionjainak közelében) jutnak a csíra közvetlen közelébe, és ütközési sebességük sem túl nagy, a Coulomb-vonzás hatására megtapadhatnak, más helyről pedig visszalökődnek. A kristály egyesével beépülő ionok révén növekszik. A növekedés makroszkopikus sebessége – a határoló lapok azonos időtartamokhoz rendelhető kitolódása a kristály szerkezettől és a lap helyzetétől függ.



A kristályformát a növekedés sebességének a rácsszerkezetből adódó anizotrópiája határozza meg.

A bemutatott rajzon kockalapokkal és ferde oktaéder-lappal határolt kősókristály-csírát látunk. A kockalapok felületén váltakozva vannak pozitív és negatív ionok, míg az oktaéder lap felületén csak azonos töltésű (itt éppen negatív) ionok foglalnak helyet. A kristály növekedése az oktaéder lapon (esetünkben egy pozitív ionréteg megkötésével) érhetően gyorsabb, mint a kockalapok esetén. A jobb oldali sematikus ábra mutatja a kristály egyenlő idők alatt rárakódott ionrétegeit. Az ábrán jól látszik, hogy az ferde lap kitolódási sebessége nagyobb, mint a kockalapoké, így az oktaéderlap mérete csökken és sókristály jellegzetes alakját a kockalapok határozzák meg. A videón látható, hogy ha a kísérletet nátrium acetáttal szennyezett sóoldattal megismételjük, a képződő kősó kristályokon a kockák sarkát levágó oktaéder-lapok is megfigyelhetők.



a) b)

A tiszta oldatból növekvő kősókristályokat kockalapok határolják (a). A szennyezett oldatból növekedett kristályokon oktaéder-lapok is megfigyelhetők (b)

Ez azt jelzi, hogy a nátrium acetát nagyobb negatív ionjai a Coulomb vonzás miatt megtapadva az oktaéder-lapokon ilyen irányában lecsökkentik a kristály növekedési sebességét. Általánosságban kimondható, hogy szabályos alakú egykristályok esetén a kristályformát azok

a kristálylapok határozzák meg, amelyekre merőleges irányokban a növekedési sebesség kisebb.

Az elmondottakon túl a videón megfigyelhető a nem egyensúlyi (gyors) kristálynövekedésre jellemző dendrites szerkezet kialakulása, továbbá a különböző csírák növekedése során kialakuló polikristályos szerkezet is. Az utóbbi esetén az egyes kristálytartományok orientáció eltérését poláros fényben figyelhetjük meg. A poláros fényel végzett kísérlet egyúttal jelzi a kristályok a szerkezetének irányfüggéséből adódó optikai anizotrópiát is.

[Vissza >>>](#)

ANY2. Kristályok hasadása

A kristályok rendezett belső szerkezetének következménye, hogy egyes ionkristályok jellegzetesen bizonyos kristálylapok mentén hasadnak. A kristályok hasadásának tanulmányozását követő gondolat kísérlet vezette rá a 18. század természettudósait arra a következtetésre, hogy a kristályok közvetlenül nem látható, oldalaikkal szorosan összetapadó „kristálytéglácskákból” épülnek fel. Ennek alapján nemcsak a hasadás jelensége kapott magyarázatot, de értelmezni lehetett a kristályformák geometriai szabályosságát is. Az ún. kristálytéglá-elmélet tudománytörténeti jelentőségét az adja, hogy lényegét tekintve megegyezik a kristályok jóval később röntgenszerkezetvizsgálattal igazolt rácsszerkezetével. Mivel a kristályok hasítása közvetlenül a tanórán nem mutatható be, indokolt a kísérletek videó-bemutatása. A videó nagyméretű kősókristály, kalcit, gipsz és csillám-kristály hasadását mutatja.

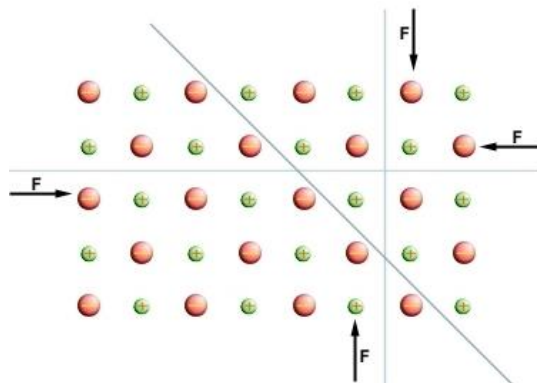
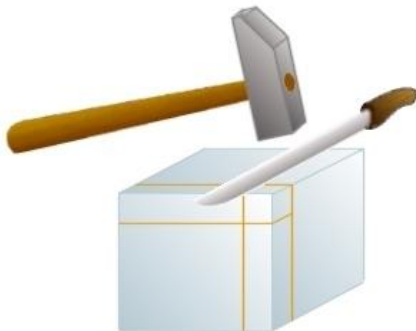


[Kristályok hasadása](#)



A kristályok hasadásának értelmezése

A kristályok hasadása tipikusan bizonyos ionkristályok jellemzője, és csak meghatározott síkok mentén következik be. Első benyomásra úgy tűnik, hogy a hasítási felületeket a kristályforma jellegzetes lapjai határozzák meg. A kősókristály, aminek formáját általában egymásra merőleges kockalapok jellemzik, könnyen hasítható a kockalapokkal párhuzamosan. A kalcitkristály szokásos alakja a romboéder, és ugyanezen lapok mentén hasítható. Ez az összefüggés csak látszólagos és számos szabályos alakú kristály van, ami nem hasítható a felületi lapokkal párhuzamosan. A hasíthatóságra a kristály belső rendje ad magyarázatot. Jól illusztrálja ezt a kősó hasítását értelmező rajz.



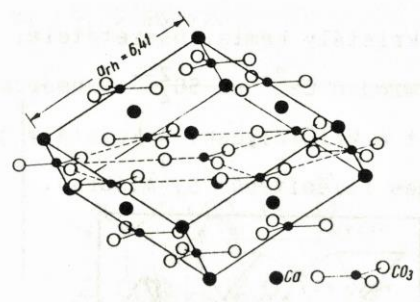
A kősókristály hasítása kockalapok mentén

A vázlatos rajz a kősó egyik kockalapjával párhuzamos kristálysík szerkezetét szemlélteti. A síkban négyzethálóba rendezve pozitív és negatív ionok váltakozva helyezkednek el. A kristály a nyíllal jelölt irányú erőhatásra a szaggatott vonal mentén hasad. A hasadás tulajdonképpen nem a két kristálytérfél mechanikai hatással történő kettévágása, hanem elektrosztatikus hatás eredménye (ezt igazolja, hogy a hasítási lapok tükörfényesek, roncsolódási nyomok nem figyelhetők meg.) A kristályra jól irányított helyzetben elhelyezett késpengére ható nyomás lényegileg csak „működésbe hozza” az elektromos erőket. Amikor a késpenge alatti kristályréteg a nyomás hatására egy rácsállandónyi távolságra lefelé elmozdul

Azonos töltésű ionok sora kerül egymással szembe és a köztük ébredő elektromos taszítóerő eredményezi a két kristályrész szétválását a hasadási felület mentén. Ugyanígy történik a hasadás, a rajzon bejelölt vízszintes vonal mentén is. Érdekes azonban, hogy a kősókristályban is van olyan sík, amely mentén a kristály két térfelét úgy csúsztatható el egymáson, hogy közben a kristály egészben marad. Ilyen a kocka térátlójára merőleges sík, illetve a kétdimenziós rajzon a behúzott 45 fokos vonal. A hasadási sík két oldalán ugyanis mindenütt ellentétes töltésű egymást vonzó ionok állnak egymással szemben. Ha kristály két térfelét a sík mentén el is csúsztatjuk egymáson, az elektromos vonzás összetartja a kristályt, bárhol is próbáljuk elcsúsztatni egymáshoz képest az egymáshoz képest azonos töltésű, de ellentétes ionokat. Érdekes megemlíteni, hogy az ábrán folytonos vonallal bejelölt sík mentén a kristály deformálható anélkül, hogy hasadna. A sík két oldalán ui. a töltések ellentétesek, így a sík mentén elcsúszzó két kristályfél állandóan vonzza egymást.

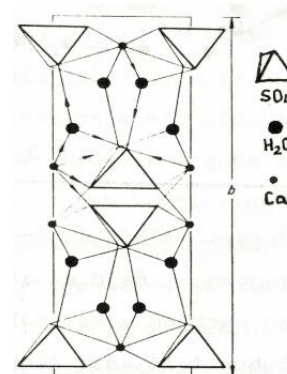
A kősó hasadásához hasonlóan magyarázható a többi jól hasítható ionkristály (pl. kalcit) hasadása is.

A kalcit (CaCO_3) kristályszerkezet Ca^{++} kétszeres pozitív töltésű kalcium ionokból és CO_3^{--} karbonát ionokból épül fel. Az ellentétes töltések hasonlóan váltakozva helyezkednek el a térben, mint a kősó ionjai. A kalcit esetén az összetett karbonát ionok térigénye miatt a kalcit esetén a kockarács romboéderessé torzul. Ahogy a kősó a kockalapok mentén, úgy a kalcit a romboéder-lapok mentén hasad.



A kalcit kristályszerkezete

A gipszkristály kémiai összetétele $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, azaz minden Ca^{2+} és SO_4^{2-} ionpárra két vízmolekula jut a kristályban. A kristály szerkezete jellegzetesen réteges felépítésű. Az ionos kötéssel összetartott kalcium- és szulfát ionok rétegeit H-híd kötésű vízmolekulák kapcsolják össze. Mivel a H-híd kötés gyenge, a kristály e rétegei mentén könnyen hasad.



A gipsz kristályszerkezete

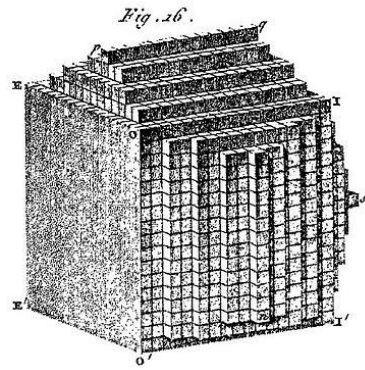
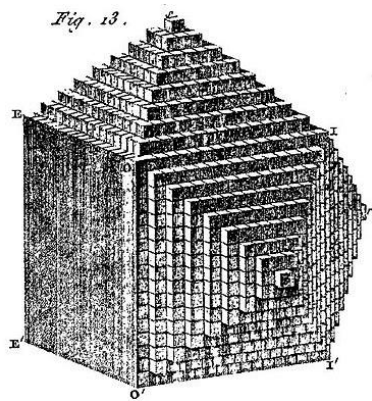
A csillám réteges szerkezetű alumínium-szilikát kristály. A szilikát kristályok vázának legfontosabb két építő eleme a szilícium és az oxigén. A négy vegyértékű Si tetraédes térirányokban kapcsolódik négy oxigén atomhoz. Ha ezek közül három, a másik vegyértékével szintén szilíciumhoz kötődik, hatszöges gyűrűkből álló rétegek alakulnak ki. A csillám-kristály rétegeiben az oxigén atomok negyedik szilícium atom helyén alumínium atom található. A kristály szabályossága megköveteli, hogy az eredetileg három vegyértékű alumínium is négy tetraédesen elhelyezkedő kötést hozzon létre. A negyedik kötéshez az alumíniumnak elektront kell felvennie, így a rétegek elektromos töltésegyensúlya felborul. A negatív rétegeket pozitív töltésű kálium ionok kapcsolják össze. Hasításkor a csillám-kristály a rétegeket összekapcsoló kálium-ionok síkjában könnyen hasad. A rétegekre merőleges erőhatás esetén tapasztalható, közel hatszög-szimmetrikus berepedés az egyes rétegek hatszöges szerkezetével kapcsolatos.

Tudománytörténeti anekdota a kristályszerkezet térrács-elméletének születésére

Az első tudományos értékű elmélet a kristályok szabályos alakjának szerkezeti magyarázatára, René Just Haüy tudós francia pap nevéhez fűződik a 18. századból. Az abbé nagy kristálygyűjteménnyel rendelkezett. Gyűjteményét folyamatosan bővítette és kapcsolatban állt krának legismertebb krisztallográfusaival. A hagyomány szerint épp egyik barátjánál beszélgetett, amikor a diskusszió tárgyát képező, kezében tartott szép romboédes kalcitkristály véletlenül esett a kőpadlóra és dirib-darabra tört. Miközben Haüy a kristálydarabokat szedegette a padlóról, feltűnt neki, hogy a kisebb-nagyobb darabokon továbbra megfigyelhető volt a kalcitra jellemző romboéder forma. Ez e felismerés nem hagyta nyugodni, és hazatérve már akarattal törte darabokra saját gyűjteménye legszebb kalcitkristályait, és nagytűvel figyelte a törmelék darabkáit. Az eredmény mindig hasonló volt, a kalcit-kristályok mindig a romboéderlapok mentén törtek el. A romboéder-lapok még a mikroszkóppal vizsgált parányi darabkákon is megfigyelhető volt.

Vajon meddig lehet egy nagy kalcitkristályt egyre kisebb és kisebb romboéderdarabokra aprítani? -merült fel a kérdés a tudósban. Haüy feltételezte, hogy a nagy kristály feldarabolásával előbb-utóbb el kell jutni egy olyan kis romboéderhez, amit már nem lehet tovább bontani anélkül, hogy anyaga változatlanul kalcit maradjon. A kisebb-nagyobb romboéder -kristályok tehát parányi romboéder-téglácskák összetapadásával jönnek létre és ezekre bonthatók szét. Haüy kősóval is elvégezte a kísérletet, és megfigyelte, hogy a kősó kristály-téglácskáin egymásra merőleges kockalapok a jellemzőek. Kísérleti tapasztalatait és az azokat magyarázó kristály-tégla elméletét Haüy közleményben publikálta.

Az ábra Haüy rajzos ábráit mutatja, amivel azt illusztrálta, hogy miként értelmezhető a kristályos szabályos, de változatos alakja a láthatatlanul kicsi kristálytégla-elmélete alapján. A rajzon a kristályok felületi lépcsőzetességé a parányi méretek miatt számunkra ideális síknak tűnik.



A kristály-tégla elmélet a kristályok periodikus rácsszerkezetének első megfogalmazása. Haüy elmélete – bár közvetlen bizonyítéka nem volt - egyre elfogadottabb tudományos hipotézissé vált. Közvetlen kísérleti igazolására a 20 század elejéig kellett várni, amikor Max von Laue müncheni professzor és két munkatársa röntgen-interferencia kísérlettel egyszerre bizonyította a kristályok rácsszerkezetét és a röntgensugárzás elektromágneses hullámtermészetét

[Vissza >>>](#)

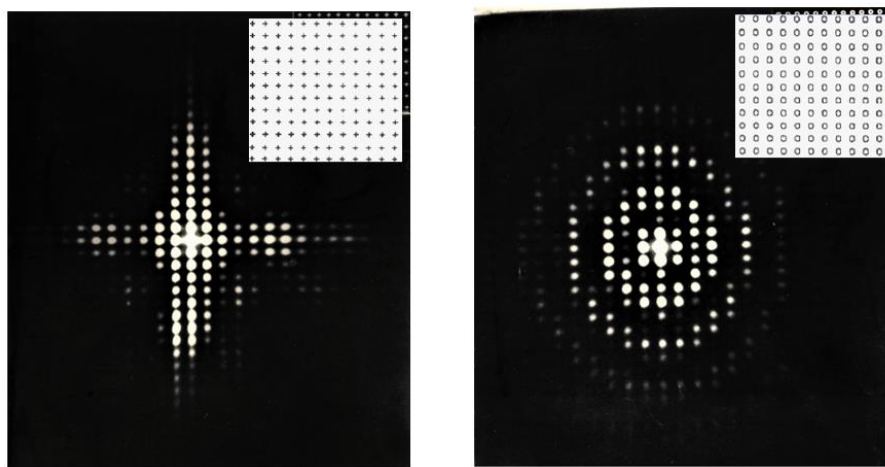
ANY3. Modellkísérlet a kristályszerkezet diffrakciós vizsgálatára

A kristályok szabályos térbeli szerkezete a röntgen, az elektron- és a neutronhullám számára természetes diffrakciós rács. A kristályra eső röntgen- stb. hullámok elhajlási képéből (elrendezés, intenzitás eloszlás) következtetni lehet a kristályrács szerkezetére és a rácspontok minőségére. A röntgendiffrakciós képek jellegzetes információtartalmát kétdimenziós optikai rácsok elhajlási képével érzékeltethetjük.

Modellrács készítése:

Gépeljünk különféle karaktereket (pl. "O" vagy "+" jelet) négyzetes és hatszöges elrendezésben, fehér papírra! (Alábbi ábra.) Mennél több karakter kerül egy lapra, annál jobb lesz majd az eredmény. Fényképezzük le az egyes lapokat úgy, hogy a negatívon az egyes pontok távolsága tizedmilliméter nagyságrendű legyen! (Nagy felbontóképességű film, bő exponálás, kontrasztos hívás.) A negatívokat - diakeretbe fogva - optikai síkrácsként használjuk. Az optikai rácsokat lézerrel átvilágítva az elhajlási képernyőn felfogható. (Az elhajlás egyénileg (kivetítés nélkül is megfigyelhető. Ilyenkor nézzünk a közvetlenül szemünk elé tartott rácson át távoli (4-5 m), pontszerű intenzív fényforrás felé!

A két különböző optikai modellrácsot és elhajlási képüket az ábra mutatja:

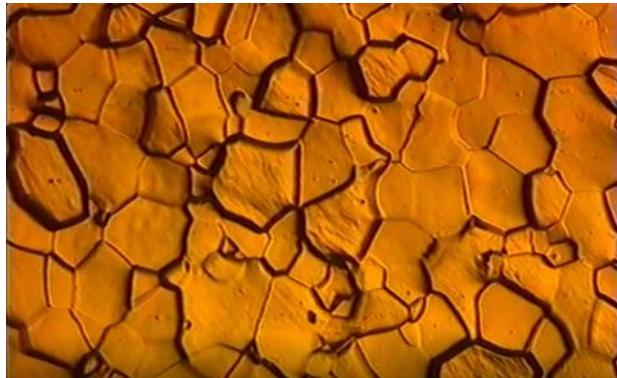


Figyeljük meg, hogy mindkét optikai rács négyzethálóra elrendezett rácspontokból áll, a szerkezet egyforma, de a rácspontokban lévő szórócentrumok (atomok) különböznek. Az elhajlási képet a kristály rendezett szerkezetének megfelelően rendezett elhajlási maximumok alkotják. Az elhajlási maximumok geometriai rendje a modellrács geometriai rendjére utal. A modellrács pontjaiban lévő szórócentrumok különbözősége a maximumok intenzitásviszonyaiban tükröződik. Ugyanezek a szerkezeti információk olvashatók ki a kristályokról készített röntgendiffrakciós felvételekből is. (A különbség az, hogy a háromdimenziós szerkezetek esetén az elhajlási kép intenzitásviszonyai alapján nem olyan könnyű a szórócentrumok azonosítása, mint az optikai modellkísérletben.)

[Vissza >>>](#)

ANY4. Polikristályok

Környezetünk szilárd anyagainak többsége – Földünk szilárd köpenyének anyagai, a kőzetek, az ipari technikával előállított fémek, kristályosan rendezett atomokból épülnek fel. A belső rendezettséget ezeknek az anyagoknak az esetén nem jelzi a külső megjelenési formák geometriai szabályossága. Ennek az oka az, hogy a kőzeteket, fémeket apró szorosan összenőtt kristályok sokasága alkotja. A polikristályok kialakulása során az olvadéokban vagy a túltelített oldatokban sok helyen indul meg véletlenszerűen a kristálymagok kialakulása. A változó orientációjú kristálymagok szabályosan növekszenek mindaddig, amíg egymásba nem ütköznek. Így a szomszédos kristályok általában szabálytalan felületek mentén érintkezve töltik ki a polikristályos anyag teljes térfogatát.



WWW

[Fémek, kőzetek polikristályos szerkezete](#)



A videófilm elsőként nagytisztaságú bizmut megszilárdulási folyamatát mutatja be. A fémet gázlángon megolvasztjuk, majd az olvadékot lapos tálba öntjük. A lehülő folyadékban a tál fala mentén megindul a kristályosodás. A szabályos alakú fémkristályok az olvadék belseje felé növekednek. Rövid idő alatt a kristályosodás befejeződik és az olvadék a tartóedény alakját felvéve, szabad felszínén vízszintes síkot alkotva szilárdulna meg. A bemutatott kísérletet az teszi érdekessé, hogy nem várjuk meg a teljes megszilárdulást, a kristályosodás folyamatát megszakítjuk azzal, hogy a még folyékony olvadékot leöntjük a már kialakult kristályokról. A tálban maradt szilárd fém jellegzetes kristályainak szabályos alakja és véletlenszerű orientációja jól megfigyelhető.

Megjegyzés:

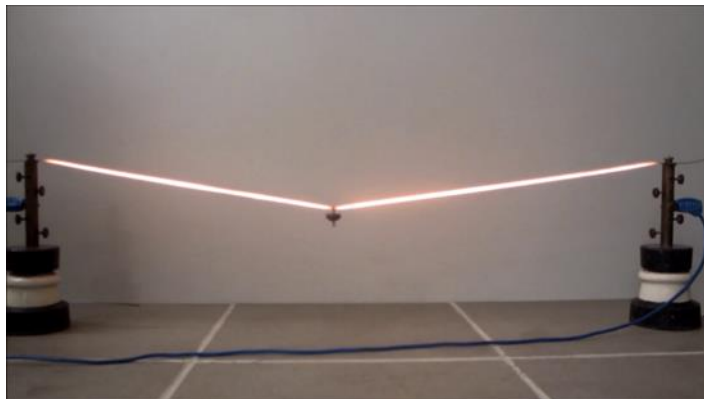
- A kísérlethez nagytisztaságú bizmut szükséges, mert átlagos tisztaságú fém megszilárdulása esetén a kialakuló kristályok olyan aprók lennének, hogy közvetlen megfigyelésük lehetetlen lenne.

A gyakorlatban felhasznált fémtárgyak kristályos szerkezetét nemigen tapasztaljuk. Speciális kémiai kezelésekkel azonban a szabad fémfelületen megfigyelhetővé tehető az anyag szorosan összenőtt kisebb-nagyobb kristályszemcséi. Speciális esetekben a nagyméretű kristályszemcsék a fémfelületen szabadszemmel is láthatók, általában azonban csak mikroszkóppal tanulmányozhatók. Az ilyen mikroszkópos vizsgálatok fémfizikai kutatások és a gyakorlati anyagvizsgálatokban egyaránt fontosak. A videó röviden bemutatja a fémek felületi szemcseszerkezetének vizsgálatát.

A kőzetek polikristályos szerkezete speciális eljárással tehető mikroszkóppal láthatóvá. A kőzetből először milliméteres szeleteket vágnak, majd mikroszkóp tárgylemezére ragasztva csiszolással vékonyítják őket, míg a vastagsága 10-20 μm -re csökken. Az ilyen vékony kőzetréteg már átlátszó, és mikroszkóp alatt kristályszemcséi is láthatók. Mivel a kőzeteket alkotó kristályok többsége optikailag kettőtörő (lásd [F40.](#)), polarizációs mikroszkópban az egyes kristálytartományok orientációjuktól függően más színben látszanak, ami különösen látványossá teszi a kőzetcsiszolatot. A kőzetcsiszolatok mikroszkópos vizsgálata értékes információkat ad a kőzetek képződéséről, a kialakulásuk óta eltelt idők geológiai folyamatairól.

[Vissza >>>](#)

ANY5. A vas kristályszerkezeti átalakulása hőmérsékletváltozás hatására



WWW

[A vas kristályszerkezeti átalakulása hőmérsékletváltozás hatására](#)



A videó egyszerű iskolai kísérletet mutat be. Két szigetelő drótközpont közé kifeszített vashuzalt (virágkötöző drót) középen kis súllyal megterhelünk, és a két végét toroid transzformátorhoz csatlakoztatjuk. A toroid fokozatos feltekerésével lassan egyenletesen növeljük a huzalra kapcsolt feszültséget. A növekvő áram hatására melegedő vasdrót egyre jobban felizzik, és megereszkedik. Túllépve a 911 °C-os átalakulási hőmérsékletet megindul a kristályszerkezet átkristályosodása, aminek során a vasatomok illeszkedése szorosabbá válik, így a drót megnyúlása átmenetileg leáll, majd az átkristályosodást követően tovább folytatódik. A feszültség lekapcsolása után a huzal gyorsan hűl, és hossza, belógásának mértéke, csökken. Elérve az átalakulási hőmérsékletet a hosszcsökkenés megtorpan, majd a huzal ismét felizzik és átmenetileg megereszkedik. Ezek jelzik a vas szerkezetváltozását a soros térkitöltésű kristálmódosulathoz a lazább szerkezetbe (hossznövekedés) amit energia felszabadulás kísér (a drót izzása fokozódik). Az átkristályosodás befejeződése után a vasdrót folyamatosan hűl, és hőtágulása monoton csökken.

[Vissza >>>](#)

ANY6. Polimorfia

Ugyanazon kémiai anyag esetén is gyakori, hogy a körülményektől függően többféle különböző kristályszerkezettel is rendelkezhet. Ilyenkor *polimorfjáról – többalakúságról* - beszélünk. Adott külső körülmények között mindig csak egyetlen kristályszerkezet lehet termodinamikailag stabil. Ha a körülmények (pl. hőmérséklet, nyomás) változnak, a kristályszerkezet is rendszerint megváltozik. Vannak esetek, amikor a szerkezeti átalakulást valami akadályozza, ilyenkor az anyag tartósan többféle változatban is előfordulhat. A videó az egyetemi kristálygyűjteményből válogatott polimorf módosulatok bemutatásával indul, majd polikristályos ammóniumnitrát réteg szerkezeti átalakulását mutatja be fűthető polarizációs mikroszkóppal készített felvételeken. Fémek átkristályosodásának sajátos példaként ún. *alakemlékező fémötvözet* martenzites átkristályosodását vizsgáljuk. A videón bemutatott jelenségek nem tartoznak az iskolai tananyagba, de alkalmasak az érdeklődő dákok motiválására, ismereteik bővítésére.



WWW

[Kristályszerkezetek polimorf átalakulása](#)



[Vissza >>>](#)

ANY7. A kristály elektronjainak energiaspektruma (kiegészítő anyag)

Az előző pontban tárgyalt nagy rácsállandójú, képzeletbeli Na-rácsban energetikai szempontból minden atom különállónak számít. Az N atomból felépülő rács esetén a szerkezetben összesen N db $1s$, ugyanennyi $2s$, $3N$ db $2p$ és N db $3s$ elektronállapot létezik. Az atomokat a valódi Na-kristály rácsállandójának megfelelő távolságra közelítve az atomok kölcsönhatásba kerülnek. Az N atommag és valamennyi elektron energetikailag egyetlen rendszert alkot. A *Pauli-elv* (l. a 20.4. szakaszt) értelmében egy kvantummechanikai rendszerben nem lehet több azonos elektronállapot. Ezért a kristályban a szabad atom minden egyes energianívója N egymáshoz közeli energiaszintre hasad fel. Az egymáshoz közeli energiaszintek *energiasávokat* alkotnak. Az atomi energianívók felhasadása jól értelmezhető a következő szemléletes képpel.

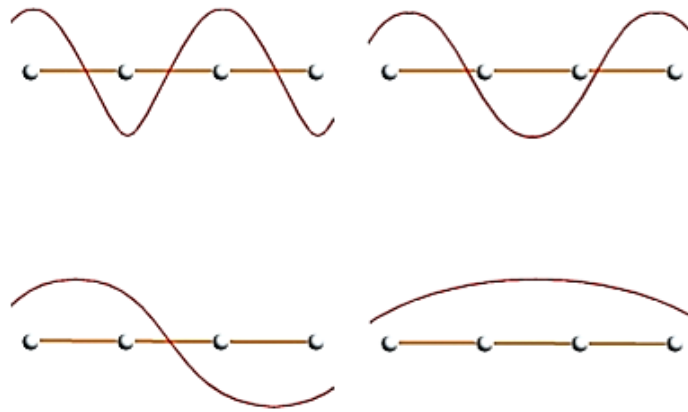
A kristályban minden elektron energiája potenciális és mozgási energia tagból tevődik össze. Vizsgáljuk a magányos atom $1s$ energiaszintjét! Itt az elektron energiája az $-U_1$ potenciális energia és a $\frac{p^2}{2m}$ kinetikus energia összegéből adódik. Az elektron p impulzusa és az elektron-állóhullám λ hullámhossza között a $p = \frac{h}{\lambda}$ de Broglie-összefüggés áll fenn (l. a 19.1. szakaszt). A szabad atomban az $1s$ elektron olyan állóhullámnak tekinthető, amelynek hullámhossza éppen kétszerese a potenciálgödör $-U_1$ mélységéhez tartozó szélességének. A kristályban az elektronok nincsenek szigorúan atomhoz kötve, az eredetileg $-U_1$ potenciális energiájú elektron hullámhossza N atom összekapcsolódása esetén éppen N -féle lehet.

Ez egyszerűen érzékelhető N db a távolságra ismétlődő atomból álló láncon. Vizsgáljuk meg, hogy hányféle módon alakítható ki állóhullám a rögzítettnek képzelt végek között! Állóhullám kialakulásának a feltétele, hogy a lánc Na hossza a λ hullámhossz felének egész számú többszöröse legyen, azaz

$$Na = K \frac{\lambda}{2}$$

Figyelembe véve, hogy a λ hullámhossz nem lehet tetszőlegesen kicsi, legfeljebb a rácsállandó kétszerese ($\lambda_{min} = 2a$), így N atom kapcsolódása esetén a K egész szám értéke maximálisan N lehet. Mindezekből adódik, hogy a láncon N különböző állóhullám-állapot alakulhat ki.

A lehetséges állóhullámok alakját, $N = 4$ esetén az alábbi négy részes ábra szemlélteti:



Négy atom delokalizált elektronjai négy állóhullám állapot lehetséges

Az N különböző hullámhosszúságú elektronhullám kinetikus energiája mind különböző. A kristályban tehát a szabad atom minden $-U_1$ energiaszintjének N különböző energiájú szintből álló energiasáv felel meg.

A kristályokban általában az ugyanazon sávon belüli szintek energiakülönbsége rendkívül kicsiny. Az 1 m^3 térfogatú kristály 10^{28} atomot tartalmaz. Az ilyen kristályban egy 1 eV szélességű sáv szintjeinek átlagos távolsága 10^{-28} eV . Ilyen kis energiakülönbségek esetén a sávokban az energiaeloszlás folytonosnak tekinthető, a sáv elektronbefogadó képessége azonban korlátozott. N atomból álló kristály egy-egy energiasávja szintenként két, eltérő spinű, összesen $2N$ elektront tartalmazhat.

Az atomok kölcsönhatása azoknak az elektronoknak – az ún. *vegyértékelektronoknak* – az energiáját változtatja meg leginkább, amelyek a legmagasabb energiaszinten voltak. Általában a vegyértékelektronokból álló energiasáv a legszélesebb. Az atommaghoz erősebben kötött belső elektronok energiáját a kristállyá szerveződés kevésbé befolyásolja. Az ilyen elektronok által alkotott energiasávok igen keskenyek (l. a 16.2. ábrát).

A kristályban tehát minden szabad atombeli energiaszintnek egy energiasáv felel meg. A sávokba eső energiaértékekkel rendelkezhetnek a kristály elektronjai. A sávok közé eső energiával nem lehetnek elektronok a kristályban. A sávok közötti energiazónákat tiltott sávoknak nevezik. Mivel a megengedett energiasávok a megfelelő atomi szintek energiájának növekedtével szélesednek, a tiltott sávok szélessége az energia növekedésével csökken.

Abszolút zérusfok hőmérsékleten minden elektron a lehető legalacsonyabb energiájú állapotban van. A Pauli-elv értelmében azonban egy-egy energianívóra csak két, ellentétes spinű elektron kerülhet. A kristály elektronjai először a legalsó sáv energiaszintjeit foglalják el. Miután ez a sáv betelt, a tiltott zóna kimarad és a következő megengedett energiasáv töltődik be. Az abszolút nulla fokon elektronokkal teljesen betöltött legnagyobb energiájú sávot *vegyértéksávnak* (*valenciasávnak*), a vegyértéksáv feletti, részben vagy teljesen üres energiasávot *vezetési sávnak* nevezik. Az abszolút nulla fokon még betöltött utolsó energianívó a *Fermi-nívó* (*Fermi-szint*), a hozzá tartozó E_F energiaérték a *Fermi-energia*. A Fermi-energiának a sávban elfoglalt helye és értéke jellemző a kristály elektronszerkezetére. Abszolút zérus fokon nincsenek a

kristályban a Fermi-szint feletti energiával rendelkező elektronok, a Fermi-szintnél magasabb energiájú sávok üresek.

A kristályok ismertett sávszerkezetének mennyiségi (kvantitatív) leírása nehéz kvantummechanikai számításokat igényel. Az elektronok mozgását (hullámfüggvényét) a szabályosan elrendeződött atommagok $V(r)$ potenciálterében a kvantummechanika *Schrödinger-egyenlete* írja le.

Az atommagok szabályos térbeli elrendeződése miatt a $V(r)$ potenciál rácsperiodikus. A Schrödinger-egyenlet matematikai vizsgálata azt mutatja, hogy ilyen potenciál esetén az elektronok mozgásállapotát olyan síkhullám jellemzi, amelynek amplitúdója a rács periodicitásával összhangban szabályosan ingadozik. Az ilyen hullámfüggvényt *Bloch-függvénynek*, az így leírható elektronokat *Bloch-elektronoknak* nevezzük. A Bloch-elektronok Schrödinger-egyenletét megoldva bonyolult számítások végeredményeként adódik a kristály energiaspektruma vagy más néven a sávszerkezete.

A következőkben a fém, a szigetelők és a félvezetők elektromos tulajdonságait a kristályok sávszerkezetéből kiindulva értelmezzük.

[Vissza >>>](#)

ANY8. A fémek fajlagos ellenállásának értelmezése (fakultatív kiegészítő anyag)

Az elektromos áramot jegyzetünk második kötetében klasszikus közelítésben tárgyaltuk ([A fizika tanítása a középiskolában II.](#) Drude-modell lásd. EÁ.3 mellékletében, 390. old.). Az ott elmondottak szemléletes képet adnak az elektromos vezetés mikromechanizmusára és kvalitatív magyarázatot kínálnak a fémek fajlagos vezetőképességének értelmezésére. A kvantumfizika eredményeire, a fémek sávszerkezetére alapozva a Drude-modell szemléletes fogalmainak új értelmezés adható, így a sávszerkezet eredményei alapján továbbfejlesztett elmélet már mennyiségi adatokat is ad a fémek vezetési tulajdonságaira.

A klasszikus Drude-modell a fém vegyértékelektronjait tekinti olyan szabad elektronoknak, amelyek a külső térből energiát felvéve részt vesznek az áramvezetésben. A különböző fémek kristályszerkezetének ismeretében a fém térfogategységére jutó vegyértékelektronok száma könnyen meghatározható. Hosszú ideig problémát okozott a fizikusoknak, hogy a vegyértékelektronok száma és a vezetési elektronok Hall-mérésekből nyert értéke eltérőnek adódott. A vezetésben résztvevő elektronok mennyisége lényegesen kevesebbnek bizonyult, mint a vegyértékelektronok száma. Az ellentmondást a részletes kvantumfizikai számítások oldották fel. A kristályok sávszerkezetének ismeretében a vezetési elektronok térfogategységre jutó számát azok az elektronok adják, amelyek részlegesen betöltött sávban, az alapállapotú betöltési határ (Fermi-energia) közelében vannak. Ezeknek az elektronoknak lehetőségük van arra, hogy már a térből nyert kis energia árán megnöveljék energiájukat és magasabb, de korábban üres energiaszintre kerüljenek. A részben betöltött sáv alacsony energiájú állapotait betöltő elektronok erre nem képesek, mert csak viszonylag nagy energia felvételével kerülhetnének a sáv betöltetlen állapotaiba.

A Drude-modell elképzelése szerint az áramvezetésben résztvevő elektronok időről időre beleütköznek a kristály atomjaiba és az ütközés során elvesztik energiájukat, ami a kristályrácsot melegíti. Az elektronok ütközési gyakoriságát jellemző $\Delta\tau$ átlagos ütközési idő értelmezése a klasszikus Drude-modell számára megoldhatatlan feladatnak bizonyult. Az elektronütközések problémáját a kvantumfizikára alapozott sávszerkezet alapján újra kellett gondolni.

Az elektromos ellenállás elméletének legérdekesebb feladata, hogy értelmezzük az elektronok ütközését és ezen keresztül meghatározzuk a $\Delta\tau$ átlagos ütközési időt. A kristályban az elektronok tulajdonságait rácsperiodikus hullámfüggvények (ún. Bloch-függvények) írják le. Az ilyen elektronok mozgását a rácsatomok mindaddig nem akadályozzák, amíg a rács periodicitása hibátlan. (Abszolút zérus fokon a tiszta fémek ellenállása nulla.) Magasabb hőmérsékleteken a hőmozgást végző atomok többé-kevésbé kimozdulnak egyensúlyi helyzetükből és ezzel megzavarják a kristály szabályos rendjét. A rácsrezgések hatására az elektronhullámok már nem mozoghatnak zavartalanul a rácsban. A hőmérséklet emelkedésével a rácsrezgések erősödnek, és ezért a $\Delta\tau$ átlagos ütközési idő csökken. (A fémek elektromos ellenállása a hőmérséklet növekedésével nő.)

Ha a kristály szabályosságát szennyezések vagy más szerkezeti hibák zavarják, úgy ezek is akadályozzák az elektronhullámok szabad mozgását. A kristályhibák számának növekedésével a fém ellenállása nő.

[Vissza >>>](#)

ANY9. Merev golyókból álló kétdimenziós kristálymodell (kristály hibák szemléltetésére)

KÜLÖNLENYOMAT A FIZIKAI SZEMLE XXV. ÉVFOLYAM 1975. ÉVI 8. SZÁMÁBÓL
(301-311. oldal)

Juhász András, ELTE Általános Fizika Tanszék

Bevezetés

A kristályos szilárd anyag szerkezetéről és a benne lejátszódó folyamatokról kevés közvetlenül megszereshető ismerettel rendelkezünk. Még az ún. direkt vizsgálati módszerek, mint az elektronmikroszkópia vagy röntgendiffrakció is tulajdonképpen csak áttételesen – bizonyos kontrasztok megjelenésével, vagy diffrakciós kép kiértékelésével – adnak „közvetlen” információt a kristályok tulajdonságairól. Ezért makroszkopikus kristálymodellek nagymértékben segíthetik a helyes szemlélet kialakítását, a modellkristály jól látható jelenségei közvetlenül érzékeltetik a valóságban is hasonlóan feltételezett kristályfizikai jelenségeket, folyamatokat.

A modell keretbe foglalt két plexilap között elhelyezett mintegy 5000 db apró acélgolyóból áll. A plexilapok távolsága olyan, hogy a golyók csak egy rétegben helyezkednek el, és ebben a síkban akadálytalanul, könnyen mozognak.

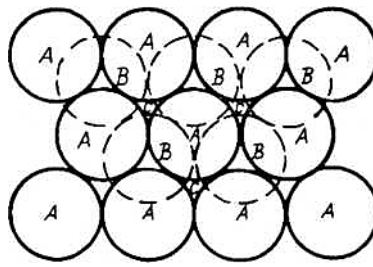
A modell atomjai az acélgolyók, amelyeknek „hőmozgását” az egész keretet rázó vibrátor kelti. (Stroboszkópos megvilágítással meggyőződhetünk róla, hogy az így keltett mozgás valóban rendezetlen, a vibrátor rezgései nem eredményeznek sem kitüntetett irányt, sem frekvenciát a golyók számára.) A magasabb hőmérsékletű állapotot egyre több energia betáplálásával, azaz a vibrálás intenzitásának fokozásával valósítjuk meg.

A továbbiakban röviden ismertetjük a kristályok néhány szerkezeti tulajdonságát és néhány¹-olyan folyamatot, amelyek szemléltethetők a merev gömbökből álló kétdimenziós modellkristályon.

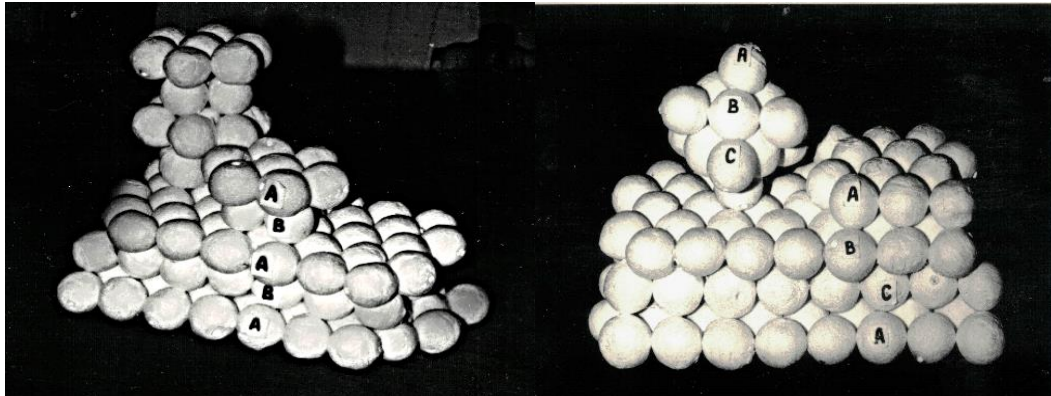
1. A kristályok belső rendje

A kristályokat alkotó részecskék (atomok, ionok, molekulák) szabályos rend szerint egymáshoz illeszkedve építik fel a kristályt. A megvalósuló rend az alkotó részecskék legkisebb energiájú elrendeződéséből származik. Természetes, hogy más-más kémiai tulajdonságú és méretű részecskék más módon tudják megvalósítani a legkisebb energiájú elrendeződést, a kristályt jellemző rend más és más lesz.

A hétköznapi életben leginkább felhasznált kristályos anyagok a fémek. Több közismert fém atomjai számára a legkedvezőbb energiaállapotot a rendelkezésre álló tér legtömörebb kitöltése jelenti. Ha a fématomokat jó közelítéssel golyóknak feltételezzük, könnyen megállapíthatjuk, milyen jellemző rend valósítja meg a tökéletes térkitöltést.

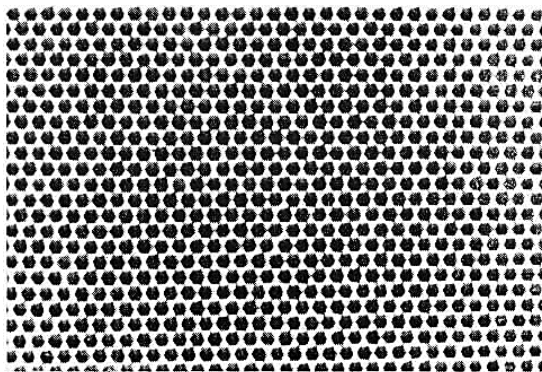


1/a ábra. Szoros illeszkedés megvalósításának lehetőségei

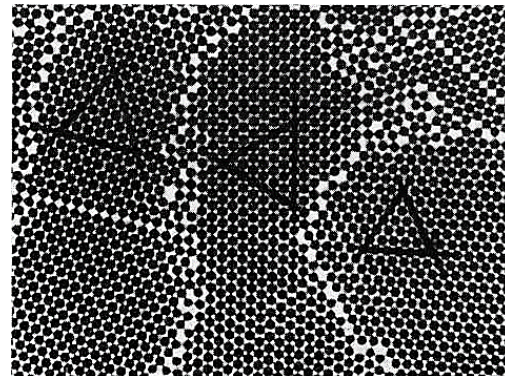


1/b ábra. Hatszöges szoros illeszkedésű kristályrác modellje

1/c ábra. Felületen centrált köbös rác modellje



2. ábra. Kétdimenziós modellünk „rác szerkezete”



3. ábra. Polikristályos állapot modellje. A szoros illeszkedés irányai, a szomszédos szemcsékben különböznek

Egy síkban a legtöbb golyót úgy tudjuk elhelyezni, ha szoroson egymás mellé illesztjük őket. Így minden golyónak 6 közvetlen szomszédja van. A legsűrűbb térkitöltéshez az ilyen, ún. szoros illeszkedésű síkokat kell a legtömörebben egymásra rétegezni. Ezt elérhetjük, ha a két réteget úgy illesztjük össze, hogy a felső réteg minden golyója az alsó réteg három érintkező golyója közti mélyedésbe kerüljön. (1/a ábra).

Ha két ilyen réteget már elhelyeztünk, és az atomok középpontját az első rétegben *A*, a másodikban *B* helyzetnek nevezzük, akkor a harmadik réteg atomjait vagy a legalsó réteg

atomjai fölé ismét *A* vagy egy újabb *C* helyzetbe illeszthetjük. A szoros illeszkedésű síkok egymásra rétegzésével tehát kétféleképpen is megvalósíthatjuk a tömör térkitöltést. (1. 1/b, 1/c ábrák). Az első esetben a rétegek atomjai rendre *ABABAB* . . . helyzetben illeszkednek egymás fölé. Ilyen rendben kristályosodik pl. a zink, a kadmium. Az elrendezést hatszöges szoros illeszkedésnek nevezzük. A második esetben az egymásra helyezett rétegek atomjai az *ABCABCABC* . . . pozíciókat foglalják el. Ebben az elrendezésben kristályosodnak a felületen centrált köbös fémek, pl. Al, Cu, Ag, Au, Ni.

Ha modellünket vízszintes helyzetéből kicsit megdöntjük, a korábban a rendelkezésre álló egész területet rendszertelenül mozogva kitöltő golyók a lejtő alján jellegzetes rendbe tömörülnek. Ez tekinthető modellünkben a kristályosodási folyamatnak. A golyók számára a legalacsonyabb energiaszintet jelenti, ha a lejtő alsó részén a síkot a lehető legtökéletesebben töltik ki, minden golyónak 6 közvetlen szomszédja van. Kétdimenziós kristály modellünk szerkezete a szoros illeszkedést megvalósító fém kristályok egy rétegéhez hasonló (2. ábra).

A környezetünkben található fémtárgyak nagyon sok mozaikszerűen egymásmellé illeszkedő fémkristályból épülnek fel. A szorosan egymáshoz illeszkedő, mikroszkopikus méretű kristályokat kristályszemcséknek, az általuk felépített tárgyat polikristályos szerkezetűnek mondjuk. A kristályszemcsék belső rendje, tehát a kristály szerkezete teljesen hasonló, de a szomszédos szemcséken a kristály irányítottsága más és más.

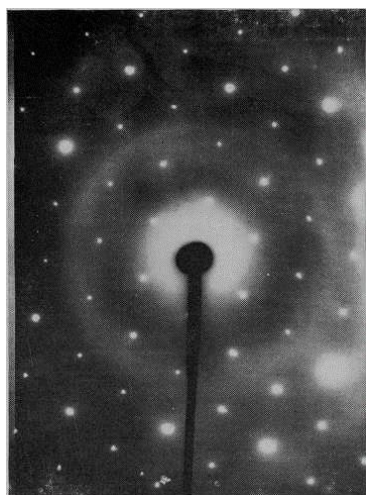
A 3. ábrán kétdimenziós kristálymodellünk polikristályos szerkezetet mutat. A fényképfelvétel az egyes rendezett tartományok képezik most a kristályszemcséket, amelyekbe berajzoltuk a szoros illeszkedési irányokat, így a szomszédos szemcsék orientációkülönbsége könnyen megfigyelhető. Modellünk hatszöges szimmetriájából következik, hogy a szomszédos szemcsék közti orientációkülönbség mindig 60° -nál kisebb.

Tudományos vizsgálatok céljaira gyakran készítenek olyan mintadarabot, melyben az atomok rendeződési irányai a minta egész térfogatában megegyeznek. Az ilyen anyagokat nevezzük egykristályúaknak.

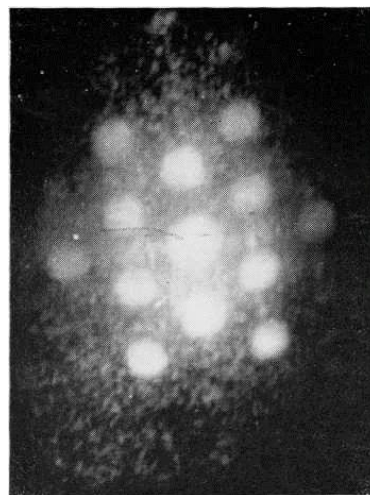
A kristályok belső szerkezeti rendjét röntgen finomszerkezet vizsgálatokkal tanulmányozzák. A periodikus kristályrácsra, mint térbeli optikai rácson a röntgensugarak elhajlást szenvednek. A kristály mögé helyezett fényérzékeny filmen világos foltok szabályos rendszerét kapjuk. Ebből a foltrendszerből – a diffrakciós képből – speciális geometriai optikai módszerekkel lehet következtetni az elhajlást okozó térrács szerkezetére.

Hasonlóan alkalmazható kristályszerkezeti vizsgálatokra az elektronsugár diffrakció is (4. ábra).

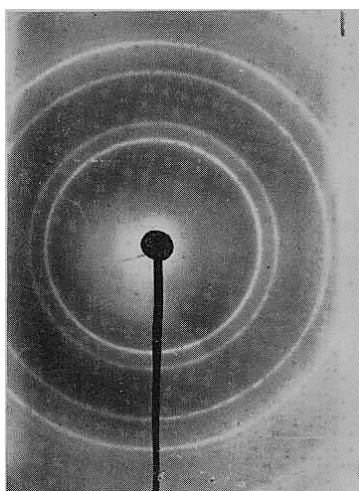
Modellünk felhasználható a (röntgen) diffrakciós vizsgálatok módszereinek jobb megértéséhez. Az 5. ábrán modellrácunknak a kristályok (röntgen) diffrakciós képéhez hasonlítható elhajlási képe látható. A felvételt a modellről készült 8 mm-es film egy kockájának fényrel való átvilágításakor készítettük. A kétdimenziós rácstról készült elhajlási kép a röntgenfelvételekhez hasonlóan értékelhető ki. A kiértékelés végeredményeként a modell közvetlenül megfigyelhető szerkezetét kapjuk. A 6/a ábra polikristályos anyagról készített elektron-diffrakciós képet, a 6/b ábra a polikristályos szerkezetű kétdimenziós modellrác elhajlási képét mutatja.



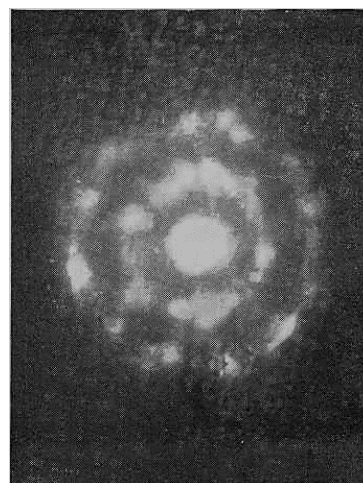
4. ábra. $ZrCr_2$ egykristály
elektron diffrakciós elhajlási képe
(Cziráki Ágnes ELTE felv.)



5. ábra. A modellkristály laser fényvel
készült elhajlási képe



6/a ábra. Polikristályos platina
elektron diffrakciós képe (Cziráki Ágnes
ELTE felv.)



6/b ábra. Polikristály modelljének
elhajlási képe

(A röntgendiffrakciós felvételek kiértékelésekor használt geometriai optikai módszereket és ezek felhasználását – a modellünkhöz hasonló kétdimenziós rácsok elhajlási képének értelmezésére – Zsoldos Lehel a Fizikai Szemle 1968. 4. számában részletesen tárgyalja.)

2. Hibák a kristályrácsban

A kristályok szerkezetét jellemző rend a természetben szinte soha nem valósul meg több-kevesebb hiba nélkül. A legkedvezőbb elrendeződést jelentő ideális rendet megzavaró hibák rendszerint a kristályosodás során már kialakulnak. A kristályt érő külső mechanikai hatások szintén zavart okozhatnak a belső szerkezetben, rácshibák keletkeznek. Az atomok termikus mozgása a rácsban lehetővé teszi, hogy a kristály belsejében átrendeződések, változások történjenek. Ennek során az eredeti hibás tartományok újra rendeződhetnek, és a hibás

illeszkedés így kissé távolabb tolódik, ilyen értelemben beszélhetünk a kristályhibák termikus mozgásáról.

A kristályhibákat legtöbbször kiterjedésük szerint szokták csoportosítani. Ennek alapján a következő hibák létezhetnek:

- ponthibák (rácslyukak, szennyező atomok)
- vonalhibák (diszlokáció)
- felületi hibák (rétegződési hiba, szemcsehatár)
- térfogati hibák (fáziskiválások).

Kristálymodellünkben az „összetartó erő” (a nehézségi erő lejtő menti komponense) hatására tömörülő golyók számára a tökéletes szoros illeszkedés a legkedvezőbb elrendeződés, de a rend mégsem valósul meg tökéletesen.

Az acélgolyók kristályrácsába a valóságos rácshibáknak megfelelően hibák csúsznak. Figyelembe véve, hogy modellünk kétdimenziós, a valódi kristályok térfogati hibájának a modell adott területére kiterjedő hiba, a kristályok felületi hibáinak a síkban vonalmenti hibák felelnek meg. A térbeli kristályszerkezetet csak egy ponton megzavaró ponthibák viszont a modellben a valósághoz hasonlóak.

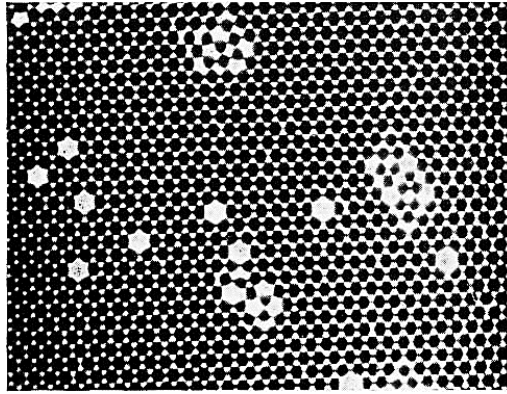
Modellünkön a „hőmozgást” keltő vibrálás hatására az egyes hibák mozgását is megfigyelhetjük (vannak azonban olyan hibák is, melyek a modell golyóinak merevsége miatt nem tudnak mozogni). Az egyes kristályhibákat a modellünkben a következőképpen követhetjük nyomon.

2.1. Ponthibák (Rácslyukak vagy vakanciák)

a) A kristályok gyakori hibája, hogy a kristály szabályos szerkezetéből következő egyes rácspontok üresen maradnak. Ezt a ponthibát nevezzük vakanciának. Egyes esetekben előfordul, hogy közvetlenül egymás mellett több atom is hiányzik a rácsból. Az ilyen hibaegyütteseket a hiányzó részecskék száma után di- vagy trivakanciának stb. nevezzük.

A valódi anyagban levő vakanciakoncentrációra általában közvetett úton, legtöbbször elektromos ellenállás mérések alapján következtetnek.

A kétdimenziós modelltől készült felvételek szinte mindegyikén megfigyelhetők üresen maradt rácspontok, vakanciák. Az egyes rácslukaknál sokkal ritkábban ugyan, de a valósághoz hasonlóan, a modellkristályban is előfordul, hogy közvetlenül egymás mellett több golyó is hiányzik. Az ekkor adódó nagyobb helyre a közvetlen szomszédok benyomulnak, így alakul ki a vakanciatöbbségek körüli jellegzetes atomkonfiguráció. Ezekről a hibahelyekről ránézéssel nem tudjuk rögtön megállapítani, hogy 2 vagy 3 golyó hiányzik a rácsból. A hibakép di- vagy trivakanciával való azonosítása a következőképpen történhet. Vegyünk fel a hibás részt körülvevő jó anyagban az illeszkedési irányokat követve egy paralelogrammát. A paralelogramma oldalai mentén *a*. illetve *b*. számú golyó-„atom” van. A körülzárt területen *a*.*b* tökéletesen illeszkedő golyónak lenne helye. Divakancia esetén ennél kettővel, trivakancia esetén hárommal kevesebbet tudunk csak összeszámlálni. Vakanciákat és vakanciatöbbségeket mutat a 7. ábra.



7. ábra. Vakanciák a modellrácsban

Modellünkben rácslyukak csak a „kristályosodási” folyamatban keletkeznek. A golyók merevsége miatt még igen erős rezgetés (magas hőmérséklet) hatására sem keletkeznek vakanciák. A golyók nem tudják helyüket elhagyni és a kristály „felületére” vándorolni, mert merev társaik közt nem tudják átpréselni magukat. Ugyancsak a golyók merevsége az oka annak, hogy az üres rácspontra az egymásnak feszülő hat közvetlen szomszéd közül egyik sem tud belépni, modellünk egyes vakanciái nem mozoghatnak. Di- és trivakanciákban azonban elegendő hely van ahhoz, hogy a merev golyók is megváltoztathassák helyüket. A rezgetés erősségének fokozásával az ilyen hibás helyek átrendeződnek, miközben a vakanciatöbbséges jellegzetes konfigurációja egy szomszédos helyen jelentkezik. A di- és trivakanciák tehát a merev modellrácsban is akár a kristály határáig mozoghatnak, azaz „hőkezeléssel”, a valódi anyag hibáihoz hasonlóan, megszüntethetők a kristályból.

b) Intersticiális és szennyező atomok

A kristályosodás folyamán gyakran kerülnek a rácsba idegen atomok. Az eltérő kémiai tulajdonságú és méretű szennyezők természetesen nem tudnak zavartalanul beépülni a kristályrácsba. Ezért a szennyező atomokat tartalmazó kristály tulajdonságai (pl. képlékeny alakít- hatás, elektromos ellenállás stb.) megváltoznak. Ezt felhasználva ötvözetek készítésekor tudatosan adagolnak szennyezőket különböző alapfémekhez azért, hogy a gyakorlati felhasználásban kedvezőbb tulajdonságúakká váljanak.

Kétdimenziós modellrácsunk a szennyezők eltérő méretéből adódó rendeződésbeli nehézségeket jól illusztrálja. Nem érzékeltetheti azonban a kristályrácsban a méretkülönbségek miatt ébredő belső feszültségeket, amelyeknek a valódi anyagok tulajdonságainak kialakulásában igen fontos szerepük van.

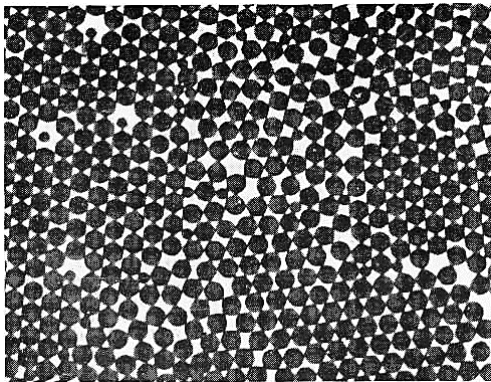
A 8. ábra első ránézésre zavartalan polikristályos szerkezetet mutat, alaposabb megfigyeléssel azonban észrevehetjük, hogy egyes rácshelyeken a saját atomokat (1,56 mm átmérőjű) valamivel kisebb (1,5 mm-es), „ötvöző atomok” helyettesítik. Ilyen kis méretkülönbség esetén bármilyen nagy számú ötvöző szinte észrevétlenül „oldódik” be a rácsba.



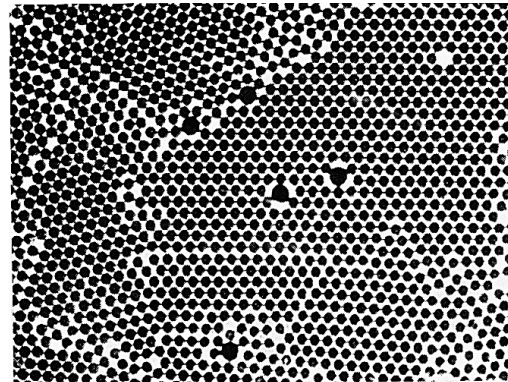
8. ábra. Az elegykristály modellje. A rácsot alkotó golyók méretétől alig eltérő ötvöző-golyók zavartalanul beépülnek a kristályrácsba

Az ilyen ötvözetet, amelyben az ötvöző és saját atomok minden arányban kölcsönösen helyettesíthetik egymást, elegykristálynak nevezzük. A fémek között pl. az Ag és Au atomok, amelyek kémiaiilag hasonló tulajdonságúak és méretük is csak alig különbözik egymástól, alkotnak elegykristályt.

A 9. ábrán a modell alap rácsát 1,5 mm átmérőjű acélgolyók alkotják, amelyek közé 1 mm-es „szennyezőket” juttattunk. Jól látszik, hogy ilyen nagy méret- különbség esetén a szennyező már általában nem helyettesíti egyszerűen az alapfém atomjait. Alacsony hőmérsékleten (kis erősségű rezgetés) a kis golyók közül csak néhánynak sikerül rácspontban elhelyezkednie, másszóval beoldódnia, a többség a rácsot alkotó golyók közé szorulva, ún. rácsközi vagy intersticiális atomként helyezkedik el. Ha a vibrálás intenzitását fokozzuk, egyre több és több szennyezőt old magába a kristály, azaz egyre több kis golyó kerül rácspontba.



9. ábra. Kisméretű ötvöző-golyók részben rácspontokat elfoglalva „beoldódnak” a kristályba, részben intersticiálisként a rácsot alkotó golyók közé ékelődnek



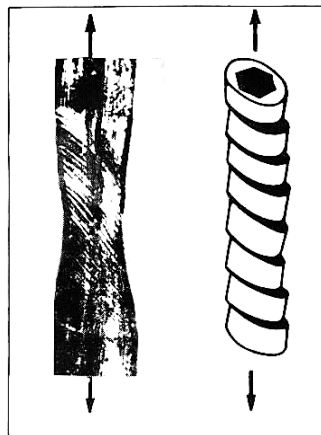
10. ábra. Nagyméretű szennyező-golyók hibás illeszkedése a modell kristályrácsába

A 10. ábrán a rácsot alkotó 1 mm átmérőjű golyóatomok közé 1,5 mm-es „szennyezők” ékelődnek. A rácsot alkotó golyót a jelentős méretkülönbségű szennyező nem tudja a rácsban zavartalanul helyettesíteni. A nagy golyó környezetében a rács jelentősen eltorzul, az ideális

helykitöltés nem valósul meg. A rezgetés hatására a modellkristályban a kedvezőbb helykitöltés biztosítására átrendeződési folyamatok indulnak meg. Ezek eredményeként a rácsatomoknál nagyobb méretű szennyezők a szemcsehatárokba kerülnek, ahol lényegesen kisebb torzulást okoznak. A jelenség valódi ötvözetekben is előfordul, és szemcsehatár menti kiválásnak nevezzük. A jelenséggel még bővebben foglalkozunk a fémek újrakristályosodási folyamatának modellezésekor.

2.2. Vonalhiba a kristályban, diszlokáció

A fémek széleskörű felhasználását többek közt jó alakíthatóságuk teszi lehetővé. A legegyszerűbb alakítás is pl. egy drót megnyújtása vagy egy lemez meghajlítása, a kristályszemcsók belsejében bekövetkező igen sok, rácsállandó nagyságú, elemi csúszás eredménye.



11. ábra. A hexagonális cink egykristály a szoros illeszkedésű síkok mentén történő elcsúszások révén deformálódik. A csúszási vonalakat szabadszemmel is megfigyelhetjük

Egy ilyen csúszás során a kristály egyik tartománya egy kristálytani sík mentén mozdul el a kristály többi részéhez képest. Igen könnyen következik be elcsúszás, a kristály olyan szoros illeszkedésű rétegei mentén, amelyek a deformáló külső erő irányába esnek. A külső feszültség irányától jelentősen eltérő irányú kristálysíkok mentén az elcsúszás csak sokkal nagyobb erő esetén indul meg. A fémek makroszkopikusan megfigyelhető deformációját és e közben a kristályban végbement elcsúszásokat szemlélteti a 11. ábra. A fényképfelvétel cink egykristályról készült hossztengeyirányú megnyújtás után. A hexagonális cink szoros illeszkedésű síkjai mentén történt a csúszás. A fényképfelvételen jól megfigyelhető csúszási vonalak mindegyike nagyon sok, egymásután bekövetkező atomi méretű elcsúszás eredménye.

Polikristályos fémeket alakítva az egyes kristályszemcsékben mikroszkóppal szintén megfigyelhetők az elcsúszásokat jelző csúszási vonalak. A 12. ábra egy nyíllal jelzett irányban megnyújtott polikristályos rézlemezről készült képet mutat. Az egyes szemcsékben a szemcse orientációjától függően más-más irányokban történt elcsúszás.

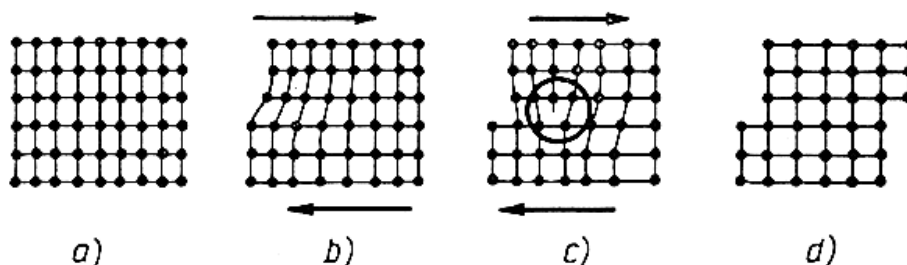
A makroszkopikus deformáció egy elemi lépéseként kialakuló rácsállandónyi csúszás maga is nagyon sok lépésből álló atomi folyamat.

Képzeljük el, hogy a deformáló erő hatására a kristály legszélső rácspontjait elfoglaló atomok az erőhatás következtében a rács következő rétegeire torlónak, és azt beljebb taszítva az eredeti helyükhöz képest egy rácsállandónnyival elmozdulva újra egyensúlyi helyzetbe kerülnek. Ezzel azonban a következő réteg atomjai jutnak kedvezőtlen „rácsközi” helyzetbe, és azok ismét csak további szomszédok kiszorításával tudnak rácspontba kerülni. Az ilyen módon megkezdett folyamatban „sűrűsödés” vonul végig a csúsztató feszültség hatására az elmozduló kristályfélen (1.13. ábra) A „sűrűsödést” okozó, rácsközi helyzetbe ékelődött atomsík és a csúszási sík metszésvonala mentén az atomok hibás elrendeződésűek, azaz nem a kristályra jellemző rendben illeszkednek egymáshoz. Az ilyen vonalmenti hibákat diszlokációknak nevezzük. Diszlokációvonalat tartalmazó térbeli kristályrácsot mutat a 14. ábra.

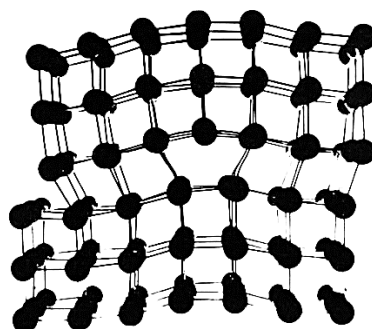
A csúszási folyamat az atomi lépések egyedenkénti vizsgálatánál jóval egyszerűbben követhető a diszlokáció vonal mozgásával. Ha a diszlokáció végighaladt a csúszási sík mentén, akkor a két kristály térfél egymáshoz képest rácsállandónnyival elszűszott.



12. ábra. A polikristályos rézlemezt megnyújtva a különbözően orientált szemcsékben más-más irányban történt csúszás, (mikroszkópi felvétel 400-szoros nagyítás)



13. ábra. Diszlokáció kialakulása, és szerepe a kristály deformálódásában



14. ábra. Diszlokáció térbeli modellrácsban

Diszlokációk már a kristályosodás során keletkeznek. A külső feszültség hatására ezek az anyagban levő diszlokációk mozgásba jönnek, sőt egy speciális mechanizmusú „forrásként” működve, megsokszorozódnak. A kristályos anyag minden észlelhető deformációja nagyon sok diszlokáció keletkezésének és elcsúszásának eredménye.

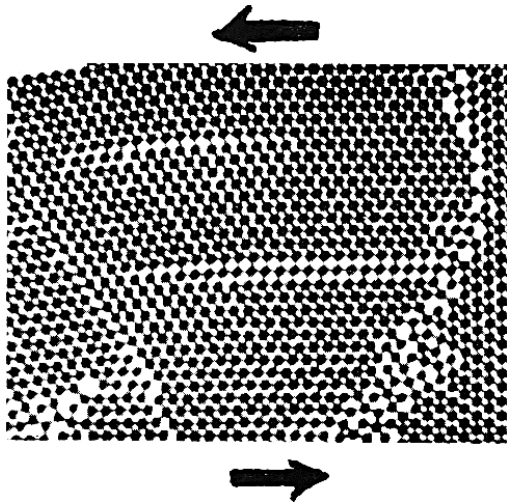
A diszlokációvonal mentén az atomok nem a kristályra jellemző rendben helyezkednek el, ennek következtében a diszlokációt tartalmazó kristály belső feszültségeket tartalmaz. A kialakult feszültségterek közvetítésével a diszlokációk egymással és más rácshibákkal is kölcsönhatásba lépnek. A képlékeny alakváltozás mechanizmusa nagy mértékben függ ezektől a kölcsönhatásoktól, ezért ismeretük alapvetően szükséges a fémek mechanikai tulajdonságainak megértéséhez.

(A diszlokációkat és vizsgálatuknak röntgendiffrakciós és elektronmikroszkópos módszereit a Fizikai Szemle 1960. 11. és 12. száma ismerteti).

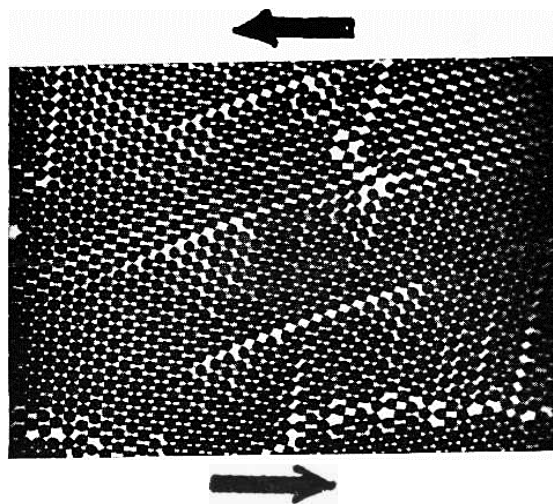
Kétdimenziós merev golyókból álló modellkristályunk maradandó deformációja a valósághoz hasonlóan a kristály két tartományának elcsúszása révén jön létre. A 15. ábra a csúszás közben készült pillanatfelvétel. A fotón nyilak jelzik a kristályt deformáló erők irányát. A felvételen látható jellegzetes, elhalványodóan egyenes vonalú rácshibák az elmozduló és a változatlan helyzetű rácstartományok határán levő golyósorok mozgása során jöttek létre. A valódi kristályok diszlokációinak merev modellünkben ezek a jellegzetes hibák felelnek meg.

A modellrács maradandó deformációját jelentő elcsúszás mindig egy szoros illeszkedésű golyósor mentén történik. Általában a deformáló erő hatásvonalával legkisebb szöget bezáró illeszkedési vonalak valamelyike a csúszási irány. (Nyilvánvaló, hogy a kristálymodellt legkönnyebben valamelyik illeszkedési vonal irányába eső erővel deformálhatjuk.)

A modellt érő erőhatásokkal szemben a modellt alkotó golyók tökéletesen merevnek tekinthetők, ezért egy hibamentes, teljesen zárt térben levő kristály tartomány nem deformálódna. Deformáció csak ott jöhet létre, azaz csak olyan illeszkedési vonalak irányában történhet csúszás (aktiválódhatnak), amelyek mentén az utolsó rácspozícióban levő golyók valamilyen rácshibával pl. szemcsehatárral szomszédosak, vagy a szabad kristályfelületen helyezkednek el, hiszen a merev golyósorok elmozdulása csak így lehetséges.



15. ábra. Kétdimenziós modellünk deformálódása közben kialakuló „csúszási hiba”



16. ábra. Jellegzetes „csúszási hibavonalak” a modellben. A felvételen jól megfigyelhető az éppen csúszó rácstartomány lokális fellazulása.

Az elcsúszási folyamat igen gyors, részleteit nehéz megfigyelni. Az ELTE Általános Fizika Tanszékén az MTA Kutatófilm Osztályának segítségével nagysebességű filmfelvételt készítettünk és ezt vetítve a valóságnál mintegy hatszor lassabban lejátszódó csúszást figyelhettünk meg. Merev golyókristályunk csúszása során a mozgó rácstérfélen egy fellazulási hullám fut végig. A rácstartomány elmozdulása ugyanis úgy jön létre, hogy először a szemcsehatár (vagy szabad felszín) közelében levő golyók kezdenek mozogni. A távolabbi golyók mozgása ezt kis késéssel követi, ezért a csúszás kezdeti szakaszán a szemcsehatár közelében a rácselemek átmenetileg eltávolodnak egymástól. Ahogy a kristály egyes részei mozgásba jönnek, a fellazulás a határtól egyre távolabb kerül. Így tehát a kristálytartomány és a hiba látszólagos mozgása egymással ellentétes. A 16. ábrán az éppen mozgó golyókat tartalmazó, fellazult rész a szemcsehatártól már eléggé távolra került. A fényképfelvételen első ránézésre feltűnő csúszási hibavonalat épp a fellazult és a változatlanul szorosan illeszkedő tartomány kontrasztja emeli ki. Érdekes megfigyelni, hogy a fellazult, illetve a már, vagy még nem mozgó kristályrészek szerkezeti felépítése azonos marad. A fellazulás mintegy a rácsparaméter megnövekedésében jelenik csak meg.

A csúszási folyamat befejeződése után az egész kristálytartomány rendje ismét tökéletes, a két térfél azonban épp egy golyó szélességével elmozdult egymáshoz képest.

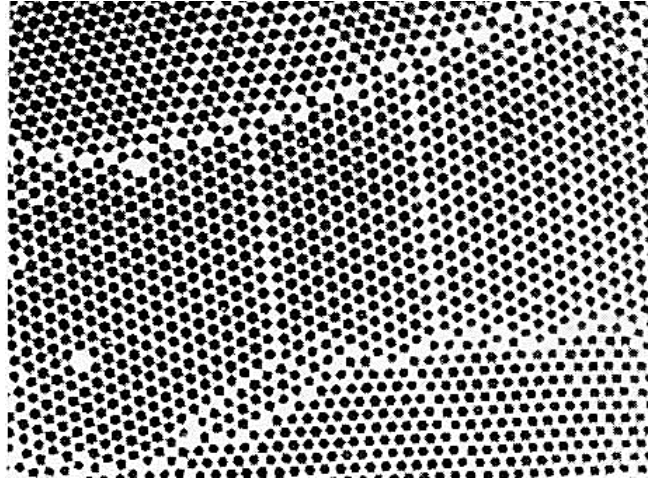
2.3. Felületi hibák

a) Rétegződési hiba

A szoros illeszkedést megvalósító fémek kristályszerkezetét, amint arról már korábban beszéltünk, az egyes ideális helykitöltésű rétegek egymásra épülése szabja meg. A felületen centrált köbös fémekben az egymást követő rétegek atomjai rendre az $ABCABCABC \dots$ pozíciókat foglalják el, a hatszöges fémek rétegei mindig $ABABAB \dots$ helyzetekben követik

egymást. Gyakran előfordul, hogy a rétegek így meghatározott sorrendjét egy hibás, nem az adott kristályszerkezetbe illeszkedő réteg zavarja.

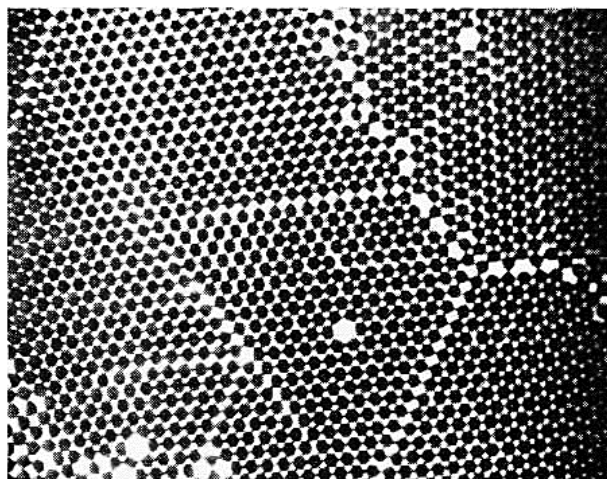
A hexagonális fémek egymást szabályosan $ABAB\dots$ helyzetben követő rácsrétegi közé pl. a kristályosodási folyamat során egy, a kristályba hibásan illeszkedő C helyzetű réteg is beépülhet.



17. ábra. Szemcsehatártól szemcsehatárig terjedő rétegződési hiba

A felületen centrált köbös fémek esetén a szabályos $ABC\ ABC\ ABC\ \dots$ ismétlődésből egy réteg kimaradása okozhat hasonló hibát. A kristály egy rétegeire kiterjedő ilyen hibát – rétegződés-hibának nevezzük. A rétegződési hibák általában a kristály egész keresztmetszetében határtól határig húzódnak. Előfordul, hogy a rácsba hibásan illeszkedő réteg nem épül ki a kristály egész keresztmetszetében. Ilyenkor a hibás réteget a felületben a diszlokációhoz hasonló hibavonal határolja – az elcsúszás azonban most nem a rácsállandóval egyenlő – ezért a rétegződési hibát határoló vonalhibát parciális diszlokációnak nevezzük. Különleges esetekben a rétegződési hibafelületek a rács egy tetraéder alakú tartományát határolják el a kristályban.

Kétdimenziós merev golyómodellünkben a térbeli kristályok rétegződési hibafelületének egy-egy szemcsén keresztül húzódnó egyenes hibavonal felel meg, azaz itt két golyósor illeszkedik hibásan egymáshoz.

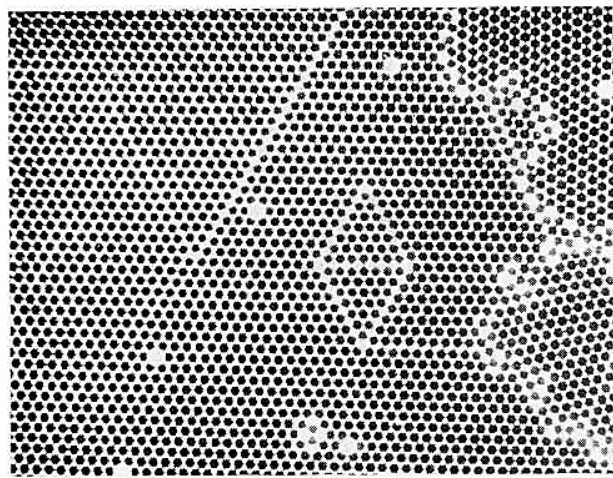


18. ábra. A rétegződési hiba a szemcsehatártól indul, de a kristály szemcse belsejében fokozatosan megszűnik

A két sorban a golyók rendre egymás fölött helyezkednek el. Az ilyen rétegződési hiba által kettéválasztott szemcse két térfele egymáshoz képest csak fél golyótávolságnyira csúszott el (l. 17. ábra). (A valódi kristályokban ilyen módon – egymás hegyébe ülő sorok vagy rétegek – nem alakulhatnak ki hibák. Az ilyen képződmény olyannyira instabil, hogy gyakorlatilag létre sem jön. Modellünkben az acélgolyók merevsége okozza, hogy ilyen hiba létrejöhet, hiszen a szabályos helyre illeszkedés fél golyónyi helyet követelne.)

A 18. ábrán a rétegződési hiba a szemcsehatártól indul, de a szemcse belsejében megszűnik „parciális diszlokáció” határolja.

A rétegződési hibákból kialakuló tetrahedronok megfelelőjét golyómodellünkben a 19. ábra mutatja. A szemcse belsejében egymáshoz támaszkodó két szabályos háromszög alakú tartomány hibásan illeszkedik környezetébe, határa egy önmagába záródó rétegződési hibavonal.



19. ábra. Zárt rétegződési hiba vonal jellegzetes képe

b) Szemcsehatárok

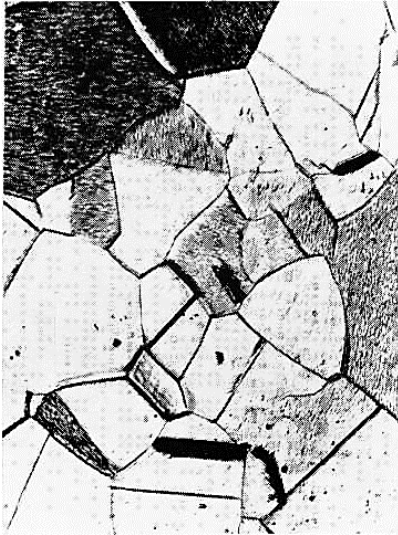
Használati fémtárgyaink polikristályos szerkezetűek. Az egyes kristályszemcsék belsejét vizsgálva az atomok egymáshoz illeszkedése, a kristályrács geometriája, bármelyik szemcsét nézzük is, azonos. Két szomszédos szemcse hasonló geometriájú kristályrácsa azonban egymáshoz képest elforgatott helyzetben van. Az atomok tehát a két szemcsében a tér más-más irányai mentén rendeződtek, így érthető, hogy a két kristályszemcse találkozására, mint valami „senki földje”, jellegzetes felületi hibája a kristályos szerkezetnek.

A szemcsehatárok mentén elhelyezkedő atomok gyengébben kötődnek a kristályhoz, és könnyen lépnek kémiai reakcióba. A legtöbb fémhez találtak olyan kémiai reagenseket – marószereket – melyek hatására a fém- felületbe a szemcsehatárok mentén árkok maródnak. Az árkok mikroszkóppal megfigyelhető vonalrendszer a polikristályos fém szemcseszerkezetét rajzolja ki.

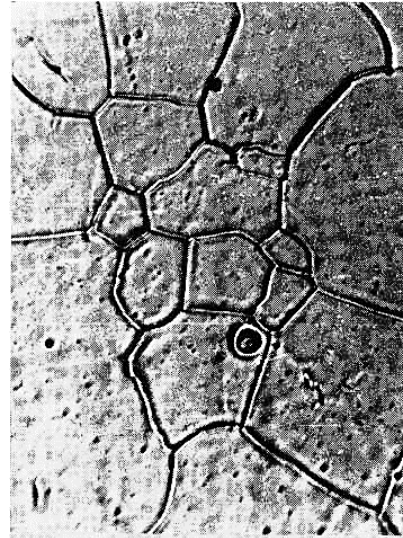
A fémek többségénél a szemcsehatárok „termikusán” is kimarathatók. Ilyenkor a fémeket vákuumban melegítjük, hogy ezzel fokozzuk a minta normális körülmények között elhanyagolható párolgását. A szemcsehatárok mentén, a lazábban kötött atomok miatt, a

párolgás gyorsabb, mint a fémfelület többi részén – a határok mentén a felületen árkok keletkeznek. A 20/a ábra kémiai maratott polikristályos ólom mintá szemcseszerkezetét mutatja 300× nagyításban. A 20/b ábra termikusán maratott rézlemezezen készült.

Kétdimenziós modellkristályunkban a szemcsehatár szerkezete közvetlenül tanulmányozható.

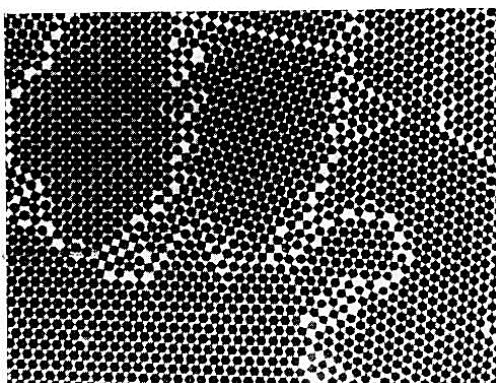


20/a ábra. Kémiai maratott szemcsék ólomban (Rajkovits Zsuzsa ELTE felv.)

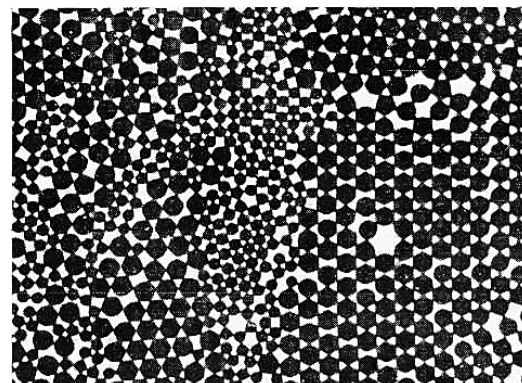


20/b ábra. Termikusan maródott szemcsehatárok rézlemezen

A 21. ábrán megfigyelhető, hogy a határsávban levő golyók többségben illeszkednek valamelyik szemcse rendjéhez, kevés az olyan golyó-atom, amely egyik tartományhoz sem tartozik. A modellt alkotó golyók merevsége miatt a diffúzió, azaz a golyók helyváltoztatása a kristályrácsban lehetetlen. Diffúziós folyamatot itt egyedül a szemcsehatárokon észlelhetünk. Gyakori ugyanis, hogy a vibrátor kölcsönözte termikus mozgás következtében a szemcsék határán levő golyók elhagyják korábbi helyüket és a határsávban mozogva valahol más helyen illeszkednek ismét a szemcse rendjébe, vagy esetleg a határ túloldalán a szomszédos szemcsébe épülnek be.



21. ábra. A polikristály szerkezetű modellen a szemcsehatárok szerkezete közvetlenül megfigyelhető



22. ábra. Fáziskiválás modellje. Az eltérő méretű golyók külön-külön csoportosulnak, „kristályosodnak”

2.4. *Térfogati hiba a kristályban (fáziskiválás)*

A fémekhez adagolt ötvözők általában az alapfém kristályrácsába épülnek be – oldódnak. Egy bizonyos ötvözőkoncentráció felett azonban energetikailag sokkal kedvezőbb, ha az ötvöző atomjai külön egymás mellé illeszkedve rendeződnek a sajátságaiknak (méretük, vegyértékük) legjobban megfelelő kristályrácsba. Ilyen módon az alapfém anyagában egy annak rácsszerkezetétől különböző kristályos szerkezet, egy másik fázis keletkezik. A folyamatot fáziskiválásnak nevezzük. Érthető, hogy általában egy új fázis létrejötte radikálisan megváltoztathatja a fém korábbi tulajdonságait. A 22. ábra kétdimenziós modellünkben szemlélteti a fáziskiválást. Az eltérő méretű golyók külön-külön, saját méretüknek megfelelő kristályrácsba rendeződtek. A két kristályos fázist elválasztó hibafelület a fázishatár, szerkezete a szemcsehatárhoz hasonló.

3. Az újrakristályosodás

A fémek maradandó deformálódása a különböző feszültségek hatására bekövetkező bonyolult diszlokáció-mozgások eredménye. Az alakítás befejeztével nagyon sok rácshiba és a hibák okozta belső feszültség szinte beledermed az anyagba. Általános tapasztalat, hogy a fémek alakításuk során keményednek. A további deformáció már egyre több munkabefektetést igényel, mert a hibákat, belső feszültséget tartalmazó kristályban a diszlokációmozgás már sokkal nehezebb. A diszlokációkkal teli torzult kristályrács termodinamikailag nem stabil elrendeződése az atomoknak, mert szabadenergiája a tökéletes kristályéhoz képest nagyobb. Alacsonyabb hőmérsékleteken a diszlokációk mégis tartósan megmaradnak a kristályban, mert megszűnésükhöz a szabad energia átmeneti növekedésére van szükség. Ha azonban a hőmérséklet elegendően magas, akkor a termikus mozgás lehetővé teszi, hogy az atomok az átmeneti szabadenergia-növekedés ellenére újrarendeződjenek, megvalósul a minimális energiájú hibátlan illeszkedés. Az atomok ezen újrarendeződési folyamatát nevezzük a fém újrakristályosodásának. Az újrakristályosodás során a hibákkal együtt a belső feszültségek is kihálnak a kristályból, a fém kilágyul, újra könnyen deformálható lesz.

Használati tárgyaink legtöbbje képlékeny alakítással (hengerlés, préselés, hajlítás, kovácsolás stb.) készül. Az alakítás után pl. egy kazán fala a gőz igen nagy nyomásának is ellenáll, egy fémből készült tartószerkezet nagy igénybevételt is kibírhat, az újrakristályosodás előrehaladtával azonban kilágyul és már sokkal kisebb igénybevétel hatására is nem kívánatos alakváltozások léphetnek fel. Az ipar számára az egyes fémek, ötvözetek újra- kristályosodási folyamatának ismerete ezért alapvetően fontos.

Ha a deformált, hibákkal teli kristályt megfelelően felmelegítjük, a hibás tartományok eltűnnek, helyükön apró, de tökéletes belső rendezettségű kristályszemcsék keletkeznek. Ezzel lezárul az újrakristályosodási folyamatnak az első szakasza.

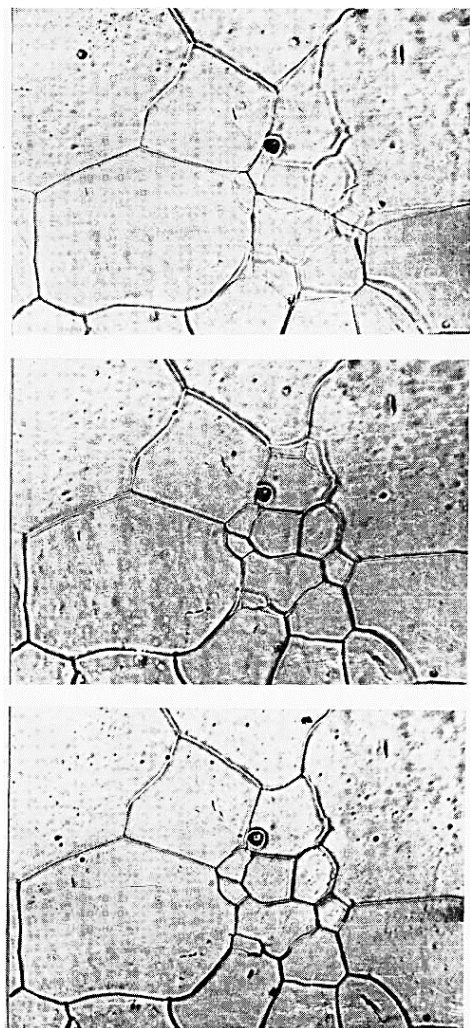
A sok apró szemcsét egymástól elválasztó nagykiterjedésű szemcsehatár-felületek mentén elhelyezkedő atomok azonban sokkal kedvezőtlenebb helyzetben vannak, mint a szemcse belsejében a megfelelő szomszédoktól tökéletesen körülfogott társaik. Az újrakristályosodás második szakaszában ezért a kristályszemcsék megnőnek, hogy ezáltal az anyagban levő szemcsehatárok összfelülete csökkenjen. Az újrakristályosodó fémtárgy átlagos

szemcseméretét a hőkezelés hőmérséklete és időtartama szabja meg. A fém olvadáspontját megközelítve, hosszú hőkezelés hatására a korábban polikristályos anyag általában már csak néhány nagy szemcsét tartalmaz, vagy esetleg egykristállyá válhat. A 23. ábra fényképsorozata 600 °C-on újrakristályosodó rézlemez szemcsenövekedését mutatja. Felvételeinket olyan speciális, magas hőmérsékletű mikroszkópban készítettük, ahol a szemcsenövekedéssel egyidőben a vizsgált anyag termikusán maródik. Ezt a vizsgálati módszert különösen érdekessé teszi, hogy az éppen aktuális, élesen kirajzolódó szemcsehatárok mellett a korábbi állapot szemcseszerkezete is még jó darabig felismerhető, bár a fém egész felületének lassú párolgásával a korábbi szerkezetet jelző árokrendszer egyre inkább elmosódik. A fémeken végzett mikroszkópos vizsgálatokkal csak a szemcsehatárok elmozdulását tudjuk közvetlenül megfigyelni, de az azt előidéző atomi mechanizmusról csak feltételezéseink vannak.

Kétdimenziós kristálymodellünket megütögetve a golyók összerázódnak, a hibákkal teli kristályszerkezet az erősen deformált fémek állapotát szemlélteti. A termikusán aktivált újrakristályosodás modellezését a golyók hőmozgását keltő vibrátor teszi lehetővé. A vibrálás intenzitását, azaz a modellkristály „hőmérsékletét” fokozatosan növelve egyszer csak megindul a hibásan illeszkedő golyóatomok rendeződése. Az újrakristályosodás első szakasza, mely a hibák megszűnését jelenti, igen gyorsan lezajlik és megindul az apró szemcsék növekedése, az újrakristályosodás második szakasza. Modellkristályunkon a szemcsenövekedés minden atomi lépését megfigyelhetjük.

Egy kiszemelt szemcse növekedése csak egy szomszéd szemcse rovására történhet és a két szemcsét elválasztó határsáv atomjainak egyre ismétlődő átrendeződésével valósul meg. A határsáv atomjai általában a két szomszédos szemcse valamelyikéhez illeszkednek. Egy szemcse növekszik, ha a határ túloldalán a szomszéd szemcse rendjéhez illeszkedő golyóatomok leválnak helyükről és a határsávon átjutva a kiszemelt szemcse rendjéhez illeszkednek.

Újrakristályosodás után a korábban sok apró szemcsét tartalmazó modellünk már csak néhány nagy kristályszemcséből áll, esetleg egykristállyá is alakulhat. A 24. ábraszorozat kétdimenziós modellünk újrakristályosodásának fázisait mutatja.

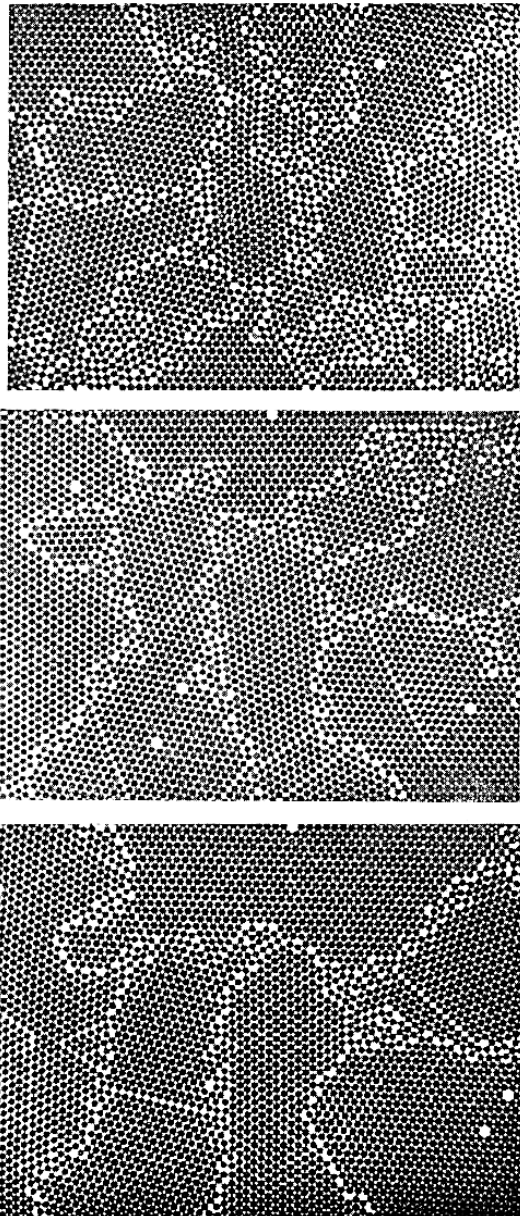


23. ábra. Polikristályá rézlemez szemcsedurvulása 600 °C-on. A folyamatos termikus maratás lehetővé teszi, hogy a szemcsehatárok eltolódását megfigyelhessük. A sorozat képei 5 percnként készültek, a nagyítás 400-szoros

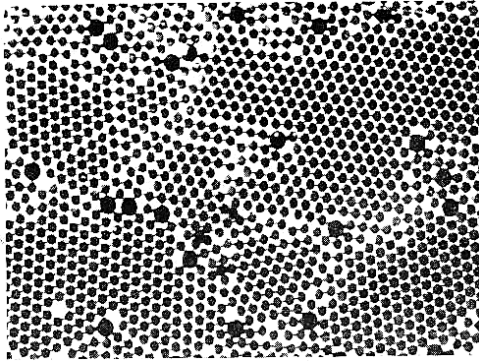
A fémeken végzett mérési tapasztalatok mutatják, hogy az ötvözők erősen gátolják az újrakristályosodás folyamatát. A szemcsenövekedés sebessége ilyenkor erősen lecsökken.

Ha modellkristályunkba a rácsot alkotó golyóktól eltérő méretű „ötvöző-golyókat” juttatunk és így vizsgáljuk az újrakristályosodást, a tapasztalat megegyezik a fémötvözeteken végzett mikroszkópos vizsgálatok során szerzettekkel – a szemcsenövekedés lassul.

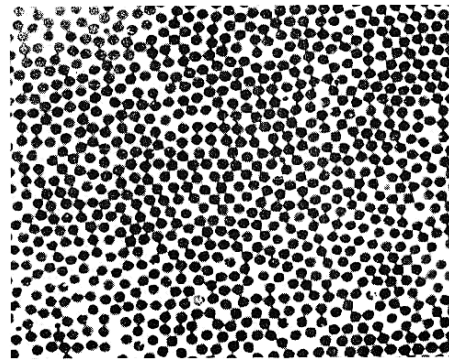
A modellkísérletben közvetlenül megfigyelhetjük, hogyan befolyásolják a szennyezők a szemcsenövekedést. Az eltérő méretű szennyező-golyók, mint arról már korábban beszéltünk, nem tudnak hibamentesen beilleszkedni a kristályrácsba.



24. ábra. A kétdimenziós modellkristály szemcséi az intenzív vibrálás hatására egyre növekednek



25. ábra. A rácsba jutott nagyméretű szennyezők a szemcsehatárokra „kiülve” lassítják a modell újrakristályosodását



26. ábra. Az olvadék-modell jellegzetes szerkezete

Az újrakristályosodás első szakaszában, a golyók rendeződése során a rácsba nem illeszkedő szennyezők kimoszognak a szemcsék belsejéből a határokra, ahol már könnyedén elférnek, és nem zavarják a saját atomok tökéletes illeszkedését. A határon elhelyezkedő szennyezők nehezítik az újrakristályosodás második szakaszát, a szemcsenövedést, mert „takaró” felületükkel megakadályozzák, hogy az egyik szemcse atomjai keresztüldiffundáljanak a szemcsehatáron, és beépüljenek a szomszéd szemcse rendjébe.

A 25. ábra kb. 5%-kal nagyobb méretű szennyezőgolyót tartalmazó ötvözet újrakristályosodásának második szakaszában készült fényképfelvétel. Jól megfigyelhetők a szemcsehatáron elhelyezkedő szennyezők.

4. A kristályos anyag megolvasztása, az olvadék kristályosítása

A fémeket olvadáspontra hevítve az atomok energiája akkorára növekszik, hogy szomszédjaik vonzását legyőzve tömegesen hagyják el a kristályrácsban elfoglalt helyüket. Amikor az atomok stabil rendezettsége - amely korábban kiterjedt a tér viszonylag nagy tartományára megszűnik, akkor a kristály megolvad.

Olvadt állapotban az atomok sokkal szabadabban mozognak, mint korábban a kristályban, de még erős kölcsönhatásban állnak egymással. Alapos szerkezet- vizsgálatok megmutatták, hogy az olvadékban kis csoportokba rendeződnek az atomok, ezek a spontán csoportosulások azonban igen kevésbé stabilak, szinte pillanatról pillanatra szétzilálódhatnak, majd kicsit más formában újraalakulhatnak. Az atomok időleges helyi rendeződése csökken ahogy az olvadék hőmérsékletét tovább növeljük, de egyre jelentősebbé válik az olvadék hűtésével. A fémolvadék kristályosodása a helyi rendeződések stabilizálódásával kezdődik. Ezek az apró rendezett tartományok, mint a kristályosodás gócai épülnek tovább, míg lassan az egymáshoz érő szemcsék kialakítják a szilárd fém polikristályos szerkezetét.

Merev golyókból álló kétdimenziós modellünk alkalmas arra is, hogy az olvadás folyamatát, az olvadék jellegzetes szerkezetét, a kristályosodást szemléletessé tegye.

Á modellkristályt egyre intenzívebben vibrálva (melegítve) a rácsrezgések fokozódnak, majd a modellrács egyes tartományaiban mind gyakoribb helyi fellazulások jelzik, hogy megközelítettük az „olvadáspontot”. A hőmozgás további erősödésére a kristályra jellemző hatszöges rend a modell egész térfogatában megszűnik a modellkristály „megolvad”.

Az olvadéknak megfelelő állapotban a golyó- atomok általános kavargása mellett jól megfigyelhető a pillanatonként változó kis tartományokra kiterjedő rendeződés is. A 26. ábra az olvadék-modell jellegzetes szerkezetét mutatja. A vibrálás intenzitását csökkentve az olvadék „lehül” és megindul a rendezett tartományok növekedése a kristályosodás.

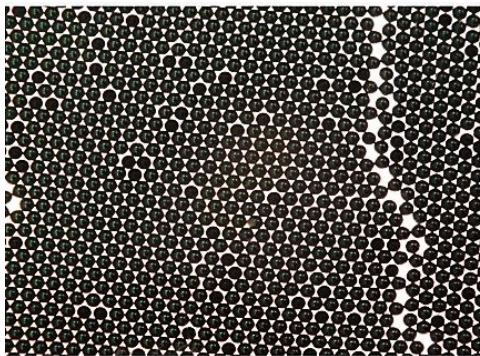
A bemutatott néhány példával a kristályfizika szemléltetett oktatásához kívántunk kedvet és segítséget adni. Kristálymodellünket bárki könnyen elkészítheti. Különösebb kiadást csak az acélgolyók beszerzése jelent (Bp. VI. Bajcsy Zsilinszky úti gördülőcsapágy üzlet). Vibrátorként, ha más megoldás nem áll rendelkezésre, az üzleti forgalomban beszerezhető elektromos masszírozógépet is felhasználhatjuk (a vibrátor intenzitása toroid transzformátorral szabályozható).

IRODALOM

Kovács I. – Zsoldos L.: Diszlokációk és képlékeny alakváltozás. Műszaki Könyvkiadó, 1965.

Verő József: Fémtan. Tankönyvkiadó, 1970.

D. Turnbull and R. L. Cormia: A Dinamic Hard Sphere Model, Journal of Applied Physics, 1960. No. 4.



WWW

[Merev golyókból álló kétdimenziós kristálymodell](#)

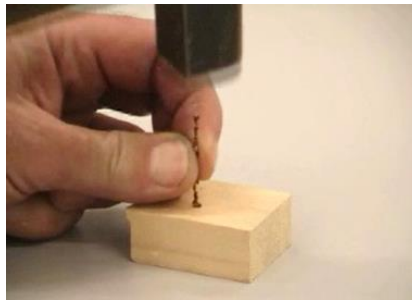


[Vissza >>>](#)

ANY10. Rézdrót alakítási keményedése

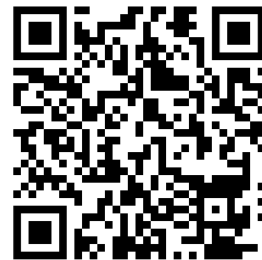
A fémek könnyen és nagymértékben alakíthatók képlékenyen. Az alakváltozás érdekes kísérőjelensége az alakítási keményedés. A képlékeny alakváltozás nagyszámú speciális kristályhiba ún. „diszlokációk” keletkezésével és mozgásával történik. A diszlokációk mozgása egy-egy kristálysík mentén történik miközben a sík két oldalán lévő kristálytartományok fokozatosan csúsznak el egymáson. Mivel a vonalszerű kristályhibák környezetében a kristályrács torzul, ezért a diszlokációk mozgását a rácsban fellépő mechanikai feszültségek befolyásolják. Segítik a diszlokációmozgást a kristályt érő külső erőhatások, miközben a kristály lokális belső torzulását okozó kristályhibák, idegen atomok, a zárványok, polikristályos anyag esetén a szemcsehatárok, akadályozzák. A legfontosabb akadályozó hatást a többi diszlokáció fejt ki. Ezt úgy vesszük észre, hogy az alakítás mértékétől függően az anyag egyre nehezebben alakítható tovább, azaz egyre keményebbnek tűnik. Ezt a jelenséget nevezzük alakítási keményedésnek.

A videófilm ezt a jelenséget mutatja be rézdrót csavarása során. A kísérlet során egy könnyen alakítható lágú rézdrót egyik végét satuba a másik végét elektromos fűrőgép tokmányába fogjuk. A lágú rézdrót már egy kisebb kulcscsomó súlyának hatására is maradandóan lehajlik. A fűrőgépet bekapcsolva a drót sokszorososan megtekeredik. A képlékeny csavarodással járó erős deformáció hatására pedig „megkeményedik”. Ezt látványosan igazolja, hogy a korábbi hajlékony drótot kalapáccsal a szöghöz hasonlóan beverhetjük egy deszkába. A jelenség oka ahogy fentebb már említettük az, hogy a csavarás során nagyon megszorodtak a rézben a diszlokációk. A sok diszlokáció rácsztorzító hatása pedig nehezíti a diszlokációk elmozdulását, azaz a további képlékeny alakváltozást. Gázlánggal történő melegítés hatására a kristályhibák eltűnnek a kristályrácsból és amit az anyag ismételt plaszticitása bizonyít.



WWW

[Rézdrót alakítási keményedése](#)



[Vissza >>>](#)

ANY11. Az acél edzése és megeresztése hőkezeléssel

Kristályos szerkezeti anyagaink mechanikai tulajdonságait az anyag kémiai összetétele és kristályszerkezetének lokális változásai (torzulásai) döntően meghatározzák. Ezt jól példázza az acél. Az acél meghatározó mennyisége vas, aminek kristályai közé több-kevesebb szén, illetve különböző más, ún. *ötvöző* fémek atomjai, illetve kristályai is beépülhetnek. Az ötvözetek fizikai sajátságait a kémiai összetételük és a kristályszerkezetük együtt határozza meg. A kristályszerkezet a kémiai összetételen túl az ötvözet-olvadék megszilárdulásának körülményeitől is erősen függ. A legegyszerűbb acél vas és szén ötvözet. Az olvadt vas viszonylag nagy atomjai között könnyen helyet találnak maguknak a szén kis méretű atomjai. Az olvadt vas oldja a szenet. Az olvadék hűtése során megindul a vasatomok kristályrácsba rendeződése. Ha a hűlés és a kristályosodás lassan történik, a vas és a szénatomok egymástól elkülönülve külön-külön alkotnak eltérő szerkezetű kristályokat, a vas kristályai közé beépülő a szén- kristályok réteges grafit szerkezetűek. Az olvadékban szétszóródva lévő szénatomok egy része azonban nem tud a grafit kristályokba rendeződni, mert beszorul a vasatomok közé. A vas 900 °C felett lapközépen centrált kockarácsba kristályosodik. Itt a rácsba rendeződő vasatomok között vannak olyan kisebb kitöltetlen helyek, amelyekbe a szénatomok megszorulnak, kissé szétfeszítve maguk körül a rácsot. (A kristályrácsba beszorult idegen atomokat a szaknyelv a szerkezet intersticiális ponthibáinak nevezi.) 900 °C alatt a vas kristályszerkezete megváltozik és a térben középpontos kockarácscsá alakul át. A megváltozott szerkezetben a vas atomok közt még kisebb lesz a hely a beékelődött szénatomok számára. Ha a hűlés lassú, esély van rá, hogy a szénatomok diffúzióval megváltoztassák helyüket és vaskristályok közti tartományokban csoportosulva csökkentsék a kristály belső feszültségét. A belső feszültségek csökkenése az acél keménységének csökkenését eredményezi. A szénacélok tulajdonságainak változtatására már évszázadok óta alkalmazzák a felizzítást követő gyors vagy lassú hűtést. A gyors hűtés esetén, ami növeli az acél keménységét, „edzésről beszélünk. A izzó anyag lassú lehűtésével a belső feszültségek csökkennek, ezt az eljárást nevezik *megeresztésnek*.





Az acél edzése és megeresztése egyszerű iskolai kísérlettel bemutatható. A kísérlethez acélpálcát (pl. kerékpárküllőt vagy kötőtűt) használunk. A vízszintes helyzetű pálcát egyik végét szatuba fogva rögzítjük, majd a másik végét megterheljük. A terhelés hatására a pálcát rugalmasan lehajlik, a terhelést levéve kiegyenesedik. Gázlánggal melegítjük izzítsuk fel a pálcát egy szakaszát amíg fényesen izzik, majd hagyjuk lassan kihűlni, végül terheljük meg újra a korábbi súllyal! A pálcát a melegítés helyén maradandóan meggörbül, jelezve, hogy a hőkezelés hatására kilágyult. A lehajlást kiegyenesítve ismétljük meg a melegítést, majd az izzó pálcát öntsük le hideg vízzel! A gyors hűlés hatására a pálcát megkeményedik, a terhelés újbóli ráakasztására ismét csak rugalmasan deformálódik.

[Vissza >>>](#)

RELATIVITÁSELMÉLET

22. Relativitáselmélet

22. RELATIVITÁSELMÉLET

Bevezetés

A relativitáselmélet a középiskolai tanításnak egyik leginkább megkérdőjelezett fejezete. Sokak véleménye, hogy nem érdemes tanítani, mert a diákok az elméletet - paradox állításai miatt - úgyszemint képesek megérteni. A relativitáselmélet mindennapi szemlélettől távol álló megállapításai, közvetlen kísérlettel ellenőrizhetetlen eredményei, csak aláássák a diákoknak a fizikai törvények használhatóságába vetett hitét, és még inkább megerősítik a sokukban élő meggyőződést, hogy a fizika törvényei és a valóság távol állnak egymástól.

Ugyanakkor a relativitáselmélet furcsa következményei érthető magyarázatok nélkül is át meg átszövik mindennapjainkat. Gyakran szerepel a sajtóban az idődilatació és a hosszkontrakció, de sokszor idézik a relativitáselmélet közismert paradoxonjait is. Közismert ténynek tekinthetjük, hogy a fény terjedési sebességénél nagyobb sebesség nem létezik, ennek ellenére szenzációként időről időre megjelenik, hogy léteznek a fény sebességénél gyorsabban mozgó objektumok. A fizika talán legismertebb képlete a tömeg és az energia közötti kapcsolatot kifejező $E = mc^2$ egyenlet. A diákok fantáziáját izgatják a különös megállapítások, szívesen fantáziálnak a relativitáselméletből adódó paradoxonokon, kérdéseikkel pedig elsősorban fizika tanárukhöz fordulnak. Mindez kényszeríti a tanárokat, hogy az elméletet megismerjék, és állításait lehetőleg egyszerű formában is meg tudják fogalmazni, hiszen az érdeklődő diákok kérdéseire választ kell adniuk. A furcsa törvények iránt érzett kíváncsiság jó motivációs lehetőséget jelenthet a diákok érdeklődésének felkeltésére a modern fizika iránt.

A relativitáselmélet alapszintű szisztematikus tanításának beiktatása a tantervbe egy átlagos középiskolában nem feltétlenül szükséges, bár a relativitáselmélet néhány eredményének közlés szintű megismertetésére mindenképpen szükség van. Ilyen alapvető ismeret az energia és a tömeg szoros kapcsolatát jelentő $E = mc^2$ egyenlet, amelynek felhasználása nélkül nem érthetjük meg a magfizikát, pl. a tömegdefektus, a magreakciók, a maghasadás, lényegét sem. Hasonlóan alapvető fontosságú, hogy a diákok tudjanak arról, hogy a vákuumbeli fénysebesség értéke állandó, és az elérhető sebesség felső határa. Ez mutatja meg ugyanis az univerzum megismerhetőségének korlátait. A relativitáselmélet alapszintű ismerete az általános műveltég szempontjából fontos, lényeges azonban, hogy a diákok hozzáértő személytől (fizikatanáruktól) szerezzenek hiteles információkat a relativitáselmületről. Bár a szakszerű fizikai ismeretterjesztés színtere nem csak az iskola lehet, ajánlott, hogy a relativitáselméletet beépítsük az alapszintű tantervekbe is.

A gimnáziumban emelt szinten fizikát tanulók számára, amennyiben az érettségi aktuális követelményrendszerében szerepelnek a relativitáselmélet tartalmai, a relativitáselmélet a helyi fakultatív tanterv részét kell, hogy alkossa.

A relativitáselmélet középiskolai feldolgozásának nagy irodalma van, és sokféle feldolgozása ismert. Ezekkel kapcsolatban a szakmódszertani irodalom szinte egyöntetű megállapítása az, hogy a modern fizika más ágaival (kvantumfizika, statisztikus fizika) szemben a

relativitáselmélet tanítása során nem a matematika okozza a legtöbb nehézséget, hanem a köznapi szemlélettel gyökeresen ellentétes következtetések igazságának elfogadása. Az alapvető problémát a precíz fogalmi gondolkodás szigorú logikája jelenti, ami a kamaszkor végé fele járó fiatalok többségétől távol áll. A speciális relativitáselmélet esetén az igazán nehéz a hétköznapi szemléletünkre jellemző abszolút (koordináta-rendszertől független) idő fogalomtól való elszakadás, a már ismert fizikai fogalmaknak az idő és távolságmérési eljárások finom felülvizsgálatán alapuló újraértelmezése.

A fizika más fejezeteihez hasonlóan a relativitáselmélet középiskolai feldolgozása is többféle szinten és többféle módszerrel tehető meg. Az adott iskola egy-egy tanulócsoportha számára optimális feldolgozás kiválasztása a szaktanár feladata. E feladatot néhány gyakorlati tanáccsal kívánjuk segíteni. Fontos, hogy a relativitás tanítása – az elengedhetetlen gondolat kísérletek és esetleges számítások mellett se legyen csak elmélet. Fizika iránt kevésbé érdeklődő osztályok esetén a finom fogalmi gondolatmenetek erőltetése helyett elegendő, ha az elmélet legfontosabb eredményeit közöljük a tanulókkal (kihangsúlyozva, hogy ezek csak a fénysebességet megközelítő sebességtartományokban válnak fontossá). Nem kevésbé lényeges az sem, hogy az elméletből adódó és abszurdnak tűnő állítások megerősítésére bemutassuk az elméleti eredményeket igazoló kísérletek tapasztalatokat és azokat az alkalmazásokat, amelyek a relativitáselmélet eredményeinek felhasználásán alapulnak. Humán osztályokban a relativitáselmélet feldolgozására ajánljuk, hogy az alapszintű ismereteket a fizika kultúrtörténeti háttérébe ágyazva tanítsuk, hangsúlyozva az előzményeket, az elmélet fejlődését, kísérleti háttérét, alkalmazásait, filozófiai vonatkozásait stb.

Könyvünkben kétféle feldolgozásra mutatunk példát. Alapszintű törzsanyagként a relativitáselméletnek a humaniórák iránt érdeklődő osztályokban lehetséges tárgyalásmódját vázoljuk. Mellékletben közölt tanári segédanyagként tárgyaljuk a relativitáselmélet bővebb kifejtését, amely a skaláris szorzat általánosítására és a négydimenziós téridő *Minkowski-féle* síkon történő szemléltetésére épül. A háttéranyag lehetőséget kínál a tanárnak arra, hogy az alapszintű ismereteket a tanulócsoporth felkészültségéhez, érdeklődéséhez igazítva kiegészítse.



Tasnádi Tamás: *Relativitáselmélet* (kiegészítő tanári háttéranyag)

[Részletek >>>](#)

22.1. A relativitáselmélet tanítása alapszinten

A középiskolák általános tantervű osztályaiban, ahol a szisztematikus felépítésű kötelező fizikaoktatás 10. évfolyammal zárul, elsősorban a speciális relativitáselmélettel foglalkozunk. A Galilei relativitási elv átisméltése után a relativitási elv mechanikán túli, einsteini kiterjesztésével kimondjuk a fénysebesség állandóságát. A fénysebesség állandóságára építve a mennyiségi összefüggések levezetése nélkül tárgyaljuk meg az idődilatációt és a

hosszkontrakciót. A gondolkísérleteken alapuló megállapításokat megerősítjük az eredményeket bizonyító kísérleti tényekkel. A fénysebesség határsebesség tulajdonságát kimondva juthatunk el a kézenfekvő következtetésre, hogy a fény sebességét közelítő mozgó tömeg további sebességnövekedését a tömeg látszólagos növekedése akadályozhatja. A relativisztikus tömegnövekedés ténye fizikailag ugyan nem bizonyított, de szemléletessége és egyszerű alkalmazhatósága miatt a tanításban jól használható). Tanári közlésként fogalmazzuk meg az $E = mc^2$ összefüggést. Mennyiségi kapcsolatok levezetése helyett a fogalmi megértetésre törekszünk, a megadott formulák csak arra szolgálnak, hogy bemutathassuk, a kis sebességek esetén az einsteini relativitás-elmélet visszaadja a klasszikus mechanika eredményeit, továbbá, hogy megvizsgáljuk milyen sebességtartományban válik fontossá a relativisztikus formulák használata. A kvalitatív tárgyalás során alkalmazható gondolkísérletek megmutatják, hogy a fénysebesség állandóságából hogyan következnek az időre, térre, tömegre vonatkozó szokatlan eredmények. Az alapszintű tárgyalás során sem a négydimenziós téridőig, sem a *Lorentz-transzformációig* nem jutunk el. Ennek megfelelően az relativitáselmélet bevezetésére gyakran ajánlott geometriai szemléltetést, a *Minkowski-síkot* sem használjuk.

A mechanika klasszikus szemléltén alapuló Galilei-transzformáció

A Galilei transzformáció lényegét egyszerű kinematikai feladatok ismétlésével célszerű kezdeni. Foglalkozunk például azzal az egyszerű esettel, amikor az egyenes sínpályán egyenletesen haladó vonatban történő mozgásokat vizsgáljuk a mozgó vonathoz viszonyítva (a megfigyelő a vonaton ül), illetve külső, nyugvó rendszerhez viszonyítva (a megfigyelő a sínpálya mellett áll). A legegyszerűbb esetben vizsgálhatjuk a vonat hossz tengelyében lépkedő utas, de akár a kocsiiban ülő két gyerek által egymásnak dobált labda mozgását is. Az ismétlés hangsúlyja legyen a két megfigyelő relatív mozgásán, és a két megfigyelő koordináta-rendszerében a mozgások azonos és különböző tulajdonságain. A két koordináta-rendszerben a hely, a pálya, a sebesség nem azonos, az elmozdulás és az időtartam azonban igen. Oldjunk meg számpéldákat a különböző koordináta-rendszerekben mérhető sebességek kiszámítására, mechanikai testek (pl. ember, labda) mozgása esetén, majd folytassuk a vizsgálatot fényjelekkel! Legyen a vonaton ülő megfigyelő Albert (A), a pályatest mellett álló pedig Beáta (B). Tegyük fel, hogy mindketten ugyanabban a pillanatban küldenek fényjelet a vonat haladási irányába, Albert a vonaton, Beáta a sín mellett. Határozzuk meg a fényjelek sebességét, naiv módon, a Galilei relativitási elv alapján az A és B koordináta-rendszerben. Növeljük a vonat sebességét hétköznapi sebesség értékek használata után a fénysebesség nagyságrendjéhez közelítve! Növekedjék a vonat sebessége rendre $0,1c$ és $0,9c$ között a fénysebesség tizedeivel!

Mondjuk ki a Galilei-féle relativitási elvet (amit a kinematika alapszint tanítása során rendszerint nem fogalmazzunk meg).

Az elv szerint a mechanikai törvények az inerciarendszerekben azonosak. Az alapot ehhez a testek tehetetlenségének törvénye és az inercia rendszer fogalma adja. Hangsúlyozzuk, hogy a Galilei-féle leírást használva az idő és a távolság abszolút abban az értelemben, hogy az időintervallumok minden inercia rendszerben ugyanakkorák, valamint, hogy a merev testek pontjainak távolsága is független a koordináta-rendszerétől. Az inerciarendszerek

ekvivalenciáját egyszerű dinamikai feladatokon, a sebesség összeadás felírása során emeljük ki. Ezek a megállapítások természetes alapjai fizikai szemléletünknek, hangsúlyos kiemelésük ebben az esetben azért szükséges, mert a relativitáselmélet alapjaiban változtatja meg ezeket a törvényeket.

Megjegyzés:

- A Galilei relativitási elv ma már nyilvánvalónak tűnik. Rendkívül fontos azonban, hogy a tanulók érzékeljék az elv súlyát! Ezt talán úgy érhetjük el legjobban, ha idézzük Galilei eredeti művéből, és megmutatjuk, hogy Galilei maga mekkora súlyt fektetett az érvelés finom kidolgozására. Galilei Dialogó című művében párbeszéd formájában fejtette ki nézeteit. Galileit a párbeszédben Salviati képviseli. Az ő érvelését idézzük az egyenletesen mozgó koordináta-rendszerek egyenértékűségére vonatkozóan.

SALVIATI: A pillanat alkalmasnak látszik arra, hogy annak kimutatása során, hogy a felsorolt kísérletek nem érnek semmit, feltegyem a koronát azzal, hogy megmutatom, miképpen lehet azokat a lehető legkisebb fáradsággal kipróbálni. Zárkózzál be egy barátod társaságában egy nagy hajó fedélzete alatt egy meglehetősen nagy terembe. Vigyél oda szúnyogokat, lepkéket és egyéb röpködő állatokat, gondoskodjál egy apró halakkal telt vizes edényről is, azonkívül akassz fel egy kis vödört, melyből a víz egy alája helyezett szűknyakú edénybe csöpög. Most figyelj meg gondosan, hogy a repülő állatok milyen sebességgel röpködnek a szobában minden irányba, míg a hajó áll. Meglátod azt is, hogy a halak egyformán úszkálnak minden irányban, a lehulló vízcseppek mind a vödör alatt álló edénybe esnek. Ha társad felé hajítasz egy tárgyat, mind az egyik, mind a másik irányba egyforma erővel kell hajítanod, feltéve, hogy azonos távolságokról van szó. Ha, mint mondani szokás, páros lábbal ugrasz, minden irányba ugyanolyan messzire jutsz. Jól vigyázz, hogy mindezt gondosan megfigyeld, nehogy bármi kétely támadhasson abban, hogy az álló hajón mindez így történik. Most mozogjon a hajó tetszés szerinti sebességgel: azt fogod tapasztalni – ha a mozgás egyenletes és nem ide-oda ingadozó –, hogy az említett jelenségekben semmiféle változás nem következik be. Azoknak egyikéből sem tudsz arra következtetni, hogy mozog-e a hajó, vagy sem. Ha ugrasz, ugyanakkora távolságra fogsz jutni, mint az előbb, és bármily gyorsan mozog a hajó, nem tudsz nagyobb ugrani hátrafelé, mint előre: pedig az alattad levő hajópadló az alatt az idő alatt, míg a levegőben vagy, ugrásoddal ellenkező irányban elmozdul előre. Ha társad felé egy tárgyat hajítasz, nem kell nagyobb erővel hajítanod, ha barátod a hajó elején tartózkodik, mint akkor, amikor hátul van. A cseppek éppúgy bele fognak hullani az alsó edénybe, mint előbb, egyetlenegy sem fog az edény mögé esni, pedig az, míg a csepp a levegőben van, több hüvelyknyi utat tesz meg. A halaknak sem kell az edényben nagyobb erőt kifejteni, hogy az edény elejére úszhassanak, és ugyanolyan könnyedséggel fognak a táplálék után menni, ha az az edény bármely részén van is. Végül a szúnyogok és a lepkék is különbség nélkül fognak bármely irányba repkedni. Sohasem fog előfordulni, hogy a hátsó falhoz nyomódnak, mintegy elfáradva a gyorsan haladó hajó követésétől, pedig míg a levegőben tartózkodnak, el vannak választva tőle. Ha egy szem tömjént elégetünk, egy kevés füst képződik, mely felszáll a magasba és kis felhő gyanánt lebeg ott, és nem mozdul el sem az egyik, sem a másik irányba. A jelenségek ez egyformaságának az az oka, hogy a hajó mozgásában minden rajta levő tárgy részt vesz, beleértve a levegőt is. Azért is mondtam, hogy a fedélzet alatt kell elhelyezkednetek, mert fent, a szabad levegőn, mely nem kíséri a hajó mozgását, az említett jelenségektől

többé-kevésbé észrevehető eltéréseket tapasztalhatnátok. Így például a füst éppúgy elmaradna, mint a levegő. A szúnyogok és a lepkék sem tudnák követni a hajót a levegő ellenállása miatt, ha a hajótól jelentékeny távolságra kerülnének, de ha a közelben maradnak, minden akadály és erőfeszítés nélkül utolérhetnék a hajót, mert az, mint szabálytalan építmény, a szomszédos légrétegeket magával viszi. Hasonló okokból láthatjuk azt is, hogy a kellemetlen szúnyogok és bögölyök követni tudják a gyorsan vágató lovakat, és majd az egyik, majd a másik testrészükhöz helyezkednek el. A lehulló cseppeknél azonban a különbség egészen csekély, az ugrásnál és súlyos testek hajításánál észrevehetetlen lenne.

- A Galilei relativitási elvet gyakran úgy fogalmazzák, hogy az elv azt mondja ki, hogy a fizika törvényei az inerciarendszerekben azonos módon fogalmazhatók meg. Valójában az elv nem ilyen általános, csak a mechanika törvényeire vonatkozik.

22.2. Speciális relativitáselmélet

22.2.1. Einstein relativitási elve és a fénysebesség állandósága

Általános elvként megállapítottuk, hogy a nem gyorsuló koordináta-rendszerekben a Newton törvények azonos módon érvényesülnek. Ezt a mechanikából kinövő elvet általánosította Einstein minden fizikai törvényre és alkalmazta az elektrodinamika törvényeire. Az inerciarendszerek megkülönböztethetlenségéből (egyenértékűségéből), és abból a tényből, hogy a fénysebesség a fényforrás és az észlelő sebességétől függetlenül vákuumban mindig ugyanakkora. (A fény terjedési sebessége $c = 300000km/s$.) Einstein arra a következtetésre jutott, hogy a fény minden inerciarendszerben azonos sebességgel terjed.

Azt az általános megállapítást, hogy a fizikai törvények (nemcsak a mechanika törvényei) minden inerciarendszerben azonos alakúak Einstein-féle relativitási elvnek nevezzük. Az elv legfontosabb következménye, hogy a vákuumbeli fénysebesség minden inercia rendszerben ugyanakkora. A megállapítás nagyon absztrakt, ezért szembesítsük a diákokat számpéldákon keresztül a következményekkel.

Alkalmazzuk például Einstein relativitási elvét a korábban tárgyalt vonatos példában, ahol a szereplők; Beáta a sín mellett áll a földön, Albert a vonaton van, de most különböző tárgyak mozgása helyett foglalkozzunk csak a fényjelek terjedésével.

Ha Beáta fényjelet küld a vonaton ülő és rendre a fénysebesség tizedeivel ($0,1c-0,9c$) növekvő sebességgel mozgó vonat után, akkor eddig azt gondoltuk, hogy a vonat rendszerében (A rendszerben) a jel egyre csökkenő ($0,9c - 0,1c$) sebességgel követi a vonatot. Az Einstein által kimondott elv szerint azonban ez nem igaz, a fény Albert rendszerében is a rendszer sebességétől függetlenül mindig c sebességgel halad. Növeljük most extrém módon az A rendszer sebességét $0,999999999c$ -re. A fény ebben a koordináta-rendszerben Galilei elképzelése szerint gyakorlatilag nulla sebességgel haladna. Az Einstein által alkotott elv szerint azonban a fény Albert rendszeréhez képest most is c sebességgel terjed. Einstein szubjektív módon úgy gondolta, hogy a fény semmilyen koordináta-rendszerhez képest sem állhat, így ezt is érvként használta a Galilei-transzformációtól eltérő eredményre vezető elv kimondására.

A fénysebesség állandóságának komoly és hétköznapi fizikai szemléletünknek ellentmondó következményei vannak a térre és időre vonatkozóan. Az einsteini feltételezés a szemléletünkbe mélyen beívódott abszolút idő fogalmának elvetéséhez vezet és a bevezetett *relatív idő* fogalmának bevezetésére vezet. A relatív idő fogalmi bevezetése a fénysebesség kísérletileg is bizonyított állandóságának következményeként adódik.

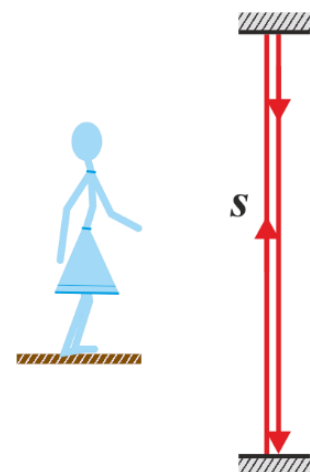
Megjegyzés:

- Természetesen mindez tanári közlés, aminek értelmezése – célszerűen - a diákok aktív bevonásával történik. (Már ekkor érdemes elmondani, hogy a sebességre pontos transzformációs formulák vezethetők le, amelyek kis sebességeknél visszaadják a szemléletünkből következő klasszikus eredményeket is. Érdemes hangsúlyozni azt is, hogy a relativitáselmélet következménye az is, hogy fénysebességgel csak a fény haladhat, a szokásos testek fénysebességre nem gyorsíthatók fel.)
- A fénysebesség különböző inerciarendszerekben vett állandóságát Michelson és Morley kísérletileg igazolta. (A kísérlet részletes leírása megtalálható az optika fejezet [F26.](#) mellékletben és a relativitáselmélet [R2.1.2.](#) mellékletében.)
- A hullámoptika kialakulását követően nagy problémát jelentett, hogy nem tudták egyszerűen megnevezni azt a közeget, amiben a fény, a mechanikai hullámokhoz hasonlóan terjed. A korabeli fizikusok, maga Maxwell is, feltételezték, hogy a fényhullámok azért terjednek a forrástól és az észlelőtől független sebességgel, mert láthatatlan, nem atomokból álló közeg, az *éter*, közvetíti rezgéseiket. (Hasonlóképpen, ahogyan a hang terjed a levegőben.) Ez természetesen egyben azt is jelentette, hogy a világmindenséget kitöltő éter koordináta-rendszere kitüntetett, akár az abszolút nyugvó rendszerként is tekinthetjük. A relativitáselmélet az inerciarendszerek ekvivalenciájának kiterjesztésével tagadta a kitüntetett koordináta-rendszer létét és lehetőségét. Ezzel döntő csapást mért az éter hipotézisre. Ma már tudjuk, hogy a fény terjedéséhez közeg nem szükséges, a fény ugyanis az elektromágneses tér rezgéseinek tovaterjedése, a hullámokban az elektromágneses tér önmagát építi fel.

22.2.2. A fénysebesség állandóságának következményei

Az idő fogalmának relativitása

Gondoljuk végig, hogyan változtat a fénysebesség állandósága az idő mérésén. Időmérőként ne a szokásos bonyolult szerkezetű órákat, hanem egy nagyon egyszerű, elképzelt eszközt használjunk, amellyel könnyen figyelembe vehetjük a fénysebesség állandóságának hatását. Álljon a szerkezet két egymással párhuzamos, egymástól s távolságban elhelyezett tükörből (22.1. ábra).



22.1. ábra: Két tükör közt ide-oda verődő fényimpulzus mint időmérő óra

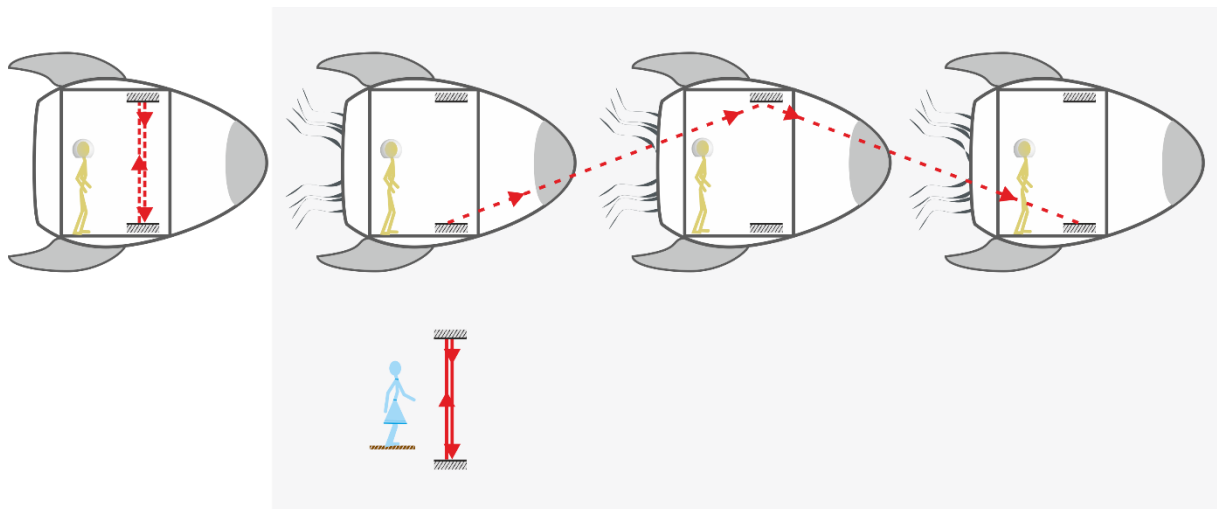
Képzeljük el, hogy az óra megindításakor fényjelet indítunk az alsó tükörtől merőlegesen a felső tükör felé! A jel a felső tükrön visszaverődik és visszatér az alsóhoz. Ekkor az elképzelt óra mutatója egyet ugrik, miközben az óra üt egyet. Ez az időegység:

$$T_0 = \frac{2s}{c}$$

Ha a tükrök távolsága gondolatban rendre 15000, 1500, 150 stb. km, akkor az időegység 1s, 0,1s, 0,01, 0,001, 0,0001s stb. lenne.

Képzeljünk el két órát, a korábbiakban tárgyalt A és a B koordináta-rendszerben és figyeljük meg, hogy mi történik a két rendszerben az órák egyetlen ütése alatt. Saját rendszerében mind Albert, mind Bea azt látja, hogy a fény egységnyi idő alatt $2s$ utat tesz meg függőlegesen. Bea azonban Albert rendszerét figyelve azt látja, hogy a fény a mozgó rendszerben ferdén halad és több utat tesz meg, hiszen nem csak függőlegesen, hanem a vonat mozgásának irányában is elmozdul. Mivel a fénysebesség nem változhat, ez csak azt jelentheti, hogy Albert órájának egy ütéséhez több időnek kellett eltelnie. Albert órája Bea rendszeréből nézve lassabban jár! Fordítsuk meg azonban a vizsgálódást. Nézzük Albert rendszeréből Bea óráját. Albert rendszeréből nézve Bea órája a vonattal ellentétes irányban mozog, így Albert szerint Bea órájában a fénysugár hosszabb utat tesz meg mint $2s$. Következésképpen Albert szerint Bea órája lassabban jár.

Általános következtetésként levonhatjuk tehát, hogy a mozgás irányától függetlenül a mozgó órák lassabban járnak. Az idő nem abszolút módon, hanem koordináta rendszertől függően telik. Ezt illusztrálja az ábra vázlatos rajza.



22.2. ábra: A fényóra működése Bea koordináta-rendszeréből értelmezve

Az ábra felső sorának bal oldali része a fényóra működését a rakétában álló Albert szemszögéből mutatja. A fény az alsó tükörről a felsőre majd onnan visszaverődve függőlegesen halad. Ugyanezt mutatja az alsó ábra a pálya mentén álló Bea saját órájára vonatkozóan. A felső ábra jobboldali képsora Bea szemszögéből illusztrálja Albert órájának egy időegységét. Bea úgy látja, hogy az alsó tükörről induló fénysugár ferdén halad a felső tükör felé, hiszen a tükör a vonat sebességével elmozdul, a visszaverődés után a fénysugár ismét ferdén halad az alsó tükörig. A szaggatott vonalak a fény pályáját mutatják.

Megjegyzés:

- Az idő a fénysebesség koordináta-rendszertől függetlenné válása miatt lesz relatívva. (A szokásos Galilei-szemlélettel – ha az idő minden inercia rendszerben azonosan telne – a különböző koordináta-rendszerben bekövetkező eseményeket és időtartamokat a fény sebességének megváltozásával értelmezhetnénk. Ez azonban ellentétes a fénysebesség állandóságát bizonyító kísérleti tapasztalattal.)
- A gondolatmenet, bár még algebrai egyenleteket sem használunk, nehéz. A fogalmi gondolkodást az egyszerű konkrét példákkal sem tudjuk könnyebbé tenni.
- Az ábrák alapján pusztán a Pithagorász-tétel használatával megmutatható, hogy a nyugvónak tekintett inercia rendszerhez képest az abban T_o hosszúságúnak mért időtartamok a v sebességgel mozgó rendszerben a

$$T = \frac{T_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

összefüggés szerint hosszabbodnak (v a mozgó rendszer sebessége). Ezt nevezzük idődilataciónak. Az idődilatació fogalmi megértése után a dilataciót mennyiségileg megadó képletet tanári közlésként érdemes elmondani. Fontos felhívni a figyelmet arra, hogy a fénysebességet megközelítve az időtartamok egyre hosszabbá válnak, s ha elérnék a fénysebességet, minden időtartam végtelen nagyra válna. Ez mutatja, hogy a fénysebesség nem érhető el valós körülmények között. Magára a fényre nézve a T_o -ra rendezett alakot érdemes alkalmazni: bármely T időintervallumra a c sebességgel mozgó koordináta-rendszerben T_o nullának adódik, azaz a fény számára *nem telik* az idő.

- A formula bizonyítása egyszerű a nyugvó rendszerből nézve a mozgó vonaton kibocsátott fénysugár az alsó tükörtől a felső tükörig $\sqrt{s^2 + \left(v \frac{T}{2}\right)^2}$ utat tesz meg. Ugyanakkora az út a felső tükörtől az alsóig. Az óra egy ütéséhez, tehát Bea rendszerében

$$T = \frac{2\sqrt{s^2 + \left(v \frac{T}{2}\right)^2}}{c}$$

idő szükséges. Ebből T -re $T = \frac{2s}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{T_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ adódik, hiszen $T_o = \frac{2s}{c}$ éppen a nyugvó

óra egy periódusának ideje. Hangsúlyozzuk azonban, hogy az idődilatació megértéséhez, sem a képlet, sem a hozzá vezető számítás nem szükséges. A

megértéshez csak azt kell megérteni, hogy a hozzánk képest mozgó órában a fénysugár hosszabb utat tesz meg, mint az állóban.

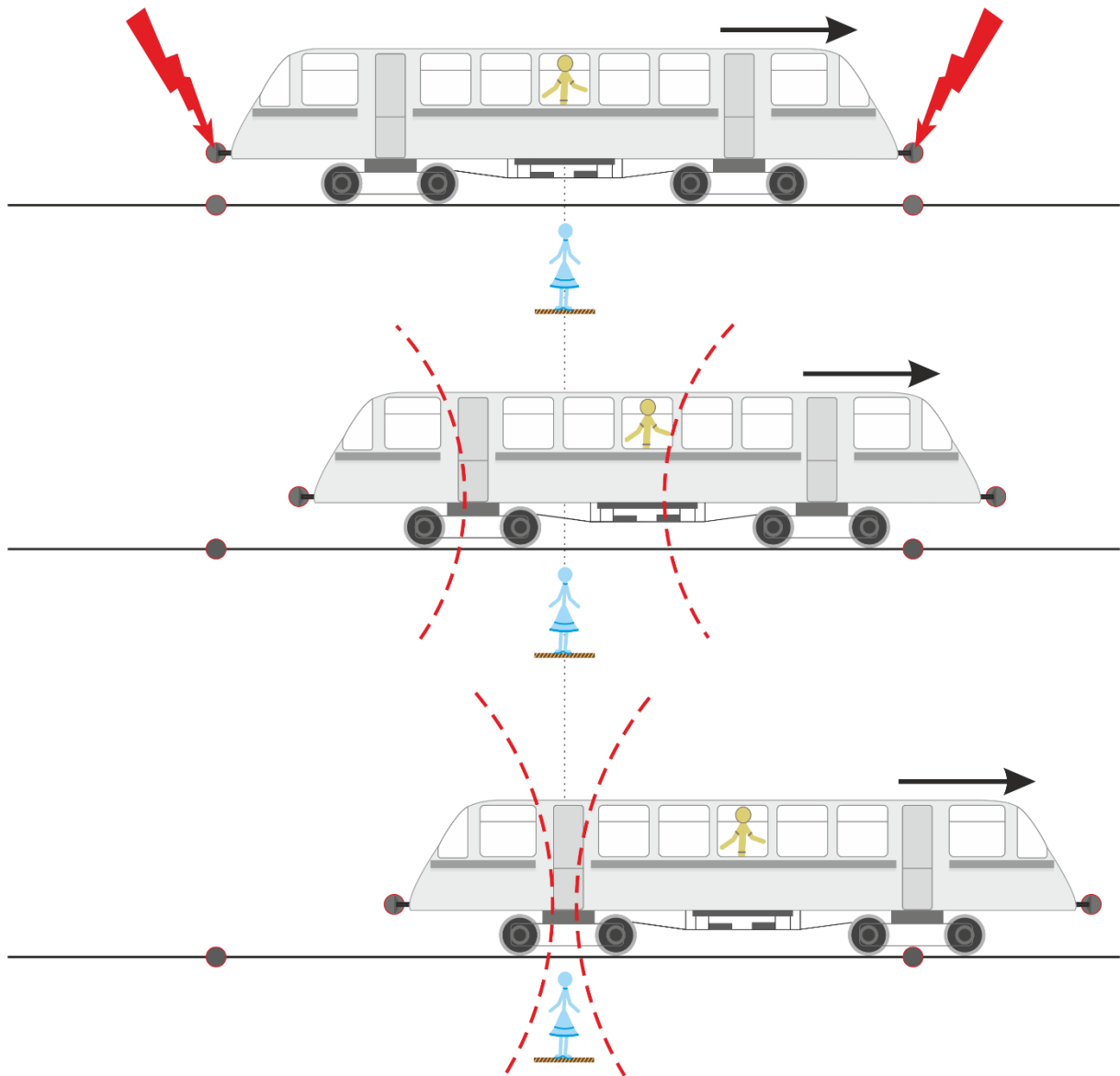
- Az idődilatació több paradox megállapításra is vezetett. Legismertebb az iker paradoxon. Képzeld el, hogy egy űrhajón ikergyermek születnek, Albert és Bea, és Albertet születése pillanatában átteszik egy másik űrhajóra, amely ezután az elsőhöz képest nagy sebességre gyorsul. A második űrhajó eltávolodik az elsőől, majd visszafordul és nagy sebességét megtartva visszatér hozzá, éppen az ott hagyott testvér (Bea) 10. születésnapján. A nagy sebességgel mozgó űrhajóban azonban az első űrhajóban ülők szempontjából lassabban telt az idő. Albert nem 10 évesen, hanem fiatalabban érkezik vissza.

Gondolkozhatunk azonban a második űrhajó utasai szemszögéből is. Az ő számukra az első űrhajó távolodott, majd tért vissza hozzájuk nagy sebességgel. Tehát amikor újra találkoznak, Bea lesz fiatalabb Albertnél.

Az ellentmondás látszólag feloldhatatlan. Hogyan döntjük el ki lesz fiatalabb? A választ megadásához azt kell meggondolnunk, hogy valóban szimmetrikus-e a két űrhajó mozgása. Rájöhetünk arra, hogy bár az űrhajók koordináta-rendszere, amikor mindkettő egyenletesen mozog, egyenértékű, azonban a második űrhajó mégis megkülönböztethető azzal, hogy csak az ő gyorsult az események során. (A gyorsulás objektív különbséget jelent, hiszen pusztán a rendszer belsejében vizsgálódva megállapítható.) A paradoxont tehát azzal oldhatjuk fel, hogy annak az űrhajónak az utasa, esetünkben Albert, lesz fiatalabb, amelyik gyorsult.

Az egyidejűség relativitása

Amellett, hogy az időtartamoknak a különböző koordináta-rendszerekben különböző a nagysága, további furcsa eredményre is juthatunk. Szokásos fizikai szemléletünk szerint az egyidejű események koordináta rendszertől függetlenül ugyanabban a pillanatban következnek be. Érdekes felvetnünk a kérdést, vajon igaz-e ez a megállapítás akkor is, ha a fény sebessége minden inercia rendszerben azonos. A probléma vizsgálatához használjuk ismét a korábbi vonat példánkat Einstein szerinti kis módosítással! A vonat v sebességgel mozog jobbra, Albert a mozgó vonat közepén áll, Bea a talajon a sínpár mellett. Einstein után tételezzük fel, hogy amikor Albert és Bea épp egymással szembe kerülnek a vonat elején és a végén egyszerre csap le egy-egy villám! (A két egyidejű villámcsapás véletlen és nincs semmi kapcsolatban a vonattal sem.) A villámcsapások Bea rendszerében ugyanabban a pillanatban következnek be (22.3. ábra). Az egyszerűség kedvéért ebben a pillanatban legyen Albert a vonat közepén és a pályatest mentén Bea is álljon ugyanebben a pontban.



22.3.ábra. A villámcsapás észlelésének szakaszai, két egyidejű fényjel terjedésének fázisai különböző rendszerekben

A felső kép a villámcsapások pillanatát mutatja. A középső képen a távolodó vonat látszik abban a pillanatban, amikor a vonat elejére lecsapó villám Alberthez érkezik, az alsó, pedig azt a pillanatot, amikor a villámcsapások fénye Beához érkezik. A körívek a villámcsapás helyéről kiinduló fényhullámok frontját szemléltetik az adott pillanatban.

Az egyidejű villámcsapások fénye a pálya mentén álló Beához ugyanabban a pillanatban érkezik meg, hiszen Bea éppen középen áll a villámcsapásokhoz képest. Albert, bár a villámcsapások időpontjában ugyanott áll, mint Bea, a vonattal együtt mozog. Így elébe megy a vonat elejéről érkező villanásnak, és távolodik a vonat végéről érkezőtől. A vonat elejéről érkező villámcsapás fényét tehát előbb érzékeli, mint a végéről érkezőt. Mivel tudja, hogy éppen a vonat közepén áll, és a fény sebessége állandó az ő rendszerében is, a korábbi érkezést csak azzal tudja magyarázni, hogy a vonat elejére korábban csapott le a villám.

Egyszerre csapott-e le a két villám, vagy nem? Erre a kérdésre nem lehet válaszolni. Az Einstein-féle relativitási elv szerint az egyidejűség is relatív, koordináta-rendszer függővé vált.

A hosszúság relativitása

Foglalkozzunk most a hossz-méréssel. Ha Bea, vagy Albert saját koordináta-rendszerében szeretné megmérni valamilyen tárgy hosszát, és megpróbálja kitalálni, hogy a másik mit mért az övéhez képest, ismét furcsa eredményre jutunk.

Az egyszerűség kedvéért legyen a mérendő tárgy Albert vonatja. Albert egyszerűen járhat el. A vonat saját rendszerében nyugszik, így Albert egyszerűen végigfektet egy mérőszalagot a vonat mentén és leolvassa róla a vonat hosszát.

Nehezebb a mérés, Bea számára. Ő úgy járhat el, hogy a pálya mentén beszállított koordináta-rendszert vesz fel és adott pillanatban leolvassa róla a vonat elejének és végének koordinátáját. A koordináták különbsége megadja a vonat hosszát. Az egyidejűség, azonban mint láttuk nehéz kérdés.

A korábbi villámcsapásos példára visszatérve, Bea számára a vonat hosszának elfogadható mértéke a vonat elejére és végére ugyanabban az időpillanatban lecsapó villámok távolsága. A vonat koordináta-rendszerével együtt mozgó Albert könnyen kimutathatja, hogy Bea eredménye kisebb, mint az általa mért hossz. A következőképpen érvelhet. Számára a két villám nem ugyanabban a pillanatban csapott le. A vonat elején korábban villant fel a villám fénye, mint a végén. A két villámcsapás közötti idő alatt a vonat eleje Bea koordináta-rendszerében előbbre jutott. Így a Bea által azonos pillanatban észlelt villámok, a vonat Albert által mért hosszánál rövidebb távolságot jelöltek ki.

A vonat tehát a hozzá rögzített koordináta-rendszerben (amelyben nyugszik) hosszabbnak látszik, mint a hozzá képest mozgó rendszerben. Ezt fogalmazhatjuk úgy is, hogy a vonat hossza a hozzá képest mozgó rendszerben rövidebbnek tűnik.

A távolságok mérése különböző koordináta-rendszerekben sokféleképpen valósítható meg. Minden esetben igaz azonban az az állítás, hogy a mért tárgyhoz képest mozgó rendszerben a tárgy rövidebbnek tűnik. Ezt nevezzük hossz-kontrakciónak. Megállapítható tehát, hogy az idő mellett a távolság is relatív, koordináta rendszer függővé vált.

Megjegyzés:

- A v sebességgel mozgó tárgy relativisztikus rövidülése az:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

összefüggéssel fejezhető ki, ahol l a tárgynak a v sebességgel mozgó rendszerben mért hossza, l_0 pedig az ún. nyugalmi hosszúság (a tárgynak abban a koordináta-rendszerben mért hossza, amelyben nyugszik). A képletet, a rövidülés fogalmi megértése után, tanári közlésként érdemes elmondani. A formula mutatja, hogy a fénysebességet közelítve a tárgy hossza zérushoz tart. Ez ismét mutatja, hogy a fénysebesség nem érhető el.

Az idődilatáció és a hosszkontrakció kísérleti igazolása

A relativitáselmélet keletkezését követően évekig csak a gondolkísérletekre alapozott megállapítások voltak és valóságtartalmukat csak később sikerült kísérletileg bizonyítani és ezáltal teljes értékű fizikai törvényként elfogadtatni. Az idődilatáció és a hosszkontrakció valóságának első közvetett kísérleti bizonyítékát az 1940-es években felfedezett elemi részecskék a müonok szolgáltatták. A müonok a leptonok csoportjába tartozó részecskék, negatív töltésük az elektronkéval megegyező, tömegük az elektronok tömegének közel 200-szorosa. A felső légkörben keletkeznek a Föld felszíne felett 10-20 km magasságban, amikor a nagy energiájú kozmikus sugárzás részecskéi a légkör molekuláival ütköznek. (Léggömbökre telepített mérőműszerekkel vizsgálva a müonok a Föld egész légkörben kimutathatók, sebességük eléri a fénysebesség 99,9%-át.) A felszín minden négyzetméterét mintegy 200 müon éri el másodpercenként. A müonok ütköztetési kísérlettel laboratóriumi viszonyok közt is előállíthatók. Az így keletkezett müonok sebessége csak töredéke a magaslégköri müonokénak és emellett rendkívül bomlékonyak is, átlagos élettartamuk 2 mikroszekundum.

A magas légkörben keletkezett nagysebességű müonok a nagyon rövid élettartamuk miatt még nagy sebességük ellenére sem juthatnának le 10-20 km magasságból a Föld felszínére, de még egy kilométernyire sem. A Földhöz képest nagy sebességgel mozgó müonok esetén az instabil részecskék élettartama az idődilatáció miatt megnő. Az idődilatáció formulájával számolva igazolható, hogy a megnövelt élettartam alatt az adott sebességgel a müonok elérhetik a Föld felszínét.

Hasonló eredményre vezet, ha a müonhoz kötött koordináta-rendszerben okoskodunk relativisztikusan. A müon saját rendszeréből nézve a Föld közeledik nagy sebességgel a részecskéhez. A relativitáselmélet állítása szerint a mozgó objektum (Föld) távolsága rövidül, A hosszkontrakció megadott formulájával számítva igazolható, hogy a müon sajátidő-élettartamába bőven belefér, hogy a fénysebesség 99,9 %-val a müon felé közeledő Föld megtegye a relativisztikusan megrövidült távolságot. A müonokra vonatkozó kísérletei tapasztalatok így a relativisztikus idődilatáció, illetve a relativisztikus hosszkontrakció tényét igazolják.

A relativisztikus idődilatáció mindennapi gyakorlati bizonyítékául szolgál közismert GPS (globális helymeghatározó rendszer) működése is. (GPS működési elvét a [Fizika tanítása a középiskolában II.](#) kötet ERH8. melléklete (683.old.) tárgyalja.) Az eszköz működése azon alapul, hogy a Föld körül keringő különböző mesterséges holdakra telepített atomórák időjeleit fogja az autóba telepített műszer és az időadatok alapján kiszámolja az autó aktuális helyzetét. Ha az időmérés pontatlan, a helymeghatározás is hibás. A nagy sebességgel mozgó műholdakra telepített atomórák a relativisztikus idődilatáció miatt késnek a földi órákhoz képest, ugyancsak relativisztikus effektus, hogy az órák sajátfrekvenciája függ az óra helyének gravitációs térerősségétől. A műholdakról küldött időadatok tehát hibásak. Ha ezt nem vennénk figyelembe a helymeghatározás hibája km nagyságrendű lehetne. A hiba kiküszöbölhető, ha a relativisztikus hatásokat figyelembevéve számítással korrigáljuk a műholdak által küldött időadatokat. A korrekciós számításokat a készülékbe beépített számítógép elvégzi, így a

helymeghatározás hibája nem több, mint néhány méter. A GPS készülék jó működése igazolja a speciális relativitáselmélet számunkra meglepő állításait.

22.2.3. A relativisztikus dinamika

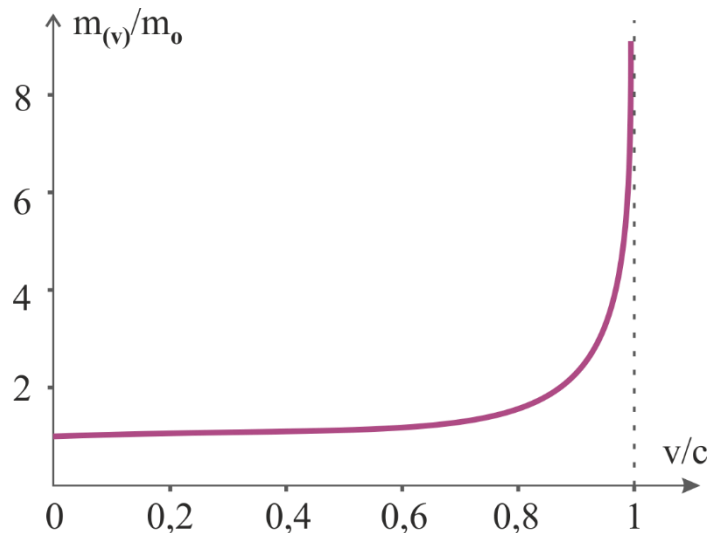
A relativisztikus dinamika tárgyalásának didaktikai dilemmái

Vizsgáljuk meg, hogy milyen változtatást igényel a dinamika jelenségeinek relativisztikus leírása! Tekintsük azt az egyszerű esetet, ami állandó erő hatására egyenes vonalban gyorsulva mozog! A klasszikus mechanika newtoni törvénye szerint a test gyorsulása konstans, sebessége folyamatosan és egyenletes ütemben növekszik. A sebességnövekedésnek a klasszikus mechanikában nincs felső korlátja. Ez az alapvető különbség a klasszikus és a relativisztikus mechanika között. Mivel a kísérletileg is igazolt idődilatáció és hosszkontrakció alapján egyértelmű volt, hogy a testek sebessége soha nem érheti el a fény sebességét, szükségesnek látszott, hogy Newton klasszikus törvényét úgy módosítsuk, hogy a sebesség növekedésével a test gyorsulása egyre kisebbé váljék, és így összhangba kerüljön a relativitáselmélettel.

Mivel a test mozgását meghatározó erők nem függhetnek a mozgás leírására választott vonatkoztatási rendszertől, kézenfekvőnek tűnt, hogy feltételezzék, hogy a test tehetetlensége (tömege) növekszik a sebesség növekedésével. Bár ez a relativisztikus tömegnövekedés csak elméleti következtetés, kísérletileg nem bizonyított, a szakirodalomban mégis gyorsan elterjedt. Megkülönböztették a test nyugalmi tömegét (m_0) – ez szerepel a Newtoni klasszikus mechanikában – és a v sebességű test ún. *relativisztikus tömegét* ($m(v)$), ami nagy sebességek esetén meghatározó. A két sebesség arányát (Lorentz-faktor) gondolat-kísérletek alapján, az idődilatáció és a hosszkontrakció figyelembevételével elemi módszerekkel képletszerűen meg lehetett határozni. Eszerint

$$\frac{m(v)}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ahol v , a mozgó test sebessége, c a fénysebesség. A Lorentz-faktor növekedését a test fénysebességhez viszonyított mozgási sebességének függvényében a ábra grafikonja szemléletesen mutatja. Nyugalomban és kis sebességek esetén a Lorentz-faktor értéke egységnyi (azaz a relativisztikus tömeg megegyezik a nyugalmi tömeggel), a fénysebességet közelítve azonban egyre meredekebben növekedve a végtelenhez tart.



22.4. ábra A relativisztikus és a nyugalmi tömeg arányának változása a sebesség függvényében

Megjegyzés:

- A relativisztikus tömegnövekedés szemléletes magyarázatot ad a fénysebesség határsebesség voltára. Sok fizikus mégis vitatja a relativisztikus tömeg bevezetésének tudományos megalapozottságát, és problematikusnak tartja a nyugalmi tömeg és a relativisztikus tömeg fogalmi szétválasztását, mások a relativisztikus tömeg bevezetését didaktikai szempontokból kifejezetten előnyösnek tartják. A tanárok számára fontos és hasznos azonban, az elterjedt tankönyvi gyakorlaton túlmutató különböző értelmezések megismerése is.



Szondy György: [Nyugalmi vs. relativisztikus tömeg](#) . Fizikai Szemle, 2007/8.)



Hraskó Péter: *A relativitáselmélet alapjai*, Typotex, Budapest 2009.



A középiskola alapszinten tanuló osztályaiban egyszerűsége miatt javasoljuk a relativisztikus tömeg formális használatát. Ezt követjük rövid jegyzetünk további részében is.

A speciális emelt szintű osztályok esetén a tanárnak kell mérlegelnie, hogy marad-e a didaktikailag egyszerűbb tárgyalásnál, vállalva, hogy tanítványainak az egyetemen némi fogalmi újragondolásra lesz majd szüksége, vagy a relativisztikus tömeg bevezetését elkerülve

gondolatilag kicsit nehezebb úton tárgyalja a relativitáselméletet. Ehhez nyújt segítséget a relativitáselmélet mellékletben közölt igényesebb feldolgozása.

Tömegpont mozgásának egyszerű dinamikai leírása relativisztikus megközelítésben

A mozgó test dinamikai jellemzője a mozgásmennyiség (impulzus). A klasszikus mechanikában a testek impulzusa állandó erő hatására az erőhatás idejével arányosan növekedhet tetszőlegesen nagy sebességekig. A relativitáselmélet tükrében ez lehetetlen, hiszen az elérhető sebesség maximumát megszabja a fénysebesség. Az idődilatació és a hosszúságkontrakció figyelembevételével a relativisztikus impulzust leíró képlet levezethető, alapszinten a levezetés mellőzésével a végformulát közöljük:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A képlet egyértelműen mutatja, hogy a v sebességgel mozgó test impulzusa csak $v \approx 0$ esetén egyezik meg a nyugalmi rendszer klasszikus $p_0 = m_0 v$ impulzusával. Annál inkább eltér tőle minél nagyobb a test v sebessége. A képlet csekély átformálása kézenfekvő és szemléletes értelmezést kínál. Amennyiben fenn akarjuk tartani $p = mv$ impulzus definíciót, akkor a tört nevezőjében lévő gyökös kifejezést az m_0 nyugalmi tömeg osztójának tekinthetjük, és a módosítással kapott törtet, mint relativisztikus tömeget értelmezzük. Az m relativisztikus tömeg formális definíciója tehát

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ezzel a lépéssel a klasszikus newtoni mechanika és a relativisztikus mechanika fentebb vázolt összeegyeztethetlenségi problémáját formálisan megoldottuk, hiszen a bevezetett relativisztikus tömeg sebességfüggő, és növekszik a sebesség növekedtével.

Amint fentebb már említettük, a relativisztikus tömeg fenti formális bevezetését a fizikusok jelentős része elvi alapon kifogásolja. Álláspontjuk szerint a tömeg kizárólag a testre jellemző skalármennyiség, (ami így értelemszerűen nem függhet a megfigyelő viszonyítási rendszerétől. Így a tömeg fogalmi módosításának nincs nyomós indoka. A viták ellenére a relativitáselmélettel foglalkozó szakkönyvek és a bevezető szintű tankönyvek többsége továbbra is él a relativisztikus tömeg fogalmával és nagy sebességek esetén tömegnövekedésről beszél. Bár a relativisztikus tömegnek nincs fizikai tartalma, a fogalmi tisztaság sem tökéletes, a tanítás során azonban hasznos, mert az alapjelenségek magyarázatának elfogadtatása a tanulókkal egyszerűbb, továbbá a relativisztikus dinamika számos alapösszefüggése formai szempontból megegyezik a klasszikus mechanikában tanultakkal. Így a testek párkölcsönhatását általánosan jellemző impulzus-tétel (zárt rendszer esetén az impulzuszömögmaradás tétele). A relativitáselméletben a klasszikus dinamika alapegyenletét, (ami az erőhatás, a gyorsulás és a tömeg összefüggését adja) nemigen használjuk. Az erőt, mint a relativisztikus impulzus idő szerinti megváltozását (deriváltja) értelmezzük:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Megjegyzés:

- Mivel a relativisztikus formulák levezetésére alapozó szinten, a középiskolában nincs mód, ezért legfeljebb közöljük őket és jelentésüket értelmezzük. A relativisztikus jelenségek (pl. a fénysebesség, mint határsebesség) magyarázata a képletekhez kötve gyakran egyszerűbb a diákok számára, mint a finom fogalmi gondolkodásból adódó kvalitatív következtetések. Ezekkel azonban óvatosan kell bánni, mert fogalmi megértés nélkül a képletek tökéletesen feleslegesek.

A tömeg és az energia kapcsolata

A speciális relativitáselmélet kidolgozása során Einstein a fizikai szemléletet alapvetően megváltoztató következtetésre jutott: az energia és a tömeg szorosan összefüggő fogalmak. A speciális relativitáselmélet tanítása során a tömeg és az energia mennyiségi kapcsolatát leíró Einstein-formula az egyetlen képlet, amit feltétlenül tanítanunk kell. (Enélkül magfizikát tanítani nem lehet.)

A klasszikus fizikára vonatkozó korábbi tanulmányokból tudjuk, hogy a testek belső energiával és mozgási energiával rendelkezhetnek. Einstein alapvető felismerése az volt, hogy a testek belső energiája egyszerűen kifejezhető a test (nyugalmi) tömegével (m_0) és a fénysebességgel:

$$E_0 = m_0 c^2$$

Ezt az E_0 energiát *nyugalmi energiának* szoktunk nevezni. (A nyugalmi energia megegyezik a termodinamikából ismert belső energiával.) Az összefüggés érvényes makroszkopikus testekre és az atomi részecskékre is. Ennek forradalmi újdonsága, hogy a korábról ismert mennyiségek (tömeg, belső energia és fénysebesség) között állapít meg eddig nem ismert új kapcsolatot. A formulát Einstein gondolatkísérletekre alapozva mondta ki, az elméleti bizonyítást hosszú ideig csiszolta és újabb és újabb egyszerűbb gondolatkísérleteket alkotott. Alapszíntén Einstein gondolatmenetének bemutatása nehezen lenne megoldható. A formula kísérleti bizonyítékát a magfizika eredményei nyújtják.

Amennyiben az m_0 nyugalmi tömegű pontszerű testet v sebességű mozgásba hozzuk, azaz kinetikus energiája is lesz, akkor összenergiája

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2$$

Az összefüggés természetesen felírható az m relativisztikus tömeggel is:

$$E = mc^2$$

ahol E az összenergia. Ez a formálisan kapott kifejezés megegyezik a relativitáselmélet mélyebb tárgyalásával kapott energiaalakokkal. A formulát szokás tömeg - energia ekvivalencia elvként értelmezni, és általános tantervű osztályokban ez minden további nélkül elfogadható.

A kinetikus energia ekkor definíció szerint

$$E_{kin} = E - E_o = mc^2 - m_o c^2$$

A kinetikus energia emiatt általában nem egyezik meg a szokásos $E_{kin} = \frac{1}{2} m_o v^2$ összefüggéssel, kis sebességek esetén azonban nagy pontossággal közelíti a mozgási energiát. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a kinetikus energia semmilyen sebesség tartományban sem adható meg a relativisztikus tömeggel ($E_{kin} \neq \frac{1}{2} m v^2$).

Megjegyzés:

- A relativisztikus tömeggel megfogalmazott tömeg - energia összefüggés szerint a nyugalmi tömeggel rendelkező testek esetén a tömeg és az energia valóban ekvivalens mennyiségek. A relativisztikus tömeggel felírt energia a test belső energiája mellett tartalmazza a mozgási energiát is.
- Ha a nulla nyugalmi tömegű fotonokhoz formálisan relativisztikus tömeget rendelünk, az $m = \frac{hf}{c^2}$ összefüggéssel akkor a tömeg energia ekvivalenciáját a sugárzó anyagra is kiterjesztjük. Az $E = mc^2$ összefüggés értelmében a tömeg definícióját az energiára, mint fizikai alapmennyiségre vezethetjük vissza. Ez a szemlélet bár mind a szakirodalomban, mind a relativitáselmélet oktatási interpretációjában igen elterjedt, a relativitáselmélet tudományos szintű tárgyalásában ellentmondásra vezethet. Emiatt sokan azt javasolják, hogy relativisztikus tömeget csak a nyugalmi tömeggel rendelkező testekhez rendeljünk.
- Hraskó Péter a speciális relativitáselmületről tanárok számára írt szakanyagban ([Idő és relativitás](#), ELTE Doktori Iskola, 2019.) a tömeg konstans voltát elfogadó szemlélet mellett érvel, és bemutatja, hogyan építhető ki így is az elmélet középiskolás eszközökkel.



22.3. Általános relativitáselmélet

Az általános relativitáselmélet a modern fizikának talán legnagyobb hatású elmélete, amellyel világunk legáltalánosabb kérdéseire vonatkozóan, az univerzum egészére, születésére, fejlődésére, pusztulására tehetünk tudományos megállapításokat. Az elmélet tárgyalására a matematikai leírás bonyolultsága miatt még speciális fizikát tanuló osztályokban sincs mód. Az általános tantervű osztályokban az általános relativitási elv kimondásával és Einstein gyorsuló rakétára alkalmazható gondolatkísérletével érzékeltethetjük az elmélet kiindulási alapját.

A speciális relativitáselmélet kimondja, hogy az egyenletesen mozgó koordináta-rendszerekben a természeti törvények ekvivalens módon írhatók le. Azonnal felmerül a kérdés, hogy vajon nem lehetne-e kiterjeszteni ezt az elvet tetszőleges (tehát gyorsuló) koordináta rendszerekre is.

Mielőtt a kérdés megválaszolásába kezdenénk, idézzük fel a tanulók számára, hogy a gravitációs erő hatására a Föld adott pontján minden test azonos \vec{g} gyorsulással mozog. Ez az

$\vec{F}_g = m_s \frac{\gamma M}{r^2} \vec{e}_r = m_s \vec{g}$ gravitációs erő következménye. (A formulában m_s a súlyos tömeg, \vec{e}_r a föld középpontjából az adott pont felé mutató egységvektor, M a Nap tömege, γ a gravitációs állandó) A $\vec{g} = \frac{\gamma M}{r^2} \vec{e}_r$ mennyiséget, elektrosztatikus analógia alapján, nevezzük gravitációs térerősségnek. A gravitációs térerősség a vonzócentrum gravitációs terére jellemző mennyiség.

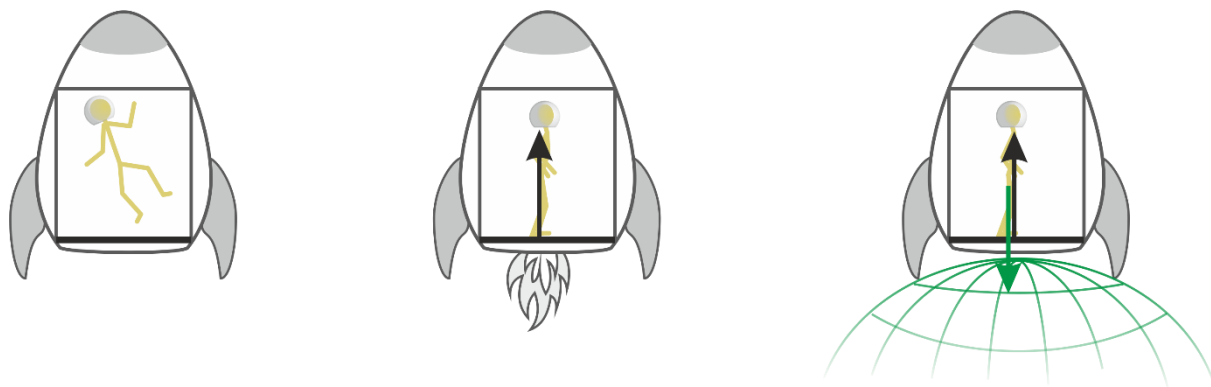
Az $\vec{F}_g = m\vec{a}$ a mozgásegyenletből, ahol m a tehetetlen tömeg, adódik, hogy a test gravitációs erő hatására $\vec{a} = \frac{m_s}{m} \vec{g}$ gyorsulással mozog.

Eötvös mérései mutatták ki először, és azután többen is egyre pontosabban igazolták ([A fizika tanítása a középiskolában I.](#) kötet D16. (270. old.), hogy a súlyos és a tehetetlen tömeg nagy pontossággal megegyezik egymással, így a gyorsulás megegyezik a gravitációs térerősséggel.

22.3.1. Az általános relativitáselmélet ekvivalencia elve

Gondoljunk át Einstein nyomán egy elképzelt kísérletet gravitációs térben álló (egyenletesen mozgó) rakétában és az űrben a szabadon gyorsuló rakétában érezhető hatásokról!

Tételezzük fel, hogy egy rakéta minden égitesttől távol egyenes vonalú egyenletes mozgással halad (vagy nyugalomban van) miközben a kabin közepén az űrhajós „súlytalanul lebeg”. A külső megfigyelő szerint a rakéta és az űrhajós egyaránt tehetetlenségi mozgást végez. A rakétához rögzített koordináta-rendszerben minden nyugalmi állapotban van.



22.5. ábra: A bal oldali rajz a gravitációmentes térben mozgó rakétát és a kabinban lebegő űrhajóst mutatja. A középső rajz a gyorsuló rakétában álló űrhajóst és a rá ható erőt, a jobb oldali rajz a gravitációs térben nyugvó kabinban álló embert és a rá ható erőket szemlélteti

Tegyük fel ezután, hogy a rakéta a hajtóművét bekapcsolva felfelé gyorsulni kezd, gyorsulása épp $9,81 \text{ m/s}^2$ a 22.5. ábrán (középső rakéta) látható módon. A rakéta padlója hamarosan utoléri az eddig a kabin közepén „lebegő” embert és gyorsítani kezdi a kabinnal együtt felfelé. Az űrhajós ezt úgy érzi, hogy a kabin padlója felfelé mutató erőt fejt ki rá. Mindez a külső megfigyelő számára világosan érzékelhető. Amennyiben a liftben álló ember tudatában van annak, hogy gyorsuló mozgást végez, akkor számára is tökéletes a magyarázat.

Mindazonáltal, ha az űrhajós a külvilágtól elzárva csak a rakétában szereshető tapasztalatait veszi figyelembe, tehát csak azt, hogy rá a rakéta padlója felfelé ható erőt fejt ki, akkor úgy is gondolkozhat, hogy ő maga és a kabin is valamilyen gravitációs térben nyugalmi állapotban van. Ekkor egyetlen kérdés marad számára megválaszolatlanul az, hogy a rakéta miért nem

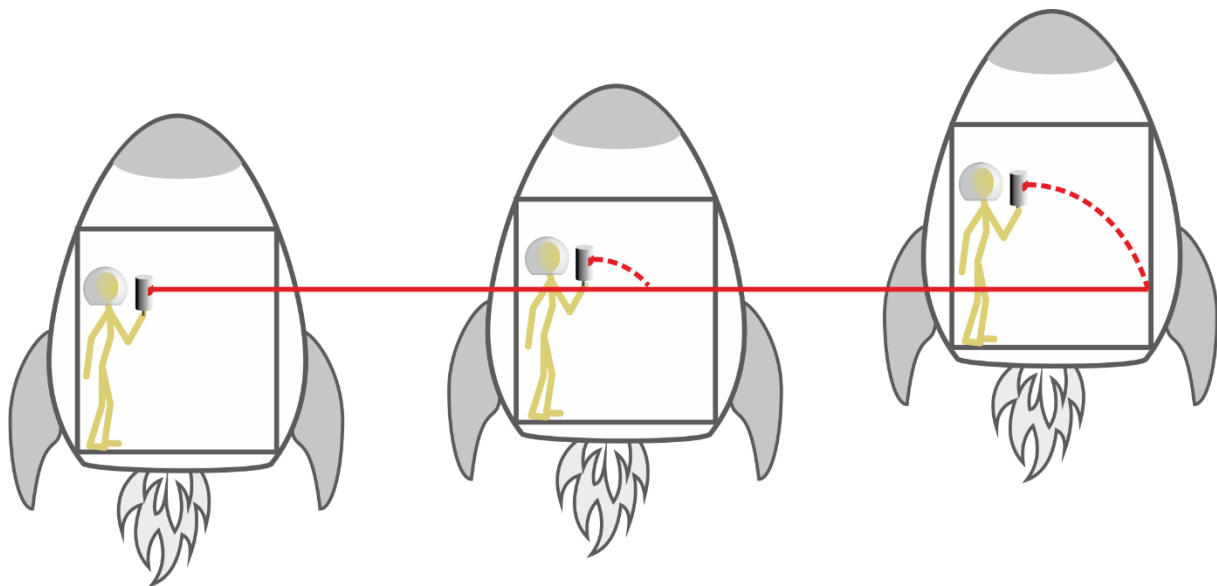
zuhan lefelé a feltételezett gravitációs tér hatására. Erre csak akkor tud válaszolni, ha meggyőződik a hajtóművek működéséről, azaz, hogy a rakétára tolóerő hat. A rakétára ható tolóerőt észlelve megállapíthatja, hogy a rakétára ható feltételezett gravitációs erőt a tolóerő egyenlíti ki.

A kétféle felfogás mindegyikével hibátlanul és a fizikai törvényekkel tökéletes összhangban értelmezhető a rakéta kabinjában tartózkodó űrhajóssal „történi esemény”.

Elvként fogalmazható meg tehát, hogy: *Zárt szobában semmilyen kísérlettel sem dönthetjük el, vajon gravitációs térben nyugalmi állapotban vagyunk-e, vagy gravitációmentes térben gyorsulva mozgunk.* Ezt nevezzük az *általános relativitáselmélet ekvivalencia elvének.* (Vegyük észre, hogy az elv érvényessége a súlyos és tehetetlen tömeg egyenlőségén alapul.)

22.3.2. A fény terjedése gravitációs térben

A fény terjedése, a sugármenet kulcsszerepet játszott a speciális relativitáselmélet kifejtésében és megértésében. Érdemes végig gondolni a fénysugármenetet a gyorsuló rendszer szempontjából is. Ezt segíti *Art Hobbson* nyomán a melléklet ábrásorozata.

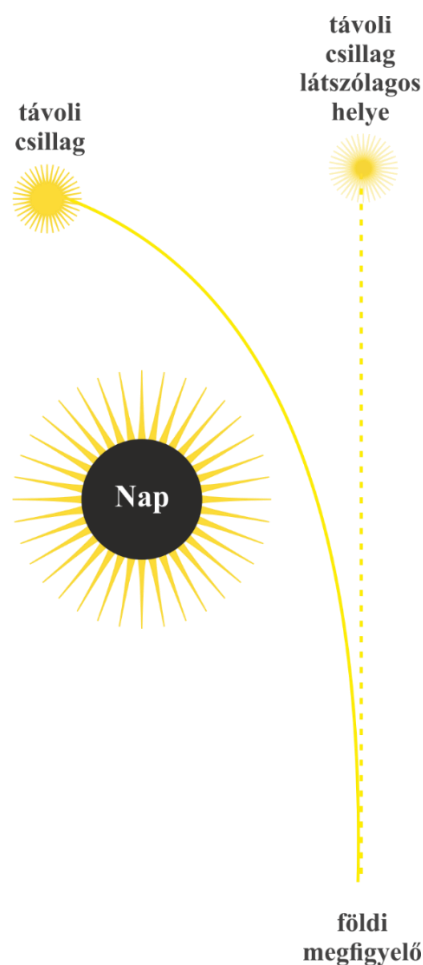


22.6. ábra: A terjedő fény pályája inerciarendszertől és gyorsuló rendszertől szemlélve

A rakétában az űrhajós vízszintes fényimpulzust indít, ami inerciarendszertől nézve egyenes vonalban terjed és egy kiválasztott pillanatban megvilágítja a kabin oldalát. Ez a pont a kabinban lejjebb van, mint a fényimpulzus kibocsátási magassága. A gyorsuló rakétában álló űrhajós ezt úgy érzékeli, hogy a fényimpulzus a vízszinteshez képest elhajló görbült pályán mozog (ami emlékeztet egy vízszintesen elhajított test pályájára). A külső megfigyelő szerint a kibocsátott fény a kibocsátási magasságban egyenesen halad, míg az űrkabin és az űrhajós a fény terjedési irányára merőlegesen gyorsulva távolodik.

Az általános relativitáselmélet ekvivalencia elve alapján, ami szerint a gravitációs térben nyugvó és gravitációs tér nélküli térben gyorsuló koordináta-rendszerek nem különböztethetők a fénysugárnak a fenti gondolat-kísérletben „tapasztalt” görbüléséből arra következtethetünk,

hogy nagy tömeg közelében nyugvó (nem gyorsuló) rendszerben kibocsátott fénysugaraknak a vonzócentrum felé kell hajlaniuk. Einstein maga számításokat is végzett, és így megbecsülte a fénysugár elhajlásának mértékét a Nap közelében. Einstein elméleti következtetése igaznak bizonyult. A történelmi kísérletet *Arthur Edington* brit csillagász végezte el Principe szigetén 1919. május 29-én történt teljes napfogyatkozás alkalmával. A csillagász fényképeket készített az elsötétülő Nap mellett látszó távoli csillagról. A fényképek alapján meghatározta a csillag látszólagos helyét más állócsillagokhoz viszonyítva, és az eredményt összehasonlította a csillag pozíciójának tényleges értékével, amit olyan felvételek alapján mértek, ahol a csillagról jövő fénysugarak nem haladtak el a Nap mellett. A két helyzet különbsége egyértelmű volt, és jó egyezést mutatott Einstein számításának eredményével. A fény elhajlását erős gravitációs térben azóta számos méréssel igazolták. A fényelhajlás csillagászati megfigyelésének lényegét a 22.7. ábra illusztrálja.



22.7. ábra: A távoli csillagról érkező fénysugarakat a Nap gravitációs tere elgörbíti

Megszokott világunkban az egyenes vonalat a fénysugárral szoktuk kijelölni, és mint két pont közti legrövidebb utat értelmezzük. A fény görbültsége miatt a geometriai térrel kapcsolatos elképzeléseinket is módosítani kellett. Az általános relativitáselmélet felfogása szerint a nagy tömegek a tér szerkezetét változtatják meg, a fény két pont között továbbra is a legrövidebb úton halad, de az már nem egyenes, hanem úgynevezett geodetikus görbe. Az elmélet részletezése nélkül ez a gömbfelület kétdimenziós világának példájával illusztrálható. A gömbfelületen „lévők” számára két pont között a legrövidebb utat megadó görbék a gömb

főkörrei. Ilyenek például a Föld hosszúsági körei. A Föld görbült felületén kétdimenziós világban élők számára a főkörök lennének definíció szerint az egyenesek.

Megjegyzés:

- A fénysugarak gravitációs térbeli görbületét gyakran úgy értelmezik, hogy a fotonokhoz relativisztikus tömeget rendelnek, és a rá ható vonzóerő miatt bekövetkező eltérést határozzák meg. Ez azonban az általános relativitáselméletből adódó eltérésnek csak a fele. A kísérleti tapasztalat viszont az általános relativitáselméletből adódó eredményt igazolja.
- Felmerülhet a kérdés, hogy érdemes-e egyáltalán középiskolában alapszinten foglalkozni az általános relativitáselmélet nehezen emészthető fogalmainak érzékeltetésével. A gravitációs hullámok nemrég bebizonyosodott kísérleti megfigyelhetősége azonban erős indítást ad arra, hogy az általános relativitáselmélet elemei megjelenjenek az iskolai oktatásban.

Einstein relativitáselméletének rövid videó-feldolgozását „*Hat kísérlet, ami megváltoztatta a világot*” c. ismeretterjesztő filmsorozat részeként néhány éve tűzte műsorára a National Geographic Channel, magyar szinkronnal. A videó jól használható a középiskolai oktatásban is. Vetítését a relativitáselmélet órai feldolgozása után, egyfajta összefoglalásként ajánljuk, kiegészítve a videó megtekintését a látottak közös megbeszélésével, összekapcsolva azokat a korábbi órák anyagával.



[Hat kísérlet, ami megváltoztatta a világot – Einstein](#)



A RELATIVITÁSELMÉLET MELLÉKLETEI

Bevezetés

A XIX. század végén néhány fizikus azt gondolta, hogy a mechanika és az elektrodinamika törvényeinek felfedezésével fizikai világképünk teljes egészévé vált, és véglegesen lezárult az elméleti fizika fejlődése. A továbbiakban a fizikusok feladata csupán az általános törvényeknek a gyakorlati élet különböző konkrét problémaköreire való átültetése lehet. Azonban a XX. század első felének fizikája két olyan nem várt meglepetéssel is szolgált, mely nemcsak a természettudósok, hanem a filozófusok világképét is alapjaiban rengette meg. E meglepetések egyike Albert Einstein relativitáselmélete, mely a tér és az idő szerkezetét vizsgálja, a másik pedig a kvantummechanika, mely a mikrorészecskék világát tárja fel. Mindkét elmélet tartalmaz olyan elemeket, melyek a józan, hétköznapi gondolkodásmód talajáról nézve hajmeresztőnek, elfogadhatatlannak tűnnek, éppen ezért mindkét elméletet sok bírálat érte, és még most is bizonyos misztikum övezi őket. Ma már mind a relativitáselmélet mind a kvantummechanika a fizikának teljesen kidolgozott és elfogadott, kísérletekkel igazolt ága, melynek jó pontossággal ismerjük az alkalmazhatósági területeit és korlátjait. Csak a terminológiában maradt ránk az új elméleteket születésükkor övező kétely; a fizikának a relativitáselméletet, illetve kvantummechanikát nem tartalmazó fejezeteit a „klasszikus-” jelzővel különböztetjük meg a „relativisztikus-”, illetve „kvantum-” fizikától.

Ezen írás felépítése a fizikatörténeti időrendhez igazodik. Először – didaktikai okokból – a klasszikus fizikában használt térés időfogalomhoz, valamint inerciarendszerhez társított tulajdonságokat foglaljuk össze röviden, úgy, hogy a klasszikus fizikában szokatlan módon a téridő-szemléletmódot használjuk. Ezután Einstein 1905-ben publikált speciális relativitáselméletének alapjait ismertetjük, melyben a szerző sikeresen feloldotta az elektrodinamika egyenletei és a térről, illetve időről kialakított hagyományos kép közti ellentmondást. Végül Einstein 10 évvel később, 1915-ben publikált általános relativitáselméletének alapgondolatait érzékeltetjük nagyvonalakban. Az általános relativitáselmélet úgy tekinthető, mint a speciális relativitáselmélet olyan továbbfejlesztése, mely geometriai eszközökkel képes a gravitációs kölcsönhatás leírására is.

R1. A GALILEI-FÉLE TÉRIDŐ

Már Galilei óta ismert a természettörvények invarianciájának elve, nevezetesen az, hogy különböző inerciarendszerekben a természettörvények alakja azonos. Ez egyben azt is jelenti, hogy semmiféle fizikai kísérlettel nem lehet az inerciarendszerek között különbséget tenni.

A klasszikus fizikában természetesnek vesszük, hogy a jelenségeket adott (inerciális) vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk, és a jelenségek leírására ösztönösen használjuk a tér és idő fogalmát. Magának a térnek és időnek a „szerkezetét” hétköznapi

tapasztalatainkból jól ismerjük. Ebben a fejezetben ezeket a jól ismert hétköznapi tapasztalati tényeket foglaljuk újra össze, azonban újfajta szemszögből, és élesen különbséget teszünk a vonatkoztatási rendszer nélkül is értelmezhető „abszolút” fogalmak, illetve csak adott inerciarendszeren belül értelmezhető fogalmak között. Utóbbi esetben megadjuk azt a transzformációs szabályt is, amellyel az egyes inercia-rendszerek közti áttérés megkapható. Azokat a fizikai mennyiségeket, amelyek értéke a különböző vonatkoztatási rendszerekben eltérő lehet, azonban a vonatkoztatási rendszer váltáshoz minden esetben jól meghatározott transzformációs szabály tartozik, kovariáns (megfelelő módon transzformálódó) fizikai mennyiségeknek nevezzük.

R1.1. Alapvető tapasztalatok

A fejlettebb állatok, illetve az emberek egyedfejlődésének igen korai szakaszában kialakul tudatuknak az a képessége, hogy környezetük jelenségeit, mint dinamikus folyamatot fogja föl, mely tárgyak *térbeli* elrendeződéséről egymás utáni *időpillanatokban* készített „felvételek” mozgófilmszerű sorozatából áll. Ez a szemléletmód, mely a jelenségek színterét két összetevőre, térre és időre bontja, igen mélyen gyökerezik fizikai világképünkben. Több ezer évestapasztalatok alapján a következő alapvető tulajdonságokat társítjuk az érzékelt térhez és időhöz:

0. (*Tér és idő létezése*) Környezetünk jelenségeit adott vonatkoztatási rendszerben megfigyelve az eseményekhez térbeli helyet és időpontot rendelhetünk.
1. (*Inerciarendszerek létezése és ekvivalenciája*) A vonatkoztatási rendszereknek van egy kitüntetett osztálya, az *inerciarendszerek*, melyekben a fizika törvényei azonos alakúak, és a legegyszerűbb formájúak. (Az inerciarendszerekben a magára hagyott testek állnak vagy egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek.) Az inerciarendszerek egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek, és egymással teljesen egyenrangúak, olyan értelemben, hogy semmiféle fizikai törvény nem tünteti ki az egyik vagy másik inerciarendszert.
2. (*Tér homogenitása és izotrópiája*) A lehetséges térbeli helyek, pontok halmaza, azaz az inercia rendszerben érzékelt tér olyan struktúrával rendelkezik, mint a háromdimenziós euklideszi tér; a tér homogén és izotróp (azaz mindenütt és minden irányban „egyforma”, a térnek nincs kitüntetett pontja, és nem tartalmaz kitüntetett irányt), tudunk távolságot és szöget mérni, bármely két pont meghatároz egy vektort, a vektorokat lehet nyújtani, eltolni és összeadni.
3. (*Idő homogenitása*) Az inerciarendszerben érzékelt időpillanatok összessége, az idő irányított egyeneshez hasonlítható, melynek nincs kitüntetett pontja, azaz az idő „homogén”. Bármely két időpillanat meghatároz egy időtartamot, a köztük eltelte időt. Időtartamokat össze lehet adni, és számmal lehet szorozni.

(Megjegyezzük, hogy mikroszinten az idő izotróp is, azaz bármely megvalósulható mikroszkópikus folyamatot „időben visszafelé lejátszva” is olyan folyamatot kapunk, mely nincs ellentmondásban a mikrofizika semmiféle törvényével.)

A következő pontokban a „kl” felső indexszel utalunk arra, hogy ezek a megfigyelések csak a klasszikus fizika határain belül érvényesek, és később, a relativisztikus fizika kiépítése során alapvetően módosítanunk kell őket.

- 4^{kl}. *(Az idő abszolút jelentése)* Az inerciarendszerekben megfigyelt eseményekhez társított időtartamok, illetve időpontok függetlenek a vonatkoztatási rendszertől, az „idő”, „egyidejűség”, illetve az „időtartam” vonatkoztatási rendszertől független abszolút jelentéssel bír.
- 5^{kl}. *(Egyidejű események távolságának abszolút jelentése)* Az inerciarendszerekben azonos időpillanatban bekövetkező események között megfigyelt térbeli távolságok függetlenek a vonatkoztatási rendszertől, egyidejű események esetén a távolság abszolút jelentéssel bír.
- 6^{kl}. *(Sebességek vektoriális összeadása)* A klasszikus fizikában a relatív sebességek a vektorösszeadás szabályai szerint adódnak össze; ha két inerciális megfigyelő egymáshoz képest \vec{v} sebességgel mozog, és az egyik vonatkoztatási rendszerben egy tárgy \vec{u} sebességgel halad, akkor a másik vonatkoztatási rendszerben ugyanennek a tárgynak a sebessége $\vec{v} + \vec{u}$.
- 7^{kl}. *(Dinamika II. alaptörvénye)* Inerciarendszerben bármely test gyorsulása arányos a testre ható erők eredőjével, és az arányossági tényező a test (tehetetlen) tömege, mely egyedül a testre jellemző állandó.

Ezen pontokba szedett kijelentések igazságtartalma – hétköznapi tapasztalatok alapján – mindenki számára nyilvánvaló. A tévedések elkerülése érdekében néhány megjegyzést is fűzünk a fenti „alapigazságokhoz”.

A tér fogalma vonatkoztatási rendszerhez kötött. A fenti kijelentések csak vonatkoztatási rendszerek szűk osztályára, az inerciarendszerekre érvényesek. Gyorsuló járműhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben például a 2. kijelentés nem érvényes, hiszen minden tárgyra tömegével arányos tehetetlenségi erő hat, melynek iránya a gyorsuló rendszerben kitüntetett, így a tér izotrópiája sérül.

Bár (a klasszikus mechanikában) az idő abszolút jelentéssel bír (4^{kl}. kijelentés), a térbeli hely, illetve (különböző időpillanatban bekövetkezett események esetén) a távolság már függ a vonatkoztatási rendszertől. Gondoljunk el például, hogy az egyenletesen mozgó vonaton állva kétszer egymás után felvillantunk egy lámpát. A vonaton álló megfigyelő szerint a két villanás a (megfigyelő által észlelt) térnek ugyanazon a pontján történik, míg a sínek mellett a földön álló megfigyelő úgy érzékeli, hogy a két villanás két különböző pontban történik, hiszen a villanások között eltelt idő alatt a vonat elmozdul (a földhöz képest).

A relatív sebességek összeadására vonatkozó 6^{kl}. szabály nem független az előző kijelentésektől, hanem egyszerűen következik belőlük.

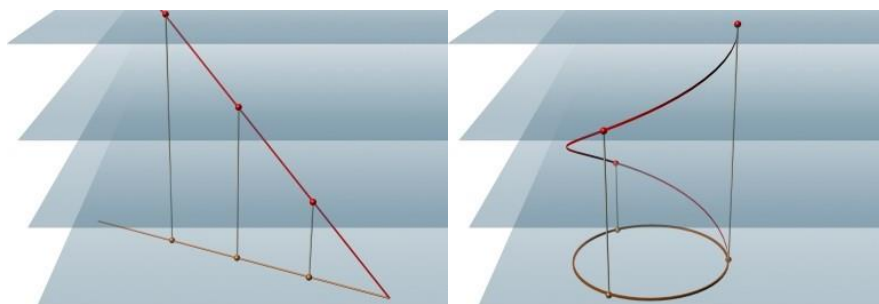
A 7^{kl}. kijelentés más jellegű, mint az előző kijelentések, nem pusztán a teret és időt írja le, hanem inkább a térben (valamilyen hatás következtében) mozgó testek dinamikai viselkedését jellemzi.

Szándékosan nem tettünk semmiféle kijelentést a fény terjedésével kapcsolatban, minthogy éppen ezen a területen bukkantak elő először a relativitáselmélet megszületéséhez vezető alapvető ellentmondások. A klasszikus fizikában úgy tekintjük, hogy a fény végtelen nagy sebességgel, „pillanatszerűen” terjed.

A következő két fejezetben bevezetjük a *téridő* fogalmát, és pontosítjuk néhány olyan kifejezés jelentését, melyet hétköznapi jelentéstartalmára támaszkodva már eddig is használtunk.

R1.2. A Galilei-féle téridő geometriája

Már említettük, tudatunk „mozgófilmszerűen” értelmezi a jelenségeket, minden időpillanatban egy „filmkockára” képezve le a környezetünkben levő tárgyak térbeli elhelyezkedését. Gondolatban rétegezzük egymásra az egyes filmkockákat időrendi sorrendben, az 1.1. ábrán látható módon. Így jutunk el a *téridő* fogalmához. A téridő tehát négydimenziós „objektum”, melyet három térés egy idődimenzió feszít ki. A téridő pontjait *eseményeknek* hívjuk; ezek olyan jelenségek idealizációinak felelnek meg, melyek nagyon kis helyen és nagyon rövid idő alatt mennek végbe. Ilyen lehet például a pontszerű fényforrás pillanatszerű felvillanása, a dobütés vagy a muslica szárnycsapása. Sokszor azonban adott eseményhez nem is lehet kézzelfogható fizikai jelenséget társítani, egyszerűen a téridő egy pontját jelöljük ki ekkor és ekkor, itt és itt...



1.1. ábra: A Galilei-féle téridő szerkezete. a) Inerciális mozgást végző pont világvonala. b) Egyenletes körmozgást végző pont világvonala.

A klasszikus fizikában az idő abszolút jelentése miatt (4^{kl}. alapkijelentés) a téridőt az 1.1. ábrán látható módon egymással párhuzamosan elhelyezkedő háromdimenziós hipersíkokra, ún. *egyidejűségi hipersíkokra* bonthatjuk oly módon, hogy egy-egy hipersíkra az azonos időpontban lezajló események kerülnek.

Minthogy a négydimenziós téridőnek a kétdimenziós síkon való ábrázolása lehetetlen, az 1.1. ábrán elhagytunk egy térdimenziót, és csak az x - y síkban lezajló folyamatok téridőbeli

„történetét” ábrázoltuk. (Később az egyszerűség kedvéért sokszor két térdimenziót is el fogunk hagyni, és a téridő-diagramon csak egyetlen térés az idődimenziót ábrázoljuk.)

Láthatjuk, hogy például pontszerű test egyenesvonalú egyenletes mozgásához tartozó diagram egyenes vonal a téridőben (1.1.a ábra), míg a síkbeli egyenletes körmozgásnak egyenletesen emelkedő spirális görbe felel meg (1.1.b ábra). Mindkét vonal minden egyidejűségi hipersíkot pontosan egy pontban metsz; ezzel jut kifejezésre az a nyilvánvaló tény, hogy a pontszerű részecske adott időpillanatban nem lehet egyszerre két helyen.

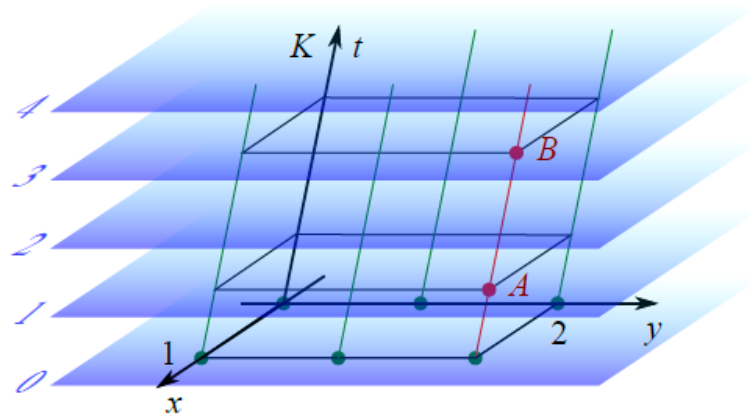
Azokat a vonalakat, amelyek a pontszerű részecske „létezésével” kapcsolatos téridőbeli események sorozatából állnak, a részecske *világvonalának* nevezzük.

Igen lényeges látnunk a különbséget a szokásos pálya-fogalom és a világvonal között. Mindkét leírási mód teljes jellemzést ad a pontszerű részecske „életéről”, azonban a pálya az idő szerint paraméterezett görbe a (háromdimenziós) térben, míg a világvonal (paraméterezés nélküli) egydimenziós ponthalmaz a (négydimenziós) téridőben. Az idő-információt a pálya esetén a paraméterezés, míg a világvonal esetén az egyidejűségi hipersíkokkal való metszések hordozzák.

Megjegyezzük, hogy a téridőt, a téridő pontjait, az eseményeket, valamint az egyidejűségi hipersíkokat abszolút (vonatkoztatási rendszertől független) objektumnak tekintjük. Ugyancsak vonatkoztatási rendszertől független értelmet tulajdonítunk különböző időpillanatokhoz tartozó hipersíkokon elhelyezkedő események közti időtartamnak (4^{kl} . alapkijelentés), valamint adott egyidejűségi hipersíkon belül abszolút értelmet tulajdonítunk az események közti (térbeli) távolságnak, irányok közti szögnek (5^{kl} . alapkijelentés). Különböző időpillanatokhoz tartozó események közti térbeli távolság azonban csak vonatkoztatási rendszertől függő módon értelmezhető; ezzel foglalkozunk részletesen a következő alfejezetben.

R1.3. Inerciális vonatkoztatási rendszerek; tér, idő

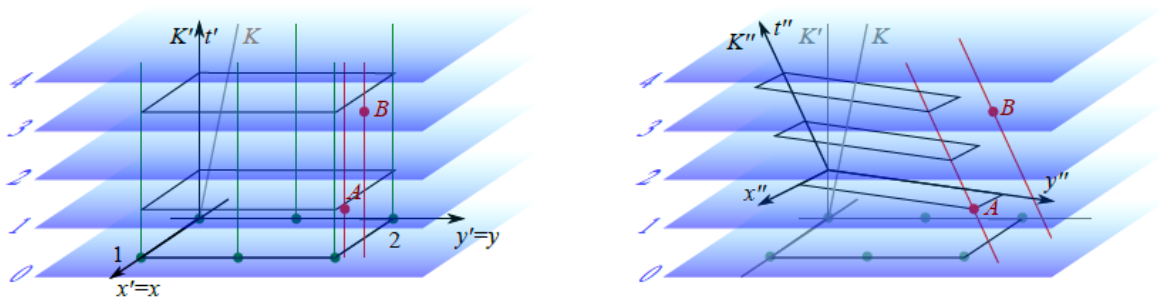
Vegyük fel a K inerciális vonatkoztatási rendszer terében egy $x - y - z$ derékszögű koordináta-rendszert, és képzeljük el a rácspontokhoz tartozó világvonalakat a téridőben. Minthogy az inerciarendszer minden más inerciarendszerhez képest a lehető legegyszerűbb mozgást végzi, egyenes vonalon egyenletesen halad vagy áll, a rácspontok világvonalai, amint azt az 1.2. ábra mutatja, egymással párhuzamos helyzetű egyenesek. Ily módon a téridőn olyan rácsozatot kapunk, amely egymást transzverzálisan metsző háromdimenziós (egyidejűségi) hipersíkokból és egydimenziós egyenesekből áll. A háromdimenziós (egyidejűségi) hipersíkok a már leírt módon az időpillanatoknak felelnek meg, míg az egydimenziós, egymással párhuzamos egyenesek a K rendszer terének pontjaival azonosíthatóak. Két esemény pontosan akkor ment végbe a K vonatkoztatási rendszer terének ugyanazon a pontján, ha a két esemény téridőbeli képe ugyanarra az egyenesre (világvonalra) esik. Például mind az A mind a B esemény a K vonatkoztatási rendszer terének az $x = 1, y = 2$ pontjában ment végbe, 2 másodperces időkülönbséggel.



1.2. ábra: Inerciális vonatkoztatási rendszer tér-idő-diagramja

Joggal merülhet föl az olvasóban az a kérdés, hogy az 1.2. ábrán a K megfigyelő terének pontjaihoz tartozó világvonalakat miért nem rajzoltuk az egyidejűségi hipersíkokra *merőlegesen*. Azonban rövid gondolkodás után rájöhethetünk, hogy a tér-idő-geometriában ennek a fajta szögnek – azaz az egyidejűségi hipersíkok és a világvonalak közti szögnek – nincs értelme. Szöget mérni csak az egyidejűségi hipersíkokon belül tudunk, a háromdimenziós geometria szabályai szerint. Azonban világvonal és egyidejűségi hipersíkszögről (vagy merőlegességéről) nem beszélhetünk; ez a matematikai tény fizikailag azt fejezi ki, hogy az inerciális vonatkoztatási rendszerek közt nincs kitüntetett.

Az 1.3. ábrán berajzoltuk még két inerciális vonatkoztatási rendszer térpontjainak világvonalait. A K' rendszerben (1.3.a ábra) az időmérés kezdete megegyezik a K rendszerbeli időmérés kezdetével, az $x' - y'$ tengelyek párhuzamosak az $x - y$ tengelyekkel, sőt, a kezdő pillanatban egybe is esnek. (A rajzon K' „időtengelyét”, azaz a világvonalakat merőlegesen rajzoltuk a hipersíkokra, azonban, mint már említettük, ez csak a tér-idő-diagram szemléltetésének specialitása, és semmiféle fizikai tartalommal nem bír. Mindemellett, ha konkrét inerciarendszerben dolgozunk, az egyszerűség kedvéért sokszor élünk majd a „tengelyek” ilyen módon való megválasztásával.)



1.3. ábra: Két másik inerciális vonatkoztatási rendszer tér-idő-diagramja

A K'' rendszer (1.3.b ábra) mind K -hoz mind K' -höz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, időmérésének kezdete nem esik egybe a másik két rendszer időmérésének kezdetével, és K'' térének $x'' - y''$ koordinátatengelyei nem párhuzamosak a másik két rendszer tengelyeivel.

Látható, hogy az időfogalommal ellentétben különböző vonatkoztatási rendszerekben a tér fogalma mennyire eltérő. Az 1.2. ábrán látható A és B esemény a K -val együtt mozgó megfigyelő szerint a térnek ugyanazon pontján ment végbe, míg a másik két rendszerben a két esemény különböző térponthoz tartozik (1.3. ábra).

Megértvén, hogy a téridőben nagyon sokféleképpen vehetünk föl inerciális vonatkoztatási rendszert, és ezek között mindegyik egyenrangú, egyik sincs fizikailag kitüntetve, természetes módon merülhet föl bennünk az az igény, hogy megadjuk, hogyan térhetünk át az egyik vonatkoztatási rendszerről a másikra. Ezzel foglalkozunk a következő alfejezetben.

R1.4. Szimmetriák; speciális Galilei-transzformáció

A Galilei-féle téridő szimmetriáira kétféleképpen gondolhatunk. Egyrészt úgy, mint az absztrakt téridőnek olyan egy-egyértelmű transzformációi, melyek megőrzik a téridő struktúráját. A struktúratartás a legtöbbször bizonyos tulajdonságoknak a transzformáció alkalmazásakor való változatlanságát, állandóságát, *invarianciáját* jelenti. A Galilei-féle téridő esetén ilyen invariáns mennyiség az események között eltelt idő, egy egyidejűségi hipersíkon belül a távolság és a szög, valamint az a tulajdonság, hogy egy részecske világvonala a téridőben egyenes, azaz a részecske egyenesvonalú egyenletes mozgást végez (bármely inerciarendszerben).

Másrészt, gondolhatunk a Galilei-féle téridő szimmetriáira úgy is, mint olyan $\mathbb{R}^4 \ni (x, y, z, t) \mapsto (x', y', z', t')$ transzformációja három hely és egy időkoordinátából álló számnégyesnek, mely az egyik inerciarendszerben (x, y, z, t) koordinátákkal jellemzett téridő-esemény (x', y', z', t') koordinátáit adja meg egy másik inerciarendszerben. Minthogy minden inerciarendszer egyenértékű, ezek a koordináta-transzformációk is a téridő szimmetriáit fejezik ki.

A két szemléletmód között az az alapvető különbség, hogy az első esetben a téridő pontjait mozgatjuk, míg a második esetben a téridő pontjait fixen tartjuk, csak a koordinátázásukra használt vonatkoztatási rendszer tengelyeit módosítjuk. A fizikában egyéni ízléstől és a vizsgált probléma jellegétől függően mindkét szemléletmódot gyakran alkalmazzák. Az első szemléletmódot, ahol a téridő pontjait transzformáljuk, *aktív*, míg a másodikat, ahol az eseményeket fixen tartjuk, és a leíró koordináta-rendszert változtatjuk, *passzív* szemléletmódnak nevezzük. A két leírás között egy koordináta-rendszer rögzítésével teremthetünk kapcsolatot, az 1.4. ábrán látható módon. Ha az aktív transzformáció során a pontok mozgását a rögzített rendszerben írjuk le, akkor egy $\mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ koordináta-transzformációt kapunk, mely fölfogható passzív transzformációnak. Viszont, ha a

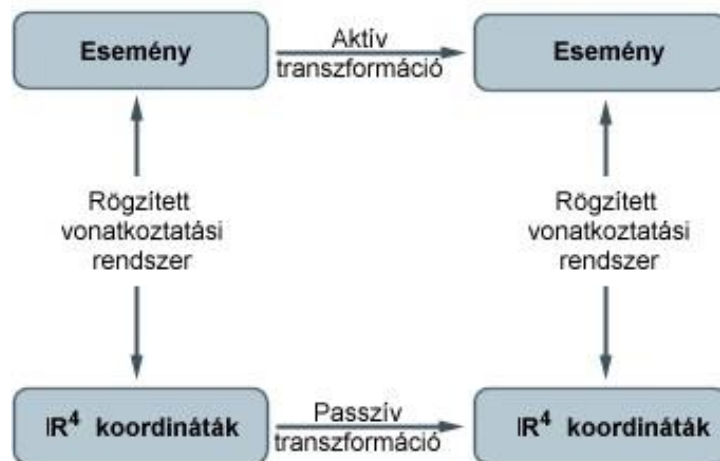
passzívan transzformált koordinátákat a rögzített rendszerben ábrázoljuk, aktív *esemény* \mapsto *esemény* transzformációhoz jutunk.

Vegyük sorra a Galilei-féle téridő szimmetriáit az „egyszerűbbektől” haladva a „bonyolultabbakig”. Az első három transzformáció során a két rendszer, K és K' egymáshoz képest áll. Az ábrákon az eseményeket rögzítettnek tekintjük, és a koordináta-rendszer tengelyeit változtatjuk, tehát a *passzív* szemléletet követjük.

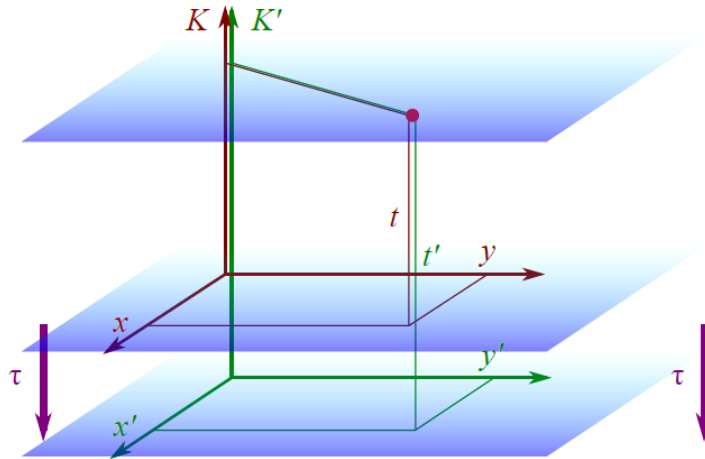
R1.4.1. (K szerinti) időeltolás

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t + \tau \quad (1.1)$$

Az 1.5. téridő ábráról látható, hogy az időeltolás megadásához nemcsak a két rendszer ideje közti τ időkülönbséget kell megadnunk, hanem ki kell jelölnünk egy „irányt” is a téridőben. Az időeltolás fizikailag azt jelenti, hogy a K' rendszerben az időmérést τ idővel korábban kezdtük, mint a K rendszerben. Egyébként a két rendszer egymáshoz képest áll, és a tértengelyek ugyanúgy helyezkednek el.



1.4. ábra: Az aktív és a passzív szemléletmód kapcsolata

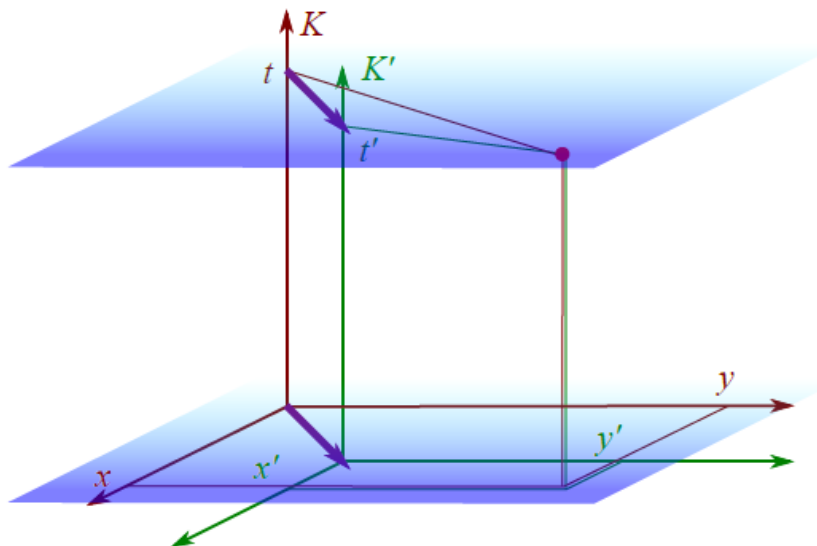


1.5. ábra: A K koordináta-rendszer időeltolja a K' koordináta-rendszer.

R1.4.2. Térbeli eltolás

$$x' = x + x_0, \quad y' = y + y_0, \quad z' = z + z_0, \quad t' = t \quad (1.2)$$

Ez a transzformáció passzív képen annak felel meg, hogy a K' rendszer origója $-(x_0, y_0, z_0)$ vektorral el van tolva K origójához képest (1.6. ábra).



1.6. ábra: A K koordináta-rendszer eltolja a K' koordináta-rendszer

Egyébként a két rendszer egymáshoz képest áll, az időmérés kezdőpontja megegyezik, és a megfelelő tértengelyek egymással párhuzamosak.

R1.4.3. (K szerinti) térbeli forgatás

$$x = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad z' = z \quad (1.3)$$

$$y = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad t' = t$$

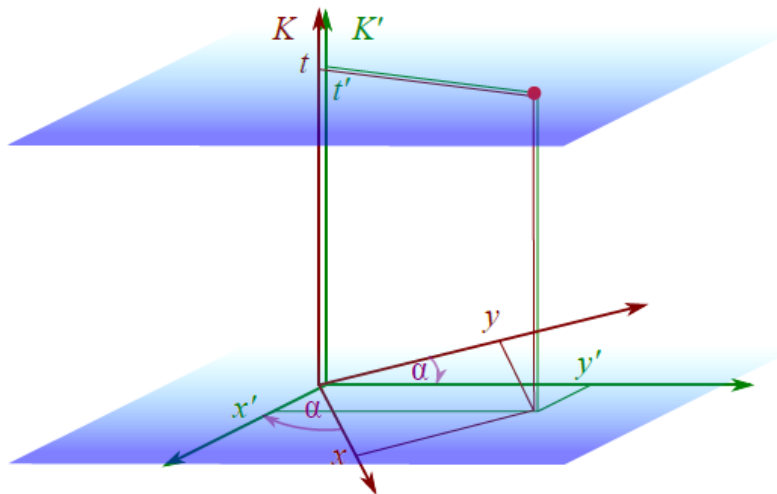
A fenti képletek z tengely körüli α szögű forgatást írnak le, és hasonló módon adható meg más tengely körüli forgatás is (1.7. ábra). Ebben az esetben a térbeli tengelyek iránya – a forgástengelyt kivéve – más a K , illetve K' rendszerben.

A következő transzformáció esetén – az eddigiekkel ellentétben – a két vonatkoztatási rendszer mozog egymáshoz képest.

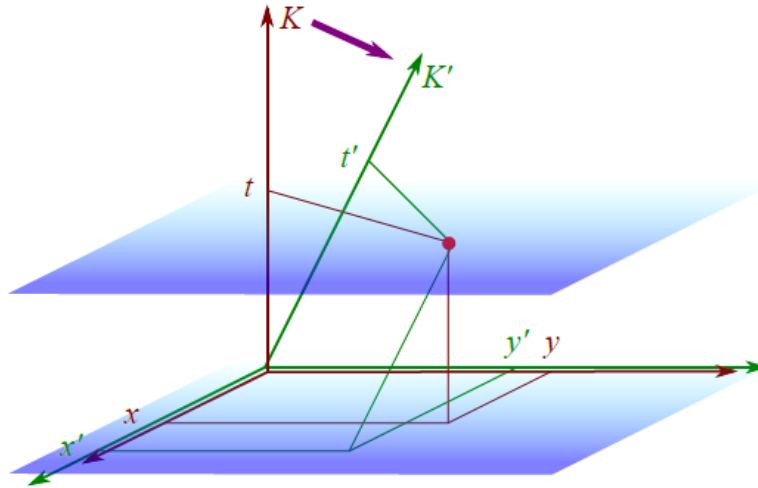
R1.4.4. Speciális Galilei-transzformáció

$$x' = x + v_x t, \quad y' = y + v_y t, \quad z' = z + v_z t, \quad t' = t \quad (1.4)$$

A passzív értelmezés szerint a K' rendszer $-\vec{v} = -(v_x, v_y, v_z)$ relatív sebességgel halad a K rendszerhez képest (1.8. ábra). A két rendszer terének origója a kezdeti időpillanatban egybeesik, és a tértengelyek mindvégig párhuzamosak. Adott t idő alatt a K' rendszer origója $-t\vec{v}$ -vel mozdul el K origójához képest, így érthető, hogy a K' -beli (x', y', z') térkoordinátákat a képlet szerint számolhatjuk ki.



1.7. ábra: A K koordináta-rendszer elforgatottja a K' koordináta-rendszer



1.8. ábra: Speciális Galilei-transzformáció. A K' koordináta-rendszer mozog a K rendszerhez képest

A felsorolt négy szimmetria közül ez az egyetlen, mely az idő-, illetve térkoordinátákat „keveri”. (x', y', z' nemcsak x, y, z -től, hanem t -től is függ.)

Könnyen ellenőrizhető, hogy a fent felsorolt transzformációk mindegyike valóban szimmetriája a téridőnek, azaz egyenestartó, és az időtartamot, valamint egyidejű események között a térbeli távolságot nem változtatja meg. Érdekes kiszámolnunk, hogy két speciális Galilei-transzformáció egymás után való alkalmazása milyen eredményre vezet. Könnyen látható, hogy az (1.4) formulákkal megadott transzformáció után végrehajtva az

$$x'' = x' + w_x t, \quad y'' = y' + w_y t, \quad z'' = z' + w_z t, \quad t'' = t' \quad (1.5)$$

speciális Galilei-transzformációt, eredményül egy újabb speciális Galilei-transzformációt kapunk, melyben a relatív sebesség-paraméter szerepét a $\vec{v} + \vec{w}$ vektor veszi át. Ez a matematikai tény felel meg a relatív sebességek vektoriális összeadásáról szóló 6^{kl}. alapigazságnak.

Megjegyezzük, hogy tágabb értelemben a Galilei-féle téridő szimmetriái közé szokták sorolni a tér-, illetve időtükrözéseket is. Ezek a diszkrét szimmetriák a mi szempontunkból kevésbé fontosak, mint az előbb felsorolt transzformációk, így ezekkel nem foglalkozunk.

A Galilei-féle téridő szimmetriái jóval bonyolultabbak is lehetnek, mint a korábban felsorolt négy alaptípusba tartozó transzformációk. Azonban bármely szimmetria megkapható az alaptípusokba tartozó megfelelő transzformációk egymás utáni alkalmazásával. Ezeket a bonyolultabb, ám tartalmilag semmiféle újdonságot nem hordozó szimmetria-transzformációkat szokás *általános Galilei-transzformációknak* hívni.

Ezzel befejeztük a Galilei-féle téridő szerkezetének áttekintését, megismertük a téridő-szemléletmódot és az ehhez kapcsolódó legfontosabb fogalmakat; most már áttérhetünk a relativisztikus téridő szerkezetének tanulmányozására.

R2. SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLET

A Galilei-féle téridő tulajdonságait alapul véve jól megalapozott, igaz állításnak tűnik számunkra a relatív sebességek klasszikus összeadásának módja, nevezetesen, ha két inerciarendszer egymáshoz képest v sebességgel mozog valamilyen irányban, és az egyik rendszerben egy jel c sebességgel terjed ugyanebben az irányban, akkor a jel a másik rendszerben $v+c$ sebességgel halad. Azonban az elektrodinamika egyenletei, a Maxwell-egyenletek ellentmondanak ennek! Ezen egyenletekből ugyanis levezethető, hogy a fény terjedési sebessége véges értékű univerzális állandó..., melynek az inerciarendszerek ekvivalenciájára vonatkozó feltevés szerint azonosnak kell lennie minden inerciarendszerben..., ami lehetetlen a sebességek összeadására vonatkozó feltevés értelmében!

Ilyen és ehhez hasonló ellentmondások vezették Einsteint arra a gondolatra, hogy alapvetően megváltoztassa a térről és időről kialakult klasszikus szemléletünket. A speciális relativitáselmélet keretein belül a fenti ellentmondás feloldást nyer anélkül, hogy sérülne az inerciarendszerek ekvivalenciájának vagy a természettörvények invarianciájának elve, és az elektrodinamika Maxwell-féle egyenletei is változtatás nélkül érvényben maradnak. A változtatást sokkal alapvetőbb szinten kell végrehajtani; a tér és idő szerkezetéhez kapcsolódó fogalmainkat kell újraértelmezni. Fontos megjegyezni, hogy a relativisztikus fizika egyenletei a fénysebességhez képest lassú mozgások esetén visszaadják a klasszikus fizika egyenleteit, ily módon a két elmélet összhangban van.

Megfontolásaink kiindulópontjául most is tapasztalati tényeket állítunk, azonban ezek a tapasztalatok a hétköznapi szemlélet számára szinte elfogadhatatlanul meglepőnek tűnnek, és csaknem teljesen felrúgják a térről és időről kialakított, jól bevált klasszikus képzeletünket. Éppen ezért fontosnak tartjuk, hogy rögtön a második alpontban (2.2. fejezetben) előrebocsássuk a (megfigyelő szerinti) távolság-, illetve időmérésnek egy olyan praktikus, mérési utasítást megadó definícióját, mely mind a klasszikus, hétköznapi szemlélettel, mind a meglepő kísérleti eredményekkel összhangban van. Ezután térünk csak át a relativisztikus téridő szerkezetét leíró matematikai struktúra ismertetésére, és a legfontosabb összefüggések kvantitatív levezetésére.

R2.1. Alapvető tapasztalatok

Amint említettük, bizonyos tapasztalatok ellentmondanak annak a képnek, amelyet a tér és idő szerkezetéről a klasszikus fizikában kialakítottunk. Ebben az alfejezetben ezek közül a tapasztalatok közül szedjük csokorba a legfontosabbakat, és a korábban (1.1. fejezetben) a tér és az idő szerkezetével kapcsolatban tett kijelentéseket kiegészítjük, illetve módosítjuk.

Semmiféle tapasztalati tény nem kényszerít az inerciarendszerek létezésével, az idő és a tér homogenitásával, illetve izotrópiájával kapcsolatos (0.-3.) alapkijelentések módosítására, így azokat változtatás nélkül elfogadjuk. Azonban a többi kijelentést módosítanunk kell.

R2.1.1. Π -mezonok bomlása

A Földünket érő kozmikus sugárzás hatására a légkör magasabb rétegeiben, a felszín fölött úgy 10–30 km magasságban az oxigén, illetve hidrogén atomokból semleges és töltött pionok (Π -mezonok) lépnek ki igen nagy, a fényéhez közeli sebességgel. Földi laboratóriumban mérve ezen részecskék átlagos élettartama igen rövid, $2\text{--}3 \times 10^{-8}$ másodperc, így a fényéhez közeli, óriási sebességük ellenére is csak néhány méter utat tudnának megtenni a Föld légkörének felső részében, mielőtt elbomlanának (műonra és neutrínóra). Ennek ellenére a több 10 kilométerrel a Föld felszíne fölött keletkező nagy sebességű Π -mezonok a Föld felszínén is detektálhatók! Eszerint különbség lenne a laboratóriumokban vizsgált pionok és a kozmikus sugárzás hatására keletkező részecskék között?

A relativitáselmélet az ellentmondást úgy oldja föl, hogy elveti a klasszikus fizikai világképben oly mélyen gyökerező egységes világidő létét (4^{kl} . alapkijelentés). Ehelyett a relativisztikus fizikában az időre, időtartamra is úgy tekintünk, mint vonatkoztatási rendszertől függő mennyiségre, hasonlóan ahhoz, ahogy (nem egyidejű) események térbeli távolságát kezeltük a klasszikus fizikában. Így elképzelhető, hogy míg a földi megfigyelő szerint két esemény, a pion születése és a Föld felszínén való detektálása között jóval több idő telt el, mint a (nyugvó) részecske átlagos élettartama, addig a pion számára (vagy egy, a részecskével a Földhöz képest nagy sebességgel együtt mozgó megfigyelő számára) csupán néhányszor 10^{-6} másodperc telt el, ami kevesebb a részecske átlagos élettartamánál. Ezen megfontolás fényében az egységes „világidő” létéről szóló 4^{kl} . kijelentést a következőképpen kell módosítanunk.

4^{rel} . *(Az idő relatív jelentése)* Az inerciális vonatkoztatási rendszerekben megfigyelt időtartamok, illetve időpontok függenek a vonatkoztatási rendszertől. Két esemény között eltelt idő az „együtt mozgó” vonatkoztatási rendszerben a legrövidebb, azaz abban, amelyben a két esemény a vonatkoztatási rendszer terének ugyanazon pontjában ment végbe.

Ily módon a pion rendszerében, amelyben a részecske születése, illetve bomlása azonos helyen ment végbe, a két esemény között kevesebb idő telik el, mint bármely más, például a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben, ahol a születés és a bomlás helye között néhányszor 10 km-es távolság van.

E kijelentést röviden, de pontatlanul úgy is szokás fogalmazni, hogy „a mozgó rendszer órái lassabban járnak”. Természetesen annak, hogy egy inerciarendszer „mozog” vagy „áll”, nincs értelme. Időmérésnél minden esetben a téridő két megfelelően kiválasztott eseményének relatív helyzetéről teszünk kijelentést, és e két esemény már kitüntetheti azt a vonatkoztatási rendszert, amelyben a két esemény azonos helyen megy végbe. A fenti példában ez a kitüntetett rendszer a (mozgó) részecskéhez rögzített „mozgó” rendszer, míg a másik, a példában a földi rendszerre utalunk az „álló” jelzővel.

A 4^{rel} . feltevés elfogadásával érthetővé válik a pion bomlásával kapcsolatos

paradoxon a földi megfigyelő számára. A Földhöz képest a pion nagy sebességgel mozog, így a pion rendszerében jóval kevesebb idő telik el a születés és a detektálás között, mint a földi megfigyelő szerint.

Azonban még mindig nem tudjuk megmagyarázni a Π -mezon bomlásával kapcsolatos paradoxont a részecske koordináta-rendszeréből. Sőt, abszolút „világidő” hiányában az egyidejű események távolságáról szóló 5^{kl} . kijelentés is értelmét veszti! Úgy tűnik, hogy el kell vetnünk a távolság fogalom bármiféle abszolút jelentését. A következőképpen módosítjuk az 5^{kl} . kijelentést:

5^{rel} . (*A távolság relatív jelentése*) Az inerciarendszerekben megfigyelt térbeli távolságok nagysága függ a vonatkoztatási rendszertől. Két téridőbeli esemény közti térbeli távolság abban a vonatkoztatási rendszerben a legkisebb, amelyben a két esemény azonos időpillanatban megy végbe. (Később látni fogjuk, hogy ilyen rendszer nem minden esetben létezik.)

Röviden, de pongyolán szokás azt is mondani, hogy „a mozgó tárgyak mérete (a mozgás irányában) megrövidül”. Természetesen szó sincs tényleges méretváltozásról, csupán arról van szó, ahogyan ezt később látni fogjuk, hogy különböző vonatkoztatási rendszerekben mást jelent a tárgyak hossza, és másképp kell azt mérni.

E furcsa kijelentés elfogadásával már feloldhatjuk a pion bomlásával kapcsolatos ellentmondást a pion rendszeréből is. Ebben a vonatkoztatási rendszerben ugyanis a részecske születése és detektálása közti rövid, néhányszor 10^{-6} másodperces „élete” során azt „látja”, hogy a Föld majdnem fénysebességgel száguldva „felé”, néhány száz méterrel közelebb kerül „hozzá”. A pion rendszerében ez a néhány száz méter felel meg a földi rendszerben több tíz kilométeres vastagságúnak mért légkörnek.

A 4^{rel} .-es és 5^{rel} .-ös kijelentéssel kapcsolatos jelenségkört még részletesen, kvantitatív módon is tanulmányozni fogjuk, azonban most térjünk át a fényvel kapcsolatos „furcsaságokra”.

R2.1.2. A Michelson-féle interferencia-kísérlet

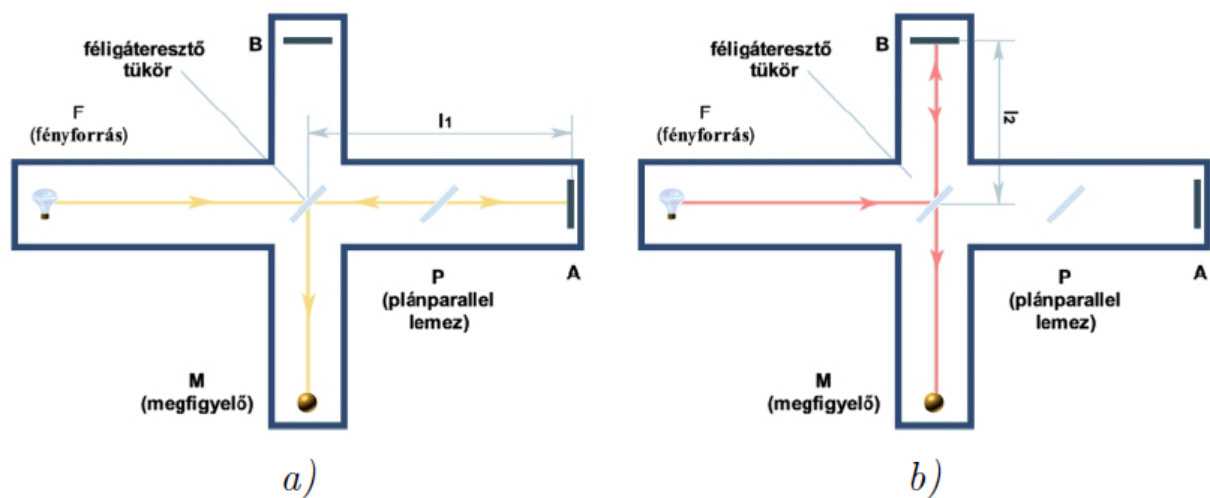
Mint már említettük, az elektrodinamika Maxwell-egyenleteiből levezethető,

hogy a fény nagy, de véges, $c \approx 300.000 \text{ km/s}$ sebességgel terjed. Minden logikusan gondolkodó emberben fel kell, hogy merüljön a kérdés, mihez képest terjed ekkora sebességgel a fény? A fényforráshoz képest? Ahhoz az anyagi közeghez képest, amiben terjed? A Földhöz, esetleg a Naphoz, Naprendszerhez képest? Egyik válasz sem kielégítő. A Maxwell-egyenletekben nem történik semmiféle utalás a fényforrásra, abban csak az elektromos és mágneses tér szerepel. A fény terjedéséhez nincs szükség semmiféle anyagi közegre; a sok fényév távolságra levő csillagok fénye is eljut hozzánk a világűrön keresztül. A másik két megoldás esetén pedig kitüntetnénk egy vonatkoztatási rendszert, így a klasszikus fizikában már Galilei óta oly mélyen gyökerező elv, az inerciarendszerek ekvivalenciájának elve (1. alapkijelentés) sérülne.

A XIX. század nagy fizikusai közül sokan mégis ilyenfajta kiutat választottak, felállítva az ún. *éter-hipotézist*, mely szerint az egész világmindenséget valamilyen láthatatlan, kölcsönhatásban részt nem vevő, nyugvó szubsztancia, a „világéter” tölti ki, és ehhez képest terjed a fény közel 300.000 km/s -os sebességgel.

Albert Abraham Michelson először 1881-ben végezte el, majd később Edward W. Morley társaságában 1887-ben megismételte azt a fizika fejlődése szempontjából hatalmas jelentőségű interferencia-kísérletet, melyben a világéter kimutatására tett (eredménytelen) kísérletet. A kísérleti interferométer rajza a 2.1. ábrán látható.

Az F fényforrásból kiinduló fénysugár elérve a 45° -os szögben elhelyezett T féligáteresztő tükört, két nyalábra bomlik. Az egyik nyaláb, mely áthalad a T féligáteresztő tükörön, az interferométer l_1 hosszúságú karján a fény útjára merőlegesen elhelyezett A tükörről visszaverődik, visszajut a T tükörhöz, melyről visszaverődve eljut az M megfigyelőhöz. A másik, T -ről visszaverődő nyaláb az interferométer l_2 hosszúságú karján elhelyezett B tükörről visszaverődve, majd a T féligáteresztő tükörön keresztülhaladva jut el az M megfigyelőhöz. Michelson az l_1 karban haladó 1-es nyaláb útjában elhelyezett még egy T -vel azonos vastagságú P plánparalel lemezt is, hogy így kompenzálja a 2-es ágban haladó fénysugárnak T -n való többszörös áthaladását. (Feltételezzük, hogy T -nek a fényforrástól távolabbi oldalán jön létre a visszaverődés.)



2.1. ábra: A Michelson-féle interferométer. Az a), illetve a b) ábrán a két interferáló fényút látható külön-külön

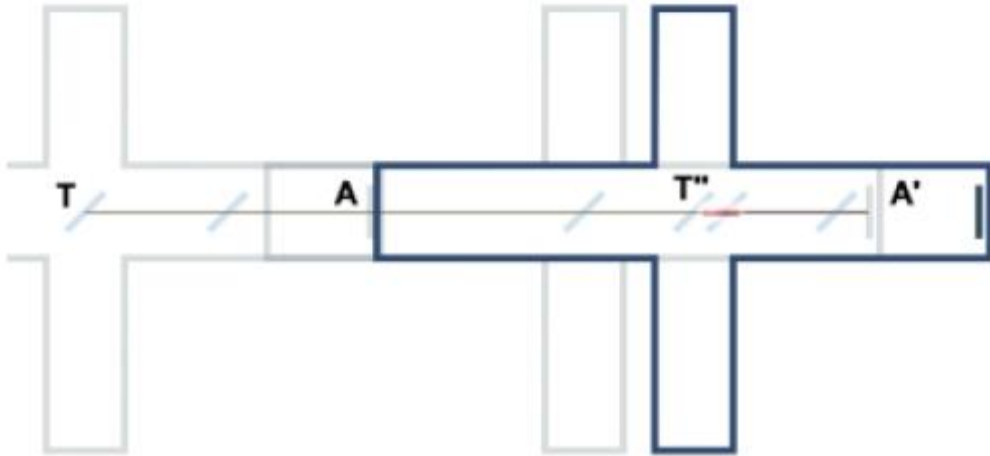
Mint ahogy a különböző karokhoz tartozó két fényút hossza különböző, az M megfigyelő interferencia-képet érzékel. Az éter-hipotézist alapul véve egyszerű számolással megmutatható, hogy a fénysugarak közti (éterhez képest mért) útkülönbség, és így az interferencia-kép is függ az interferométernek az éterhez viszonyított sebességétől.

Határozzuk meg ezt a kapcsolatot! Tegyük föl, hogy az interferométer v sebességgel mozog a világéterhez képest az l_1 kar irányában. Az útkülönbségek szempontjából az FT , illetve TM szakaszok nem érdekesek, csak az l_1 ágban megtett $T - A' - T''$, illetve az l_2 ágban megtett $T - B' - T''$ szakasz hosszát kell kiszámolnunk, figyelembe véve, hogy az interferométer a

fény haladása közben elmozdul. (A két számolásnál a T'' pont helyzete természetesen különbözhet.)

Az l_1 ágban a fénysugár a 2.2. ábrán látható $T - A'$ „oda-”, illetve $A' - T''$ visszautat $c - v$, illetve $c + v$ sebességgel teszi meg az interferométerhez képest, így a befutási idők

$$t_{TA'} = \frac{l_1}{c-v}, \quad t_{A'T''} = \frac{l_1}{c+v} \quad (2.1)$$

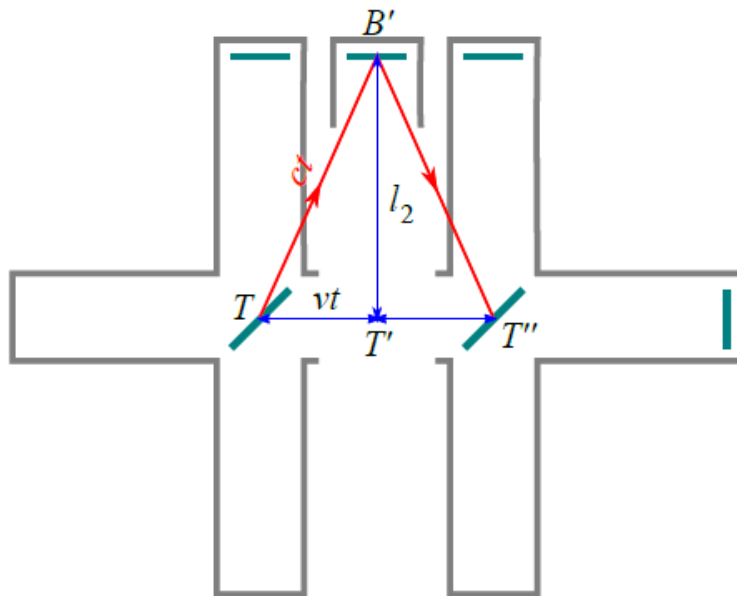


2.2. ábra: A fénysugár haladása az éterhez képest az l_1 ágban

Ez azt jelenti, hogy a fény az éterhez képest

$$s_1 = c(t_{TA'} + t_{A'T''}) = cl_1 \left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) = \frac{2l_1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad (2.2)$$

utat tesz meg.



2.3. ábra: A fénysugár haladása az éterhez képest az l_2 ágban

Az l_2 ágban haladó fénysugár az éterhez képest a 2.3. ábrán látható módon a $TB'T''$ egyenlő szárú háromszög két szárát futja be. Ha t -vel jelöljük egy szár befutásához szükséges időt, akkor $TB' = B'T'' = ct$, és $TT' = T'T'' = vt$, így a $TB'T''$ derékszögű háromszögre felírt Pithagorasztétel alapján $c^2t^2 = l_2^2 + v^2t^2$, ahonnan $t = \frac{l_2}{\sqrt{c^2-v^2}}$. Így az l_2 szárban a fény az éterhez képest

$$s_2 = 2tc = \frac{2l_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.3)$$

utat tesz meg.

Így a két különböző szárban haladó fénysugár közti útkülönbség az éterhez képest

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{2l_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{2l_1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad (2.4)$$

Ha most 90° -kal elforgatjuk az interferométert, úgy, hogy ne az l_1 , hanem az l_2 kar essék az eszköz éterhez képesti sebességének irányába, akkor az egyes utakra $s'_1 = \frac{2l_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, illetve $s'_2 = \frac{2l_2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$ adódik, így az útkülönbség

$$\Delta s' = s'_2 - s'_1 = \frac{2l_2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{2l_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.5)$$

Jól látható, hogy általában ($l_1 \neq l_2, v \neq 0$ esetén) a két útkülönbség különbözik, $\Delta s \neq \Delta s'$. Michelson azonban gondosan kivitelezett kísérletében a legnagyobb meglepetésére egyáltalán nem tapasztalta az interferencia-csíkok elmozdulását az interferométer elforgatásakor, noha műszerével egy század csíknyi elmozdulást is észlelni tudott volna. Michelson megismételte kísérletét az év különböző szakaszaiban, amikor a Föld Nap körüli pályáján más és más irányban haladt mintegy $30 \frac{km}{s}$ -os sebességgel. A kísérlet minden esetben negatív eredménnyel zárult.

Bár Michelson és Morley kísérlete döntő csapást mért az éter-hipotézisre, a kísérlet eredményét még több évtizedig nem tudták földolgozni a fizikusok, maga Michelson is élete végéig hitt a világéter létezésében.

R2.1.3. A Kennedy–Thorndike-kísérlet

A Michelson-Morley féle interferencia-kísérletből azt a következtetést kell levonnunk, hogy a fény minden inerciarendszerben izotróp módon, azaz a fény haladásának irányától független sebességgel terjed. A kísérlet azonban nyitva hagyta még azt a kérdést, hogy vajon a fény terjedési sebessége minden inerciarendszerben azonos-e? Erre a kérdésre adott pozitív kísérleti választ Roy J. Kennedy-nek és Edward M. Thorndike-nak jóval a speciális relativitáselmélet megszületése után, 1932-ben elvégzett kísérlete.

A kísérletben a Michelson-féle interferométerhez hasonló berendezést használtak, azonban most nem azt vizsgálták, hogy az interferencia-csíkok az interferométer elforgatásával eltolódnak-e, hanem arra voltak kíváncsiak, hogy különböző sebességű rendszerekben megváltozik-e az interferencia-kép. Ha ugyanis az interferométer két karja különböző hosszúságú (a Kennedy-Thorndike kísérletben ez a hosszkülönbség $\Delta l = l_2 - l_1 \approx 16 \text{ cm}$ volt), akkor az interferencia-csíkok elhelyezkedése függ a fény sebességének nagyságától. Természetesen a kísérletben most is magát a Földet használták „inerciarendszerként”, kihasználva, hogy a Föld az év különböző szakaszaiban különböző irányokban halad mintegy $30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ -os sebességgel Nap körüli pályáján.

A kísérlet technikai kivitelezése igen nehéz volt, ugyanis meg kellett oldani, hogy az interferométer karjai közti Δl hosszkülönbség több hónapig az interferenciához használt fény hullámhosszán belüli pontossággal állandó maradjon. Az egész berendezést egy nagy kvarc lapra szerelték, külső rezgésektől, illetve fénytől elzárva, vákuumban tartották, és a hőtágulás zavaró hatásainak kiküszöbölése érdekében a hőmérsékletet $\pm 0,001 \text{ }^\circ\text{C}$ pontossággal stabilizálták.

A Michelson-Morley, illetve Kennedy-Thorndike-kísérlet eredményét a következő kijelentésben foglalhatjuk össze, mely talán az egyik legmeglepőbb és legfontosabb alappillére Einstein relativitáselméletének:

6^{rel} . (*A fény abszolút terjedése*) A fény vákuumban minden inerciális megfigyelő számára minden irányban azonos véges c sebességgel terjed, függetlenül az inerciarendszernek vagy a fényforrásnak más objektumokhoz viszonyított relatív sebességétől.

Természetes, hogy a fenti 6^{rel} . kijelentés elfogadása mellett nem tarthatjuk fenn továbbra is a relatív sebességek vektoriális összeadására vonatkozó, klasszikus fizikában használt 6^{kl} . alapszabályt. A kijelentést a következőképpen kell módosítanunk:

7^{rel} . (*Sebességek relativisztikus összeadása*) A relativisztikus fizikában, ha egy jel valamely inerciarendszerben fénysebességgel terjed, akkor minden más vonatkoztatási rendszerben ugyancsak fénysebességgel halad, függetlenül a két rendszer relatív sebességétől. Általában, ha egy objektum a K inerciarendszerhez képest $v > 0$ sebességgel halad, és a K' rendszerben a K rendszer ugyanilyen irányban $u > 0$ sebességgel halad, akkor a vizsgált objektum sebessége a K' rendszerből vizsgálva $v + u$ értéknél kisebbnek adódik.

Előrebocsátjuk, hogy a relativisztikus sebességösszeadás furcsaságai csak akkor kerülnek előtérbe, ha a vizsgált objektumok relatív sebessége nagyon nagy, a fény sebességével összemérhető.

Végül részecskegyorsítókban végzett kísérletek arra utalnak, hogy a részecskék dinamikájára vonatkozó 7^{kl} . kijelentést is módosítanunk kell:

8^{rel} . (*Relativisztikus tömegnövekedés; a fény határsebessége*) Inerciarendszerben gyorsítva egy testet azt tapasztaljuk, hogy nagy (a fénysebességhez közeli) sebességeknél a „test tehetetlen tömege megnő”; ugyanakkora erő hatására sebessége azonos idő alatt egyre kisebb mértékben növekszik. A fénysebességhez közelítve a testek tehetetlen tömege

a végtelenhez tart, ami egyben azt is jelenti, hogy semmiféle anyagi (nyugalmi tömeggel rendelkező) objektumot nem lehet felgyorsítani fénysebességre vagy annál nagyobb sebességre.

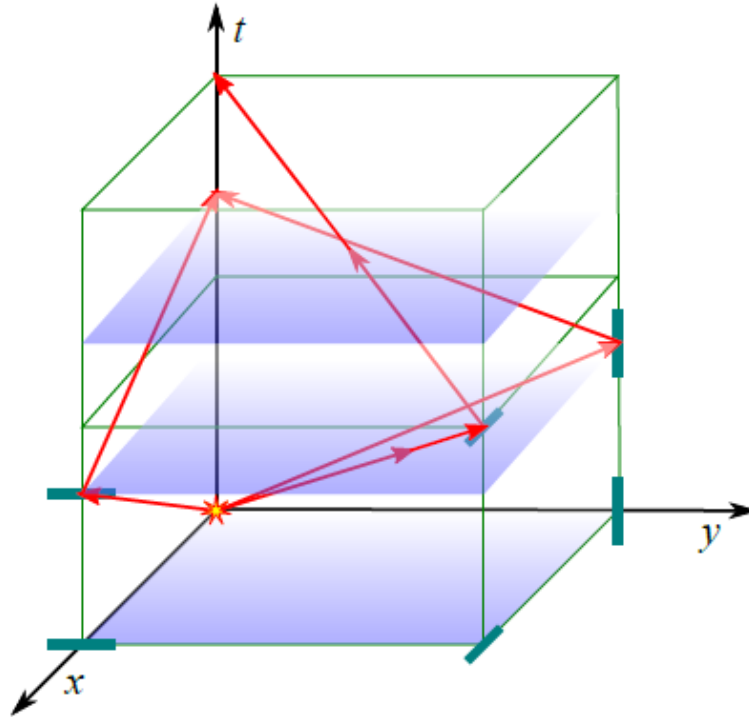
A következő fejezetben olyan, a hétköznapi szemlélet számára is elfogadható mérési utasítást adunk inerciarendszerben az idő, illetve távolság mérésére, mely a relativisztikus fizikában is használható, majd ezután fokozatosan kiépítjük azt az újszerű geometriai képet a térről és időről – vagy inkább a téridőről –, melynek keretei között az előbb felsorolt meglepő tapasztalatok természetes módon értelmezhetők.

R2.2. Praktikus mérési utasítás távolság- és időmérésre

A klasszikus fizikában az időmérés nem okoz nagy gondot, úgy képzelhetjük, hogy a geometriai tértől függetlenül létezik egy „világóra”, melynek ketyyenéseit mindenhol egyszerre lehet „hallani”, melyre „ránézve” bárhol, bármikor, akármilyen körülmények között azonnal megállapítható a pontos, abszolút idő.

A relativisztikus fizikában azonban, mint láttuk, semmilyen hatás, még a fényjel sem terjedhet pillanatszerűen, így a világórára nézve nem a pillanatnyi pontos időt kapjuk meg, hanem azt az időt, amit a világóra a fényjel elindulásának pillanatában mutatott. Kézenfekvő megoldásnak tűnik, hogy korrigáljuk a világóráról vizuálisan (fényjel segítségével) leolvasott időt a fény utazásához szükséges időtartammal, ehhez azonban a fénysebességen kívül ismernünk kell még a világóra tőlünk mért távolságát is. Két pont távolságának megméréséhez azonban már a klasszikus fizikában is használnunk kellett az egyidejűség fogalmát, hiszen két pont távolságáról csak adott pillanatban van értelme beszélni. (5^{kl}. alapkijelentés) Látszólag ördögi körbe kerültünk, időméréshez szükség van a távolság fogalmára, a távolság méréséhez pedig az egyidejűség ismeretére.

Az ellentmondástól úgy szabadulhatunk meg, hogy elvetjük az „abszolút világóra” ötletét, és ehelyett inkább a mindennapos gyakorlathoz igazodva úgy képzeljük, hogy minden „megfigyelő” visz magával egy egyenletesen járó karórát, melyről a vele történt (saját világvonalán fekvő) események idejét leolvashatja, azonban távolabbi eseményekhez rendelt időpontokról közvetlenül nem tud nyilatkozni. Ez utóbbihoz a következő kicsit bonyolultabb, de igen kézenfekvő eljárás szükséges.



2.4. ábra: Mérési utasítás idő-, illetve távolságmérésre

0. *(Előkészületek)* Tegyük föl, hogy a K inerciarendszerben szeretnénk események idejét és távolságát megmérni. Helyezzünk el a K rendszer minden pontjában egy órát, és ezen kívül az origóban egy lámpát, minden más pontban pedig még egy-egy tükröt, a koordináta-rendszer középpontja felé irányítva, a 2.4. ábrán látható módon.
1. *(Az órák közti távolság meghatározása)* Indítsuk el az O origóban elhelyezett órát, és ezzel egyidőben villantsunk fel az origóban egy fényjelet. Ezután mérjük meg az origóba helyezett óra segítségével azt a Δt_A időt, amely ahhoz szükséges, hogy a fényjel az A pontban elhelyezett tükörről visszaverődve visszajusson az origóba. Míthogy a c fénysebesség állandó és megfigyelőtől független, az A pont az origótól $l_A = \frac{c\Delta t_A}{2}$ távolságra van. Ezt a mérést ismételjük meg a koordináta-rendszer minden térpontjára.

Az l_A távolságok ismeretében már elindíthatjuk összehangolt módon a különböző térpontokba helyezett órákat.

2. *(Az órák szinkronizálása)* Indítsuk el az origóba helyezett órát, és ezzel egyidőben villantsunk föl egy fényjelet is O -ban. Valamely A pontban akkor indítsuk el az órát, amikor az O -ból induló fényjel A -ba megérkezik, azonban, figyelembe véve a fényjel utazásához szükséges időt, az órát $\frac{l_A}{c}$ értékről indítsuk!

A fenti eljárással szinkronizált órák a K inerciarendszerben összehangoltan járnak. Ezután valamely E eseménynek a K rendszerben az időpontját arról az óráról kell leolvasnunk, mely E -vel azonos helyen van, egy kiterjedt tárgy pontjainak távolságát pedig a különböző pontokba helyezett órák egyidejűségének figyelembevételével kaphatjuk meg.

Megjegyezzük, hogy annak ellenére, hogy a fenti eljárás nagyrészt klasszikus képzeleteinkre épül, ahhoz a meglepő eredményhez vezet, hogy nem létezik egységes világidő. Bár egyetlen inerciális vonatkoztatási rendszeren belül az órák összhangban járnak, egymáshoz képest haladó mozgást végző inerciarendszerek órái soha nem lesznek egymással összhangban.

Később, a 2.5. alfejezetben matematikailag is pontos értelmet adunk a fent vázolt mérési utasításnak.

R2.3. A speciális Lorentz-transzformáció

A 2.1. fejezetből látható, hogy a XIX. század végére több egymásnak, illetve főként a klasszikus világnézetnek ellentmondó kísérleti, illetve elméleti tapasztalat gyűlt össze, melyeket a fizikusok nem tudtak rendszerbe illeszteni. Lorentz, Poincaré és Einstein érdeme az, hogy csodálatos intuícióval megérezték, hogy a tapasztalatok közül melyek a legalapvetőbbek, legfontosabbak, melyekre új világnézetünket alapozhatjuk, és melyek azok, melyeken a fizika tudománya túlhaladott, valamint az, hogy el is indultak az alapvető tapasztalatok által kijelölt, szokatlan világot feltáró logikai úton, és sikerült egységes rendszert teremteniük.

Ebben a fejezetben a fénysebesség abszolút voltát posztuláló c^{rel} kijelentést elfogadva mi is teszünk egy lépést ezen az úton, és „levezetjük” a speciális Galilei-transzformációt felváltó ún. *speciális Lorentz-transzformációt*, mely – a klasszikus transzformációhoz hasonlóan – egyazon téridőbeli esemény két különböző, egymáshoz képest v sebességgel mozgó inerciarendszerben mért hely és időkoordinátája között teremt kapcsolatot. Egyelőre a transzformációt a passzív szemzőgből, csupán koordinátákkal „bűvészkedve” vizsgáljuk, és később térünk ki a transzformáció igazi, geometriai jelentésére.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a két egymáshoz képest v sebességgel mozgó K , illetve K' inerciarendszerben az idő és helykoordináták origójához tartozó esemény egybeesik, a rendszerekben a megfelelő tértengelyek egymással párhuzamosak, továbbá a tengelyek irányát válasszuk meg úgy, hogy az x tengely essék a relatív mozgás irányába. Feladatul azt tűzzük ki, hogy a K rendszerben egy x , ($y = z = 0$) helykoordinátával, valamint t időkoordinátával jellemzett eseménynek meghatározzuk az x' , ($y' = z' = 0$), t' koordinátáit a K' rendszerben. Ahogyan a szövegezésből is kitűnt, a további egyszerűsítésként elfogadjuk, hogy a vizsgált eseménynek mind a K , mind a K' rendszerben az y , illetve z térkoordinátája zérus.

A klasszikus (Galilei-féle) transzformáció (1.4) alakját alapul véve a keresett speciális Lorentz-transzformációt keressük

$$t' = Pt + Qx, \quad x' = Rt + Sx \quad (2.6)$$

lineáris formában, ahol a P , Q , R és S együtthatók csak a v relatív sebességtől függenek.

Ez az alak fizikailag annak a plauzibilis feltevésnek felel meg, hogy az egyenesvonalú egyenletes mozgás képe tetszőleges inerciális vonatkoztatási rendszer koordináta-

rendszerében egyenes vonal. Ekkor természetesen a különböző inerciarendszerek közötti áttérést leíró transzformációnak egyenestartónak kell lennie.

Mint hogy a K' rendszer K -hoz képest v sebességgel halad az x tengely irányában, K' origójának világvonalához tartozó eseményeket azok a (t, x) koordinátapárok jellemzik, melyekre fennáll, hogy $x = vt$. Ugyanezen eseményeket a K' rendszerből az $x' = 0, (t' = \text{tetszőleges})$ egyenlőség jellemzi, így

$$t' = Pt + Qvt, \quad 0 = Rt + Svt \quad (2.7)$$

A második egyenletből kiolvasható, hogy $\frac{R}{S} = -v$. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a 4^{rel} alak kijelentés értelmében t' nem feltétlenül egyezik meg t -vel.

Tekintsük most a $t = t' = 0$ időpillanatban a két rendszer közös origójából a pozitív, illetve negatív x -tengely irányában kibocsátott fényjelek világvonalához tartozó eseményeket. A fényjelek terjedésére vonatkozó 6^{rel} kijelentés értelmében ezen események koordinátáit a K rendszerben a $\pm x = tc$, a K' rendszerben pedig a $\pm x' = t'_{\pm}c$ összefüggés jellemzi, így

$$t'_{\pm} = Pt \pm Qct, \quad \pm ct'_{\pm} = Rt \pm Sct \quad (2.8)$$

(t' kettős indexénél, valamint a kettős előjeleknél a felső, illetve alsó jelek rendre a pozitív, illetve negatív irányban kilőtt fény sugárnak felelnek meg; egyszerre mindegyik egyenletben vagy a felső vagy az alsó jelzést kell figyelembe venni.)

Az első egyenletből t'_{\pm} -t beírva a másodikba, t -vel való egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy

$$\pm Pc + Qc^2 = R \pm Sc \quad (2.9)$$

Ez csak úgy állhat fenn mind az alsó, mind a felső előjelezéssel, ha $P = S$ és $Qc^2 = R$. Ezeket és a már megkapott $\frac{R}{S} = -v$ összefüggést felhasználva

$$Q(v) = -\frac{v}{c^2}P(v), \quad R(v) = -vP(v), \quad S(v) = P(v) \quad (2.10)$$

alakú, ahol már csak a v relatív sebességtől függő $P(v)$ kifejezés ismeretlen. A függvény meghatározásához további fizikai megfontolásra van szükség.

A (P, Q, R, S) számnégyes azt a transzformációt írja le, amely egy esemény K rendszerben mért koordinátáihoz hozzárendeli ugyanezen eseménynek a K -hoz képest x irányban v sebességgel mozgó K' rendszerben mért koordinátáit. Most határozzuk meg ennek a transzformációnak a (P', Q', R', S') inverzét, mely tehát a K' -ben mért koordinátákhoz rendeli a K -ban mért koordinátákat. Ez a feladat teljesen analóg az imént részben megoldott problémával, csak a v relatív sebesség helyére kell a K rendszernek a K' rendszerben érzékelt relatív sebességét írni. Fizikailag teljesen indokolt feltételezni, hogy ha K' a K -ban mérve x irányban v sebességgel halad, akkor a K rendszer K' -ben $-v$ sebességgel mozog (x' irányban), azaz

$$P' = P(-v), \quad Q' = \frac{v}{c^2}P(-v), \quad R' = vP(-v), \quad S' = P(-v) \quad (2.11)$$

Most használjuk ki azt a feltételt, hogy a (P, Q, R, S) és a (P', Q', R', S') számnégyesekkel jellemzett transzformációk egymás inverzei, azaz egymás után végrehajtva őket, a kapott (x'', t'') koordinátáknak meg kell egyezniük a kiindulási (x, t) koordinátákkal.

$$t'' = P't' + Q'x' = P(-v)(Pt + Qx) + \frac{v}{c}P(-v)(Rt + Sx) = P(v)P(-v)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t \quad (2.12)$$

$$x'' = R't' + S'x' = vP(-v)(Pt + Qx) + P(-v)(Rt + Sx) = P(v)P(-v)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x \quad (2.13)$$

(Félre nem érthető esetekben az együtthatók „ v ” argumentumát elhagytuk.) A kapott eredmény azt jelenti, hogy

$$P(v)P(-v) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.14)$$

Ezen a ponton további fizikai megfontolásra van szükségünk. A Lorentz-transzformáció általános alakjából látszik, hogy ha $x = 0$, akkor $t' = P(v)t$, így a $P(v)$ függvény pontosan azt adja meg, hogy a „mozgó” K' megfigyelő mennyivel méri hosszabbnak két K szerint ugyanazon térpontban végbement esemény között eltelt időt. Nyilvánvaló, hogy ez a faktor nem lehet negatív, és csak v abszolútértékétől függhet, azaz $P(v) = P(-v) = P(|v|) > 0$.

Ezek figyelembevételével $P(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ adódik, így a speciális Lorentz-transzformáció, illetve annak inverze a $\beta = \frac{v}{c}$ egyszerűsítő jelölést segítségével a következő alakban írható föl:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x' = \frac{-vt + x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.15)$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t' + \frac{\beta}{c}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\beta ct' + x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.16)$$

A $\beta = \frac{v}{c}$ mennyiséget a továbbiakban *dimenziótlan sebességnek* nevezzük, hiszen mértékegység nélküli (0 és 1 közti) szám, mely azt mondja meg, hogy a K' rendszer relatív sebessége K -hoz képest hányszorosa a fénysebességnek.

Látható, hogy ha a koordináta-rendszer v relatív sebessége jóval kisebb a fénysebességnél, azaz $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$, akkor a nevező $\sqrt{1 - \beta^2} \approx 1$, és transzformációs képletek visszaadják az (1.4) speciális Galilei-transzformációt.

A fent „levezetett” speciális Lorentz-transzformáció szerepe a speciális relativitáselméletben igen jelentős, a transzformációt ügyesen alkalmazva ugyanis a hossz és időtartamok vonatkoztatási rendszertől függő „változásával” kapcsolatos effektusok ($4^{\text{rel.}}$, $5^{\text{rel.}}$, $6^{\text{rel.}}$, $7^{\text{rel.}}$ kijelentések) kvalitatív formában is megkaphatók. Azonban ezen számolások ismertetése előtt egy kis geometriai kitérőt teszünk, melyben bemutatjuk a relativisztikus téridő különös geometriáját, és rávilágítunk a Lorentz-transzformáció geometriai jelentésére.

R2.4. A Minkowski-féle téridő geometriája

Hermann Minkowski a speciális relativitáselmélet megszületése után néhány évvel, 1908-ban alkotta meg azt a most ismertetésre kerülő geometriai rendszert, mely a speciális relativitáselméletben használt téridő matematikai modelljéül szolgál. E modell segítségével az elmélet legtöbb furcsa következtetése jól érthetővé és könnyen szemléltethetővé válik.

A klasszikus fizikában „másfél” invariáns mennyiség jellemezte a Galilei-féle téridő szerkezetét; az időtartam, és egyidejű események esetén a térbeli távolság. E furcsa egyidejűségi megszorításra utaltunk a „fél” jelzővel. Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogy a relativisztikus fizikában a téridő szerkezete matematikai szempontból jóval egyszerűbb, ugyanis csupán egyetlen invariáns mennyiséggel, a *téridő-intervallummal* jellemezhető. Azonban az intervallum fogalma nem társítható egyértelműen sem időtartamhoz sem térbeli távolsághoz, ami borzasztóan nehézé teszi megfelelő fizikai kép kialakítását.

R2.4.1. Az intervallum és invarianciája

A Galilei-féle téridő szerkezetének ismertetésekor láthattuk, hogy milyen fontos szerepet játszott az időtartam, valamint egyidejű események között a (térbeli) távolság invarianciája. A Minkowski-féle geometriához is legegyszerűbben egy invariáns mennyiség felismerésével juthatunk el. A 4^{rel} . és 5^{rel} . kijelentés értelmében azonban ez az invariáns nem lehet azonos a klasszikus fizikában megismert fogalmak egyikével sem. A támpontot most is a fény abszolút terjedését megfogalmazó 6^{rel} . kijelentés adja. Eszerint az a tulajdonság, hogy a téridő két eseménye fényjellel „összeköthető”, vonatkoztatási rendszertől független tartalommal bír, így, ha valamely inerciarendszerben teljesül a $c\Delta t = \Delta r$ összefüggés a két esemény közti Δr térbeli távolságra és Δt időkülönbségre, akkor bármely más inerciarendszerben is fennáll a hasonló $c\Delta t' = \Delta r'$ összefüggés, ahol $\Delta r'$, illetve $\Delta t'$ a két esemény hely-, illetve időkülönbségét adja meg az új vonatkoztatási rendszerben. Természetesen a Δt , Δr , illetve $\Delta t'$, $\Delta r'$ mennyiségek között az előző fejezetben tárgyalt (2.15) Lorentz-transzformáció teremt kapcsolatot. Így azt mondhatjuk, hogy a két esemény kölcsönös viszonyát leíró $c\Delta t = \Delta r$, vagy az ezzel (gyakorlatilag) egyenértékű $\Delta r^2 - c^2\Delta t^2 = 0$ egyenlőség teljesülése, illetve nem teljesülése vonatkoztatási rendszertől függetlenül jellemzi az eseménypárt, abból a szempontból, hogy ugyanazon fényjel világvonalára eshetnek-e vagy nem. (A második formulához négyzetre emeltük és nullára rendeztük az első egyenletet.)

Innen már csak egy lépés annak a megsejtése, hogy nemcsak a $\Delta r^2 - c^2\Delta t^2 = 0$ egyenlőség teljesülése bír abszolút jelentéssel, hanem a baloldalnak, a $\Delta r^2 - c^2\Delta t^2$ kifejezésnek az értéke is vonatkoztatási rendszertől független, a vizsgált eseménypárra jellemző állandó, azaz invariáns. Állításunkat igen könnyen ellenőrizhetjük, ugyanis, ha két esemény közti tér-, illetve időbeli különbséget a K rendszerben a Δx , Δy , Δz , illetve Δt mennyiségek jellemzik, akkor a hozzá képest x irányban v sebességgel mozgó K' rendszerben ugyanezek a különbségek a (2.15) speciális Lorentz-transzformáció értelmében

$$\Delta x' = \frac{-\beta c \Delta t + \Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\beta}{c} \Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.17)$$

(Mint hogy a Lorentz-transzformáció lineáris, koordináták különbségére ugyanúgy alkalmazható, mint magukra a koordinátákra.)

Látható, hogy

$$\begin{aligned} \Delta r'^2 &= \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2 = \\ &= \frac{\Delta x^2(1-\beta^2) - c^2 \Delta t^2(1-\beta^2)}{1-\beta^2} + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta r^2 - c^2 \Delta t^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

azaz a vizsgált kifejezés valóban független a vonatkoztatási rendszertől. Részletesebb analízissel megmutatható, hogy nemcsak az általunk megvizsgált „*x-irányú*” Lorentz-transzformáció, hanem tetszőleges, más irányban mozgó inerciarendszerre való áttéréshez tartozó transzformáció is invariánsan hagyja a tér-, illetve időkoordináták négyzetének különbségéből képzett $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$ alakot.

A Δs mennyiség, melyet két esemény „közti” *intervallumnak* nevezünk, sajátos módon ötvözi a klasszikus fizikában használt invariáns fogalmakat, az időtartamot, illetve (egyidejű események közti) távolságot. Abban a vonatkoztatási rendszerben, melyben a két esemény a térnek ugyanabban a pontjában ment végbe, $\Delta s = c \Delta t$, így az intervallum időtartam-jelentést hordoz. Ugyanakkor, ha két esemény egy vonatkoztatási rendszerben egyidejű, azaz

$\Delta t = 0$, akkor $\Delta s = \Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ azaz az intervallum térbeli távolság-jelentéssel bír.

R2.4.2. A Minkowski-féle skaláris szorzás

Szembeötlő az analógia az intervallum $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$ kifejezése és a vektorok önmagukkal vett skaláris szorzatát megadó kifejezés között, (ami a koordináták négyzetösszege). Az egyetlen különbség „csupán” az, hogy az intervallum-négyzet kiszámolásánál az időkoordináta négyzete negatív előjellel (és konstans együtthatóval) szerepel. Ezen analógia alapján célszerű bevezetni a téridővektorok *Minkowski-féle* vagy *pszeudoskaláris* szorzatát, melynek definícióját koordinátákkal, majd absztraktul, definiáló tulajdonságokkal is megadjuk.

Legyen $\vec{u}: (x_1, y_1, z_1, t_1)$, illetve $\vec{v}: (x_2, y_2, z_2, t_2)$ két téridővektornak valamely K inerciarendszerben vett koordináta-négyese. (A koordináták előtti Δ jelet elhagytuk; úgy tekintjük, hogy a vektorok kezdőpontja a koordináta-rendszer origója, és csak a vektorok végpontjainak koordinátáit adjuk meg.) Ekkor a két vektor *Minkowski-féle* vagy *pszeudoskaláris* szorzata, melyet $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ módon jelölünk, legyen az

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - c^2 t_1 t_2 \in \mathbb{R} \quad (2.19)$$

valós szám.

A következőkben a Minkowski-szorzat néhány alapvető, könnyen ellenőrizhető tulajdonságát adjuk meg felsorolásszerűen. Bizonyítás nélkül előre bocsátjuk, hogy ezek a

tulajdonságok definiáló tulajdonságok, egyenértékűek a korábban koordinátákkal megadott definícióval.

I. *Bilinearitás* (lineáritás az első és második változóban):

$$\langle \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2, \vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle + \beta \langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle, \quad \text{illetve} \quad (2.20)$$

$$\langle \vec{u}, \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle + \beta \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle, \quad \text{ahol } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

II. *Szimmetria*:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \quad (2.21)$$

III. *Definitív*:

Ha rögzített \vec{u} mellett minden \vec{v} vektorra $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, akkor $\vec{u} = 0$.

IV. $(+, +, +, -)$ *szignatúra*:

Létezik négy vektor, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ és \vec{t} úgy, hogy különbözők szorzata nulla,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{t} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{t} \rangle = \langle \vec{z}, \vec{t} \rangle = 0, \quad (2.22)$$

és a pszeudoskaláris négyzetekre

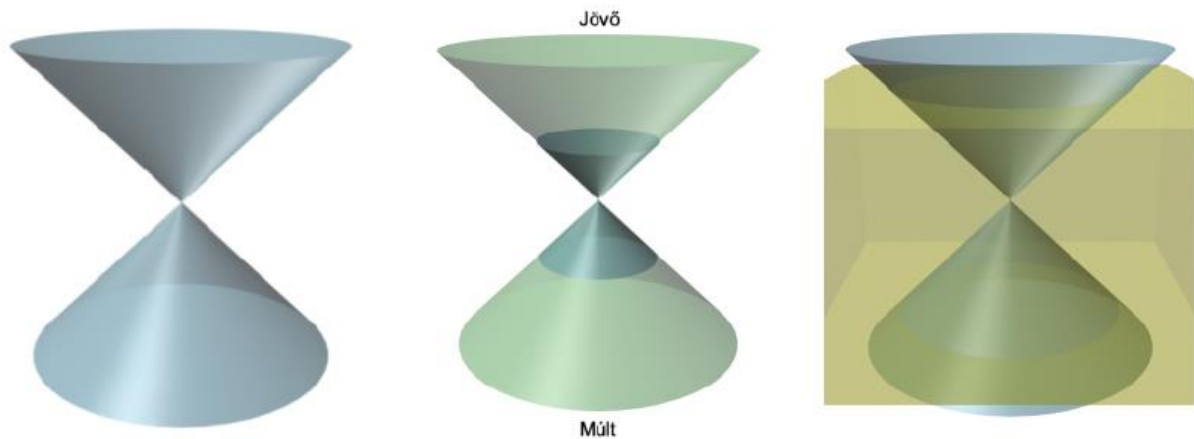
$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = 1, \quad \langle \vec{t}, \vec{t} \rangle = -1 \quad (2.23)$$

teljesül.

R2.4.3. Téryszerű, fénytyszerű és időszerű vektorok

Bár a Minkowski-féle pszeudoskaláris szorzás lényegesen különbözik az euklideszi skaláris szorzástól, átveszünk néhány geometriai szóhasználatot. Azt mondjuk, hogy két vektor, \vec{u} és \vec{v} (*Minkowski-értelemben*) *ortogonális*, ha $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. A $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle$ számot a \vec{w} vektor *hossznégyszétének*, a $\text{sgn}(\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle) \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ mennyiséget pedig a vektor *nagyságának* nevezzük. (A kifejezésben szereplő $\text{sgn}(\cdot)$ a jól ismert előjelfüggvény, mely +1, ha argumentuma pozitív, és -1, ha negatív.) Vigyáznunk kell azonban, mert ezekhez a szavakhoz most nem társíthatjuk az euklideszi geometriában jól megszokott tulajdonságokat! Vannak például olyan (nem null-) vektorok, melyek önmagukra ortogonálisak, és így egyben nagyságuk is nulla. Sőt, egy vektor hosszánegyzete és nagysága tetszőleges – pozitív, negatív vagy zérus – valós szám is lehet.

E tulajdonság alapján három kategóriába soroljuk a téridő nem nullvektorait. Az $\vec{u} \neq 0$ vektor *téryszerű*, ha $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$, *időszerű*, ha $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle < 0$, és *fényszerű*, ha $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$. A téridő két eseményéről azt mondjuk, hogy *téryszerűen*, *időszerűen*, illetve *fényszerűen* szeparáltak, ha a köztük levő vektor téryszerű, időszerű, illetve fénytyszerű. A Minkowski-szorzat koordinátás definícióját alkalmazva könnyen beláthatjuk, hogy (rögzített kezdőpont esetén) a fénytyszerű vektorok végpontjai az $r^2 - c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$ egyenlettel jellemzett kettős kúpon, az úgynevezett *fénykúpon* helyezkednek el, míg az idő-, illetve téryszerű vektorok végpontjai a kúp belsejében, illetve azon kívül találhatóak, a 2.5. ábrán látható módon. (Az ábrázolás kivitelezhetősége érdekében az ábrán szokás szerint eggyel kevesebb térdimenziót jelenítettünk meg.)



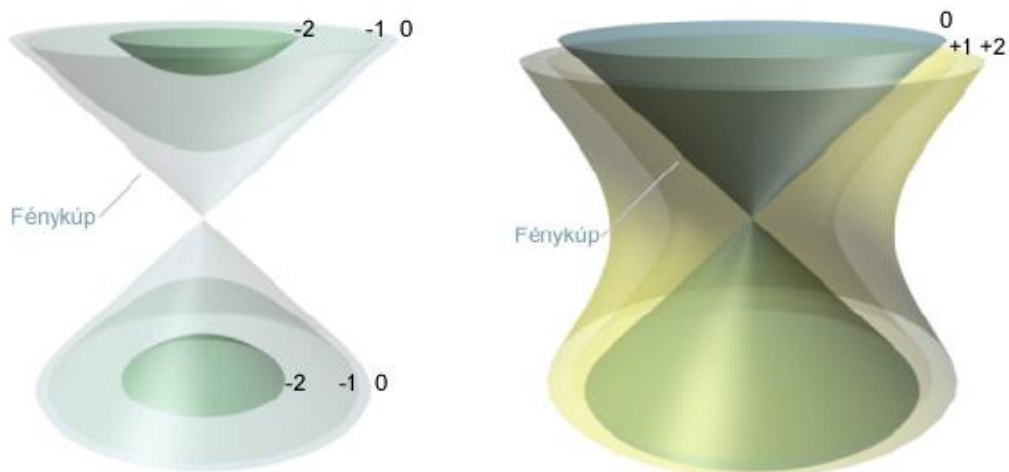
2.5. ábra: A Minkowski-féle téridő szerkezete. a) fénykúp; b) jövőbe, illetve múltba mutató időszerű vektorok; c) térszerű vektorok

Az időszerű vektorok kettős kúpját az origó két részre, a *jövőbe mutató*, valamint a *múltba mutató* időszerű vektorok halmazára osztja. Értelemszerűen az első halmaz az origó „fölött” ($t > 0$), míg a másik az origó „alatt” ($t < 0$) helyezkedik el. Hasonlóan tehetünk különbséget jövőbe, illetve múltba mutató fényszerű vektorok között is, azonban a térszerű vektorok egyetlen összefüggő halmazt alkotnak, így ott ez a megkülönböztetés értelmét veszti.

Megfigyelhetjük (2.6. ábra), hogy a rögzített hosszúságú térszerű vektorok, illetve a rögzített hosszúságú időszerű vektorok végpontjai (egyköpenyű, illetve kétköpenyű) forgás hiperboloid-sereget alkotnak, melynek közös aszimptotája a fénykúp.

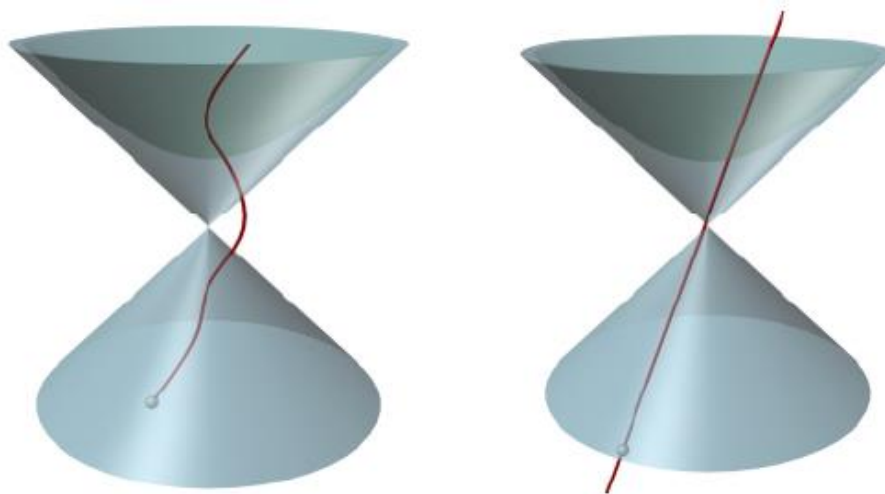
R2.4.4. Négyessebesség

Pontszerű részecskék „élettörténetét” most is világvonalakkal ábrázolhatjuk a téridő-diagramon. A fény határsebességéről szóló 8^{rel.} kijelentés értelmében egy világvonal bármely két pontja közt valamely rögzített vonatkoztatási rendszerben mért Δr térbeli távolságra, illetve Δt időkülönbségre fenn kell, hogy álljon a $\frac{\Delta r}{\Delta t} < c$ összefüggés, ami azt jelenti, hogy $\Delta r^2 - c^2 \Delta t^2 < 0$, az- az a két esemény által meghatározott vektor időszerű. (Többek között ez a tény indokolja az „időszerű” elnevezést.)



2.6. ábra: A különböző nagyságú a) időszerű és b) térszerű vektorok forgási hiperboloidokon helyezkednek el

Tehát a világvonalak olyan görbék a Minkowski-féle téridőben, melyek érintője minden pontban az adott pontban felrajzolt fénykúpon belül halad (2.7.a ábra). Speciálisan a fényrészecskének, a fotonnak a világvonala a fénykúpot érintő egyenes (2.7.b ábra). A téridő adott pontjában felvillanó fényjel „élettörténetét” a ponthoz tartozó jövőbe mutató fénykúp írja le; ez a tény indokolja a „fénykúp” elnevezést.



2.7. ábra: a) Egy pozitív tömeggel rendelkező részecske világvonala időszerű görbe. b) Egy foton világvonala fénszerű egyenes, a fénykúp egy alkotója. Mindkét ábrán látható a négyessebességek által alkotott hiperboloid is

Pontszerű részecskék mozgásának pillanatnyi leírására a *négyessebesség-vektort* használjuk; ez olyan jövőbe mutató időszerű vektor, mely a vizsgált pontban érinti a részecske világvonalát, és a hossza (definíció szerint) -1 .

Megjegyezzük, hogy a szokásos (relatív) sebesség fogalommal ellentétben nincs értelme a négyessebességek között „nagyságviszonyról” beszélni, egyrészt, matematikai szempontból azért nem, mert a vektor Minkowski-féle hossza definíció szerint 1 , másrészt, fizikai szempontból pedig azért nem, mert ez abszolút fogalom, melyet nem viszonyítunk

semmiféle vonatkoztatási rendszerhez. Az inerciarendszerek ekvivalenciáját kifejező 1. alapkijelentés értelmében a 2.7. ábrán forgáshiperboloid-felületen elhelyezkedő lehetséges négyessebességek között nincs kitüntetett. (Ahogy a Galilei-féle téridőábrázolásnál sem tüntethetjük ki az egyidejűségi hipersíkokra „merőleges” sebességet, most sem tüntethetjük ki a hiperboloid „csúcsába” mutató négyesvektort.)

Megjegyezzük, hogy a Minkowski-geometriában egy ponthoz tartozó fénykúp, valamint az innen kiinduló négyessebesség-vektorok (-1 hosszúságú, jövőbe mutató időszerű vektorok) abszolút jelentéssel bírnak, így a Minkowskiféle téridő szemléltetésekor ezeket az objektumokat mindig fel szokás venni a rajzra (2.7. ábra).

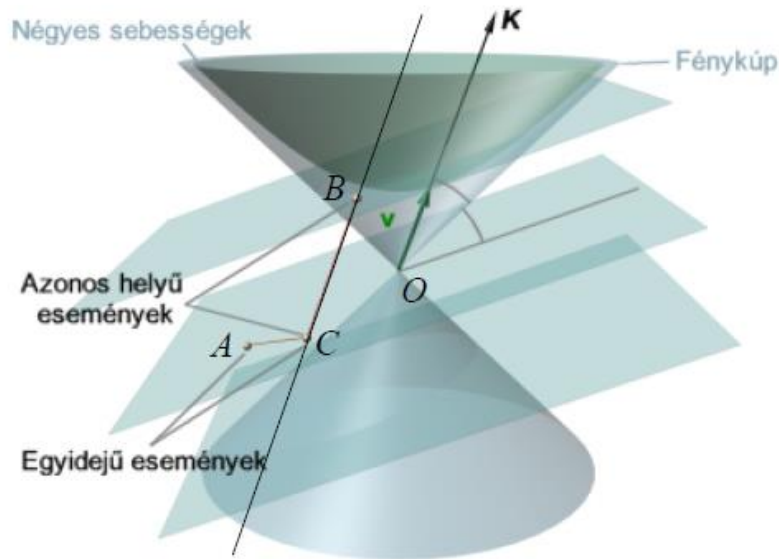
Láthatjuk tehát, hogy a Minkowski-féle téridő szerkezete mennyire különbözik a Galilei-féle téridőétől. A Galilei-geometriában szereplő, abszolút jelentéssel bíró egyidejűségi hipersíkokat felváltják a fény abszolút terjedését leíró fénykúpok, az időtartammal, illetve (egyidejű események között) a távolsággal kapcsolatos invariáns mennyiségeket pedig egy, a Minkowski-féle pszeudoskaláris szorzásból származó új invariáns mennyiség, az intervallum szintetizálja.

R2.5. Inerciális vonatkoztatási rendszerek

Ebben az alfejezetben a Galilei-féle téridő esetén megtárgyaltakhoz hasonló módon azt mutatjuk be, hogy hogyan lehet egy inerciális vonatkoztatási rendszer segítségével „szétbontani” a téridőt (az adott vonatkoztatási rendszerhez tartozó) térre és időre. Mostani gondolatmenetünk hasonlatos a klasszikus esetben alkalmazotthoz.

R2.5.1. Egyidejűségi hipersíkok

Vegyünk föl a K inerciarendszer terében egy $x - y - z$ derékszögű koordináta-rendszert, és ábrázoljuk a rácspontok világvonalát a téridőben. Minthogy minden rácspont bármely inerciarendszerben azonos sebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, a rácspontok világvonalai a téridőben egymással párhuzamos (időszerű) egyenesek. A 2.8. ábrán az O origó és a B és C pontok világvonala látható. A K inerciarendszer terének pontjait ezek a világvonalak testesítik meg; két esemény pontosan akkor megy végbe a K vonatkoztatási rendszerben ugyanabban a pontban, ha a két esemény azonos világvonalra esik. (A 2.8. ábrán B és C a K rendszer terének azonos pontjában megy végbe.) Azonban hogyan vegyük föl a K rendszerhez tartozó egyidejűségi hipersíkokat?



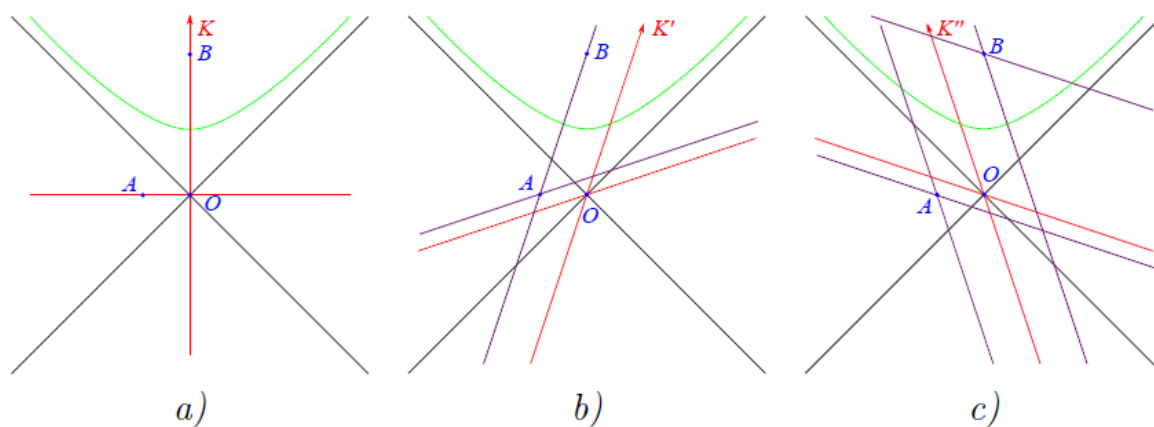
2.8. ábra: A K megfigyelő szerint egyidejű, illetve azonos helyű események

A megoldáshoz a Minkowski-szorzat segítségével juthatunk el. Jelölje a K rendszer világvonalaihoz tartozó négyessebesség vektort \vec{v} . Két esemény, az ábrán A és C akkor *egyidejű a K rendszerben*, ha az általuk meghatározott \overline{AC} vektor (Minkowski-értelemben) ortogonális a \vec{v} négyessebességre, azaz $\langle \overline{AC}, \vec{v} \rangle = 0$. A téridőt a 2.8. ábra szerint fölbonthatjuk olyan egymással párhuzamos háromdimenziós hipersíkokra, melyek mindegyike (Minkowski-értelemben) ortogonális a \vec{v} vektorra. Ezek a síkok veszik át a Galilei-geometriában megismert egyidejűségi hipersíkok szerepét; azonos hipersíkon fekvő események a K vonatkoztatási rendszerben egyidejűek, míg különböző hipersíkokon elhelyezkedő események között eltelt (K szerinti) időtartamot a hipersíkoknak a világvonalak (v) mentén mért távolsága adja meg. Például az ábrán berajzolt O , A és C események K szerint egyidőben következtek be, míg a B esemény később ment végbe C -vel azonos helyen.

Mind az egyidejű események távolsága, mind az azonos térpontban végbement események közti időtartam egyszerűen kiszámolható a Minkowski-szorzás segítségével; például az A és C közti térbeli távolság K szerint $\sqrt{\langle \overline{AC}, \overline{AC} \rangle}$, míg C és B közt eltelt idő K szerint $\frac{1}{c} \sqrt{-\langle \overline{CB}, \overline{CB} \rangle}$. (Ne feledjük, hogy \overline{CB} időszerű, így skalár négyzete negatív.) Kicsit később azt is megmutatjuk, hogy hogyan kaphatjuk meg tetszőleges két esemény K szerinti távolságát, illetve időkülönbségét.

A figyelmes olvasónak biztosan feltűnt, hogy a \vec{v} négyessebesség vektorra (Minkowski-értelemben) ortogonális egyidejűségi hipersíkokat nem (euklideszi értelemben) merőlegesen vettük föl a 2.8. ábrán. Ez megint csak a Minkowski-féle geometria szemléltetésének furcsa sajátossága. Amilyen irányban „hajlik” a \vec{v} négyessebesség a fénykúphoz, olyan irányban kell az ortogonális hipersíkokat is a fénykúphoz „dönteni”. (Határesetben, ha \vec{v} fényszerűvé válik, és érinti a fénykúpot, akkor az ortogonális

hipersíkok is ugyanezen alkotó mentén érintik a fénykúpot. Emlékeztetünk rá, hogy a fényszerű vektorok önmagukra ortogonálisak Minkowski-értelemben.)



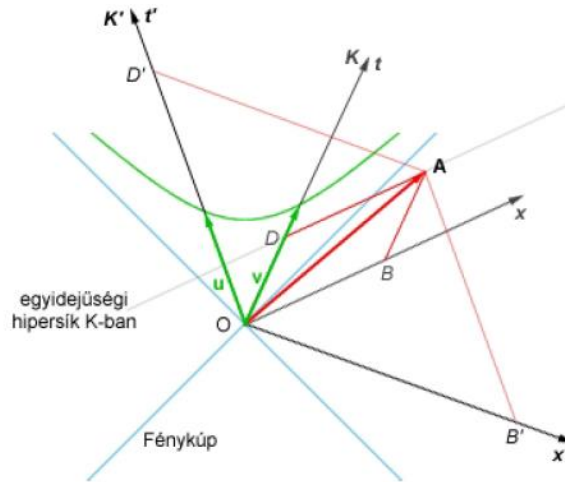
2.9. ábra: Inerciális vonatkoztatási rendszerek tér-idő-diagramja. a) A K vonatkoztatási rendszerben O és A egyidejű, O és B azonos helyű. b) A K' rendszerben A és B azonos helyű, és mindhárom esemény különböző idejű. c) A K'' rendszerben mindhárom esemény ideje, helye is különbözik

Illusztrációként a 2.9. ábrán berajoltuk még két másik, K' , illetve K'' inerciális vonatkoztatási rendszer origójának világvonalát és az egyidejűségi hipersíkokat. A Galilei-féle téridővel éles ellentétben a különböző vonatkoztatási rendszerek egyidejűségi hipersíkjai (a 4^{rel} . kijelentésnek megfelelően) most nem esnek egybe. Látható, hogy a K -ban különböző helyen végbement A és B események K' -ben azonos helyen mennek végbe, valamint az, hogy a K -ban egyidejű O , A események sem K' -ben, sem K'' -ben nem egyidejűek. A speciális relativitáselméletben mind az egyidejűség, mind az „azonos helyűség” vonatkoztatási rendszertől függő, relatív fogalom. Az ábrák alapján az is látható, hogy két eseményhez, A -hoz és B -hez pontosan akkor található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben a két esemény azonos térpontban ment végbe, ha az \overline{AB} vektor időszerű, és akkor található olyan vonatkoztatási rendszer, melyben a két esemény egyidejű, ha \overline{AB} térszerű.

R2.5.2. Megfigyelő szerinti tér és idő

Vizsgáljuk meg, hogy az O origójú, \vec{v} négyessebességgel jellemzett K vonatkoztatási rendszerben hogyan kaphatjuk meg egy tetszőleges A esemény térés időkoordinátáját. Az egyszerűség kedvéért dolgozzunk egy térés egy idődimenzióban. A 2.10. ábrán láthatók a K -hoz tartozó világvonalak és egyidejűségi hipersíkok, valamint a vizsgált A esemény. Az \overline{OA} vektort írjuk föl $\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{OD}$ alakban, ahol O és B egyidejű, míg O és D azonos helyen ment végbe a K vonatkoztatási rendszerben. Látható, hogy $\overline{OD} = ct\vec{v}$, ahol t az O és D , illetve A között eltelt idő K szerint. (A és D egyidejű.) Így

$$\overline{OA} = \overline{OB} + ct\vec{v} \quad (2.24)$$



2.10. ábra: Az A esemény K és K' megfigyelő szerinti térés időkoordinátái

Az egyenletet skalárisan szorozva \vec{v} -vel, és kihasználva, hogy \vec{v} és \vec{OB} ortogonális, azaz $\langle \vec{v}, \vec{OB} \rangle = 0$, valamint, hogy $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 1$, azt kapjuk, hogy

$$t = -\frac{\langle \vec{v}, \vec{OA} \rangle}{c} \quad (2.25)$$

Ezt visszahelyettesítve \vec{OB} -re azt kapjuk, hogy $\vec{OB} = \vec{OA} - ct\vec{v} = \vec{OA} + \langle \vec{v}, \vec{OA} \rangle \vec{v}$. A B , illetve az A eseménynek O -tól mért K szerinti térbeli x távolságát az \vec{OB} vektor skalár négyzetéből tudhatjuk meg. (O és B egyidejűek, B és A pedig azonos helyűek K szerint.)

$$x^2 = \langle \vec{OB}, \vec{OB} \rangle = \langle \vec{OA} + \langle \vec{v}, \vec{OA} \rangle \vec{v}, \vec{OA} + \langle \vec{v}, \vec{OA} \rangle \vec{v} \rangle = \langle \vec{OA}, \vec{OA} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{OA} \rangle^2 \quad (2.26)$$

azaz

$$x = \sqrt{\langle \vec{OA}, \vec{OA} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{OA} \rangle^2} \quad (2.27)$$

(Könnyen ellenőrizhető, hogy $x^2 - c^2 t^2 = \langle \vec{OA}, \vec{OA} \rangle$, ahogy azt vártuk.)

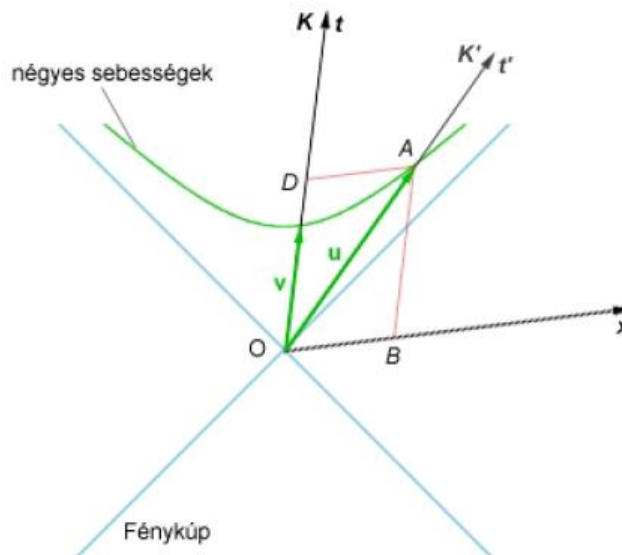
Ezzel megkaptuk egy általános A esemény térés időkoordinátáját az O középpontú, \vec{v} négyessebességgel jellemzett vonatkoztatási rendszerben. Látható, hogy mindkét koordináta függ \vec{v} -től, azaz a vonatkoztatási rendszer mozgásállapotától. Ha az O és A esemény *térszerűen szeparált*, azaz az \vec{OA} vektor térszerű, akkor az 5^{rel.} alapkijelentéssel összhangban a köztük mért x távolság akkor minimális, ha $\langle \vec{v}, \vec{OA} \rangle = 0$, azaz, ha vonatkoztatási rendszerünket úgy választjuk meg, hogy a két esemény egyidejű legyen. Ha az O és A esemény *időszerűen szeparált*, azaz az \vec{OA} vektor időszerű, akkor pedig a 4^{rel.} alapkijelentéssel összhangban a köztük mért t időkülönbség akkor minimális, ha $c^2 t^2 = x^2 - \langle \vec{OA}, \vec{OA} \rangle$ a lehető legkisebb, azaz, ha $x = 0$, ami azt jelenti, hogy a vizsgált vonatkoztatási rendszerben O és A azonos helyen ment végbe, és \vec{v} párhuzamos az \vec{OA} vektorral.

A 2.10. ábrán feltüntettünk egy másik, \vec{u} sebességű K' vonatkoztatási rendszert is, hogy érzékeltessük, mennyire másképp „hasítják szét” a téridőt különböző vonatkoztatási rendszerek térre és időre.

R2.5.3. Relatív sebesség

Vegyünk fel két vonatkoztatási rendszert, K -t és K' -t a 2.11 ábrán látható módon, úgy, hogy O origójuk egybeessék. A K -hoz tartozó négyessebesség legyen \vec{v} , míg a K' -höz tartozó legyen \vec{u} . Határozzuk meg, hogy a K megfigyelő a K' rendszer mozgását milyen sebességűnek érzékeli, azaz határozzuk meg a K' -nek a K -hoz képesti v_r relatív sebességét! (v_r ebben az alfejezetben a sebesség nagyságát jelenti.)

A relatív sebesség mérés elve ugyanaz, mint a klasszikus fizikában; kiválasztjuk K' egy pontját, mondjuk a térbeli koordináta-rendszer kezdőpontját, és képezzük e pont mozgása során két esemény közti távolság és időtartam hányadosát. Célszerűen válasszuk e két eseménynek a két rendszer közös O origóját, és az \vec{u} sebességvektor A végpontját. Az előző alfejezet (2.25) és (2.27) képletei alapján a K megfigyelő által az O és A esemény között észlelt



2.11. ábra: A relatív sebesség számolása

x térbeli távolság, illetve t időtartam

$$x = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle^2 - 1}, \quad t = -\frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{c} \quad (2.28)$$

így a relatív sebesség

$$v_r = \frac{x}{t} = c \frac{\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle^2 - 1}}{-\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle^2}} \quad (2.29)$$

(Kihasználtuk, hogy $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ és $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = -1$.)

Látható, hogy a γ^{rel} alakijelentéssel összhangban a relatív sebesség értéke mindig kisebb, mint a fénysebesség, valamint az is megfigyelhető, hogy szimmetrikus \vec{u} -ban és \vec{v} -ben, tehát K -nak K' -höz képesti sebesség nagysága is v_r .

Mint hogy v_r hordoz jól mérhető fizikai tartalmat, célszerű kifejeznünk a $-\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ szorzatot v_r segítségével:

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle^2 = \frac{1}{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}, \quad \text{azaz} \quad -\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \frac{1}{1 - \frac{v_r^2}{c^2}} \quad (2.30)$$

Végezetül megjegyezzük, hogy ha a relatív sebesség jóval kisebb, mint a fénysebesség, azaz $\frac{v_r}{c} \ll 1$, akkor $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \approx -1$, azaz \vec{v} és \vec{u} „majdnem” párhuzamosak, és így a rájuk ortogonális egyidejűségi hipersíkok is „majdnem” egybeesnek. Ez az oka annak, hogy a klasszikus fizikában „viszonylag” kis relatív sebességű mozgások vizsgálatánál az események egyidejűségét abszolút, megfigyelőtől független tulajdonságnak érzékelték.

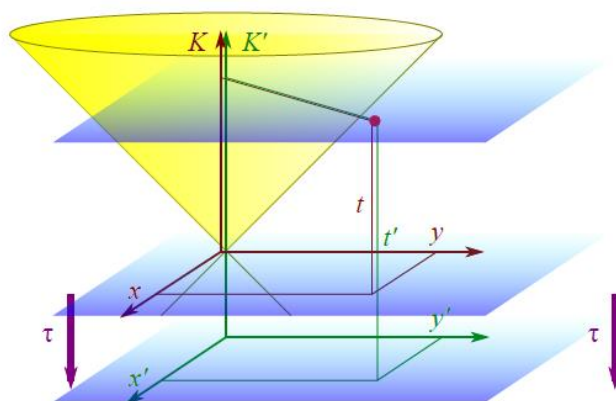
R2.6. A Minkowski-féle téridő szimmetriái

A klasszikus fizikáról szóló 1.4. részhez hasonlóan kezelhetjük a Minkowski-féle téridő szimmetriáit is. Szimmetrián most is struktúratartó, egy-egyértelmű transzformációt értünk, azaz olyan leképezést, mely egyenestartó, és bármely két esemény közti intervallumot változatlanul hagyja. Ez utóbbi megkötetést úgy is átfogalmazhatjuk, hogy tetszőleges két vektornak, illetve transzformált képüknek a Minkowski-féle szorzata egyezzen meg.

A szimmetria-transzformációkat grafikususan is érzékeltetjük, és a passzív képhez tartozó $K \rightarrow K'$ koordináta-rendszer-váltás $(x, y, z; t) \mapsto (x', y', z'; t')$ képleteit is megadjuk. Az első három szimmetriatranszformáció esetén K és K' relatív sebessége nulla.

R2.6.1. (K szerinti) időeltolás

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t + \tau \quad (2.31)$$

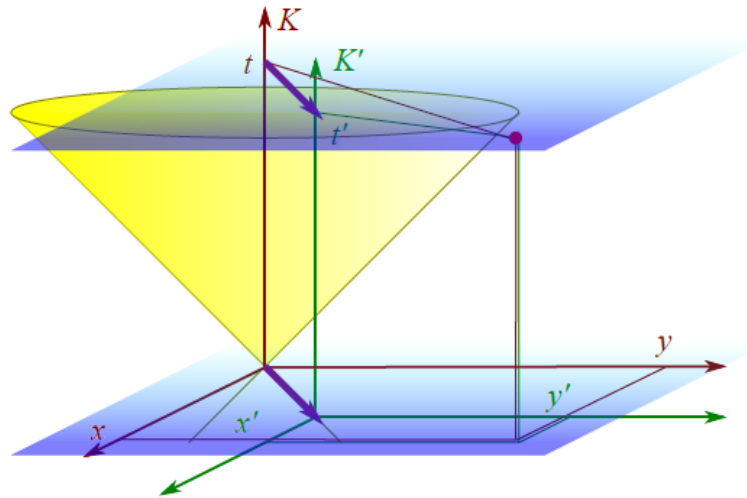


2.12. ábra: A K koordináta-rendszer időeltoltja a K' koordináta-rendszer

A transzformáció fizikailag annak felel meg, hogy a K' rendszerben az időmérést τ idővel korábban kezdjük el, mint K -ban.

R2.6.2. (K szerinti) térbeli eltolás

$$x' = x + x_0, \quad y' = y + y_0, \quad z' = z + z_0, \quad t' = t \quad (2.32)$$



2.13. ábra: A K koordináta-rendszer eltolja a K' koordináta-rendszer

A transzformáció azt írja le, hogy a K' rendszer origója a térben K origójához képest $-(x_0, y_0, z_0)$ vektorral el van tolva.

Megjegyezzük, hogy a tér-, illetve időeltolás, mint téridő-transzformáció függ a K rendszer mozgásállapotától (négyes sebességétől). Egy K -hoz képest mozgó rendszer például a K -szerinti időeltolást és térbeli eltolást is úgy érzékeli, mint valamiféle összetett „téridő-eltolást”, mely mind a tér, mind az időkoordináták kezdőpontját eltolja.

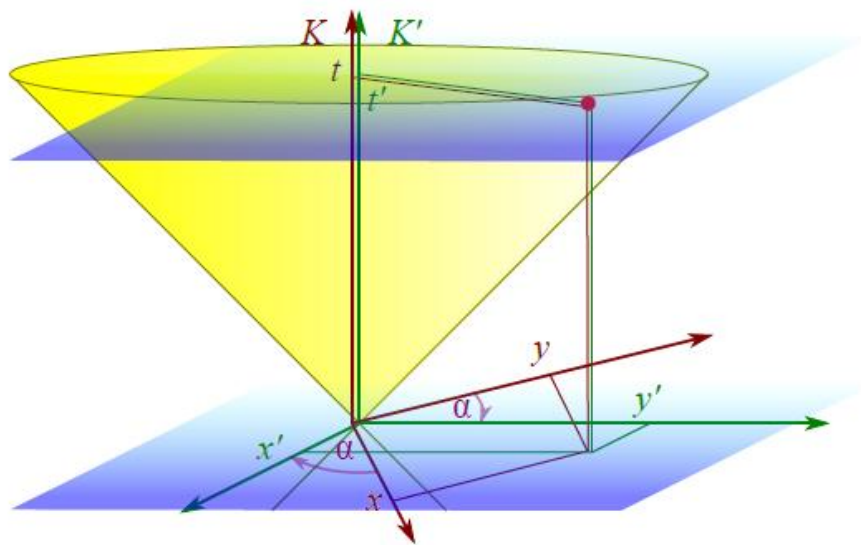
R2.6.3. (K szerinti) térbeli forgatás

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad z' = z, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad t' = t \quad (2.33)$$

A K' rendszer x és y tengelye α szöggel el van forgatva K tengelyeihez képest a közös z tengely körül. Ez a transzformáció is függ a K vonatkoztatási rendszertől, olyan értelemben, hogy egy K -hoz képest mozgó rendszer ugyanezt a téridő-transzformációt nem egyszerű forgatásnak érzékelné.

Ha összehasonlítjuk az eddigi szimmetria-transzformációkat ((2.31), (2.32) és (2.33) egyenletek) a megfelelő Galilei-féle szimmetria-transzformációval ((1.1), (1.2) és (1.3) egyenletek), láthatjuk, hogy a képletek teljesen azonosak, csak az ábrák mutatnak némi eltérést.

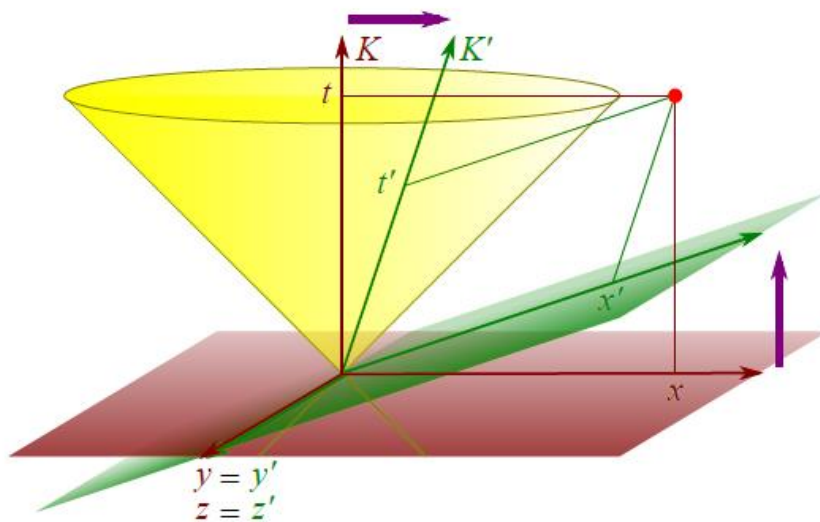
A következő szimmetria-transzformáció, mely egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerek koordinátái között teremt kapcsolatot, már a képletek szintjén is élesen eltér a klasszikus fizikában megszokottól.



2.14. ábra: A K koordináta-rendszer elforgatottja a K' koordináta-rendszer

R2.6.4. Speciális Lorentz-transzformáció

$$x' = \frac{vt+x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t+\frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (2.34)$$



2.15. ábra: Speciális Lorentz-transzformáció. A K' koordináta-rendszer mozog a K rendszerhez képest

A transzformáció képleteit már korábban megkaptuk (2.3. fejezet (2.15) képlete). Az itt felírt alak esetén a K' rendszer K -hoz képest $-v$ sebességgel halad az x -tengely mentén. Érdeemes a 2.15. ábrán tanulmányozni, hogy a speciális Lorentz-transzformáció geometriailag mennyire különbözik a speciális Galilei-transzformációtól.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a fent felsorolt transzformáció-típusok valóban szimmetriái a Minkowski-féle téridőnek, azaz egyenestartók, és megőrzik a Minkowski-féle pszeudoskaláris szorzatot.

Hasonlóan a Galilei-transzformációk esetéhez, most is érvényes az a megállapítás, hogy egy általános szimmetria-transzformáció nem feltétlenül sorolható be egyik alaptípusba sem, azonban mindig előállítható az alaptípusba tartozó transzformációk kompozíciójaként.

Ezzel befejeztük a Minkowski-féle téridő és a speciális relativitáselmélet geometriai alapjainak ismertetését.

R2.7. Relativisztikus jelenségek

Ebben a fejezetben olyan fontos, a klasszikus fizika szempontjából furcsa, tipikusan relativisztikus jelenségeket tárgyalunk, legtöbbször kvantitatíven, melyek egy részét már az alapvető tapasztalatok között (a 2.1. fejezetben) is megemlítettünk.

R2.7.1. Relativisztikus sebességösszeadás

A speciális Lorentz-transzformációnak a korábban (a 2.3. fejezetben) levezetett (2.15) alakját kétszer alkalmazva könnyen megkapható a relativisztikus sebességösszeadás formulája („egyirányú” sebességek esetén). Tegyük fel ugyanis, hogy a K' vonatkoztatási rendszer K -hoz képest v relatív sebességgel mozog x irányban, és a K'' vonatkoztatási rendszer pedig K' -höz képest u relatív sebességgel mozog x' irányban, ahol a vonatkoztatási rendszerek megfelelő $(x, x',$ illetve $x'')$ tengelyei „párhuzamosak”. Mik lesznek a K'' rendszerben azon esemény (x'', t'') koordinátái, amelyet a K' rendszerben az (x', t') , illetve a K rendszerben az (x, t) pontban észlelünk? A K' -ről K'' -re való áttérést leíró Lorentz-transzformáció alapján

$$t'' = \frac{t' - \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \quad x'' = \frac{-\gamma ct' + x'}{\sqrt{1-\gamma^2}} \quad (2.35)$$

ahol a $\gamma = \frac{u}{c}$ jelölést használtuk a dimenzió nélküli sebességre. Írjuk be ezekben a formulákba x' -t és t' -t (x, t) -vel kifejezve, most is a (2.15) formula alapján!

$$t'' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x + \beta\gamma t - \frac{\gamma}{c}x}{\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\beta^2)}} = \frac{(1+\beta\gamma)t - \frac{\beta+\gamma}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2-\gamma^2+\beta^2\gamma^2}} = \frac{t - \frac{\beta+\gamma}{(1+\beta\gamma)c}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta+\gamma}{1+\beta\gamma}\right)^2}} \quad (2.36)$$

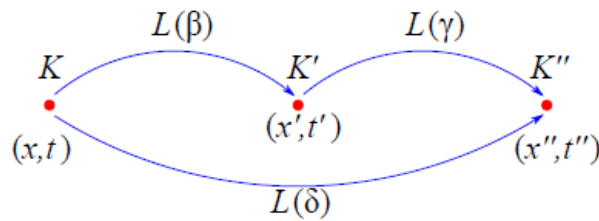
$$x'' = \frac{-\gamma ct + \beta\gamma x - \beta ct + x}{\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\beta^2)}} = \frac{-c(\beta+\gamma)t + (1+\beta\gamma)x}{\sqrt{1-\beta^2-\gamma^2+\beta^2\gamma^2}} = \frac{-c\frac{\beta+\gamma}{1+\beta\gamma}t + x}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta+\gamma}{1+\beta\gamma}\right)^2}}$$

(A $\beta = \frac{v}{c}$ mennyiség a megszokott módon a K' rendszernek a K -hoz képesti dimenzió nélküli relatív sebességét jelöli.)

Látható, hogy a kapott kifejezés pontosan olyan, mintha egyetlen $\delta = \frac{\beta+\gamma}{(1+\beta\gamma)}$ dimenziótlans sebesség-paraméterhez tartozó speciális Lorentz-transzformációt hajtottunk volna végre. Ez azt jelenti, hogy az ábrán szemléltetett módon a $\beta = \frac{v}{c}$, illetve $\gamma = \frac{u}{c}$ dimenziótlans sebesség-paraméterhez tartozó Lorentz-transzformációk egymásutánja helyettesíthető egy $\delta = \frac{\beta+\gamma}{(1+\beta\gamma)}$ paraméterhez tartozó transzformációval, azaz K'' a K rendszerhez képest

$$w = \delta c = \frac{v+u}{1+\frac{uv}{c^2}} \quad (2.37)$$

sebességgel halad.



2.16. ábra: Két speciális Lorentz-transzformációt egymás után végrehajtva újabb Lorentz-transzformációt kapunk

Könnyen látható, hogy a fényénél jóval kisebb sebességek esetén (azaz, ha $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$ és $\gamma = \frac{u}{c} \ll 1$), $\delta = \frac{\beta+\gamma}{1+\beta\gamma} \approx \beta + \gamma$ hiszen a nevezőben a $\beta\gamma$ másodrendűen kicsiny mennyiség elhanyagolható. Ekkor tehát jó közelítéssel a szokásos sebességösszeadási formulát kapjuk vissza, és azt is látjuk, hogy $\delta = \frac{\beta+\gamma}{1+\beta\gamma} < \beta + \gamma$, tehát a relativisztikus hatások figyelembevételével a sebességek összege kisebbnek adódik, mint a klasszikus összeg.

Másfelől, ha az összeadandó relatív sebességek egyike a fénysebességgel egyezik meg, azaz például $u = \pm c$, így $\gamma = \pm 1$, akkor $\delta = \frac{\beta \pm 1}{1 \pm \beta} = \pm 1$, tehát az összeg-sebesség is a fénysebességgel egyezik meg.

Látható, hogy a speciális Lorentz-transzformációból levezetett relativisztikus sebességösszeadási szabály teljes mértékben megfelel a 7^{rel} . kijelentésnek.

R2.7.2. Idődilatáció (iker-paradoxon)

A 4^{rel} . alapkijelentés értelmében az időtartam relatív, vonatkoztatási rendszertől függő fogalom, pontosabban két időszerűen szeparált esemény között eltelt idő abban a vonatkoztatási rendszerben a legrövidebb, amelyben a két esemény a térnek ugyanabban a pontjában ment végbe. (Feltételeztük, hogy ilyen vonatkoztatási rendszer létezik, azaz a két esemény által meghatározott vektor időszerű. Ellenkező esetben, azaz, ha az események térszerűen szeparáltak, mindig létezik olyan vonatkoztatási rendszer, melyben az események egyidejűek.)

Vegyünk föl a téridőben egy u négyessebességgel jellemzett K vonatkoztatási rendszert, melyet a továbbiakban „nyugvó” vonatkoztatási rendszernek nevezünk, valamint két eseményt, O -t és A -t a 2.17. ábrán látható módon úgy, hogy \overrightarrow{OA} jövőbe mutató időszerű vektor legyen. Legyen továbbá \vec{v} annak a K' vonatkoztatási rendszernek a négyessebessége, amelynek O az origója, és az O , illetve A esemény a térnek ugyanazon pontján megy végbe. A továbbiakban ezt a K' rendszert „mozgó” rendszernek nevezzük, ezzel utalva arra, hogy a K' rendszer „együtt mozog az O , illetve A eseménnyel”. Ekkor $\overrightarrow{OA} = ct'v$, ahol t' a két esemény között a mozgó rendszerben eltelt idő. Az O és A esemény a „nyugvó” K rendszerben nem azonos helyen megy végbe.

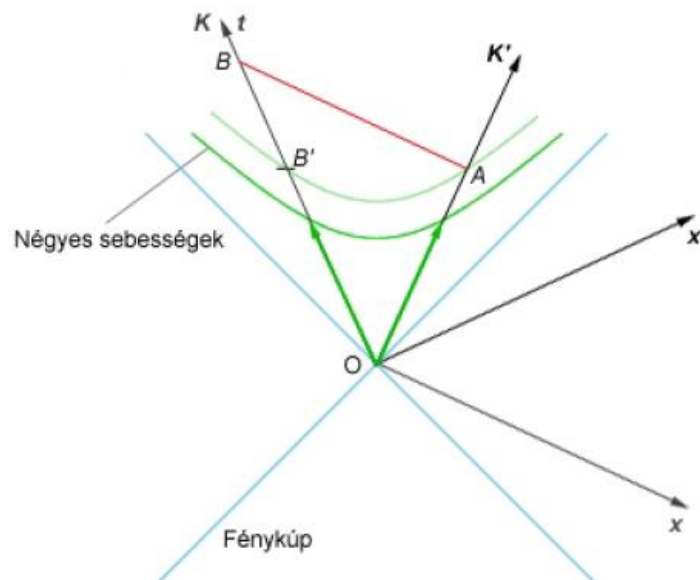
A K rendszerben az O és A esemény között mért idő $t = \frac{1}{c} \sqrt{-\langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB} \rangle}$, ahol a B esemény a 2.17. ábrán látható módon helyezkedik el; a K rendszerben O -val azonos helyen megy végbe és A -val egyidejű.

Az OB egyenesre berajzoltuk még azt a B' pontot is, melyre az $\overrightarrow{OB'}$ és \overrightarrow{OA} vektor hossza megegyezik. Látható, hogy B' megelőzi B -t az OB szakaszon, így $t' < t$.

A t idő pontos kiszámolásához alkalmazzuk a 2.5.2. fejezetben levezetett (2.25) egyenlőséget (\vec{v} helyére \vec{u} -t helyettesítve).

$$t' = -\frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{OA} \rangle}{c} = -t \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \quad (2.38)$$

A 2.5.3. fejezetben megmutattuk, hogy a $-\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ skaláris szorzat kapcsolatba hozható a K és K' rendszer v_r relatív sebességével; a (2.30) egyenlet szerint $-\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c^2}}}$.



2.17. ábra: Idődilatáció

Így végül azt kapjuk, hogy a v_r relatív sebességgel mozgó K' rendszerben a két esemény között eltelt idő

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}} \quad (2.39)$$

Látható, hogy az együtt mozgó rendszerből megfigyelt t' idő valóban minden esetben kisebb, mint a t „nyugalmi” idő, sőt, ha K' rendszer sebessége a fénysebességhez közelít, $t' \rightarrow 0$.

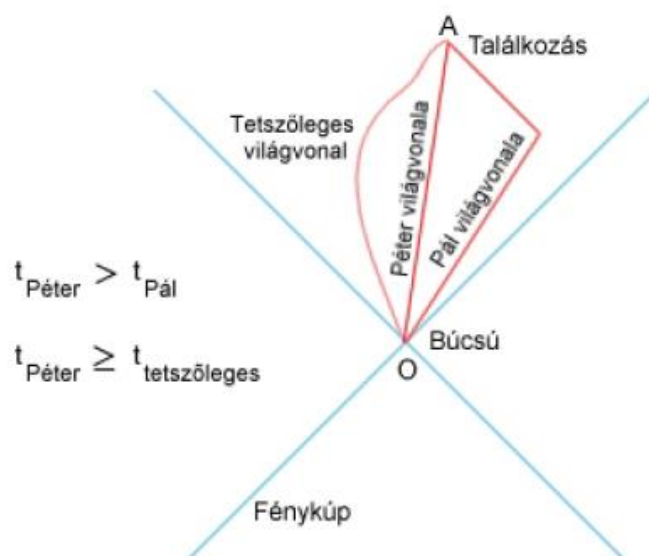
Ugyanezt az eredményt egyszerűbben, de a geometriai tartalom elvesztésével úgy is megkaphattuk volna, hogy a speciális Lorentz-transzformáció (2.15) képletébe (2.3. fejezet) $x' = 0$ -át helyettesítünk.

A kapott eredményt igen pongyolán és borzasztóan félrevezető módon szokás úgy is interpretálni, hogy „a mozgó rendszer órái lassabban járnak, mint az álló rendszer órái”.

Az idődilatació problémaköréhez kapcsolódik az úgynevezett *iker-paradoxon*, mely szerint egy ikerpár, Péter és Pál, egyik tagja, Pál elbúcsúzik Pétertől, és nagy sebességű űrhajón kozmikus utazást tesz, majd visszatér Péterhez. A találkozáskor az ikerpár melyik tagja lesz idősebb? Pontosabban, Péter és Pál különböző hosszúságúnak érzékeli-e a búcsúzásuk és az újbóli találkozásuk között eltelt időt?

Péter úgy érvelhet, hogy ő mindvégig „nyugalomban” volt, tehát az ő órái gyorsabban jártak, mint a hozzá képest mozgó testvérének, Pálnak az órái. Így elképzelhető, hogy a találkozáskor Pál, aki nagy sebességgel utazott, még fiatal ember, miközben a mindvégig nyugalomban levő Péter már ősz szakállú aggastyán. Pál ugyanezt az érvelést fordítva alkalmazhatja, hiszen ő – saját vonatkoztatási rendszerében – nyugalomban volt, és Péter mozgott hozzá képest. Eszerint Pál lenne az öregebb?

A látszólagos ellentmondást könnyen feloldhatjuk, ha elkészítjük az ikertestvérek életútjának tér-idő-diagramját. Mint ahogy a 2.18. ábráról azonnal észrevehető, a két ikertestvér világvonala nem azonos jellegű! Péter világvonala egyetlen egyenes szakasz, míg Pálé, aki utazásra indult, majd visszatért, két egyenes szakaszból álló tört vonal. (Az egyszerűség kedvéért úgy tekintettük, hogy Pál végtelen nagy gyorsulással indul el, illetve fordul vissza, azaz mindkét alkalommal nagyon rövid idő alatt veszi fel egyenletes utazó sebességét. Egyébként, véges gyorsulást feltételezve a tört vonal csúcsai le lennének kerekítve, ami a probléma kvalitatív jellegén semmit sem változtatna, csak a számolás válna nehezkesebbé.)



2.18. ábra: Iker-paradoxon

Látható, hogy Péter érvelése a helyes, azaz a találkozáskor ő lesz idősebb. Pál érvelése azért nem alkalmazható, mert a Pállal együtt mozgó rendszer nem inerciarendszer, így a fent kiszámolt „idődilatáció”-képlet nem érvényes benne.

A fenti probléma tovább általánosítható. Megmutatható, hogy Pál akárhogyan is mozog, az ő rendszerében (mely szükségszerűen nem inerciarendszer), az elválás és a találkozás között mindig rövidebb idő telik el, mint az inerciális mozgást végző Péter rendszerében. Így az „eltelt időt” analógiába állítva az időszerű görbék ívhosszával, azt a furcsa kijelentést tehetjük, hogy a Minkowski-geometriában két időszerűen szeparált pont között a „leghosszabb út az egyenes”. E furcsaság végső soron a Minkowski-féle skaláris szorzatban levő szokatlan negatív előjel következménye.

R2.7.3. Hosszkontrakció (pajta-paradoxon)

Az idődilatáció jelenségéhez hasonlóan az 5^{rel} . alapkijelentéssel kapcsolatos „hosszkontrakció” is klasszikus szemszögből nézve igen meglepő jelenség, mely sok paradoxon forrása. Ebben a fejezetben a relativisztikus hossz-méréssel kapcsolatos problémákat tisztázzuk.

Gondoljunk végig, hogy hogyan mérjük meg egy mozgó tárgy (mondjuk egy rúd) hosszát! A (mozgó) rúd helyzetéről készítünk egy „pillanatfelvételt”, azaz rögzítjük egy adott pillanatban a rúd (vég-) pontjainak a helyzetét, majd képezzük a rúd legszélső pontjaihoz tartozó térkoordináták különbségét. A klasszikus fizikában természetesen az így definiált hossz független a vonatkoztatási rendszer és a rúd relatív sebességétől, minthogy az egyidejűség fogalma a Galilei-geometriában megfigyelőtől független, abszolút jelentéssel bír.

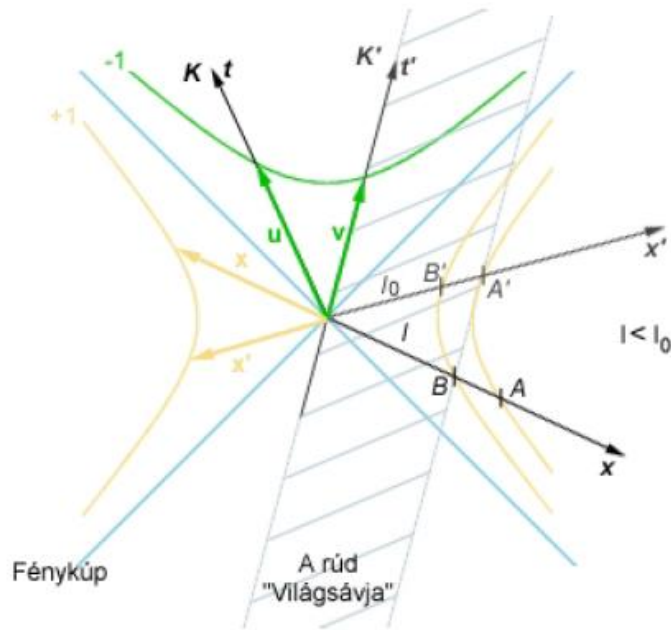
Azonban a relativisztikus fizikában, ahogy már korábban láttuk, az egyidejűség fogalma függ a vonatkoztatási rendszertől, így várhatóan a fenti „pillanatfelvételes” algoritmussal definiált hossz nagysága is függeni fog a vonatkoztatási rendszer és a rúd relatív sebességétől! Vizsgáljuk meg téridődiagram segítségével, hogy pontosan hogyan is mérjük meg a mozgó rúd hosszát különböző vonatkoztatási rendszerekben!

Vegyünk föl egy „nyugvó” K rendszert, melyet az \vec{u} négyessebesség jellemez, valamint egy K' „mozgó” vonatkoztatási rendszert, mely \vec{v} négyessebességgel, K -hoz képest $v_r = c \sqrt{1 - \frac{1}{(\vec{u}, \vec{v})^2}}$ relatív sebességgel mozog a rúddal együtt. (Felhasználtuk a (2.29) összefüggést.) Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy a két rendszer tértengelyei párhuzamosak, origójuk és a rúd kezdőpontja a $t = t' = 0$ időpillanatban egybeesik, valamint azt, hogy a koordináta-rendszerek relatív mozgása és a rúd is az x , illetve x' tengely irányába esik.

Ahogy a 2.19. ábráról látható, a rúd „létezését” a téridő-diagramon most nem világvonal, hanem „világsáv” jellemzi, melynek két szélét a rúd végpontjainak világvonala határolja. (Az egyszerűség kedvéért a rajzon most is csak a probléma szempontjából lényeges szerepet játszó kétdimenziós metszetét tüntettük föl a téridőnek.)

A 2.19. ábra alapján látható, hogy a rúddal együtt mozgó K' megfigyelő szerint a rúd a $t' = 0$ időpillanatban a téridő $\overline{OA'}$ szakaszán helyezkedik el, így K' szerint a rúd hossza $l_0 = |\overline{OA'}| = \sqrt{\langle \overline{OA'}, \overline{OA'} \rangle}$. Megállapodás szerint ezt az l_0 mennyiséget nevezzük a rúd nyugalmi hosszának, ezzel utalva arra, hogy a vizsgált K' rendszerben a rúd nyugalomban van. (Ügyeljünk a kissé szerencsétlen szóhasználatra; a rúd nyugalmi hosszát az (együtt) mozgó rendszerben kapjuk meg.)

Hasonlítsuk össze az l_0 nyugalmi hosszt a rúd K rendszerben mért l hosszával!



2.19. ábra: Rúd hosszának mérése, Lorentz-kontrakció

A $t = 0$ időpillanatban a rúd helyzetét az x tengely által a rúd világsávjából kimetszett \overline{OB} szakasz adja, így $l = |\overline{OB}|$. A 2.19. ábrán felvettük még azt a két hiperbolát, melyen (az O kezdőpontú) \overline{OB} -vel, illetve $\overline{OA'}$ -vel azonos hosszúságú vektorok végpontjai helyezkednek el. A hiperboláknak az x , illetve x' tengellyel alkotott metszéspontjának elhelyezkedéséből világosan látszik, hogy $l = |\overline{OB}| = |\overline{OB'}| < l_0 = |\overline{OA'}| = |\overline{OA}|$, azaz a K rendszerből megfigyelt mozgó rúd hossza (a mozgás irányában) kisebb, mint a rúd l_0 nyugalmi hossza. Ezt a jelenséget nevezzük *Lorentz-kontrakciónak*.

Határozzuk meg az l és l_0 hosszak közti kvantitatív kapcsolatot! Jelölje x , illetve x' a K , illetve K' vonatkoztatási rendszernek az x , illetve x' tengely irányába mutató (társzerű) egységvektorát. (Azaz $|x| = |x'| = 1$; $\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{x}' \rangle = 0$.) Először állítsuk elő az $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle$ skaláris szorzatot az $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ skaláris szorzat segítségével, ami a 2.5.3. alfejezet (2.29) és (2.30) eredményei alapján közvetlenül kapcsolatba hozható a két vonatkoztatási rendszer v_r relatív sebességével. Tekintsük a $\vec{v} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{x}$ általános felbontást. Az egyenletet négyzetre emelve, illetve \vec{u} -val, \vec{x} -el skalárisan szorozva egyszerűen látható, hogy $\alpha^2 - \beta^2 = 1$; $\alpha = -\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$; $\beta = \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle$, mely összefüggésekből egyszerűen következik, hogy

$$\langle \vec{v}, \vec{x} \rangle^2 = \beta^2 = \alpha^2 - 1 = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - 1 \quad (2.40)$$

Most már rátérhetünk az eredeti feladat megoldására. Látható, hogy

$\overline{OA'} = l_0 x' = \overline{OB} + \gamma \vec{v} = l\vec{x} + \gamma \vec{v}$, ahol $\gamma \in \mathbb{R}$ ismeretlen valós szám. Meghatározásához szorozzuk meg az egyenletet skalárisan \vec{v} -vel; $0 = l\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle - \gamma$, így

$$\gamma = l\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle \quad (2.41)$$

A γ -ra kapott értéket visszaírva $l_0 x' = l\vec{x} + l\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle \vec{v}$ adódik, amit skalárisan négyzetre emelve és felhasználva az $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle^2$ szorzatra levezetett (2.40) formulát az

$$l_0^2 = l^2 + 2l\gamma\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle - \gamma^2 = l^2(1 + \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle^2) = l^2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \quad (2.42)$$

összefüggéshez jutunk. Ide beírva a 2.5.3. alfejezetben kapott (2.30) összefüggést az adódik, hogy

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}} \quad (2.43)$$

Látható, hogy kis relatív sebességek esetén, azaz, ha $\frac{v_r}{c} \ll 1$, akkor $l \approx l_0$, tehát a Lorentz-kontrakció igen kismértékű. Azonban a $v_r \rightarrow c$ határesetben a (nagy sebességgel) mozgó tárgyaknak a mozgás irányába eső mérete a nyugvó koordináta-rendszerben tetszőlegesen kicsinynek is tűnhet.

Megjegyezzük, hogy hasonló, de általánosabb levezetésből az is megkapható, hogy a tárgyaknak a relatív mozgás irányára merőleges méretének számértékei nem változnak. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a Lorentz-kontrakció nem jelenti azt, hogy a rúd anyagának felépítésében bármiféle fizikai változás, zsugorodás menne végbe a sebesség hatására. Az idődilatáció jelenségéhez hasonlóan most is egyszerűen „érzéki csalódásról” van szó, melyet mi sem mutat jobban, mint az, hogy a különböző sebességgel mozgó inerciális megfigyelők a rúd „világsávjának” más és más irányú metszetéből kapják meg a rúd hosszát.

A Lorentz-kontrakció jelenségköréhez kapcsolódik a speciális relativitáselmélet egy másik paradoxonja, a *pajta-paradoxon*. Tegyük föl, hogy egy 12 méter hosszú póznát szeretnénk hosszában elhelyezni egy 10 méter hosszú pajtában úgy, hogy a pajtának mind a bejárata mind a szemközti oldalon levő kijárata egyszerre zárva legyen. Természetesen a feladat megoldása – a klasszikus fizika szerint – lehetetlen. Azonban a Lorentz-kontrakció jelensége kínál egy igen érdekes megoldást!

Mozgassuk a póznát hosszával párhuzamosan egyenes vonalban olyan nagy sebességgel, hogy a földi megfigyelő által érzékelt hossza csak 9 méter legyen. Miközben ilyen óriási sebességgel átvisszük a póznát a pajtán, lesz egy olyan (nagyon rövid) időtartam, amikor a pózna teljes egészében a pajta belsejében lesz, így egyszerre becsukhatjuk mindkét ajtót!

Próbáljuk azonban megmagyarázni a jelenséget a póznához rögzített rendszerből! Most a 12 méteres póznával szemben haladó pajta szenved Lorentz-kontrakciót, és még 10 méternél is rövidebbnek érzékeljük, tehát végképp nem lehetséges a kapuk egyidejű becsukásával a pózna bezárása! Ezzel azonban a kétféle leírás között látszólag ellentmondáshoz jutottunk, vagy nem?!

Természetesen nincs semmiféle ellentmondás a két leírás között, a paradoxon feloldásához azt kell észrevennünk, hogy a speciális relativitáselméletben az „egyidejűség” is relatív, azaz vonatkoztatási rendszertől függő fogalom.

Bár a földi megfigyelő úgy érzékeli, hogy a pajta két kapuját egyidőben csuktuk be, a mozgó póznához rögzített rendszerből úgy érzékeljük, hogy először a pajta kijárata volt becsukva egy rövid ideig, míg a rúd eleje oda nem ért, majd ezután később, miután a rúd vége már túljutott a bejáraton, becsukták egy rövid időre a pajta bejáratát. Tehát a póznával együtt mozgó rendszerben soha nem volt egyidőben zárva a két ajtó!

Ezzel a paradoxont feloldottuk.

R2.7.4. Energiaimpulzus négyesvektor; megmaradási tételek

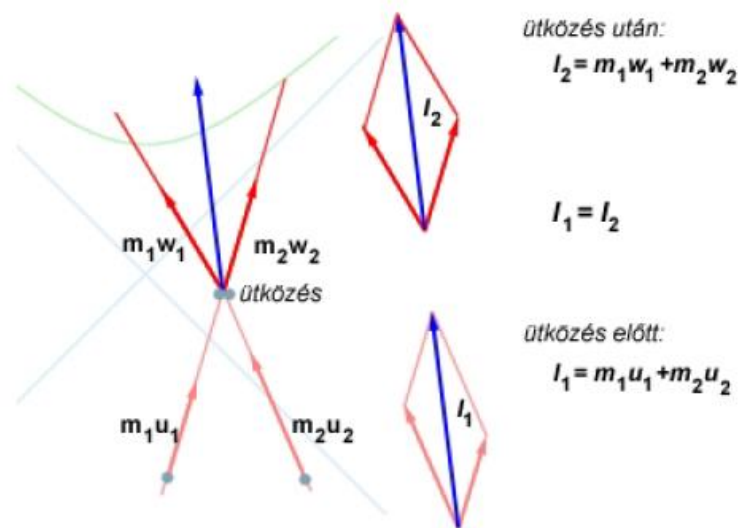
A klasszikus mechanika legáltalánosabb és legfontosabb törvényei közé tartozik az impulzus-, illetve energiamegmaradás törvénye, mely szerint zárt mechanikai rendszerben a rendszert alkotó részecskék impulzusának, illetve energiájának összege minden időpillanatban azonos. Látható azonban, hogy ezek az alapvető törvények nem ültethetők át közvetlenül a relativisztikus fizika keretei közé, ugyanis ott az egyidejűség relatív, vonatkoztatási rendszertől függő fogalom.

A speciális relativitáselméletben az említett két törvényt egyetlen abszolút, megfigyelőtől független geometriai tartalommal bíró összefüggés, az *energiaimpulzus-négyesvektor* (vagy egyszerűbben a *négyesimpulzus*) *megmaradásának törvénye* szintetizálja, melyet az inerciális megfigyelők két külön megmaradási törvényként, impulzus és energiamegmaradásként interpretálnak saját rendszerükben.

Definíció szerint egy m_0 (nyugalmi) tömegű, \vec{v} négyessebességgel jellemzett részecske *négyesimpulzusának* vagy *energiaimpulzus-vektorának* az $\vec{I} = m_0 \vec{v}$ (jövőbe mutató időszerű) négyesvektort nevezünk. Látható, hogy mind a részecske tömege, mind a részecske négyessebessége visszakapható \vec{I} energiaimpulzus-vektorból; $m_0 = \sqrt{-\langle \vec{I}, \vec{I} \rangle}$, és $\vec{v} = \frac{\vec{I}}{m_0}$.

A *négyesimpulzus-megmaradás* (vagy az *energiaimpulzus-vektor megmaradásának*) *törvénye* szerint zárt mechanikai rendszerben lezajló kölcsönhatás során a rendszer teljes négyesimpulzusa a kölcsönhatás előtt és után megegyezik.

Az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy konkrét ütközési folyamatot! Tegyük föl, hogy egy m_1 és egy m_2 (nyugalmi) tömegű részecske rugalmasan ütközik; az ütközés előtti, illetve utáni négyessebességeket jelölje \vec{u}_1, \vec{u}_2 , illetve \vec{w}_1, \vec{w}_2 a 2.20. ábrán látható módon. Így a kétrészecske-rendszernek az ütközés előtt, illetve után a négyesimpulzusa $\vec{I}_e = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$, illetve $\vec{I}_u = m_1 \vec{w}_1 + m_2 \vec{w}_2$, és a négyesimpulzus-megmaradásának törvénye szerint $\vec{I}_e = \vec{I}_u$.



2.20. ábra: Négyesimpulzus megmaradása rugalmas ütközés során

E törvény alakja igen szokatlan a klasszikus fizikában eddig megismert törvényekkel összehasonlítva, hiszen két négykomponensű vektormennyiség között állapít meg egyenlőséget. Korábban láttuk, hogy egy inerciális megfigyelő a négydimenziós téridőt „széthasítja” háromdimenziós térre és egydimenziós időre. Egy megfigyelő számára az energiaimpulzus-vektor is „automatikusan széthasad” egydimenziós időszerű és háromdimenziós térszerű részre, és a négyesimpulzus megmaradásának törvénye két független törvényként jelenik meg; az egyik az egydimenziós időszerű komponens állandóságát mondja ki, míg a másik a háromdimenziós térszerű komponens megmaradását fejezi ki. Látni fogjuk, hogy az energiaimpulzus-vektor időszerű részét a megfigyelő által észlelt klasszikus mozgási energiával, míg a háromdimenziós térszerű részt a klasszikus impulzussal hozhatjuk kapcsolatba, így a négyesimpulzus megmaradásának törvénye együtt hordozza, megfigyelőtől független módon a klasszikus energia és impulzusmegmaradás törvényét.

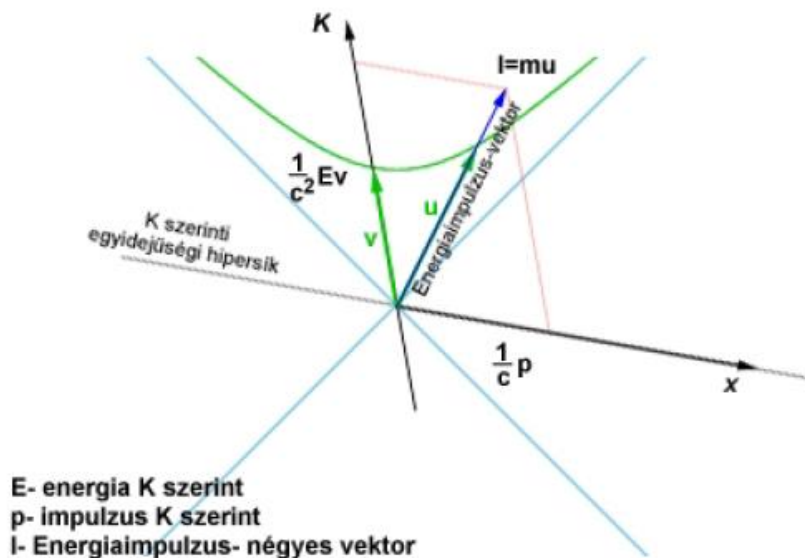
Vegyünk föl egy \vec{v} négyessebességgel jellemzett K inerciális vonatkoztatási rendszert a 2.21. ábrán látható módon! A 2.5.2. alfejezetben tárgyaltakhoz hasonlóan az \vec{I} négyesimpulzus-vektor egyértelműen fölírható

$$\vec{I} = \frac{1}{c^2} E \vec{v} + \frac{1}{c} \vec{p} \quad (2.44)$$

alakban, ahol c a fénysebesség, \vec{p} a \vec{v} -re ortogonális térszerű vektor ($\langle \vec{p}, \vec{v} \rangle = 0$), és

$$E = -c^2 \langle \vec{I}, \vec{v} \rangle, \quad \text{illetve} \quad \vec{p} = c \vec{I} + c \langle \vec{I}, \vec{v} \rangle \vec{v} \quad (2.45)$$

Megállapodás szerint a relativisztikus fizikában az E mennyiséget nevezzük a részecske K szerinti *energiájának*, a \vec{p} mennyiséget pedig a K vonatkoztatási rendszerben megfigyelt *impulzusnak*.



2.21. ábra: Energiaimpulzus-vektor széthasítása inerciális megfigyelő szerint

Hogy az elnevezés jogosságát igazoljuk, határozzuk meg az E energia és az impulzus $|\vec{p}|$ nagyságának alakját a részecske K -hoz képesti v_r relatív sebességével kifejezve, és vizsgáljuk meg a $\beta = \frac{v_r}{c} \rightarrow 0$ klasszikus határesetet! Legyen a vizsgált részecske (nyugalmi) tömege m_0 , négyessebessége \vec{u} , így $\vec{I} = m_0 \vec{u}$. A 2.5.3. alfejezetben levezetett (2.30) képlet alapján $-\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}}$, így

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}} \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v_r^2 \quad \text{és} \quad (2.46)$$

$$|\vec{p}|^2 = c^2 (\langle \vec{I}, \vec{I} \rangle + \langle \vec{I}, \vec{v} \rangle^2) = m_0 c^2 (-1 + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2) = \frac{m_0 v_r^2}{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}, \quad \text{így} \quad (2.47)$$

$$|\vec{p}| = \frac{m_0 v_r}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}} \approx m_0 v_r \left(1 + \frac{v_r^2}{2c^2}\right) \approx m v_r \quad (2.48)$$

(A $\beta \rightarrow 0$ közelítésnél felhasználtuk, hogy $(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2$, ha $\beta \ll 1$.)

Igen érdekes eredményt kaptunk! Látható, hogy $\beta \ll 1$ esetén, azaz a klasszikus határesetben a részecske E energiája két tagra bontható szét; az első, sebességtől független, csupán a részecske (nyugalmi) tömegétől függő $m_0 c^2$ tagot a részecske *nyugalmi energiájának* nevezzük, míg a második $\frac{1}{2} m_0 v_r^2$ tag megegyezik a klasszikus fizikában használt *mozgási energia* kifejezésével. A klasszikus határesetben az impulzus nagyságára kapott formula is azonos a klasszikus fizikában szokásosan használt képlettel. Ezzel igazoltuk, hogy valóban jogos az $\vec{I} = m_0 \vec{u}$ vektort energiaimpulzus-vektornak hívni, minthogy a megfigyelőhöz képest kis relatív sebesség esetén térszerű, illetve időszerű komponense a klasszikus impulzussal, illetve mozgási energiával hozható kapcsolatba.

Megjegyezzük, hogy a $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ fénysebesség hatalmas számértéke miatt az $m_0 c^2$ nyugalmi energia még kis tömegű testek esetén is nagyon nagy érték, sok nagyságrenddel nagyobb, mint a hétköznapi körülmények között elérhető (klasszikus) mozgási energia értékek.

Bizonyos képletek egyszerűsítése, jobb megjegyezhetősége érdekében az

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}} \quad (2.49)$$

mennyiséget a részecske *relativisztikus tömegének* szokás nevezni. Látható, hogy a relativisztikus tömeg függ a részecske relatív sebességétől, és ha a részecske sebessége a fénysebességhez közelít (azaz $v_r \rightarrow c$), akkor a relativisztikus tömeg minden határon túl nő. A relativisztikus tömeg segítségével az energiára, illetve impulzus nagyságra kapott képletek formája még egyszerűbb;

$$E = mc^2, \quad |\vec{p}| = mv_r \quad (2.50)$$

Hangsúlyozzuk azonban, hogy az m relativisztikus tömegnek, szemben az m_0 nyugalmi tömeggel, nincs közvetlen, abszolút tartalommal bíró fizikai jelentése.

Az energiaimpulzus fenti széthasítását alkalmazva láthatjuk, hogy egy inerciális megfigyelő számára az energiaimpulzus-vektor megmaradásának törvénye egyszerre hordozza a klasszikus fizikából jól ismert energiamegmaradás, illetve impulzusmegmaradás törvényét. Például a fejezet elején tárgyalt kétrészecske-ütközésre felírt $m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{w}_1 + m_2 \vec{w}_2$ négyesimpulzus megmaradási törvényt a \vec{v} négyessebességgel mozgó K megfigyelő az

$$\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}} = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{w_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{w_2^2}{c^2}}} \quad (2.51)$$

időszerű, és

$$\frac{m_1 u_1}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 u_2}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}} = \frac{m_1 w_1}{\sqrt{1 - \frac{w_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 w_2}{\sqrt{1 - \frac{w_2^2}{c^2}}} \quad (2.52)$$

térszerű komponensre bontja, ahol u_1, u_2, w_1 , illetve w_2 a K rendszerben a részecskéknek az ütközés előtti, illetve utáni ($\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1$, illetve \vec{w}_2 négyessebességekhez tartozó) relatív sebessége. (A térszerű rész felírásakor csak a lényeges, az ütközés irányába eső komponenszt írtuk föl.)

Alkalmazva a kis relatív sebességek, azaz $\beta \ll 1$ esetén érvényes $(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2$ közelítést, a négyesimpulzus-megmaradási törvény időszerű, illetve térszerű komponenséből a klasszikus energia-, illetve impulzusmegmaradás törvényét kapjuk:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2, \quad \text{illetve} \quad (2.53)$$

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2 \quad (2.54)$$

(Az első egyenletben a nyugalmi energiák kiejtik egymást.)

Végezetül ismertetünk még egy igen hasznos összefüggést, mely egy részecske tömege, (relativisztikus) energiája és impulzusa között teremt kapcsolatot. A már megismert $\vec{I} = m_o \vec{u} = \frac{1}{c^2} E \vec{v} + \frac{1}{c} \vec{p}$ összefüggést négyzetre emelve és rendezve adódik, hogy

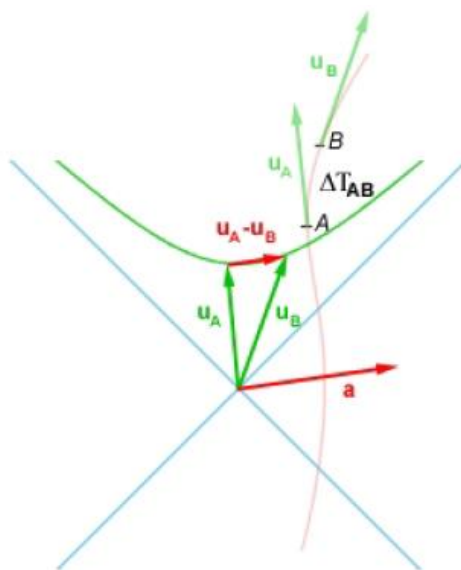
$$m_o c^4 = E^2 - |\vec{p}|^2 c^2 \quad (2.55)$$

Ezen összefüggés segítségével egy részecske m_o tömege, valamely vonatkoztatási rendszerben megfigyelt E relativisztikus energiája és $|\vec{p}|$ impulzusa közül bármelyik adat kiszámolható a másik kettő ismeretében.

R2.7.5. Egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás; Relativisztikus tömegnövekedés

Mindeddig relativisztikus kinematikával, azaz a testek mozgásának különböző vonatkoztatási rendszerekben való leírásával foglalkoztunk, és nem törődtünk a mozgás létrejöttének dinamikai okával. Ebben a fejezetben kis kitérőt teszünk a relativisztikus dinamika témakörébe, felírjuk a relativisztikus Newton-egyenletet abszolút módon, négyes mennyiségek segítségével, majd megvizsgáljuk, hogy a „legegyszerűbb”, nem inerciális mozgás, az egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás dinamikai egyenlete milyen formában jelenik meg egy inerciális megfigyelő számára.

Először nézzük meg azt, hogy megfigyelőtől független, abszolút módon hogyan jellemezhetjük egy test gyorsulását! Tekintsünk a 2.22. ábrán látható nem inerciális mozgást végző m_o tömegű test világvonalán két közeli pontot, A -t és B -t. Legyen a test négyessebbsége, valamint négyesimpulzusa az A , illetve B pontban \vec{u}_A , illetve \vec{u}_B valamint $\vec{I}_A = m_o \vec{u}_A$, illetve $\vec{I}_B = m_o \vec{u}_B$, és legyen $\Delta\tau_{AB}$ az A és B események között eltelt sajátidő, melyet a $c^2 \Delta\tau_{AB}^2 = |\langle \overline{AB}, \overline{AB} \rangle|^2$ formula definiál. (Látható, hogy közeli A , B pontok esetén a sajátidő éppen a testtel együtt \vec{u}_A sebességgel mozgó megfigyelő szerint eltelt idő.)



2.22. ábra: A négyesgyorsulás

A vizsgált test a négyesgyorsulását a klasszikus fizikában használt formulával analóg módon definiáljuk az

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta \tau} = \frac{\vec{u}_B - \vec{u}_A}{\Delta \tau_{AB}} \quad (2.56)$$

képlettel, ahol feltesszük, hogy az A, B pontok igen közel helyezkednek el egymáshoz a részecske világvonalán.

Megmutatható, hogy a négyesgyorsulás mindig (Minkowski-értelemben) ortogonális a négyessebességre (azaz $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = 0$), ahogy a 2.22. ábrán látható. (E tény végső soron abból következik, hogy a négyessebességek nagysága definíció szerint egységnyi állandó.) Hangsúlyozzuk, hogy a négyesgyorsulás, hasonlóan a négyessebességhez vagy a négyesimpulzushoz, abszolút, megfigyelőtől független fogalom, mely a világvonalak görbültségét méri igen természetes, geometriai módon.

Ezután – klasszikus fizikai analógiára támaszkodva – könnyen felírhatjuk vonatkoztatási rendszertől független módon a relativisztikus dinamika alaptörvényét, mely a négyeserő és a négyesgyorsulás vektora között állapít meg összefüggést:

$$\vec{F}(\vec{u}) = m_o \vec{a} \quad \text{vagy} \quad \vec{F}(\vec{u}) = \frac{\Delta \vec{l}}{\Delta \tau} \quad (2.57)$$

(Az $\vec{F}(\vec{u})$ négyeserő-vektor argumentumába írt u négyessebességgel utaltunk arra a tényre, hogy a relativitáselméletben a négyeserő mindig függ a négyessebességtől, csak így biztosítható ugyanis, hogy az $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = \frac{1}{m_o} \langle \vec{F}(\vec{u}), \vec{u} \rangle = 0$ ortogonalitási feltétel teljesüljön.)

Természetesen a fenti, absztrakt formában felírt mozgásegyenlet akkor telik meg konkrét tartalommal, akkor használható egy részecske világvonalának meghatározásához, ha ismerjük az $\vec{F}(\vec{u})$ erőfüggvény konkrét alakját.

Térjünk át most egy konkrét mozgástípus, az egyenesvonalú, egyenletesen gyorsuló mozgás vizsgálatára! Pontosan milyen mozgást kell értenünk a fenti fogalmon a speciális relativitáselméletben? A Newton-egyenlet abszolút formában felírt alakja sugallja a kézenfekvő választ; egy mozgást akkor nevezünk *egyenletesen gyorsulónak*, ha a négyesgyorsulás $a = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$ nagysága (és így a négyes erő $F = \sqrt{\langle \vec{F}, \vec{F} \rangle}$ nagysága is) állandó (a világvonal minden pontjában). Könnyen látható az is, hogy az *egyenesvonalúság* feltétele pedig azt jelenti, hogy a mozgás világvonala a téridőnek egy kétdimenziós (egy idő- és egy térdimenzióval rendelkező) síkjában fekszik, ekkor ugyanis vannak olyan inerciális megfigyelők, melyek terében a mozgás valóban egydimenziós.

Az egyenesvonalú, egyenletesen gyorsuló mozgásra adott definíció igen elegáns, hiszen független bármiféle vonatkoztatási rendszertől, és fizikailag azt fejezi ki, hogy a testet egyenes mentén állandó nagyságú erő gyorsítja. Vajon hogyan érzékeli egy inerciális megfigyelő ezt az állandó nagyságú erő hatására kialakuló mozgást?

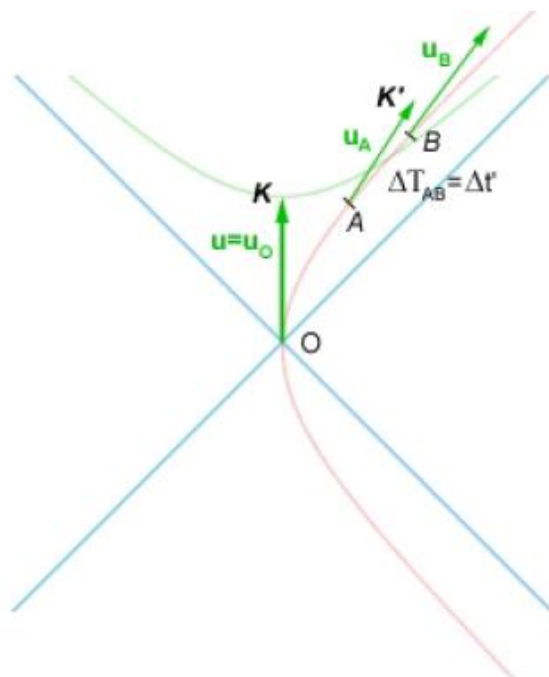
Írjuk le a 2.23. ábrán látható egyenesvonalú, egyenletes $a = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$ gyorsulással mozgó m_o nyugalmi tömegű test világvonalát abban a K vonatkoztatási rendszerben, melynek origója a világvonal adott O pontja, és \vec{v} négyessebessége megegyezik a világvonal O -pontbeli \vec{u}_o

négyessebességével, azaz $\vec{v} = \vec{u}_0$. Vegyünk föl a világvonalon még két pontot, A-t, illetve B-t O -tól távolabb, de egymáshoz közel, és legyen a részecske négyessebessége, valamint K -hoz képesti relatív sebessége ezekben a pontokban \vec{u}_A , illetve \vec{u}_B , valamint u_A , illetve u_B .

(A 2.5.3. fejezetben megismert (2.29) képlet szerint $u_A = c \sqrt{1 - \frac{1}{\langle \vec{v}, \vec{u}_A \rangle^2}}$ és $u_B = c \sqrt{1 - \frac{1}{\langle \vec{v}, \vec{u}_B \rangle^2}}$.) Legyen továbbá K' az a vonatkoztatási rendszer, melynek origója A, és négyessebessége \vec{u}_A . Ha K' -ben a részecske $\Delta t'$ idő alatt ér A-ból B-be, akkor a B pontban a K' vonatkoztatási rendszerben mért relatív sebessége (nagyon jó közelítéssel) $u'_B = a \Delta t'$, hiszen kis sebességek esetén alkalmazhatók a klasszikus fizika képletei. A 2.7.1. fejezetben megismert (2.37) relativisztikus sebességösszeadási képlet segítségével könnyen kifejezhetjük az u_B sebességet, mint az u_A és az $u'_B = a \Delta t'$ relatív sebességek (relativisztikus) összegét:

$$u_B = \frac{u_A + u'_B}{1 + \frac{u_A u'_B}{c^2}} = \frac{u_A + a \Delta t'}{1 + \frac{u_A a \Delta t'}{c^2}} \approx (u_A + a \Delta t') \left(1 - \frac{u_A a}{c^2} \Delta t'\right) \approx u_A + a \Delta t' \left(1 - \frac{u_A^2}{c^2}\right) \quad (2.58)$$

(A közelítésnél felhasználtuk, hogy $\varepsilon \ll 1$ esetén $(1 + \varepsilon)^2 \approx 1 - \varepsilon$, és csak a $\Delta t'$ -ben elsőrendű tagokat vettük figyelembe.)



2.23. ábra: Egyenesvonalú, egyenletesen gyorsuló mozgás

Ahhoz, hogy megkapjuk az A pontban a testnek a K vonatkoztatási rendszerben megfigyelt gyorsulását, már csak a 2.7.2. alfejezetben levezetett (2.39) idődilataációs formulát kell figyelembe vennünk, mely szerint a K rendszerben az A és B esemény között eltelt Δt időre

$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{u_A^2}{c^2}} \Delta t$ érvényes. Így a K -ban megfigyelt a_A gyorsulás

$$a_A = \frac{u_B - u_A}{\Delta t} = \frac{u_A + a \Delta t' \left(1 - \frac{u_A^2}{c^2}\right) - u_A}{\Delta t} = a \left(1 - \frac{u_A^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.59)$$

Felhasználva a relativisztikus dinamika alaptörvényéből következő $F = m_o a$ összefüggést, ahol F , illetve a az \vec{F} négyes erőnek, illetve az a négyesgyorsulásnak a nagysága ($F = \sqrt{\langle \vec{F}, \vec{F} \rangle}$, $a = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$), a következő összefüggést kapjuk a K megfigyelő által észlelt F erő, a_A gyorsulás és u_A sebesség között:

$$F = \frac{m_o}{\left(1 - \frac{u_A^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} a_A \quad (2.60)$$

Ez egyenesvonalú mozgás esetén a dinamika alaptörvényének a K megfigyelő által észlelt alakja.

Látható, hogy az állandó F nagyságú erővel gyorsított test nem állandó $a_A = \frac{F}{m_o}$ gyorsulással mozog a K megfigyelő szerint, hanem úgy viselkedik, mintha a test tömege az u pillanatnyi (relatív) sebességgel az $m_o \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$ törvény szerint nőne. Ezt a jelenséget hívjuk *relativisztikus tömegnövekedésnek*. Látható, hogy ha a test sebessége a fénysebességhez közelít, azaz $u \rightarrow c$, akkor a test látszólag megnövekedett, mozgási tömege a végtelenhez tart, azaz $m_o \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \rightarrow \infty$, így pozitív ($m_o > 0$) nyugalmi tömeggel rendelkező testet véges nagyságú erővel véges idő alatt lehetetlen fénysebességre vagy annál nagyobb sebességre gyorsítani. Ezen eredmény teljességgel összhangban van kísérleti tapasztalatainkkal és a 8^{rel.} alapkijelentéssel.

Megjegyezzük, hogy hasonló látszólagos „tömegnövekedés” figyelhető meg akkor is, ha a testet nem pillanatnyi sebességével párhuzamosan, hanem arra merőlegesen próbáljuk gyorsítani, ekkor azonban a látszólagos tömeg másmilyen függvény szerint (lassabban) nő az u relatív sebességgel.

Végül hangsúlyozzuk, hogy – mint ahogy azt már a relativitáselmélet sok „furcsa” jelenségével kapcsolatban eddig is tapasztaltuk – a most tárgyalt relativisztikus tömegnövekedés sem tényleges, fizikai tömegváltozást takar, hanem inkább az inerciális megfigyelők egy újabb „ügyetlen érzéki csalódását” juttatja kifejezésre. A vonatkoztatási rendszertől független, négyesvektorok között kapcsolatot teremtő abszolút Newton-egyenletben a részecskék nyugalmi tömege szerepel.

R2.7.6. Fotonok. Relativisztikus Doppler-effektus

A klasszikus fizika sok fénnel kapcsolatos jelensége, különösen a fényelektromos hatás csak a fény részecske-természetével, a foton-képpel magyarázható meg kielégítő módon. Eszerint a f frekvenciájú fény $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ -os, fénysebességgel haladó részecskékből, ún. fotonokból áll, melyek $E = hf$ energiával és $p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c}$ nagyságú impulzussal rendelkeznek, ahol $h \approx 6,63 \cdot 10^{-34} Js$ a Planck-állandó. Meglepő módon ez a foton-kép teljesen természetesen összeegyeztethető a speciális relativitáselmélettel.

A 2.7.4. alfejezetben láttuk, hogy anyagi részecskék pillanatnyi mozgásállapotának teljes, megfigyelőtől független jellemzését nyújtja az $\vec{I} = m_o \vec{u}$ négyesimpulzus vagy energiaimpulzus-négyesvektor, mely az \vec{u} négyessebességgel párhuzamos, jövőbe mutató időszerű vektor. Láttuk, hogy a részecske m_o nyugalmi tömege, valamint egy \vec{v} négyessebességgel jellemzett K megfigyelő szerint a részecske E energiája, illetve impulzusának $p = |\vec{p}|$ nagysága az

$$m_o = \sqrt{|\langle \vec{I}, \vec{I} \rangle|}, \quad E = c^2 |\langle \vec{I}, \vec{v} \rangle|, \quad \text{illetve} \quad p = c \sqrt{|\langle \vec{I}, \vec{I} \rangle + \langle \vec{I}, \vec{v} \rangle^2} \quad (2.61)$$

képletekkel fejezhető ki.

Kézenfekvő a gondolat, hogy a fotonok, fényrészecskék mozgásállapotának abszolút módon való leírására használjunk fényszerű energiaimpulzusvektorokat, hiszen a fotonok világvonalai fényszerű görbék. Ha \vec{I} fényszerű, akkor $\langle \vec{I}, \vec{I} \rangle = 0$, így a következő kifejezéseket kapjuk a foton m_o nyugalmi tömegére, illetve a K rendszerben megfigyelt energiájára, impulzusára:

$$m_o = 0, \quad E = c^2 |\langle \vec{I}, \vec{v} \rangle|, \quad p = c |\langle \vec{I}, \vec{v} \rangle| \quad (2.62)$$

A fényrészecske nyugalmi tömegére kapott zérus érték teljesen összhangban van az előző, 2.7.5. alfejezet azon megállapításával, mely szerint nem nulla nyugalmi tömeggel rendelkező részecskék nem gyorsíthatók föl fénysebességre. Az energiára és impulzusra kapott kifejezések pedig a

$$v = \frac{c^2}{h} |\langle \vec{I}, \vec{v} \rangle| \quad (2.63)$$

megfeleltetés elfogadásával hozhatók összhangba a klasszikus formulákkal.

Összefoglalva, a fotonok energiaimpulzus-vektorának a Minkowski-értelemben vett nagysága mindig nulla, ami a nyugalmi tömeg zérus voltára utal, ugyanakkor a fényszerű vektor „nyújtottsága” hordozza a fényrészecske frekvenciájára (energiájára, impulzusára) vonatkozó információt. Azonban a foton frekvenciája – ellentétben az anyagi részecskéket jellemző nyugalmi tömeggel – nem abszolút jellemzője a fényrészecskének, hanem erősen függ annak a vonatkoztatási rendszernek a \vec{v} sebességétől, amelyben a fotont megfigyeljük! A következőkben ezt a függést vizsgáljuk meg részletesebben.

Képzeld el, hogy egy vasúti sín mellett felvillantott lámpa fényét a (földhöz képest) v_r relatív sebességgel távolodó vonatból figyeljük meg. Vajon milyen kapcsolat létesíthető a földön állva észlelt f , illetve a vonatból észlelt f' frekvencia között? (Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy a fényjel és a vonat haladásának iránya egy egyenesbe esik.)

A 2.24. ábrán látható a földhöz rögzített, \vec{u} négyessebességű K vonatkoztatási rendszer, a vonathoz rögzített \vec{v} négyessebességű K' rendszer, valamint a fényjel világvonala. A foton \vec{I} energiaimpulzus-négyesvektorát fölbontva a K , illetve K' rendszerben, azt kapjuk, hogy

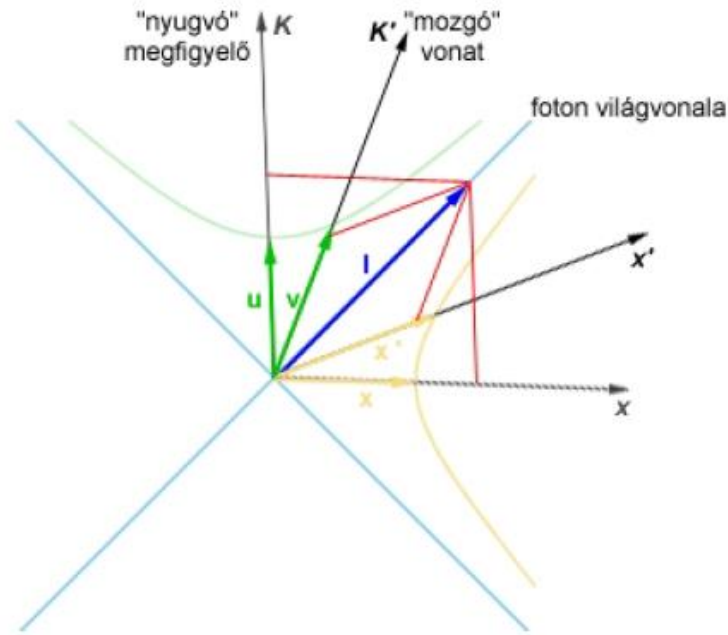
$$\vec{I} = \frac{1}{c^2} E \vec{u} + \frac{1}{c} p \vec{x} = \frac{hf}{c^2} \vec{u} + \frac{hf}{c^2} \vec{x}, \quad \text{illetve} \quad (2.64)$$

$$\vec{I} = \frac{1}{c^2} E' \vec{v} + \frac{1}{c} p' \vec{x}' = \frac{hf'}{c^2} \vec{v} + \frac{hf'}{c^2} \vec{x}' \quad \text{azaz} \quad (2.65)$$

$$f(\vec{u} + \vec{x}) = f'(\vec{v} + \vec{x}') \quad (2.66)$$

ahol x , illetve x' a K , illetve K' rendszerben a fényjel irányába mutató egységvektor, melyre $\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{x}' \rangle = 0$. (E, p , illetve E', p' a részecske K , illetve K' rendszerben mért energiáját és impulzus nagyságát jelöli.)

A kapott egyenletet szorozzuk meg skalárisan \vec{v} -vel, és használjuk ki, hogy $\langle \vec{x}', \vec{v} \rangle = 0$, $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - 1}$ a 2.7.3. alfejezetben szereplő (2.40) egyenlet



2.24. ábra: Relativisztikus Doppler-effektus; foton frekvenciája különböző vonatkoztatási rendszerekben

alapján, és $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c^2}}}$ a 2.5.3. alfejezet (2.30) eredménye szerint, ahol v_r a mozgó vonat (K') sebessége a K rendszerhez képest. Azt kapjuk, hogy

$$f = \left(\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c^2}}} + \frac{\frac{v_r}{c}}{\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c^2}}} \right) = -f', \quad \text{azaz} \quad (2.67)$$

$$f' = f \sqrt{\frac{c-v_r}{c+v_r}} \quad (2.68)$$

Tehát ha a K' vonat a fényjel terjedésével azonos irányban távolodik, azaz $v_r > 0$ (ahogy azt a számolásnál feltételeztük), akkor a jel frekvenciája csökken („vöröseltolódás”), míg ha K' ellenkező irányban, a fényjellel szemben mozog, azaz $v_r < 0$, akkor a jel frekvenciája nő („ibolyaeltolódás”), ahogy az a klasszikus Doppler-effektus esetén is történik. Azonban – ellentétben a klasszikus, hanghullámokra vonatkozó eredménnyel – a képletben nem szerepel sem a fényforrás, sem a „hullámokat hordozó közeg” sebessége.

Megjegyezzük, hogy a fentihez hasonló Doppler-féle frekvencia eltolódás akkor is fellép, ha a fényjel és a K' megfigyelő sebessége nem esik egy egyenesbe, azonban ekkor az eltolódás függ a két sebesség közti szögtől is.

R2.7.7. Tömeg-energia ekvivalencia, tömegdefektus

A klasszikus fizikában megszoktuk, hogy a legkülönbözőbb mechanikai folyamatokra is általában három független megmaradási törvény teljesül, a tömeg-, az energia és az impulzusmegmaradás törvénye. E három törvény közül kettő, a tömeg-(vagy anyag-)megmaradás valamint az impulzusmegmaradás korlátozás nélkül érvényes bármely folyamatra, azonban a mechanikai energiamegmaradás törvénye csak disszipáció (súrlódás, hőveszteség) nélküli („tökéletesen rugalmas”) folyamatokra áll fenn. A speciális relativitáselmélet keretein belül lehetővé válik, hogy – a nyugalmi energia bevezetésével, illetve az elektromágneses sugárzást leíró fotonkép segítségével – a mechanikai energiamegmaradás törvényét kiterjesszük hőveszteséggel járó folyamatokra is. Azonban, ahogy azt rövidesen konkrét példákon keresztül is látni fogjuk, ez a kiterjesztés nem ad minőségileg új megmaradási törvényt, hanem azonos értékű a már ismert tömegmegmaradással. E gondolatot tovább fűzve arra a meglepő következtetésre jutunk, hogy a speciális relativitáselméletben a szóban forgó két megmaradási törvényben szereplő fizikai mennyiség, az m tömeg és az E energia nem független egymástól, ugyanazt a fizikai tartalmat hordozza, és köztük a 2.7.4. fejezetben már felírt híres

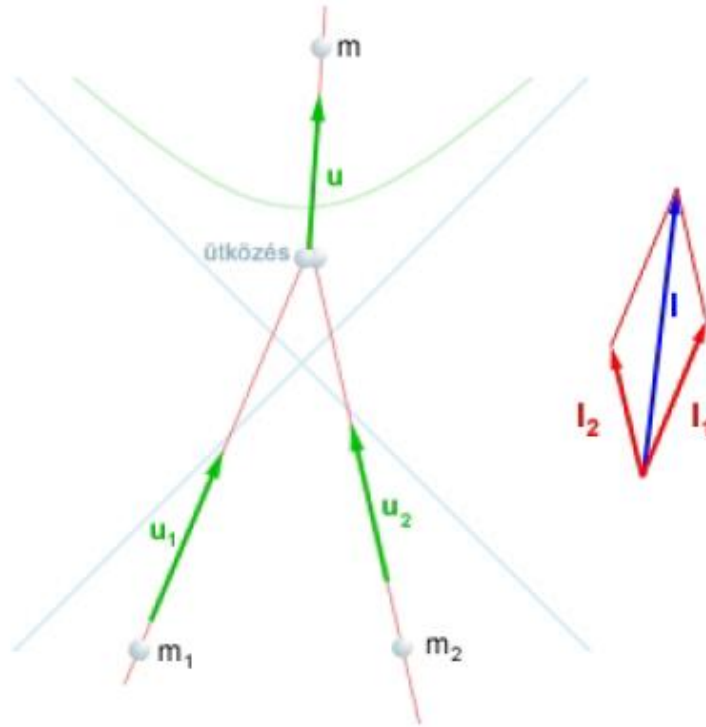
$$E = mc^2 \quad (2.69)$$

összefüggés érvényes, ahol c a fénysebesség. Ezt az eredményt röviden úgy fejezzük ki, hogy a relativitáselméletben *a tömeg és az energia ekvivalens*. Ha valahol tömeget észlelünk, ott energia is fellelhető, és fordítva, ha valahol energiát észlelünk, ott (tehetetlenséggel bíró) tömeg is található, tehát a klasszikus fizikában a két külön fizikai tartalommal bíró fogalom a relativitáselméletben összeolvad.

E furcsa jelenség demonstrálására vizsgáljunk meg néhány példát! Tekintsünk először egy klasszikusan teljesen rugalmatlan ütközést! Tegyük föl, hogy a 2.25. ábrán látható módon az \vec{u}_1 négyessebességű, m_1 tömegű és az \vec{u}_2 négyessebességű, m_2 tömegű részecske tökéletesen rugalmatlanul ütközik, és egymással összetapadva egyetlen m tömegű, \vec{u} négyessebességű részecskeként folytatja útját. A klasszikus szemléletmód szerint $m = m_1 + m_2$ (a tömegmegmaradás törvénye értelmében), valamint fennáll az ütközésre az impulzusmegmaradás törvénye is, azonban a mechanikai energiamegmaradás törvénye már nem érvényes, hiszen a részecskék ütközés előtti kinetikus energiájának egy része hővé alakul, és az ütközésben részt vevő testek hőmérsékletének növelésére fordítódik (illetve hősugárzás formájában szétsugárzódik; ettől most az egyszerűség kedvéért tekintsünk el).

Próbáljuk meg leírni az ütközést a speciális relativitáselmélet törvényeinek segítségével! Egyetlen megmaradási törvényt írhatunk föl a folyamatra, az energiainpulzus-négyesvektor megmaradást, mely szerint $\vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \vec{I}$, ahol $\vec{I}_1 = m_1\vec{u}_1$, $\vec{I}_2 = m_2\vec{u}_2$, illetve $\vec{I} = m\vec{u}$ az ütközés előtti, illetve utáni négyesimpulzus. Így azonban azt a meglepő eredményt kapjuk,

hogy az ütközés utáni részecske tömege $m = \sqrt{-\langle \vec{I}_1 + \vec{I}_2, \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \rangle} = \sqrt{-\langle m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \rangle} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle} > m_1 + m_2$ nagyobb, mint az ütközés előtti tömegek összege, hiszen $-\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle > 1$.



2.25. ábra: Tökéletesen rugalmatlan ütközés

Vizsgáljuk meg, hogy a fényénél jóval kisebb relatív sebességek esetén hogyan értelmezhető ez a „tömegváltozás” a klasszikus fogalmak segítségével!

A 2.7.4 fejezetben megismert módon a \vec{v} négyessebességgel mozgó K inerciális megfigyelő szerint az $\vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \vec{I}$ négyesimpulzus-megmaradási törvény időszerű komponense az

$$\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}} = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (2.70)$$

egyenletre vezet, ami, feltételezve, hogy az $u_i = c \sqrt{1 - \frac{1}{\langle \vec{u}_i, \vec{v} \rangle}}$ (ahol $i = 1, 2$), valamint $u = c \sqrt{1 - \frac{1}{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}}$ relatív sebesség jóval kisebb a fénysebességnél, az

$$m_1 c^2 + \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + m_2 c^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = m c^2 + \frac{1}{2} m u^2 \quad (2.71)$$

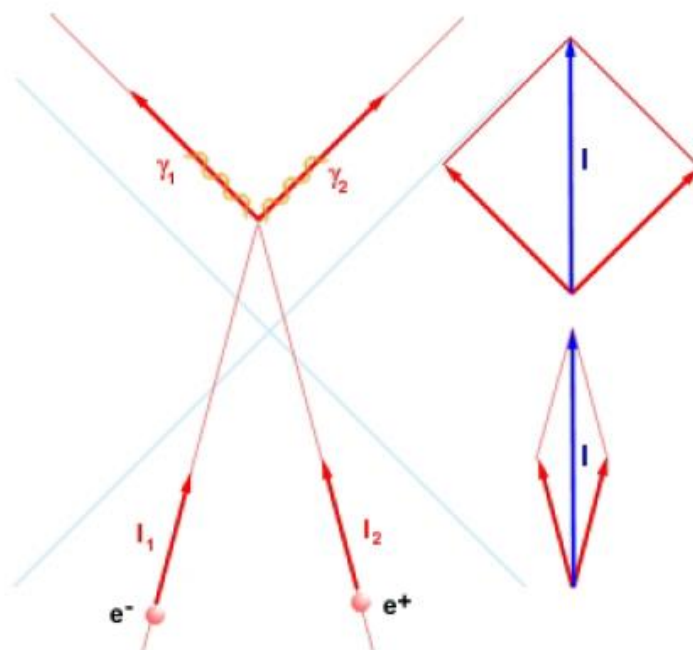
egyenlőséggel közelíthető. Az egyenletet átrendezve látható, hogy a klasszikus fizika számára érthetetlen $\Delta m = m - (m_1 + m_2)$ tömegváltozás éppen az $E_{Dissz} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - \frac{1}{2} m u^2$ disszipálódott klasszikus kinetikus energiával ekvivalens tömeg, azaz $\Delta m c^2 = E_{Dissz}$.

Felhívjuk a figyelmet azonban arra, hogy a c^2 szorzó miatt még viszonylag nagy értékű E_{Dissz} energiadisszipáció esetén is szinte mérhetetlenül kicsiny Δm tömegváltozás jön létre; ez az oka annak, hogy a tömegmegmaradást a klasszikus fizikában egzakt törvényként fogadták el.

További illusztrációként most vizsgáljunk meg egy másik, kimondottan részecskefizikai folyamatot, mely során elektron és antirészecskéje, a (vele ellentétes töltésű, de azonos tömegű) pozitron találkozásakor a részecskepár megsemmisül (*annihilálódik*), és két nagy energiájú gamma foton keletkezik, a 2.26. ábrán látható módon. Minthogy az elektron, illetve pozitron nyugalmi tömege pozitív, de a fotonok nyugalmi tömege zérus, a klasszikus (nyugalmi) tömegekre vonatkozó megmaradási törvényt sérti a folyamat. Csak úgy értelmezhetjük helyesen a jelenséget, ha elfogadjuk a tömeg és energia ekvivalenciáját, és a relativisztikus energiamegmaradás törvényét írjuk föl a folyamatra:

$$2 \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}} = 2hf \quad (2.72)$$

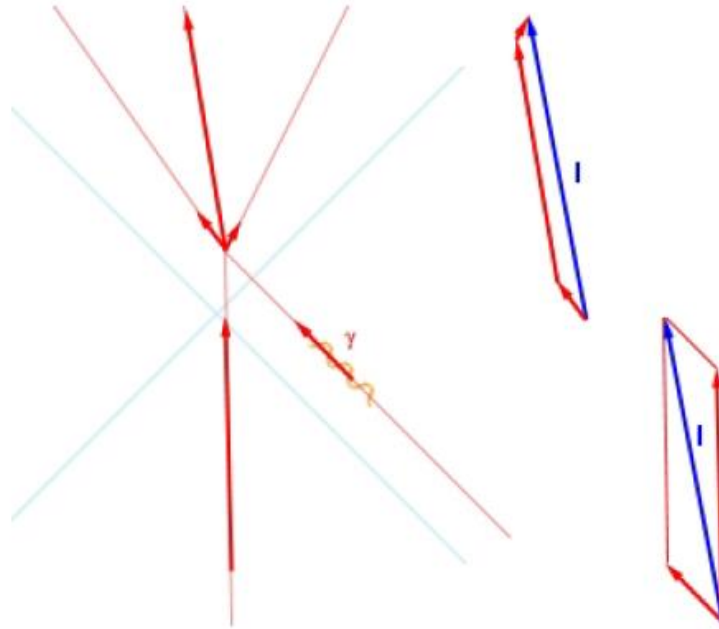
ahol m_0 az elektron (illetve pozitron) nyugalmi tömege, f a keletkezett foton frekvenciája, v_r pedig az elektron (illetve pozitron) relatív sebessége a tömegközépponti vonatkoztatási rendszerben. (Csupán az egyszerűség kedvéért választottuk a folyamat leírására azt a vonatkoztatási rendszert, melyben a megsemmisülő, illetve keletkező részecskék azonos nagyságú, ellentétes irányú sebességgel mozognak.)



2.26. ábra: Elektron-pozitron annihiláció

Elvileg a fenti annihilációs folyamat fordítottja is létrejöhet, mely során két nagy energiájú γ -foton megsemmisül, és pozitron-elektron (részecskeantirészecske) pár keletkezik, azonban sokkal gyakoribb a 2.27. ábrán látható ún. *párkeltés*, ahol az egyik foton szerepét egy jóval nagyobb tömegű nyugvó atommag veszi át. A foton és az atommag közti

eltolódott tömegarány miatt az atommag jelenléte az energiamérleget alig befolyásolja, azaz a $hf = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_f^2}{c^2}}}$ egyenlőség nagyon jó közelítéssel teljesül, azonban a nagy tömegű atommagnak az ütközés utáni kismértékű visszalökődése feltétlenül szükséges az impulzusmérleg kielégítéséhez.



2.27. ábra: Párkeltés

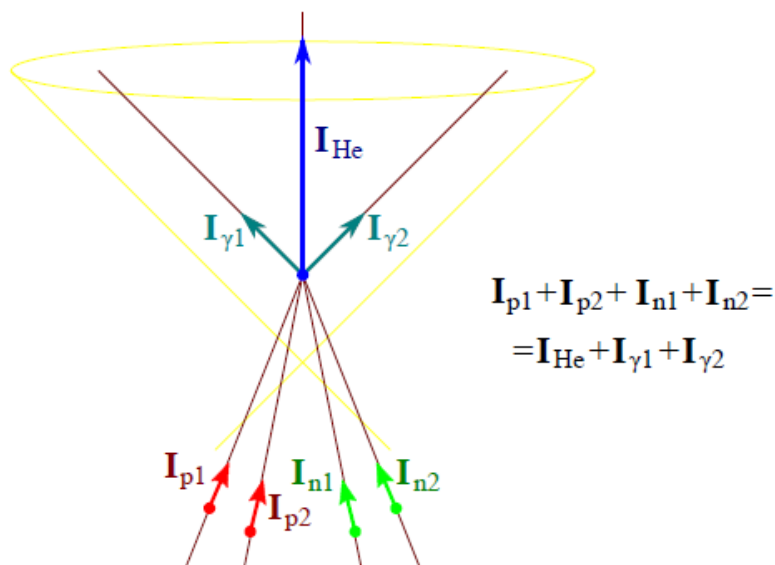
A tömeg-energia ekvivalenciával magyarázható még az úgynevezett *tömegdefektus* (tömeghiány) jelensége is, mely egyben máig is legfontosabb kísérleti igazolása az említett ekvivalenciának. A neutron felfedezése, valamint a protonokból és neutronokból álló atommagmodell kidolgozása után a fizikusok pontos mérések során észrevették, hogy a Z rendszámú (protonszámú) és $N = A - Z$ neutronot tartalmazó atommag $A \frac{A}{Z} M$ tömege mindig kisebb, mint az azt felépítő protonok és neutronok tömegének $Zm_p + (A - Z)m_n$ összege, ahol m_p , illetve m_n a szabad proton, illetve neutron tömege. A

$$\Delta M = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{A}{Z}M \quad (2.73)$$

mennyiséget nevezzük *tömeghiánynak* vagy *tömegdefektusnak*.

A tömeg-energia ekvivalencia elvének felhasználásával kézenfekvő a jelenség magyarázata. Az atommagban kötött nukleonok energetikailag kedvezőbb helyzetben vannak, mint a szabad részecskék, ezért létezhetnek stabil atommagok. A ΔM tömeghiány éppen a szabad, illetve kötött állapot közti energiakülönbség, az $E_{köt}$ kötési energia tömeg-ekvivalense, azaz $\Delta M c^2 = E_{köt}$. Ha például két szabad protonból és két szabad neutronból a 2.25. ábrán látható módon stabil hélium atommagot hozunk létre, akkor a felszabaduló $E_{köt}$ kötési energia – például fotonpár formájában – szétsugárzódik. Azonban a tömeg-energia ekvivalencia elv értelmében a távozó $E_{köt}$ kötési energia egyben $\Delta M = \frac{E_{köt}}{c^2}$

tömeghiányt is okoz. Fordítva, ha a stabil ${}^4_2\text{He}$ atommagot szabad protonra és neutronra bontjuk, be kell táplálnunk a ΔM tömeghiánynak megfelelő $E_{köt}$ kötési energiát.



2.28. ábra: Tömegdefektus a ${}^4\text{He}$ atommag létrejöttékor

Megjegyezzük, hogy a c^2 szorzó igen nagy értékének köszönhetően szinte mérhetetlenül kicsiny tömegváltozások is hatalmas energia-felszabadulással járhatnak együtt; éppen ezért olyan ígéretes energiatermelés szempontjából a nukleáris energia hasznosítása.

R2.7.8. A Maxwell-egyenletek kovarianciája

Bár már a bevezetőben is hangsúlyoztuk, hogy a speciális relativitáselmélet életrehívásakor a legfontosabb szerepet játszó tényező a klasszikus fizikai téridő-kép és az elektromágnesség Maxwell-féle elmélete között feszülő alapvető ellentmondás volt, mindeddig még igen keveset szóltunk arról, hogy ez az ellentét hogyan oldható föl a speciális relativitáselmélet keretein belül. Meggyőződünk ugyan a fénysebesség abszolút jellegéről, és azt is láttuk, hogy az elektromágneses térhez rendelt részecske, a foton is természetes módon kezelhető a speciális relativitáselmélet keretein belül, de semmit sem szóltunk még arról, hogy a klasszikusan felírt Maxwell-egyenletekben szereplő mennyiségek, a töltés, az áram, az elektromos és mágneses tér hogyan kezelhető az új elméletben.

Sajnos – elsősorban technikai okokból, a szükséges matematikai apparátus bonyolultsága miatt – el kell tekintenünk a Maxwell-féle elektrodinamika kovariáns, a relativitáselmélet téridő-szerkezetével teljes mértékben összhangban levő tárgyalásának részletes ismertetésétől. Ehelyett ebben az alfejezetben „csak” azt tűzzük ki célul, hogy az elmélet alapfilozófiájára és szépségére rávilágítsunk.

Korábban, az energiaimpulzus-négyesvektor bevezetésekor (a 2.7.4. pontban) láttunk már példát arra, hogy hogyan kaphatunk két klasszikus, vonatkoztatási rendszertől függő mennyiségből, az energiából és az impulzusból egyetlen, abszolút jelentéssel bíró mennyiséget, az energiaimpulzus-négyesvektort. Hasonló gondolati lépésekre van

szükségünk a relativisztikus elektrodinamika kiépítésekor is. Egyrészt az I., illetve IV. Maxwell-egyenletben szereplő

„forrásokat”, az elektromos töltést és az elektromos áram-vektort kell egyetlen abszolút, négykomponensű mennyiségbe, a *négyesáram-vektorba* egyesíteni, másrészt pedig az elektromos és mágneses teret kell egyesíteni egyetlen megfigyelőtől független jelentéssel bíró hatkomponensű mennyiségbe, az *elektromágneses térerősség-tenzorba*.

Természetesen a klasszikus mennyiségekkel felírt Maxwell-egyenleteket is át kell írunk olyan alakra, hogy bennük az újonnan bevezetett abszolút mennyiségek, a négyesáram-vektor, illetve az elektromágneses térerősség-tenzor szerepeljen. Az egyenletek új formája szintetizáló és tömörítő jellegű, ahhoz hasonlóan, ahogy a négyesimpulzus megmaradásának törvénye is egyszerre foglalja magában a klasszikus energia és impulzusmegmaradás törvényét. Az új formalizmus segítségével a klasszikus elektrodinamikának a négy Maxwell-egyenletbe foglalt törvényeit két egyenletbe sűrítjük, mely közül az egyik csak az elektromágneses térerősség-tenzort tartalmazza, és a két forrásmentes (II. és III.) Maxwell-egyenletet egyesíti, míg a második egyenlet tartalmazza a négyesáram-vektort is, és a forrásos (I. és IV.) Maxwell-egyenletekkel egyenértékű. A fent leírtakat a 2.29. diagram szemlélteti.

Az egész elmélet belső szépségét mutatja az a tény, hogy a relativisztikus elektrodinamika egyenletei – hasonlóan az energiáimpulzus-négyesvektor megmaradását kifejező törvényhez – abszolút mennyiségekkel, megfigyelőtől függetlenül, ún. kovariáns formában felírt egyenletek, melyek, természetesen inerciális megfigyelő rögzítésével átírhatók a szokásos klasszikus alakra.

Klasszikus elektrodinamika (inerciális megfigyelőtől függő leírás)	Relativisztikus elektrodinamika (abszolút, megfigyelőtől független leírás)
$\left. \begin{array}{l} Q \text{ töltés} \\ I \text{ áram} \end{array} \right\}$	→ <i>Négyesáram-vektor</i>
$\left. \begin{array}{l} E \text{ Elektromos térerősség-vektor} \\ B \text{ Mágneses indukció-vektor} \end{array} \right\}$	→ <i>Elektromágneses térerősség-tenzor</i>
$\left. \begin{array}{l} \text{II. } \sum_{\text{zárt görbére}} E \Delta s = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \\ \text{III. } \sum_{\text{zárt felületre}} B \Delta A = 0 \end{array} \right\}$	→ Megkötés az elektromágneses térerősség-tenzor helyfüggésére
$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \sum_{\text{zárt felületre}} E \Delta A = \sum_{\text{körülfogott térfogatra}} Q \\ \text{IV. } \sum_{\text{zárt görbére}} B \Delta s = \mu_0 \left(\sum_{\text{határolt felületre}} I + \epsilon_0 \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} \right) \end{array} \right\}$	→ Kapcsolat az elektromágneses térerősség-tenzor és a négyesáram-vektor között

2.29. ábra: Kapcsolat a megfigyelőtől függő, és az abszolút mennyiségek között az elektrodinamikában

R3. ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLET

Albert Einstein 1915-ben, 10 évvel a speciális relativitáselmélet megszületése után megjelent munkája, az *általános relativitáselmélet* mindmáig a modern fizika egyik legszebb, legmerészebb teóriája, mely segítségével nemcsak a csillagok életútját vagy a feketelyukak tulajdonságait tanulmányozhatjuk, hanem az univerzum teljes egészére, születésére, fejlődésére, halálára vonatkozóan is tehetünk tudományos jóslatokat.

Sajnos az elmélet részletes tárgyalására, elsősorban a szükséges matematikai, differenciálgeometriai ismeretek miatt jelen keretek között nincs módunk. Ennek ellenére, a következő néhány alfejezetben szeretnénk matematikai formulák nélkül, sok példával és hasonlattal érzékelteni, hogy mik az általános relativitáselmélet kiindulópontjai, alapjai. A fejezet második részében kitérünk azokra a legfontosabb kísérleti eredményekre, melyek alátámasztják az elméletet.

R3.1. Görbült téridő

Ahogy ezt eddig, a Galilei-, illetve Minkowski-féle téridő bevezetésénél tettük, vizsgálatainkat most is azzal kezdjük, hogy bizonyos alapvető tapasztalati tényekből kiindulva felvázoljuk az általános relativitáselméletben használt téridő-modell szerkezetét. Sajnálatos módon a már említett matematikai bonyodalmak miatt azonban most precíz definíciók helyett csak érzékelteni tudjuk az új modell alaptulajdonságait.

R3.1.1. Az ekvivalencia-elv

Ebben a fejezetben arra világítunk rá, hogy a speciális relativitáselméletben már a legalapvetőbb szinten, a téridő lineáris szerkezetének (homogenitásának és izotrópiájának) elfogadásakor olyan túlzott idealizációt követtünk el, mely sok esetben nem megalapozott, és így bizonyos jelenségek – elsősorban a gravitációs hatással, kölcsönhatással kapcsolatos folyamatok – eleve kívül rekednek az elmélet hatáskörén. Vegyük ugyanis szigorúan sorra a homogenitás, izotrópia következményeit.

A téridő lineáris szerkezete kitünteti bizonyos alapvető „létezési formát”, a tehetetlenségi mozgást, melyhez egyenes világvonal tartozik, és kitünteti az inerciális vonatkoztatási rendszereket, melynek rácspontjai tehetetlenségi mozgást végeznek. A tehetetlenség törvénye szerint a mindenfajta kölcsönhatástól mentes körülmények között létező, abszolút magára hagyott test végez ilyen típusú mozgást. Rövid megfontolás után érezhetjük, hogy ugyanúgy, mint az abszolút súrlódásmentes felület vagy a tökéletesen rugalmas ütközés ideája, a „teljesen magára hagyott test” fogalma is olyan idealizáció, mely sohasem teljesül teljes mértékben, melynek alkalmazhatóságát mindig a konkrét helyzet dönti el. A legfontosabb kizáró ok a gravitációs kölcsönhatás, melynek forrása maga az anyag, és mely, mint tudjuk, tetszőleges távolságra és minden anyagra kifejti hatását. Így szigorú

értelemben a speciális relativitáselmélet, a maga lineáris téridő-modelljével az „anyagmentes univerzum” tanulmányozására alkalmas, ami nonszensz.

Ezzel szemben a speciális relativitáselméletet igazoló kísérletek és józan ítélőképességünk is azt mondatja velünk, hogy igenis nagyon jó közelítéssel megvalósítható az ideális „kölsönhatásmentes állapot”, még olyan nagy gravitáló testek közelében is, mint a Föld vagy a Nap, legalábbis kis távolságokon és rövid ideig. Gondoljunk egy űrhajóra, mely kikapcsolt hajtóművekkel szabadon zuhan a világűrben a Föld felé. A benne levő űrhajós a tökéletes súlytalanság állapotát észleli, melyben a magukra hagyott testek az űrhajóhoz képest valóban állnak vagy egyenletes mozgást végeznek. A zuhanó űrhajóban az űrhajós még a Föld vagy a Nap gravitációs erejét sem érzékeli, a teret (és az időt) tökéletesen homogénnek és izotrópnak találja.

Az űrhajósnak ezek a megfigyelései csak rövid időkre és kis távolságokra érvényesek. Valóban, egymástól nagyon messze elhelyezett testeken észre lehetne venni, hogy a testek nem egymással párhuzamosan haladnak, hanem – minthogy mindketten a Föld középpontja felé zuhannak – kicsit közelednek egymáshoz. Hasonlóan, hosszú ideig tanulmányozva két, kezdetben közeli test relatív mozgását, eltérést tapasztalnánk az egyirányú, egyenletes távolodástól, minthogy a két test ellipszis (vagy hiperbola) pályán mozog a Föld körül.

Ezen észrevételeink birtokában megfogalmazhatjuk az általános relativitáselmélet egyik alapaxiómáját, melyben a speciális relativitáselmélet eredményei sűrítve, átértékelve jelennek meg.

^{0ár.} (*Lokálisan Minkowski-szerkezet*) Az általános relativitáselméletben a téridő szerkezete lokálisan (kis idők, távolságok esetén) olyan, mint a speciális relativitáselméletben használt Minkowski-féle téridő.

Térjünk még egy pillanatra vissza az űrhajós példánkhoz! Vajon miért nem tudja észrevenni a súlytalanság állapotában levő, világűrben zuhanó űrhajós, hogy nem magára hagyott testként mozog egyenletesen, egyenes vonal mentén, hanem ellenkezőleg, igenis nagy erők hatnak rá (a Föld, a Nap gravitációs ereje), melyek hatására gyorsuló mozgást végez? Kis gondolkozás után rájöhethetünk a válaszra; azért nem vesz erről tudomást az űrhajós, mert környezetében minden egyes tárgy vele együtt gyorsulva mozog! Ez a tény viszont egy igen különleges tulajdonságát fedi föl a gravitációs kölcsönhatásnak; minden testre saját tehetetlen tömegével arányos gravitációs erő hat, és az arányossági tényező független a test anyagi minőségétől. Röviden, a testek tehetetlenségének mértéke, a *tehetetlen tömeg* és a gravitációs kölcsönhatás erősségét megszabó *súlyos tömeg* azonos.

Bár erről a tényről már Newton is beszámolt, a felismerés kísérleti vizsgálatára egészen a XIX. század végéig nem fordítottak kellő figyelmet. Az első nagy pontosságú mérést 1890-ben a magyar fizikus báró Eötvös Loránd végezte híres torziós ingájával, mely segítségével 1:200000-es pontossággal állapította meg a tehetetlen és súlyos tömeg arányosságát.

A súlyos és tehetetlen tömeg azonosságából következik az *ekvivalenciaelv*:

Semmiféle a téridőben lokális méréssel nem lehet eldönteni azt, hogy egy laboratórium (vonatkoztatási rendszer) gyorsuló mozgást végez-e, vagy pedig (alkalmas) gravitációs hatás alatt áll.

(Valóban, a gravitációs erő, mely a súlyos tömeggel arányos, és a gyorsuló rendszerben fellépő tehetetlenségi erő, mely a tehetetlen tömeggel arányos, megegyezik egymással.)

Ezek a felismerések vezették Einsteint arra a gondolatra, hogy a gravitációs kölcsönhatást teljesen másként kezelje, mint a többi, mechanikai, elektrodinamikai kölcsönhatást. Láttuk, hogy valamely gravitációs hatás alatt mozgó testek pályája – a súlyos és tehetetlen tömeg azonossága következtében – nem függ a testek anyagi tulajdonságaitól. Azt mondhatjuk, hogy gravitációs hatás mellett a tehetetlenségi mozgáshoz tartozó világvonalak – melyek gravitáció mentes esetben a lineáris struktúrával ellátott téridőn egyenesek voltak – most megváltoznak, és furcsább alakú görbékké válnak. (Természetesen ez egyben azt is jelenti, hogy az „inerciális megfigyelő” fogalma elveszti eddigi kitüntetett szerepét, ugyanis ez a fogalom gravitációs hatás mellett csak lokálisan értelmezhető.) Einstein zseniális ötlete az volt, hogy a gravitációs hatást, mely bármely tehetetlenségi mozgást végző anyagi test világvonalát azonos módon torzítja, a téridő nemlineáris geometriájával kódolja. Ezt fogadjuk el az általános relativitáselmélet második alapposztulátumaként.

1^{ár}. (*Görbült téridő*) Az általános relativitáselméletben a gravitációs hatást, mely a súlyos és tehetetlen tömeg azonossága miatt minden testre azonos módon fejt ki hatását, a téridő nemlineáris, *görbült* geometriájával vesszük figyelembe.

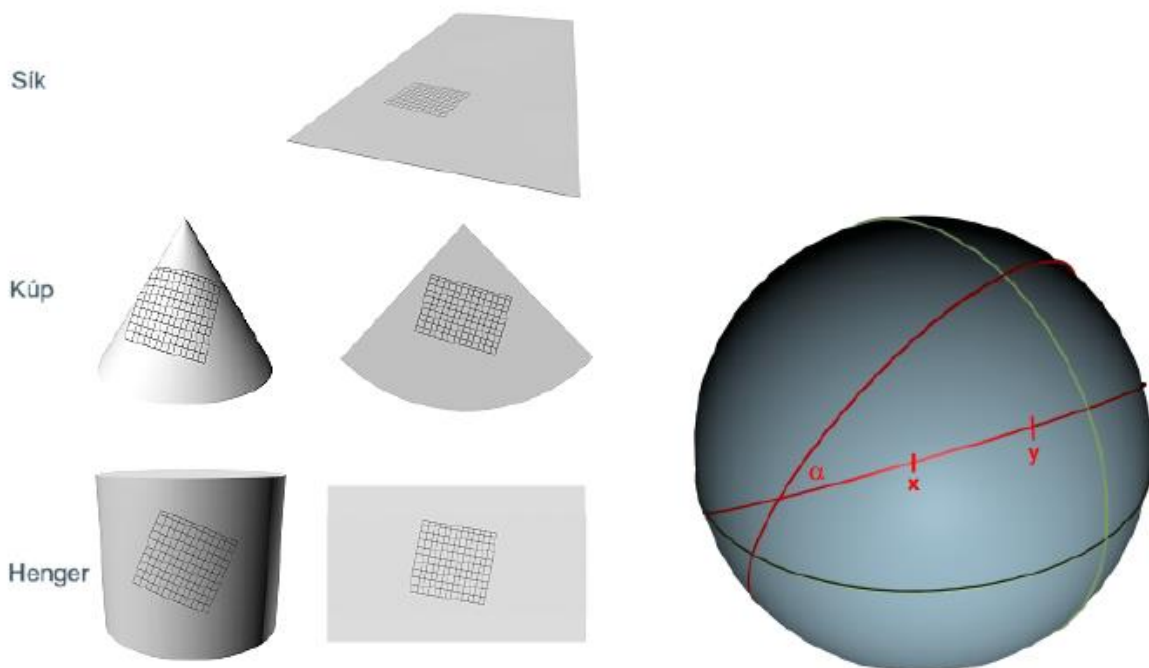
Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az ekvivalencia-elv értelmében az általános relativitáselméletet úgy is interpretálhatjuk, mint a speciális relativitáselmélet olyan kiterjesztését, mely nemcsak inerciális vonatkoztatási rendszerekben képes leírni a mechanika és elektrodinamika folyamatait, hanem jóval általánosabb, gyorsuló, avagy gravitációs hatás alatt álló rendszerekben is.

R3.1.2. Görbület, mint belső, geometriai tulajdonság

Vajon „görbültek”-e a 3.1. ábrán látható felületek, a gömbfelszín, a hengerpalást, a kúppalást vagy a sík? Hétköznapi szemléletünk alapján azt mondanánk, hogy a sík kivételével mindegyik felület görbült, hiszen „meghajlítva”, „deformáltan” helyezkednek el a háromdimenziós térben. Mi a görbültségre egy ennél árnyaltabb és pontosabb definíciót adunk, mely csupán a felület belső geometriájára hivatkozik, és nem veszi figyelembe azt, hogy a vizsgált felület hogyan helyezkedik el a háromdimenziós térben. A belső geometriai értelmezés szerint a (görbült) felületen a szögeket és távolságokat a 3.1. ábrán látható módon a felület mentén mérjük. Azt mondjuk, hogy egy felület a p pontjának egy U környezetében *nem görbült* (*sík, lapos*), ha U távolságtartó (és így szögtartó) módon egy-egyértelmű kapcsolatba hozható az euklideszi sík egy alkalmas tartományával, azaz bármely $x, y \in U$ pontpárnak a felület mentén mért távolsága megegyezik a képpontok euklideszi távolságával. Ellenkező esetben a felület *görbült*.

Látható, hogy az új, csupán a belső geometriát szem előtt tartó definíció szerint a hengerpalást, illetve (a csúcsponttól különböző helyeken) a kúppalást sem görbült, hiszen mindkettő előállítható egy papírlap megfelelő meghajlításával, ami nem változtatja meg a pontok felület mentén mért távolságát. Ezzel szemben a gömb az új definíció szerint (is) görbült, hiszen azt sehogy sem állíthatjuk elő papírlapból hajlítgatással.

Még szemléletesebb képet kapunk a gömbfelszín görbültségéről, ha megvizsgáljuk, hogy mi történik egy kis vektorral, ha a 3.2. ábrán látható módon egy (derékszögű) gömbháromszög oldalai mentén „önmagával párhuzamosan körbetoljuk”. Legnagyobb meglepetésünkre azt tapasztaljuk, hogy a kis vektor $+90^\circ$ -kal elfordul, ami sík felületen lehetetlen volna. (A görbült terek geometriájában a vektorok „görbe menti önmagával párhuzamos eltolása” veszi át a hagyományos eltolás szerepét. Szemben a hagyományos eltolással, most a görbe menti eltolás eredménye függ az úttól, amely mentén az eltolást végezzük.) Megemlítjük, hogy a görbült tereknek éppen ez a furcsa tulajdonsága ad lehetőséget a görbület mennyiségi jellemzésére; minél nagyobb egy zárt görbe mentén „körbetolt” vektor elfordulásának szöge, annál nagyobb a vizsgált geometriai tér (felület) görbülete.

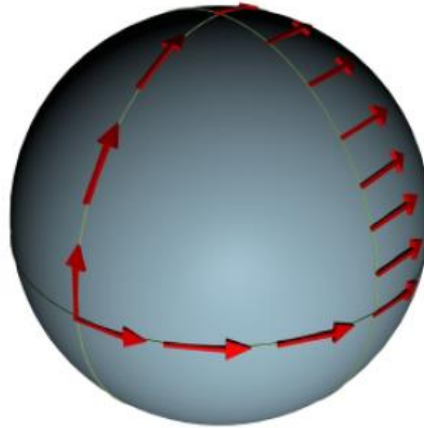


3.1. ábra: A „belső görbület” szemléltetése. a) A sík, a kúp vagy a hengerpalást nem görbült felület. b) A gömbfelszín görbült felület

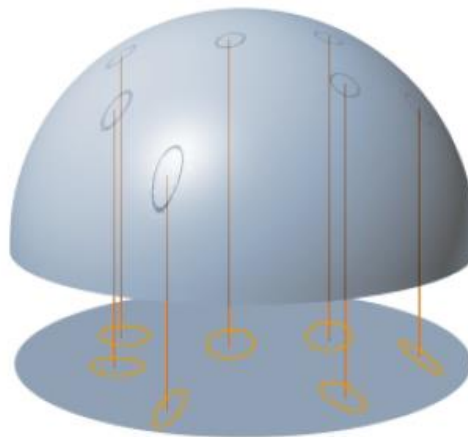
Láttuk, hogy a görbült felületek nem hozhatók távolságtartó módon egyegyértelmű kapcsolatba a kétdimenziós sík egy tartományával. Azonban a távolságtartás elhagyásával lehetőség nyílik a görbült felületek kétdimenziós síkon való szemléltetésére.

Példaként tekintsük a 3.3. ábrán látható „vízszintes” helyzetű félgömböt, melynek a felszínére berajzoltunk néhány (belső geometria szerinti) egységkört. A félgömb pontjait „függőleges” irányú vetítéssel egy-egyértelmű kapcsolatba hozhatjuk a sík egy körlapjának pontjaival, azonban ez a leképezés nem távolságtartó. A belső geometria által

meghatározott távolságot úgy tudjuk a körlapon szemléltetni, hogy a félgömb felszínére rajzolt egységeköröket is vetítjük, a 3.3. ábrán látható módon. Ekkor a görbült metrika torzítását az mutatja, hogy a körlap peremének közelében az egységekörök képei ellipszisekké deformálódnak.

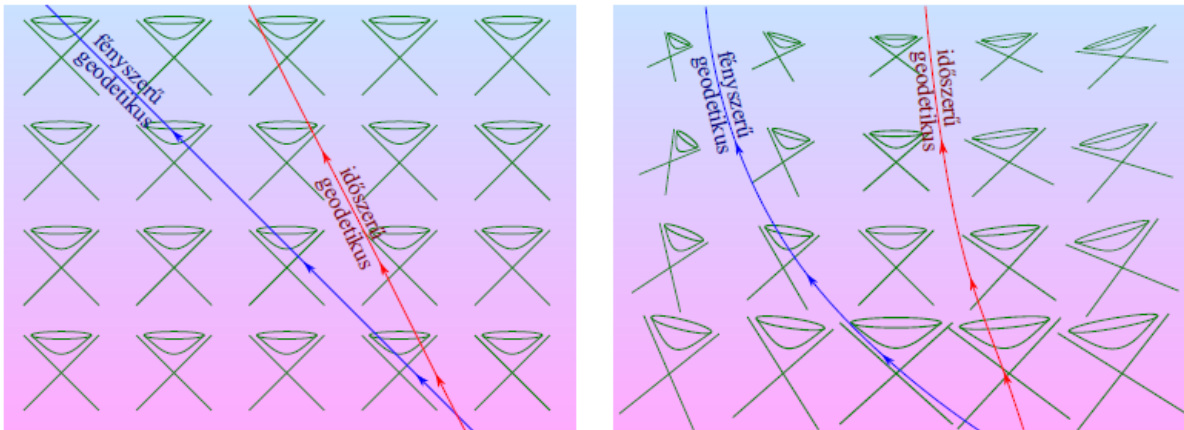


3.2. ábra. Párhuzamos eltolás görbült felületen



3.3. ábra: A félgömb nem távolságtartó vetítése a síkra

Ezt a fajta ábrázolásmódot célszerű alkalmazni a nemlineáris, görbült téridő szemléltetésénél is, most azonban (a Minkowski-metrika $(+, +, +, -, -)$ szignatúrája miatt) az egységekörök helyett kis egység-hiperboloidokat és aszimptótájukat, a fénykúpokat kell a téridő pontjaiba rajzolni. A 3.4. ábrán összehasonlíthatjuk a gravitáló anyag nélküli, lapos Minkowski-világot (ahol a kis fénykúpok és hiperbolák egymás eltoltjai) és a gravitáció hatására görbült téridőt, amelyben a fénykúpok, illetve hiperbolák állása és mérete pontról pontra lassan változik.



3.4. ábra: a) Lapos, illetve b) görbült Minkowski-világ

A jobb szemléltetés és összehasonlítás kedvéért a 3.4. ábrákra még felvettünk egy-egy időszerű, illetve fényszerű tehetetlenségi világvonalat is. Görbült téridő esetén ezeket a vonalakat *geodetikusoknak* hívjuk, és ugyanúgy, mint sík téridő esetén az egyeneseket, az a tulajdonság jellemzi őket, hogy két pont között térszerű esetben a legrövidebb, időszerű esetben a leghosszabb utat képviselik.

Érdekességként megemlítjük, hogy hasonlóan ahhoz, ahogy a görbült felületek (például a gömb) globális topológiája (formája) különbözhet a végtelen kiterjedésű síkétől, az általános relativitáselméletben használt görbült téridő sem biztos, hogy globálisan a minden irányban végtelen kiterjedésű négydimenziós térhez hasonlít.

R3.1.3. Az Einstein-egyenlet kvalitatív jelentése

Az előző alfejezetekben bevezettük és szemléletesen jellemeztük a görbült téridőt, azt a geometriai objektumot, mely az általános relativitáselméletben a különböző jelenségek színteréül szolgál. Azonban mindeddig nem adtunk konkrét „receptet” arra, hogy egy adott fizikai folyamat leírásához hogyan „találjuk meg” az alkalmas (görbült) téridőt.

Minthogy a téridő görbülete a gravitációval kapcsolatos, melynek forrása a (súlyos) tömeggel rendelkező anyag (illetve energia!), természetesnek tűnik, hogy a téridőben létező „gravitáló anyag”, illetve a téridő geometriáját jellemző „görbület” között valamilyen kapcsolatnak kell fennállnia. Ez a kapcsolat a híres Einstein-egyenlet, mely az anyag, illetve elektromágneses sugárzás elhelyezkedését, mozgását megfigyelőtől független módon leíró ún. *energiaimpulzus-tenzor* és a téridő görbületét jellemző *görbületi tenzor* között teremt kapcsolatot.

Ahhoz, hogy egy konkrét fizikai szituációt (például egyetlen pontszerűnek képzelt csillaghoz tartozó téridőt) leírjunk, egyszerre kell megadnunk az egész téridőn a görbült metrikát és az anyag elhelyezkedését leíró energiaimpulzus-tenzort úgy, hogy ez utóbbi és a metrikából származtatható görbületi tenzor között fennálljon az Einstein-egyenlet, valamint az egész téridő rendelkezzen a megkívánt szimmetriákkal.

R3.2. Alapvető jelenségek, kísérleti igazolások

Talán nem túlzás azt állítani, hogy az általános relativitáselmélet egyike a modern fizika azon ágainak, mely jóslatainak közvetlen kísérleti igazolása a legnagyobb nehézségekbe ütközik. A fellépő problémák oka kettős: egyrészt az egyenletek bonyolultsága miatt az általános relativitáselméletnek konkrét, valószínű problémákra való alkalmazása igen sok számolást, numerikus munkát igényel, másrészt pedig a földi körülmények között megvalósítható kísérletek során az elmélet által megjósolt effektusok szinte kimérhetetlenül kicsinyek. Így a kutatók sokszor arra kényszerülnek, hogy laboratóriumi kísérletek helyett csillagászati megfigyelésekből nyert adatokat vessenek össze az elmélet jóslataival.

R3.2.1. A Merkúr perihélium-elfordulása

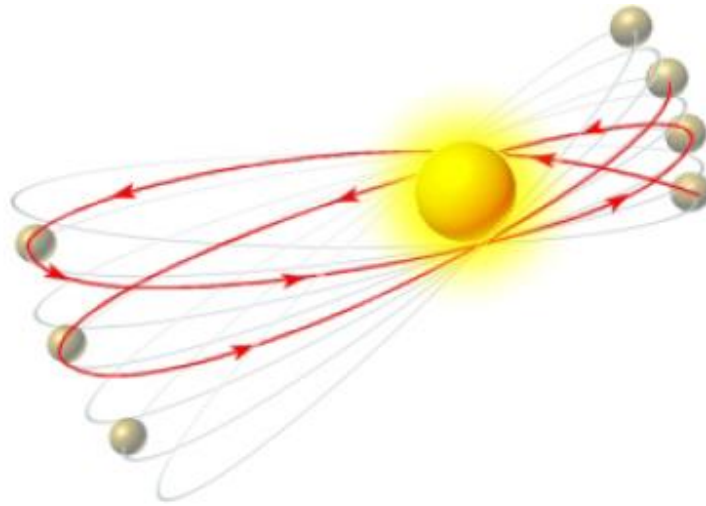
Köztudott, hogy a klasszikus fizika, a Newton-törvények szerint egyetlen tömegpont rögzített, pontszerű gravitációs centrum körül zárt ellipszis alakú pályán kering. Ennek ellenére a Naprendszerben végzett pontos mérések azt mutatják, hogy a Nap körül keringő bolygók pályája nem pontosan zárul, az ellipszis nagytengelye lassan elfordul, és a 3.5. ábrán látható rozetta-alakú pálya alakul ki.

A Merkúr pályájához tartozó napközelpont, perihélium elfordulása, mely évszázadonként alig néhány fok, pontosan 5600'' (fokmásodperc) értékű, már jóval a relativitáselmélet megszületése előtt ismert volt. A klasszikus fizika a jelenséget a Naprendszer többi bolygójának zavaró hatásával magyarázta, azonban pontos számítások szerint a perihélium-elfordulás így is évszázadonként csak 5557'' nagyságúnak adódott, azaz a klasszikus elmélet 43'' elfordulásról nem adott számot.

Az általános relativitáselmélet jóslata szerint pontszerű gravitációs centrum körül keringő tömegpont pályája nem pontosan ellipszis, hanem olyan rozetta-pálya, melynél az egy keringésre jutó perihélium-elfordulás (radiánban mérve)

$$\Delta\alpha = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^3 (1-\varepsilon^2)} \quad (3.1)$$

nagyságú. A fenti képletben c a fénysebesség, T a test keringési ideje, a az ellipszis nagytengelyének a fele, ε pedig a pálya excentricitása.



3.5. ábra: A Merkúr perihélium-elfordulása (napközelpont-elfordulása)

A Merkúr bolygó esetén ez az érték éppen évszázadonként 43 ívmásodperces elfordulást ad, ami pontosan egyezik a klasszikus fizika által meg nem magyarázott elfordulás értékkel.

Bár a Naprendszerben levő bolygók esetén az általános relativitáselmélet jóslatai csak igen kicsiny mértékben térnek el a klasszikus fizika eredményeitől, a Merkúr esetében mért, illetve számított korrekciók nagyfokú egyezése igen meggyőző módon támasztja alá az új elmélet érvényességét.

R3.2.2. Fényelhajlás erős gravitációs térben

Az általános relativitáselmélet alapfeltevései szerint a magára hagyott (azaz pusztán gravitációs hatás alatt álló) test tehetetlenségi világvonalára időszerű geodetikus görbe a görbült téridőn. Ha a téridő vizsgált tartományában jelentős gravitáló tömegek vannak jelen, akkor a téridő görbültsége olyan nagy lehet, hogy a geodetikus vonalak észrevehetően másképp viselkednek, mint a Minkowski-sík egyenesei. Sőt, az általános relativitáselmélet jóslata szerint e különbségnek nemcsak pozitív nyugalmi tömeggel rendelkező anyagi testek pályájánál kell megnyilvánulnia, hanem nulla nyugalmi tömegű fényrészecskék, fotonok esetén is.

Feltételezve a relativitáselmélet önkonzisztens voltát, több oldalról is megérthetjük, hogy a gravitációs hatásnak befolyást kell gyakorolnia a fénysugarak, fotonok pályájára is. A speciális relativitáselmélet állítása szerint a f frekvenciájú foton energiája $E = hf$, ami ekvivalens $m = \frac{hf}{c^2}$ tömeggel. Az általános relativitáselmélet szerint ez a tömeg is részt vesz a gravitációs kölcsönhatásban.

De indíthatjuk gondolatmenetünket a 3.1.1. alfejezetben tárgyalt ekvivalencia-elvből is. Eszerint a gravitációs hatás alatt haladó fénysugár útja pontosan olyan, mint amilyenek gyorsuló koordináta-rendszerből látnánk a gravitációtól mentes térben egyenes mentén terjedő fotonok útját. Minthogy a fény terjedési sebessége véges, ez utóbbi esetben a gyorsuló rendszerből nem egyenes, hanem görbe pályát észlelünk.

Összefoglalva, az általános relativitáselmélet jóslata szerint a fény útja gravitációs hatás következtében a gravitációs centrum felé „elgörbül” a gravitációtól mentes térben haladó fénysugárhoz képest. Az elmélet szerint például a Nap mellett a Nap-rádiusz Δ -szorosának távolságában elhaladó fénysugár esetén az eltérülés szöge

$$\Delta\alpha = \frac{1,7''}{\Delta} \quad (3.2)$$

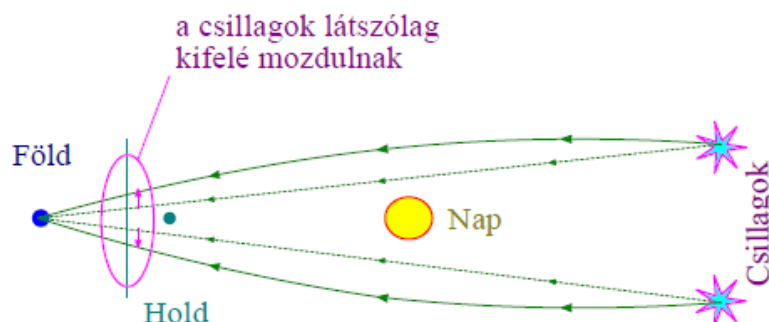
Megjegyezzük, hogy a fotont fénysebességgel haladó, véges tömeggel rendelkező pontszerű részecskének tekintve, a klasszikus fizika törvényei szerint éppen a fenti eltérülési szög fele adódna eredményül.

Ez az eredmény teljes napfogyatkozás idején csillagfotográfiák készítésével ellenőrizhető. Hasonlítsuk össze ugyanis a teljes napfogyatkozáskor a Nap mellett elhelyezkedő csillagokról készített felvételt az év más szakában az égbolt ugyanezen részéről normálisan, éjszaka felvett képpel. A távoli csillagokról érkező, a Nap közelében elhaladó fénysugarak „elhajlása” következtében az általános relativitáselmélet jóslata szerint a napfogyatkozáskor készített felvételeken a Nap közelében látszó csillagok képe sugár irányban kicsit kijjebb helyezkedik el, mint a normális, éjszakai felvételen, ahogy azt a 3.6. ábra érzékelteti.

Megjegyezzük, hogy a teljes napfogyatkozás a jelenség megfigyelésének elengedhetetlen feltétele, hiszen e nélkül a Nap fénye elnyomná a közelében elhelyezkedő csillagok fényét.

A jelenség első kísérleti megfigyelését az 1919. május 19-edikei napfogyatkozás alkalmával az Astronomical Royal Society csillagászai (Eddington, Crommelin, Dyson) végezték el Brazíliában és Nyugat-Afrikában.

A mérés elvégzése igen komoly technikai felkészültséget igényelt, mivel a csillagok képének látszólagos elmozdulása az általános relativitáselmélet jóslata szerint csak néhány századmilliméter nagyságú a fotópapíron. Ennek ellenére a mérési eredmények ezúttal is teljesen kielégítő módon igazolták az elméletet.



3.6. ábra: A csillagok látszólagos helyzetének elmozdulása teljes napfogyatkozáskor

R3.2.3. Gravitációs vöröseltolódás

Tekintsük a 3.7. ábrán látható elképzelt szerkezetet: A Föld nehézségi erőterében függőlegesen álló, könnyen mozgó csillesor mindegyik edényébe helyezzünk egy atomot

úgy, hogy a bal oldalon levő csillékben gerjesztett atomok, a jobb oldalon levő csillékben pedig alapállapotúak legyenek. Minthogy (a tömeg-energia ekvivalencia értelmében) a gerjesztett atomok nehezebbek, mint az alapállapotúak, a csillesor bal oldali szára lefelé, a jobb oldali pedig fölfelé mozdul el a nehézségi erő hatására. Tegyük föl még, hogy valahogy ügyesen, tükrökkel meg tudjuk oldani azt, hogy minden gerjesztett atom a legalsó helyzetében kerüljön vissza az alapállapotba, és a kibocsátott γ -foton pontosan az éppen legfölsül alapállapotban levő atomot gerjessze. Ekkor a gerjesztett, illetve alapállapotú atomok aszimmetrikus elhelyezkedése, és így a csillesort forgató súlykülönbség állandósulna, azaz „örökmozgót”, sőt, a „semmitől energiát termelő” szerkezetet kapnánk.

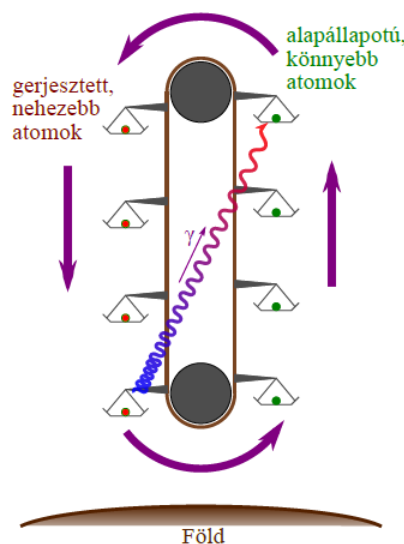
Nyilvánvaló, hogy az elgondolt szerkezet technikai kivitelezése lehetetlen, azonban első ránézésre az nem olyan világos, hogy a fizika mely elve zárja ki az elvi megvalósíthatóságot?

Vegyük észre, hogy a tömeg-energia ekvivalencia elv alapján a gerjesztett atom emissziójakor keletkező f_0 frekvenciájú foton $\frac{hf}{c^2}$ tömeget és hf energiát „szállít föl” az abszorbeáló atom számára. Klasszikusan gondolkodva az m tömegű tárgy l magasságba való fölemeléséhez a Föld felszínén $E_{pot} = mgl$ munkát kell végezni, ahol g a nehézségi gyorsulás. Vajon a foton esetén mi fedezi ezt a munkát?

Az általános relativitáselmélet tanítása szerint maga a foton fedezi ezt a munkát azáltal, hogy frekvenciája

$$f = f_0 \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) \quad (3.3)$$

értékre csökken, ahol Φ a magasságkülönbség miatt fellépő gravitációs potenciálkülönbség.



3.7. ábra: Elképzelt örökmozgó

Most már könnyen észrevehetjük az elvi megvalósíthatóságot kizáró okot; a fenti $f < f_0$ frekvenciájú foton már nem képes gerjeszteni ugyanazt az elektron-átmenetet, ami lent a f_0 frekvenciájú foton emisszióját eredményezte.

Összegezve, azt az általános következtetést vonhatjuk le, hogy erős gravitációs centrum közelében kibocsátott foton frekvenciáját távolabb (magasabb gravitációs potenciálú helyen) kisebbnek érzékeljük, mint a kibocsátás helyén. Ezt a jelenséget hívjuk *gravitációs vöröseltolódásnak*, minthogy a látható színek tartományban a spektrum vörös felé tolódása felel meg a frekvencia csökkenésének. A jelenség tömören, de pongyolán úgy is kifejezhető, hogy nagy tömegű gravitáló testek közelében az „órák lassabban járnak”, mint a testektől távolabb.

A legtöbb égitest esetén a színekvonalak gravitációs vöröseltolódása jóval kisebb effektus, mint akár az égitest távolodásából adódó Doppler-féle vöröseltolódás, akár a színekvonalak termikus vonalszélessége, sőt, a gravitációs eltolódás sokszor még a természetes vonalszélességgel is összemérhető, így a jelenség közvetlenül borzasztóan nehezen figyelhető meg.

A Nap esetén például a várt relatív frekvencia-eltolódás $\frac{\Delta f}{f} \approx 2 \cdot 10^{-6}$.

Az általános relativitáselmélet kísérleti igazolása szempontjából igen nagy fegyvertényt jelent az az *R. V. Pound* és *G. A. Rebeka* irányításával 1960-ban végzett kísérlet, mely során speciális (a Mössbauer-jelenségen alapuló) technikát használva földi laboratóriumban, néhányszor 10 méteres szintkülönbség mellett mérték ki γ -fotonoknak az általános relativitáselmélet által megjósolt gravitációs vöröseltolódását. Az érdekesség kedvéért megemlítjük, hogy a szóban forgó $\frac{\Delta f}{f}$ relatív frekvencia-eltolódás borzasztóan kicsiny, 10^{-15} nagyságrendű, így a mérés elvégezhetősége szinte csodának tekinthető.

[Vissza >>>](#)

IRODALOMJEGYZÉK

Összefoglaló fizika könyvek

Fizika (szerk. Holics László). Akadémiai Kiadó, Budapest, 2009.

A fizika alapjai (szerk. Erostyák János és Litz József). Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2003.

R. P. Feynman: R. B. Leighton, M. Sands: Mai Fizika 1-9. kötet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970.

Orear, Jay: Modern Fizika, Műszaki Kiadó, Budapest, 1971.

Art Hobson: Physics-Concepts & Connections (Fifth Edition). Addison-Wesley, Boston, 2010.

Tasnádi Péter, Bérces György, Skrapits Lajos: Mechanika I. Dialog Campus Kiadó, Budapest-Pécs, 2004.

Tasnádi Péter, Bérces György, Skrapits Lajos, Litz József: Mechanika II. – Hőtan. Dialog Campus Kiadó, Budapest-Pécs, 2004.

Joanne Baker: 50 Physics Ideas You Really Need to Know. Book Sales, Inc. 2009.

Alvin Hudson, Rex Nelson: Útban a modern fizikához, LSI Oktatóközpont, Budapest, 1994.

Budó Á.: Kísérleti Fizika I-II-III. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

Landau, L. D. és Lifsic E. M.: Elméleti Fizika I (Mechanika). Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

Nagy Károly.: Elméleti Fizika I-IV. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

Geszti Tamás: Kvantummechanika, Typotex, Budapest 2014.

Hraskó Péter: Relativitáselmélet, Typotex, Budapest 2016.

Marx György: Életrevaló atomok, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978.

Marx György: Atommagközelben, Mozaik, Szeged, 1996.

Kajtár Máton: Változatok négy elemre, Gondolat, Budapest, 1984.

Károlyházy Frigyes: Igaz varázslat, Gondolat, 1976.

Simonyi Károly: Villamosságtan, Akadémiai Kiadó, Budapest 1973.

Simonyi Károly: Elektronfizika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.

Kittel, C., Knight, W. D. and Ruderman, M. A. Mechanics: Berkeley Physics Course 1, McGraw-Hill, 1963.

Purcell, Edward M.: Electricity and magnetism: Berkeley Physics Course 2, McGraw-Hill, 1985.

Crawford, Frank, S., Jr.: Waves, Berkeley Physics Course 3, McGraw-Hill, 1968.
Wichman, Eyvind, H.: Quantum physics, Berkeley Physics Course 4, McGraw-Hill, 1971.
Reif, F: Statistical Physics, Berkeley Physics Course 5, McGraw-Hill, 1965.
Halliday, D. Resnick, R. and Walker: Fundamentals of Physics, J. Wiley, New York, 1993.
Tél Tamás és Gruiz Márton: Kaotikus Dinamika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.

Fizikatörténeti és ismeretterjesztő könyvek

Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete, Budapest, Akadémiai Kiadó, 2011.
Simonyi Károly, A magyarországi fizika kultúrtörténete XIX. század, A Természet Világa, 2000, Különszám: <http://www.termeszetsvilaga.hu/kulonsz/k011/tartalom.htm>
Eötvös Loránd emlékalbum (szerk. Dobszay Tamás, Estok János, Gyáni Gábor és Patkós András) Kossuth Kiadó, Budapest, 2019.
Kudrjavcev, P. Sz.: A fizika története, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
Gamow, G: A fizika története, Gondolat, Budapest 1965.
Bernal, J. D.: A fizika fejlődése Einsteinig, Gondolat Kiadó, Budapest, 1979.
Ladányi Andor. A középiskolai tanárképzés története, UMK, Budapest, 2008.
Dugas, R. A.: History of Mechanics, Routledge, London, 1955.
Marx György: A természet játéka (30 játék és modell a természettudományok tanításához), Szikra, Pécs, 1983.
Marx György: Gyorsuló idő, Typotex, Budapest, 2005.
Jánossy Lajos: A relativitáselmélet és fizikai valóság, Gondolat, Budapest, 1968.
Hawking, Stephen és Penrose, Roger: A tér és idő természete Talentum, Budapest, 1999.
Sas Elemér: Beszélgetések a fizikáról, Minerva, Budapest, 1975.
Tasnádi Péter, Juhász András, Horváth Gábor: Fizika körülöttünk. Múzsák Könyvkiadó, Budapest, 1994.
Juhász András, Tasnádi Péter: Érdekes anyagok, anyagi érdekességek. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1992.
Tasnádi Péter és Illy Judit: Víz a légkörben és a talajban, ELTE, Budapest, 2021.
Feynmann, Richard, P.: Hat könnyed előadás A fizika alapjainak magyarázata Park--Akkord, 1995.
Feynmann, Richard, P.: QED a megszilárdult fény, Scolar, Budapest, 2003.

Szaktudományi könyvek, kiadványok

Fényes Imre: A fizika eredete, az egzakt fogalmi gondolkodás kialakulása, Kossuth, Budapest, 1980.

Weidner, János dr.: A fizika tanítása-tanulása, Weidner Bt., Szeged, 2001.

Radnóti Katalin, Nahalka István, Poór István és Wágner Éva: A fizikatanítás pedagógiája. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002

A kritikai gondolkodás fejlesztése (szerk. Kovács Zoltán) Kolozsvári Egyetemi Kiadó, Kolozsvár, 2009.

Kutatások és jó gyakorlatok a tanárképzés tudós műhelyeiből, (szerk.: Károly Krisztina és Homonnay Zoltán) ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2016.

Tartalmi keretek a természettudomány diagnosztikai értékeléséhez (szerk. Csapó Benő és Szabó Gábor) Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2012.

Az iskolai tudás (szerk. Csapó Benő) Osiris Kiadó, Budapest, 1998.

<http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/iskolai-tudas-eloszo/adatok.html>)

Pléh Csaba: Bevezetés a megismeréstudományba, Typotex, Budapest, 1998.

W. Bleichroth, H. Dahnke, W. Jung, W. Kuhn, G. Merzyn, K. Weltner: Fachdidaktik Physik, Aulis Verlag, Köln, 1999.

E. Kircher, R. Girwidz, P. Haussler: Physikdidaktik, Springer, Berlin, 2006.

H. Wiesner, H. Schecker, M. Hopf: Physikdidaktik kompakt, Aulis Verlag, Köln, 2013.

R. Müller, R. Wodzinski, M. Hopf: Schülerforstellungen in Physik, Köln, Aulis Verlag, Köln, 2007.

Reif, Frederick: Applying cognitive science to education, Thinking and learning in scientific and other complex domains, MIT Cambridge, 2010.

Isabel Redgrave: Modern Teaching of Physics, Global Media, Delhi, 2009.

Arons, Arnold B.: Teaching Introductory Physics, John Wiley, New York, 1997.

Arons, Arnold B.: Development of concepts of Physics, Addison Wesley, London, 1965.

50 Years on Teaching Physics (Reprints of Journal Articles from the First Half Century of AAPT) ede: Philips M., AAPT Stony Books, New York, 1979.

Gibilisco, Stan: Physics Demystified, McGraw-Hill Education, New York, 2010.

Gibbs, Keith: The resourceful physics teacher, IoP, Bristol, 2000.

Novak, Gregor, M., Patterson, Evelyn, T., Gavrín, Andrew, D., and Christian, Wolfgang: Just in time teaching, Prentice -Hall, London, 1999.

Fejezetek a mechanikából - Pedagógiai Nyári Egyetem, Zsámbék 1981. (szerk: Kovács István, Skrapits Lajos, Tasnádi Péter), ELTE TTK, Budapest, 1981.

Második főtétel a középiskolában (nemzetközi cikkgyűjtemény fizikatanároknak) szerk. Radnóti Katalin, ATOM, Budapest, 1983.

A fizika tanítása tartalmasan és érdekesen, Magyarul Tanító Fizikatanárok Nemzetközi Konferenciája, 2009. – előadások (szerk: Juhász A., Tél T.) ELTE Fizika Doktori Iskola, Budapest, 2010.

Természettudomány tanítása korszerűen és vonzóan, Nemzetközi Szeminárium Magyarul Tanító Tanárok Számára, 2011, - előadások, (szerk: Tasnádi P.) ELTE TTK TTOMC, Budapest, 2011.

A fizika, matematika és művészet találkozása az oktatásban, kutatásban – Nemzetközi konferencia magyarul tanító tanárok számára, 2013. Marosvásárhely, előadáskivonatok (szerk: Juhász A. Tél T.) ELTE Fizika Doktori Iskola, Budapest, 2013.

Teaching Physics Innovatively (eds. A Király and T. Tél) Proc.Internat.Conf. Teach. Phys. Innovat., Budapest,17-19.Aug.2015., ELTE, Budapest, 2017.

Fizikai kísérletek gyűjteménye I-III. kötet (szerk. Juhász András). Typotex Arkhimédész Bt. Budapest, 1996.

Bérces György, Főzy István, Juhász András, Tasnádi Péter: Versenyfeladatok kísérleti fizikából 1973-1993., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1993.

Juhász András, Görbe László: A 2006 évi emelt szintű fizika érettségi kísérleti feladatai, Öveges könyvek 5. Öveges József Tanáregylet, Budapest, 2005

Juhász András: A 2010 évi emelt szintű fizika érettségi vizsga mérési feladatai, Öveges könyvek 8. Öveges József Tanáregylet, Budapest, 2010.

Great Experiments in Physics (Ed: Morris H. Shamos). Dover Publications, New York, 1987

M. Hopf, Problemorientierte Schülererfahrung. Logos, Berlin, 2007.

Csekő Á., Koczkás Gy., Huszka E., Léviusz E., Madas L., Simonfai I., és Vermes M: Fizikai Kísérletek Gyűjteménye I- II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1955.

Feladatgyűjtemények

Dér János, Radnai Gyula, Soós Károly: Fizikai feladatok I-II. kötet, Holnap Kiadó, Budapest, 2011.

Baranyi Károly: A fizikai gondolkodás iskolája I-III, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1992. (<http://mek.oszk.hu/12100/12187/>)

Gnädig Péter, Honyek Gyula, Vigh Máté: 333 furfangos feladat fizikából, Typotex Kiadó, Budapest, 2014.

Juhász András, Szegeczky Tibor: Kinematikai feladatok grafikus értelmezése és megoldása, Öveges könyvek 1., Öveges József Tanáregylet, Budapest, 2001.

Holics László: A fizika OKTV feladatai és megoldásai (1961–2003), Typotex Kiadó, Budapest, 2013.

Vermes Miklós: Az Eötvös-versenyek feladatai 1. (1959-1988). Typotex Kiadó, Budapest, 1998.

Károly Ireneusz Fizika Tanulmányi Verseny 1993-2003 (szerk. Juhász András) Öveges könyvek 3. Öveges Tanáregylet, Budapest, 2003.

Juhász András és Tasnádi Péter: Kísérletekhez, jelenségekhez kapcsolt fizikapéldák, gyakorlati feladatok, Elte, Budapest, 2021.

John Harte, Consider a Spherical Cow – A Course in Environmental Problem Solving, University Science Books, Sausalito, California, 1988.

Párkányi L.: Fizika példatár középiskolásoknak I-IV, Mechanika I-IV, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

Holics L: - Fizika példatár középiskolásoknak VI-VII, Elektrodinamika I. II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.

Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény I. II. (Gyakorló Feladatok) (szerk: Medgyes S. és Tasnádi P.) Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2013.

Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény I. II. (Megoldások) (szerk: Medgyes S. és Tasnádi P.) Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2013.

Jearl Walker: The Flying Circus of Physics, John Wiley, New York, 1977.